臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作品名稱：傑克船長的心機

得獎獎項：第三名

學校／作者：臺北市立中正國民中學　　王新博

作者簡介

我喜歡閱讀、打球、摺紙，最喜歡的則是數學。

回顧第一次接觸數學競賽後，開啟了我數學美麗殿堂的大門。也因此有機會參加各式各樣不同的競賽，不但增廣見聞，我也結識了許多同好。更從此深深著迷於變化多端的數學。除了上學的時間外，假期中，我參加了一些數學活動及俱樂部，如：九章數學愛好者聯誼、數學夏令營等，最有趣的還是加拿大 Alberta 大學辦的「加拿大青少年數學夏令營」。

傑克船長的心機

The Trick of Captain Jack

英文摘要(Abstract)：

The Trick of Captain Jack

The main theme of this project is the study of a game of strategy. Here is the setting.

Captain Jack and his pirates had looted an even number of treasure chests. Each treasure chest contained a number of gold coins. Captain Jack had a pirate count them and record the number on the chest where everyone could see.

Captain Jack proposed to share the gold coins with the crew according to the following plan. The crew chose the cleverest pirate to represent them. He would chain the treasure chests to one another in a row, arranging them in any order he chose. Captain Jack and he would alternate taking a treasure chest from either end, with Captain Jack choosing first, until all treasure chests had been taken.

It might appear that the crew had the advantage in being able to arrange the treasure chests in any order they chose, but Captain Jack could guarantee that his share of gold coins would be no less than that of the crew.

This is the basic scenario of our study. It will progress in three stages, according to how the treasure chests were chained together.

1.Along a path --- with two end points.

2.In the shape of a three-pronged star --- with three end points initially.

3.In a general tree diagram --- with many end points initially.

In each stage, we seek a method by which Captain Jack could guarantee to get at least as many gold coins as the crew.

The mathematical background consists of combinatorial analysis, graph theory, coloring methods and mathematical induction.

中文摘要：

傑克船長的心機

本研究的主題是一個數學策略遊戲：

傑克(Jack)船長與他的海盜們掠奪到了許多箱珍寶，每箱內有數量不等的金幣，海盜們清點後將每箱金幣的數量寫在箱子上。傑克船長為了彰顯他對弟兄們的愛護，他訂定了一個分配珍寶的方案。由海盜們推派一名最聰明者任意將寶箱排成一直線、三叉圖或一些樹狀圖，由船長開始兩人輪流拿珍寶，每次可任意拿走不和兩個或兩個以上的箱子相連的整個箱子(即樹狀圖上的端點)內的金幣。傑克船長表面上似乎很大方，事實上他是很奸巧的，無論這位聰明的海盜如何依規則排列寶箱，他總有巧妙的策略可以保證最後所取得的金幣不少於海盜們所取得的金幣。

假設珍寶有 $2n$ 箱，作者分別探究寶箱排列成一直線（兩個端點）、三叉圖（三個端點）、樹狀圖（多個端點）等情況，利用塗色法、數學歸納法、組合學、圖論等數學方法，為傑克船長找到可以保證最後所取得的金幣不少於金幣總數的一半之策略。

壹、前言

前年暑假我去加拿大亞伯達大學參加數學夏令營，教授在課餘時間和我們玩一種關於傑克船長與海盜分贓的遊戲，規則是這樣子的：有 $2n$ 個箱子內裝了數量不等的金幣，並在箱外寫明金幣的數目。將箱子任意排成一排，並規定由雙方輪流任意選取兩端的箱子。拿完後，累計雙方取得金幣的總數，如果先手不比後手少，就算先手獲勝，反之為敗。

遊戲的結果幾乎都是教授獲勝，這引起我的好奇心，想探究遊戲內隱含的秘密，為何教授總是贏家？一開始接觸到這個遊戲時，就覺得這個遊戲的「風格」跟其它數學遊戲不太一樣！因為一般的數學遊戲都是較偏向代數的，如捻遊戲：對方拿幾個、我方拿幾個。而這個遊戲卻是：對方拿哪個箱子、我方拿哪個箱子，較偏向幾何圖形。開始時放置箱子及對手回應的情況又有非常多種可能，研究起來也比較困難，非常具有挑戰性、也充滿趣味！

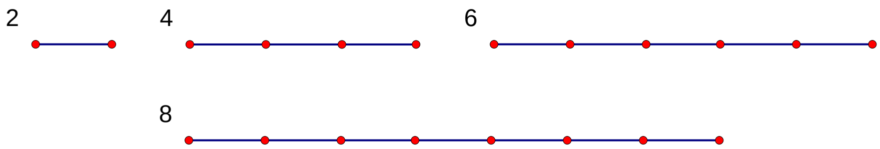
以此海盜分贓遊戲作為研究方向。針對排成一排的箱子（兩個端點）在只能拿兩端的情況下，如何使先手所拿的金幣不少於一半。進一步研究當箱子排列的圖形變為三叉圖（三個端點）甚至樹狀圖（多個端點）時，先手是否依然擁有優勢？先手該如何選取箱子？本文利用塗色法、數學歸納法、組合學、圖論等數學方法，加以研究分析，為先手找到可以保證最後所取得的金幣不少於金幣總數的一半之策略。

這個問題有部份情況是較容易解決的，包括沒有分叉點及叉點接端點的圖形。但也有許多情況是非常困難的，例如在本文「(E)其它的圖形」下的情況都有一定的難度，其中又以「B8~(1,2,4)」及「B8~(1,3,3)」等情況最為困難，我找到一些巧妙的辦法——「雙重黑白塗色法」解決了這些最困難的情況。

貳、研究過程與方法

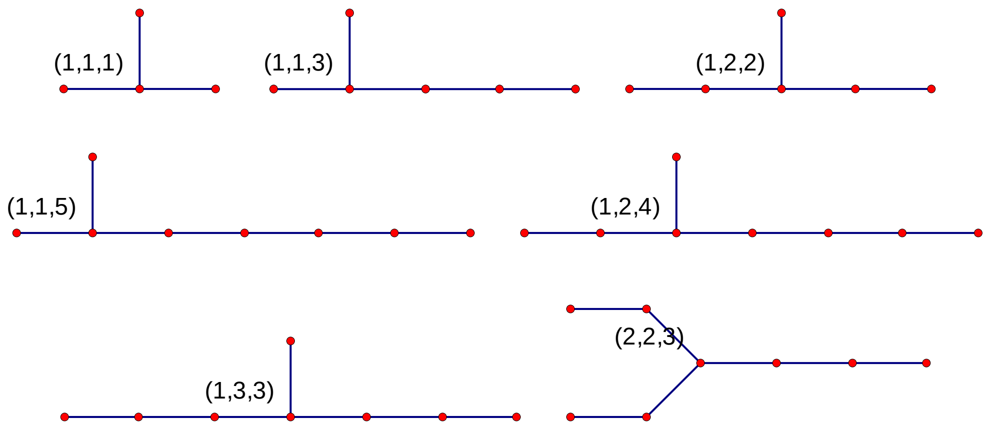
一、研究過程

首先針對排成一直線的箱子進行研究。在八個箱子以內，共有下列四種圖形：



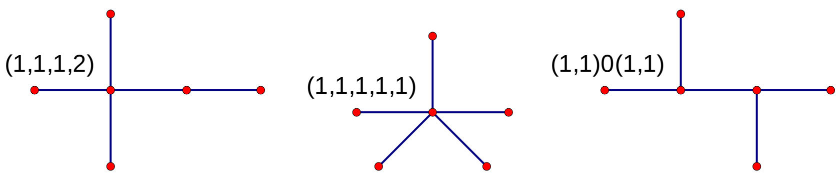
依次為：B2~2、B4~4、B6~6，
B8~8。

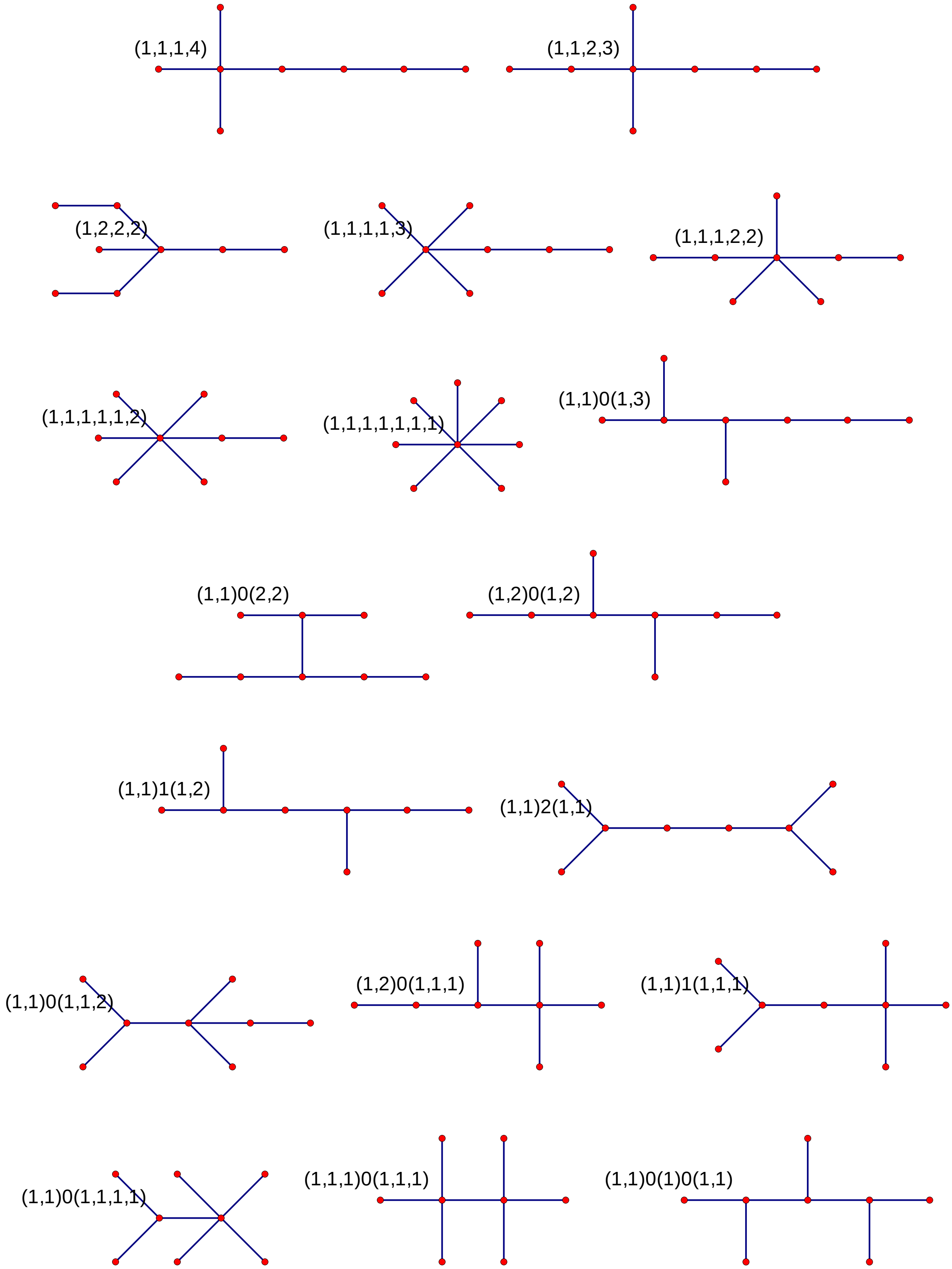
箱子排成一直線的圖形很容易找到了一般解，於是將研究範圍擴大到八個箱子以內的三叉圖，共有下列七種圖形（對稱情況視為相同）：



依次為：B4~(1,1,1)、B6~(1,1,3)、B6~(1,2,2)，
B8~(1,1,5)、B8~(1,2,4)，
B8~(1,3,3)、B8~(2,2,3)。

繼續將研究範圍擴大到八個箱子以內多叉點的樹狀圖，又增加下列廿一種圖形（對稱情況視為相同）：

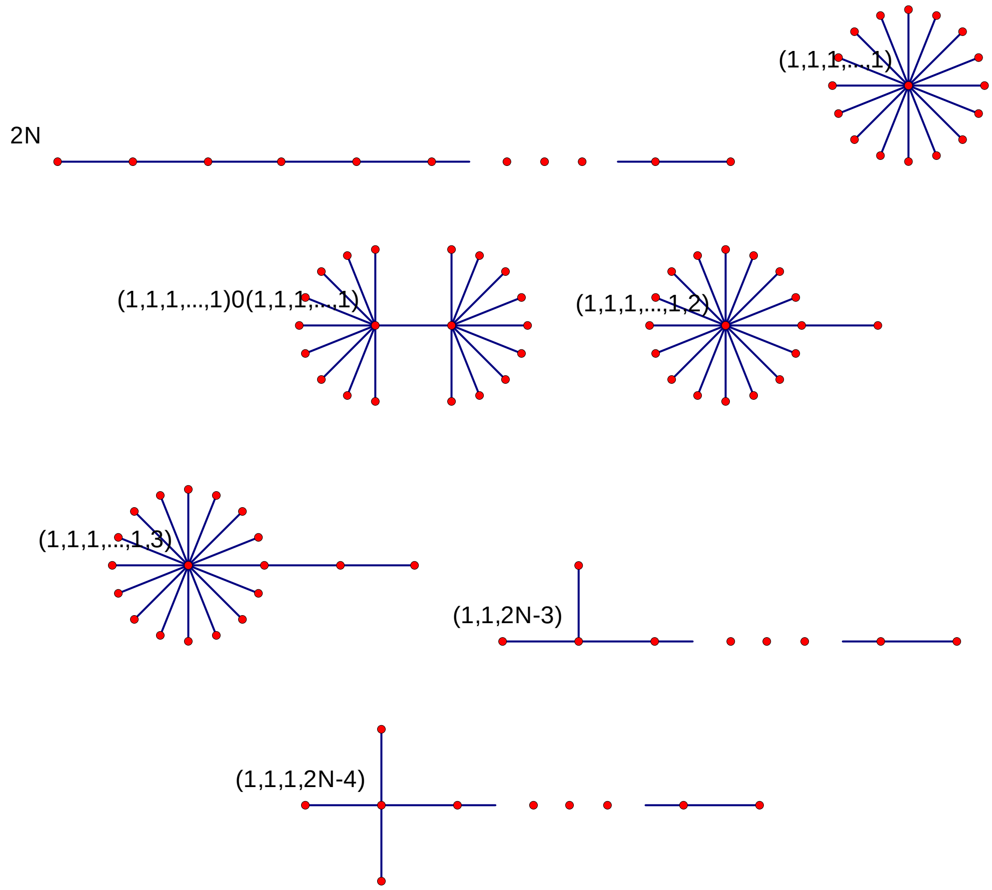




依次為：B6~(1,1,1,2)、B6~(1,1,1,1,1)、B6~(1,1)0(1,1)，
B8~(1,1,1,4)、B8~(1,1,2,3)，
B8~(1,2,2,2)、B8~(1,1,1,1,3)、B8~(1,1,1,2,2)，
B8~(1,1,1,1,1,2)、B8~(1,1,1,1,1,1,1)、B8~(1,1)0(1,3)，
B8~(1,1)0(2,2)、B8~(1,2)0(1,2)，
B8~(1,1)1(1,2)、B8~(1,1)2(1,1)，

B8~(1,1)0(1,1,2)、B8~(1,2)0(1,1,1)、B8~(1,1)1(1,1,1)，
B8~(1,1)0(1,1,1,1)、B8~(1,1,1)0(1,1,1)、B8~(1,1)0(1)0(1,1)。

最後，將部分有規則的圖形及解法做出推廣，總共找到七種（可能還有其他尚未找到的）能推廣的形式：



依次為：B2*n*~2*n* 、B*n*~(1,1,1,…,1)，
B*n*~(1,1,1,…,1)0(1,1,1,…,1)、B*n*~(1,1,1,…,1,2)，
B*n*~(1,1,1,…,1,3)、B2*n*~(1,1,2*n*-3)，
B2*n*~(1,1,1,2*n*-4)。

二、研究方法

剛開始研究沒有叉點的圖形時，由於雙方選取情況繁多，在發現黑白塗色法之前，研究一直沒有進展。經使用黑白塗色法後，不僅一併解決了沒有叉點的圖形，甚至給了我在研究三叉圖時的許多靈感。將黑白塗色法稍作調整後，即可適用於三叉圖上。

在研究樹狀圖時，因為圖形與三叉圖差異甚大，並且與沒有叉點的圖形毫無相似之處，單以黑白塗色法已無法完整地解決各種樹狀圖形，便發

展出另一個方法：「化歸」。分別說明如下：

（一）**塗色法**：

將箱子進行黑白交錯塗色，以便分類及描述。依性質及延伸用法可分為交錯黑白塗色法、替換黑白塗色法、部份黑白塗色法、化歸黑白塗色法、多重黑白塗色法。各種使用方式將於文中再一一介紹。

（二）**化歸**：

降低圖形複雜度的方法。雙方歷經數輪後，先手暫時勝過後手，再以適用箱子數較少的策略在第二階段勝過後手，使先手整體保證會贏過後手。

三、代號命名的規則

由於本文圖形種類繁多複雜，為方便撰寫及閱讀，故將各種圖形以代號表示，說明如下：

「B」就是「Box」、箱子的意思，「B」後面的數字代表箱子的總數；「~」的後面則是該圖的代號，將圖形排列方式以數字、逗號、括號描述，根據以下的規則：

我們可以將一個圖形的箱子們分成三個部份：作為分叉點上的箱子、連接分叉點的箱子及各分支上的箱子。**分叉點**是指和不少於三個箱子連接的箱子，簡稱**叉點**；連接兩個分叉點之間的箱子又叫**叉點間的箱子**；其它所有的箱子頭尾相連組成各條**分支**，成為分支上的箱子，每條分支都連接著叉點。

每一個圖形都可能會有一些分叉點，每一個分叉點都可能會有一些分支，每一條分支上都會有一些箱子，於是我用一組括號「（）」代表一個分叉點，不同的括號則代表不同的分叉點。再將同一個分叉點上分支的箱子數寫在該分叉點的括號裡，屬於不同分叉點的分支箱子數寫在不同的括號內，並以逗號隔開同一個括號裡的數字。兩個分叉點之間的叉點間箱子數則寫在兩個分叉點對應的括號之間。所以，一個圖所有箱子的總數量就等於全部數值（叉點間箱子及分支箱子）的和再加上括號（叉點箱子）的組數。

沒有叉點的圖形有兩種看法：「只有一條分支的分叉點」或「沒有分叉點的叉點間箱子」。如果是前者，則代號須寫成「B2*n*~(2*n*-1)」；依照後者寫出的代號則為「B2*n*~2*n*」，我選擇後者作為編寫代號的標準。另外，同一個括號內，用逗點隔開的數字（或括號）是有交換律的，一般是小至大排列。如：「B6~(1,3,1)」及「B6~(3,1,1)」都表示為「B6~(1,1,3)」。

四、名詞與記號解釋

箱子編號　箱子分為：叉點箱子、叉點間箱子、分支箱子三種。使用「o_i」代表在叉點上的箱子及此箱子內所裝金幣之數量，並加上一個足碼如「$o_1, o_2, o_3, \ldots$」以區分不同叉點上的箱子，分支數較少的叉點優先編號。使用「$p_i, q_j, r_k, \ldots$」代表不同叉點之間的箱子及此箱子內所裝金幣之數量，並加上一個足碼如「$p_1, p_2, p_3, \ldots$」以區分相同兩個叉點間的箱子，足碼較小之叉點旁的叉點間箱子優先編號。使用「$a_i, b_j, c_k, \ldots$」代表各不同分支上的箱子及此箱子內所裝金幣之數量，並加上一個足碼如「$a_1, a_2, a_3, \ldots$」以區分同一分支上不同的箱子，箱子數較少之分支上的箱子優先編號。

外面與端點　這兩個詞雖然意思一樣，但使用的地方不太一樣。外面的定義是可拿取的範圍，討論牽涉能不能拿的問題時會用「外面」。「端點」則是單純指樹狀圖最末端的點（即 Degree 為 1 的結點），討論到圖形本身時才使用。

先手與後手　先手是指輪流拿取中先拿的玩家，後手則是後拿的玩家。

先:　a_1　a_3　a_5　…
後:　a_2　a_4　a_6　…

描述拿取順序的陣列。從先手開始拿取「a_1」的箱子，接著後手拿「a_2」，再由先手拿「a_3」，後手拿「a_4」，…；各箱的拿取者為該列左方簡寫，「先」為先手、「後」為後手。

先:　a_1 [c_1 ∨ c_2]
後:　　b_1　b_2　$a_2 \vee a_3$

描述先手如何應對的陣列。應對的內容寫在「[]」內，後手可能的拿法寫在後手列，先手應對的方法則寫在同行的先手列。各種應對間以「∨」（或）隔開。開始時先手拿「a_1」，若後手拿「b_1」則先手拿「c_1」、若後手拿「b_2」則先手拿「c_2」、…，以及後手最後可能拿取的箱子為「a_2」或「a_3」。

黑:　a_1　a_3　a_5　…
白:　a_2　a_4　a_6　…

描述如何黑白塗色的陣列。塗成黑色的箱子寫在黑色列，依次為「$a_1, a_3, a_5, \ldots$」；塗成白色的箱子則寫在白色列，依次為「$a_2, a_4, a_6, \ldots$」。在多重黑白塗色法中，為了方便撰寫及閱讀，第二種塗法（副塗法）以紅綠塗色。

先:　黑
後:　白

以黑、白描述拿法。若黑色位於先手列，則先手每輪都必須拿黑色的箱子，若後手列為白色，則後手每輪都被迫拿白色的箱子。

參、研究結果與討論

一、B8~8

有一次，海盜們搶到八個箱子，其金幣數量分別爲「31, 41, 59, 26, 53, 58, 97, 93」，海盜代表決定將八個箱子排成一列。接著，海盜代表開始思考應如何安排箱子的順序才能使自己最有利。

海盜代表心裡想：這裡有兩個箱子內的金幣比較多（「97, 93」），另外四個箱子內的金幣差不多（「59, 58, 53, 47」），最後兩個箱子內的金幣比較少（「31, 26」）。我的目的是要讓我方拿得越多越好，所以當然要儘量把金幣比較少的箱子給傑克船長拿。如果把金幣多的箱子放兩端，船長一定馬上把它拿走；如果是一多一少，船長也會選多的拿走；如果放兩個金幣少的箱子的話，船長就拿不到多的了。所以，他決定把兩個最少放在兩端：

26	?	?	?	?	?	?	31

當傑克船長看到海盜代表把兩個金幣最少的箱子放在兩端時，心裡也開始思考對策：我是先手、他們是後手，後手會拿到最後一個箱子，那我就把那個最少的26留給他，我拿金幣較多的箱子31。

海盜代表覺得船長應該會拿比較多的31，所以他在31的左邊擺了最多的97，爲了避免船長故意不拿31，他也在26的旁邊放了93作爲保險：

26	93	?	?	?	?	97	31

傑克看到他這樣擺就開始頭痛了，不僅在一開始就被迫要拿金幣比較少的箱子，拿完還會被對方拿走金幣較多的箱子。他分析一下雙方可能的拿法，看看有沒有解決的辦法。如果從原本八個箱子開始選，傑克發現每一手都能從左邊或右邊選一邊拿箱子，除了最後一手以外，雙方共有七手都有兩種選擇，所以總計有 $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^7=128$ 種。他開始在地上畫圖…。太複雜了，傑克的腦袋快爆掉了！

海盜們很好奇地想知道船長在做甚麼，不過身爲擺箱子的海盜代表也沒有比船長輕鬆，他吃力的思考著：假設船長會拿31、我拿97，然後應該再把另一個少的給傑克拿。他又在97的左邊擺了第三少的41，基於相同的原因，他也在另一側的相對位置擺了53：

26	93	53	?	?	41	97	31

最後，他把剩下的兩個箱子隨意擺進去：

26	93	53	59	58	41	97	31

這下子傑克不得不正視這個問題了，他有點後悔自己提出如此令人傷腦筋的規則，不過他還是故作一副老神在在的樣子。現在箱子全部都已經擺好了，計算起來也比較方便。傑克開始胡亂假設：我拿31、他拿97、我拿41、他拿58、我拿59、他繼續拿53、我拿93、最後是我留給他的26…。他把自己可能拿到的箱子在心中做上記號：

26 93 53 59 58 41 97 31

這一點，可以再研究看看。傑克發現無論是他按照常理推論，或是妄想對方錯拿成26，自己拿的似乎都和對方拿的交錯排列。他心中浮現黑白塗色法的雛形，既然怎麼塗都是交錯排列，那乾脆一開始就塗顏色吧：

26 93 53 59 58 41 97 31

海盜代表看船長思考那麼久了，就開始催促船長，其他船員也開始起訌。「快點啦！」「在發甚麼呆啊？」「現在認輸我們還可以五五分賬喔！」各種威脅利誘都有。傑克抬起頭來，瞪了他們一眼，說：「不要吵！我可是你們的船長呢！」大家都嚇了一跳。接著傑克拿了26，令大家驚訝不已，七嘴八舌地議論著，有人認爲是船長故意放水。船長又說：「我當然要愛護我的部下啊！」大家都笑了起來：

93 53 59 58 41 97 31

海盜代表毫不猶豫的拿了93，傑克笑著把53拿走。船員又開始起訌「59 啦！」「不要連你也在發呆！」「拿起來就對了！」海盜代表面露不安地拿59，傑克繼續露出奸笑，再往右邊拿了58。這個時候船員們漸漸的安靜下來，因爲剩下的箱子是：

41 97 31

海盜代表知道發生甚麼事了，他不管拿41或31，都會把97拱手讓給船長。傑克船長最終以 234:224 的比數大勝海盜代表整整 10 枚金幣。海盜代表及船員們輸的心服口服，一起歡呼著：「聰明的船長萬歲！」

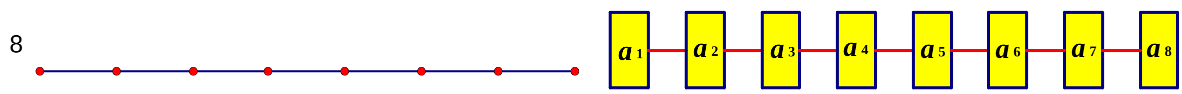
遊戲歷程：	傑克船長：	26	53	58	97	金幣總和：	234
	海盜代表：	93	59	41	31	金幣總和：	224

傑克船長怎麼辦到的？

以上只是有關本問題最容易的一個例子之一。

其他情況的箱子及擺置方法將以點線圖及格子圖（或只有點線圖）呈現。

二、B8~8（續）

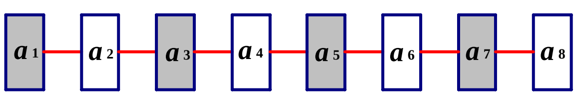


比照傑克船長的方法，用黑白交錯塗色法爲先手找到致勝之策略。

(一) 箱子內的金幣數量依序為 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$。

(二) 黑： a_1 a_3 a_5 a_7

白： a_2 a_4 a_6 a_8



1. 若黑≧白→ 先：黑
後：白 。

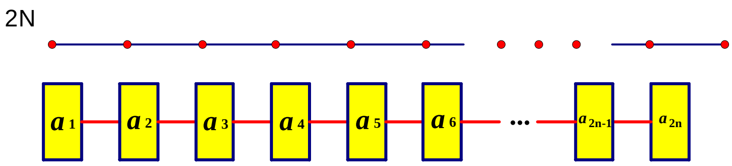
2. 若白＞黑→ 先：白
後：黑 。

使用黑白塗色法的先手能拿到所有他指定的顏色的箱子，是因為黑色及白色是交錯塗色的，而且箱子的數量是偶數。開始時（先手先拿），外面是一黑一白（因為箱子的數量是偶數），先手可以選擇一個顏色並拿走塗有該色的箱子。不管先手拿走哪種顏色的箱子，外面剩下的箱子就都會是另一種顏色（因為黑白是交錯塗的）。所以接下來輪到後手時，就被迫拿先手不要的顏色，拿完後外面又變回一黑一白（因為黑白是交錯塗的）。再一次換先手拿時，情況又變成與一開始一樣，拿走塗有選定顏色的箱子。便如此不斷地循環下去，直到拿完為止。

所以，有偶數個箱子且沒有叉點的圖形，經由上述的過程，先手都可以拿到所有他指定的顏色，當然，先手會選擇總金幣數量較多的顏色，故先手穩贏。

(三) 因此先手必勝。

三、B2*n*~2*n*

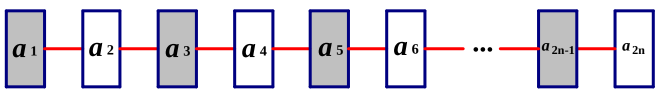


可將 B8~8 推廣至 2*n* 個箱子的情況。

(一) 箱子內的金幣數量依序為 $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2n}$。

共有「2*n*」個箱子，所以最後一個箱子編號為「a_{2n}」。

(二) 黑：a_1 a_3 a_5 … a_{2n-1}
白：a_2 a_4 a_6 … a_{2n}



1. 若黑≧白→ 先：黑
後：白 。

2. 若白＞黑→ 先：白
後：黑 。

(三) 因此先手必勝。

此類圖形正式的名稱為「沒有叉點的圖形」，另外，「兩個端點」及「排成一直線」都是指此類圖形。

海盜代表也發現到將箱子排成一直線，先取的船長只要運用黑白交錯塗色法永遠都是贏家，他們必須想一些較複雜的排箱子的方法，否則永遠沒有贏的機會，於是他們開始考慮各種有叉點的情況。

本問題等價於：有 $2n$ 個結點（相當於有 $2n$ 個箱子）的樹狀圖（相當於各種擺置箱子的方法），在每個結點上放置一個任意的正整數（相當於箱子內金幣的數量），兩人輪流任意由度數(Degree)為 1 的結點上取數（相當於可任意由不與兩個以上箱子相連的箱子取金幣），被取走之數的結點及與此結點相連的邊均移除，則先手有無必勝之策略使他所取之數的總和不少於後手所取之數的總和。

爲節省篇幅與簡化討論，以後之內文省略故事情節，純粹使用數學討論。

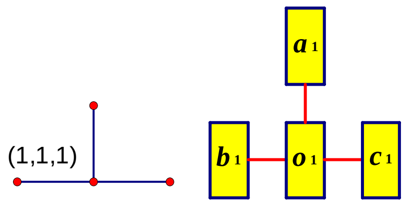
(A)每一條分支恰一個箱子的圖形

由於每條分支只有一個箱子的圖形在歷經一輪後，就能化歸爲箱子數量較少的情況，因此我們只須要討論第一輪的取法即可。

此類的圖形有許多不同的形式：箱子總數爲八個時，其叉點數在一個到三個不等。

當每條分支都只有一個箱子時，叉點與端點是連接在一起的，所以此類圖形又叫「叉點接端點」的圖形。

四、B4~(1,1,1)



(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 a_1, b_1, c_1。

此類圖形的每條分支上都只有一個箱子，與沒有叉點的情況完全不相同。當圖形沒有叉點時，雙方每取走一個箱子就會有一個原來在圖形內部的箱子露出來。但是在每條分支都只有一個箱子時，除非該叉點只剩一個箱子與之相連，否則無論怎麼拿都不會有內部的箱子露出來。結果，先手第一輪不管拿甚麼，後手都只能拿外面剩下的箱子。

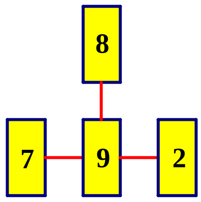
(二) 若 $a_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1\}\rightarrow \begin{array}{l}\text{先：}\quad a_1\\ \text{後：}\ b_1\vee c_1\end{array}\rightarrow$ 化歸 。

因爲對稱的情況不討論，所以我們乾脆直接把外面金幣數量最多的箱子編爲「a_1」，金幣數量次多的箱子編爲「b_1」，金幣數量最少的箱子編爲「c_1」。

在這個圖裡，後手只能拿先手不要的箱子，如果先手拿的是金幣數量最多的箱子，那先手拿的一定不少於後手，經過第一輪後先手暫時領先，這個時候箱子數減少二個，就可以化歸爲箱子數較少的情況。化歸的精神在於：將一個複雜圖形分成兩個較簡單的步驟（只是在作法上分成兩部分，並不是真的把圖形分開），而且兩個步驟先手都可以得勝。其中一個步驟是化歸後的部份，由於箱子數較少，自然有辦法贏（由於我是依照箱子數由少到多來探究，箱子數較少者會先有解決辦法）；另一個步驟則是化歸前的部份，只要有辦法在前幾輪保證贏，就有辦法進行化歸。

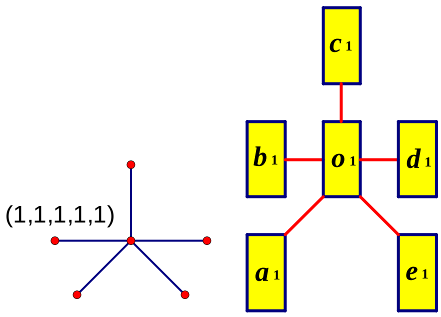
例如：箱子內金幣的數量分別爲「$o_1=9,\ a_1=8,\ b_1=7,\ c_1=2$」，先手拿走「$a_1=8$」後，

後手只能拿有「7」或「2」枚金幣的箱子。後手拿完後剩下的圖形變成「B2~2」，先手只要拿走金幣較多的箱子「o_1=9」，即可獲得 17 枚金幣，遠超過半數而得勝。



(三) 因此先手必勝。

五、B6~(1,1,1,1,1)



(一) 叉點上的數為 o_1，

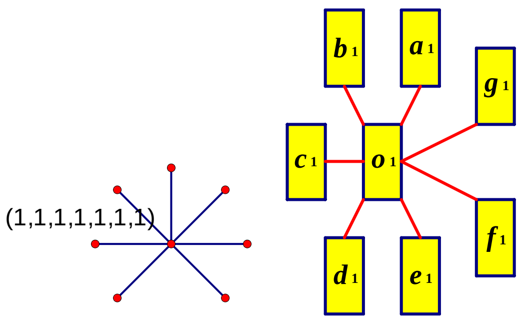
分支上的數依序為 a_1, b_1, c_1, d_1, e_1。

(二) 若 $a_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\} \to \begin{array}{ll} \text{先：} & a_1 \\ \text{後：} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1 \end{array} \to$ 化歸。

這裡用的是同樣的作法，將外面最大的拿走並使用化歸。有趣的是，化歸之後會變成「B4~(1,1,1)」，還可以再使用一次相同的方法！

(三) 因此先手必勝。

六、B8~(1,1,1,1,1,1,1)



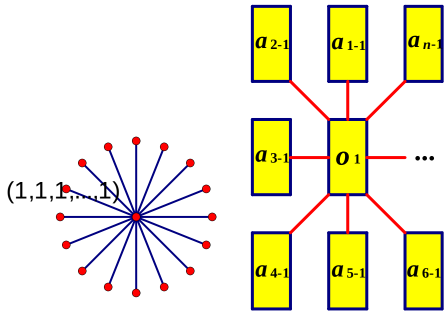
(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1$。

(二) 若 $a_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, g_1\} \to \begin{array}{ll} \text{先：} & a_1 \\ \text{後：} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1 \vee f_1 \vee g_1 \end{array} \to$ 化歸。

因此先手必勝。

七、Bn+1~(1,1,1,…,1)



爲了不侷限於英文字母的個數，在這裡要換另一種箱子編號。

(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_{1\text{-}1}, a_{2\text{-}1}, a_{3\text{-}1}, \ldots, a_{n\text{-}1}$。

在爲分支箱子的編號時，英文字母的地位提升了，「a」代表它在叉點「o_1」的分支上，足碼「$_{x\text{-}y}$」則分別代表不同的分支及該箱子在分支上的位置 （依然是由外向內）。

(二) 若 $a_{1\text{-}1}=\mathrm{Max}\{a_{1\text{-}1}, a_{2\text{-}1}, a_{3\text{-}1}, \ldots, a_{n\text{-}1}\}\to \begin{array}{ll} \text{先：} & a_{1-1} \\ \text{後：} & a_{2-1}\vee a_{3-1}\vee a_{4-1}\vee\cdots\vee a_{n-1} \end{array} \to$ 化歸 。

作法上並沒有不同的地方，只要把編號換成新的即可。

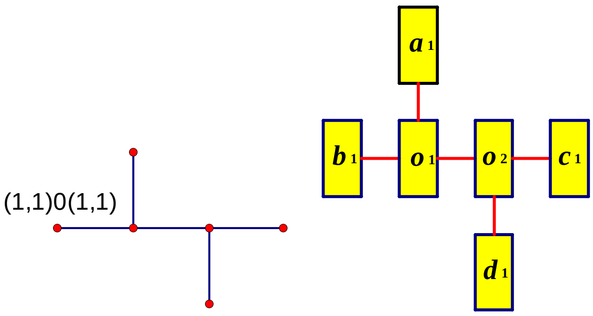
(三) 因此先手必勝。

將其推導至 n 個箱子的情況時，作法並不會改變，比沒有叉點的圖形好處裡。做法很簡單，先手拿外面最大的、後手被迫拿較少的，然後就可化歸。

根據這個概念，先手不管遇到哪種圖形都可以先找外面最大的，只要該箱子拿了之後不會有內部的箱子露出來或露出的箱子金幣數量依然較少，先手就可以拿它並化歸。如果化歸後的圖形依然符合此條件，便可以如此不斷的進行化歸。

事實上，只要是每條分支只有一個箱子的圖形，都一定可以用這種方法處理。此類圖形在代號上較明顯的一點（特徵碼）就是：所有分支箱子的編號足碼都是「1」（括號裡的數字均爲「1」也可，而叉點及叉點間箱子的數量可以不只一個）；依照定義，這的確是所有的分支都只有一個箱子、叉點接端點的圖形。所以我們可以說：代號的括號裡所有數字都是「1」的圖形已經解決化歸前的部份了。

八、B6~(1,1)0(1,1)



(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

分支上的數依序為 a_1, b_1, c_1, d_1。

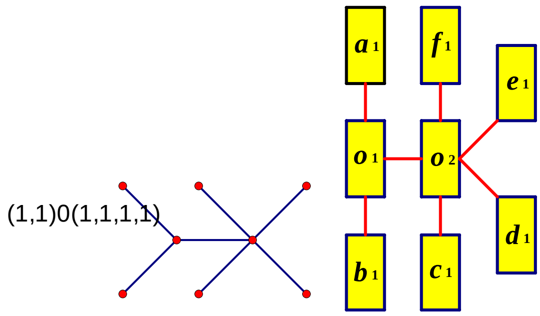
這是第一個有兩個叉點的圖形，也是六個箱子的圖形中唯一的一個。

(二) 若 a_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}\rightarrow$ 先： a_1 後： $b_1 \vee c_1 \vee d_1$ $\rightarrow$ 化歸 。

先手必勝的策略是先取四個端點中最大者。

(三) 因此先手必勝。

九、B8~(1,1)0(1,1,1,1)



(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$。

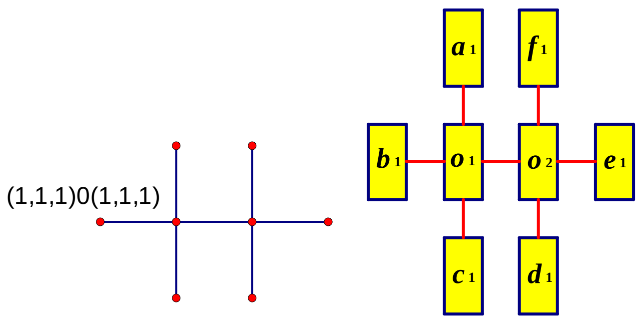
(二) 若 a_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1\}\rightarrow$ 先： a_1 後： $b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1 \vee f_1$ $\rightarrow$ 化歸 。

(三) 若 c_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1\}\rightarrow$ 先： c_1 後： $a_1 \vee b_1 \vee d_1 \vee e_1 \vee f_1$ $\rightarrow$ 化歸 。

在這裡有兩種情況，端看外面最大的箱子在哪裏。說穿了，對於此類圖形，先手只管拿外部最大的箱子即可，不須要考慮它在哪裡。

(四) 因此先手必勝。

十、B8~(1,1,1)0(1,1,1)



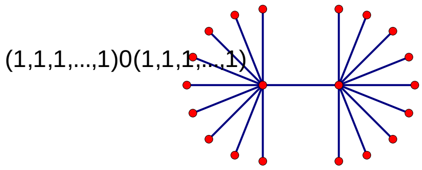
(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1$。

(二) 若 a_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1\}\rightarrow$ 先： a_1 後： $b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1 \vee f_1$ $\rightarrow$ 化歸 。

(三) 因此先手必勝。

十一、Bn~(1,1,1,…,1)0(1,1,1,…,1)



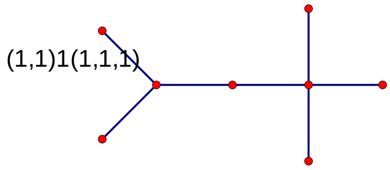
(一) 叉點上的數為 o_1，

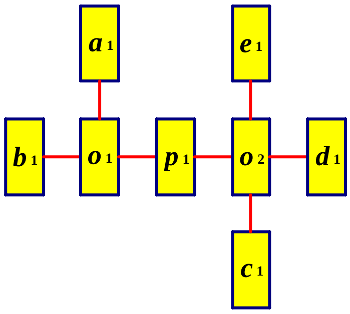
分支上的數依序為 $a_{1\text{-}1}, a_{2\text{-}1}, a_{3\text{-}1}, \ldots, a_{i\text{-}1}, b_{1\text{-}1}, b_{2\text{-}1}, b_{3\text{-}1}, \ldots, b_{j\text{-}1}$。

(二) 若 $a_{1\text{-}1}=\text{Max}\{a_{1\text{-}1},\ldots, a_{i\text{-}1}, b_{1\text{-}1}, \ldots, b_{j\text{-}1}\}\to \begin{array}{ll}\text{先：} & a_{1-1} \\ \text{後：} & a_{2-1}\vee\ldots\vee a_{i-1}\vee b_{1-1}\vee\ldots\vee b_{j-1}\end{array} \to$ 化歸。

(三) 因此先手必勝。

十二、B8~(1,1)1(1,1,1)





(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

叉點間的數為 p_1，

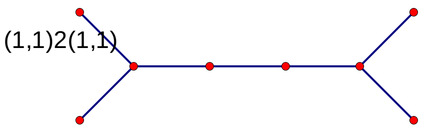
分支上的數依序為 a_1, b_1, c_1, d_1, e_1。

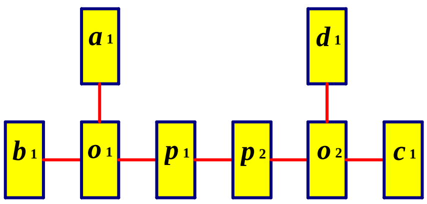
(二) 若 $a_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}\to \begin{array}{ll}\text{先：} & a_1 \\ \text{後：} & b_1\vee c_1\vee d_1\vee e_1\end{array} \to$ 化歸。

(三) 若 $c_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}_1\to \begin{array}{ll}\text{先：} & c_1 \\ \text{後：} & a_1\vee b_1\vee d_1\vee e_1\end{array} \to$ 化歸。

(四) 因此先手必勝。

十三、B8~(1,1)2(1,1)





(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

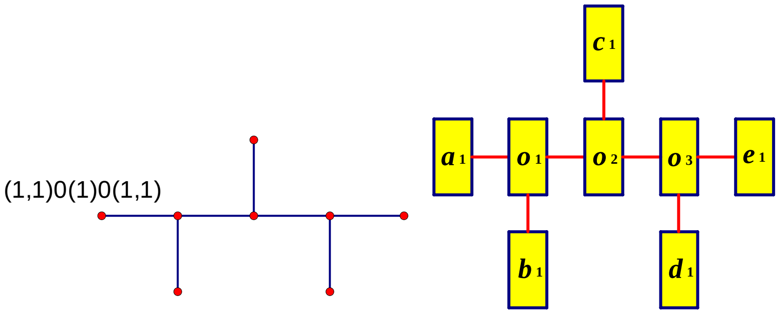
叉點間的數依序為 p_1, p_2，

分支上的數依序為 a_1, b_1, c_1, d_1。

(二) 若 $a_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1\} \rightarrow \begin{array}{ll} \text{先:} & a_1 \\ \text{後:} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \end{array} \rightarrow$ 化歸。

(三) 因此先手必勝。

十四、B8~(1,1)0(1)0(1,1)



(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2, o_3，

分支上的數依序為 a_1, b_1, c_1, d_1, e_1。

(二) 若 $a_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\} \rightarrow \begin{array}{ll} \text{先:} & a_1 \\ \text{後:} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1 \end{array} \rightarrow$ 化歸。

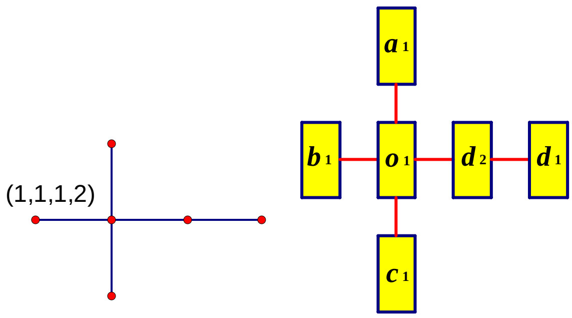
(三) 因此先手必勝。

(B)恰一條分支有二個箱子的圖形

這一類的圖形都與每條分支一個箱子的圖形相似，不同處只是某一條分支上有兩個箱子。之所以要將此情況自成一類，主要是因爲當這條有多個箱子的分支上的端點被取走後，會造成有內部的箱子外露出來，萬一外露的箱子金幣數量很大，先手可能會因此而輸掉，因此不得不特別考慮。

因爲先手不一定能在第一輪時化歸，於是以一輪化歸的思路推導出考慮前二輪拿法的二輪化歸，這個方法同時也可以推廣到所有此類的圖形。

十五、B6~(1,1,1,2)



(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 a_1, b_1, c_1, d_1, d_2。

與叉點接端點的情況不同，這裡多了一個「d_2」的箱子。

圖形開始變得複雜，須要分開討論的情況也就越來越多。必須考慮外部最大值所在位置，以及有可能立即外露的箱子金幣數量與外部最大值之比較。

(二) 若 a_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}\rightarrow \begin{array}{ll} \text{先:} & a_1 \\ \text{後:} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \end{array} \rightarrow$ 化歸 。

如果外面的最大值位於只有一個箱子的分支上，則可運用上述每條分支一個箱子的概念，先拿了最多的箱子之後化歸。

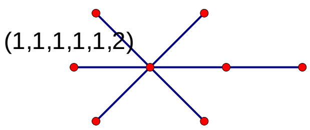
(三) 若 d_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$且 $d_1 \geqq d_2 \rightarrow \begin{array}{ll} \text{先:} & d_1 \\ \text{後:} & a_1 \vee b_1 \vee c_1 \vee d_2 \end{array} \rightarrow$ 化歸 。

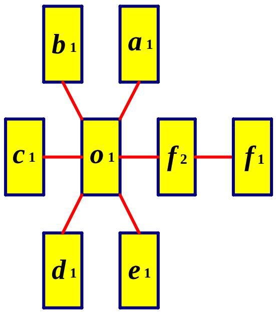
(四) 若 $d_2 \geqq d_1 \geqq a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \rightarrow \begin{array}{ll} \text{先:} & a_1 \left[\begin{array}{c} \text{化} \\ b_1 \vee c_1 \end{array} \vee \begin{array}{c} d_2 \\ d_1 \end{array} \right] \\ \text{後:} & ? \end{array}$ 。

與叉點接端點的不同點，也是此類圖形的重點。從拿法的描述可以看出來，先手第一手該拿的不是外面最大的「d_1」而是第二大的「a_1」。至此，後手有兩種選擇，如果後手不拿「d_1」，他拿的一定比先手少、被化歸；這是應對記號內左半部的意思。如果後手拿了「d_1」，先手則依照應對記號內右半部的指示拿更大的「d_2」，情況又回到應對記號內左半部——取「b_1」或「c_1」，然後被化歸。之所以能化歸，是因爲「$d_2 \geqq d_1$」且「$a_1 \geqq b_1 \geqq c_1$」，所以經過二輪後先手取的一定比後手多。

(五) 因此先手必勝。

十六、B8~(1,1,1,1,1,2)





(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1, f_2$。

幾乎與「B6~(1,1,1,2)」相同，只是多了兩個無關緊要的箱子（這裡指「d_1, e_1」）。

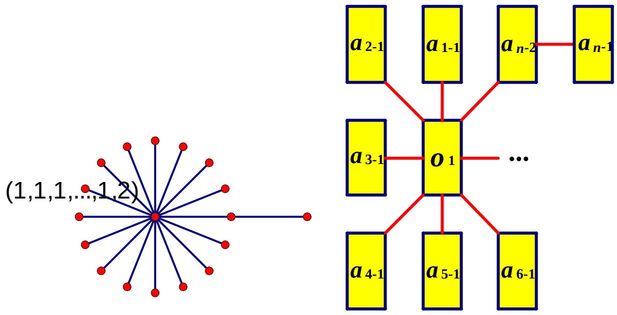
(二) 若 a_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1\}\rightarrow \begin{array}{ll} \text{先:} & a_1 \\ \text{後:} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1 \vee f_1 \end{array} \rightarrow$ 化歸 。

(三) 若 f_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, f_1\}$且 $f_1 \geqq f_2 \rightarrow \begin{array}{ll} \text{先:} & f_1 \\ \text{後:} & a_1 \vee b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1 \vee f_2 \end{array} \rightarrow$ 化歸 。

(四) 若 $f_2 \geqq f_1 \geqq a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \geqq b_1 \geqq d_1 \geqq e_1 \rightarrow \begin{array}{ll} \text{先:} & a_1 \left[\begin{array}{c} \text{化} \\ b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1 \end{array} \vee \begin{array}{c} f_2 \\ f_1 \end{array} \right] \\ \text{後:} & ? \end{array}$ 。

(五) 因此先手必勝。

十七、B*n*+2~(1,1,1,…,1,2)



(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_{1\text{-}1}, a_{2\text{-}1}, a_{3\text{-}1}, \ldots, a_{n\text{-}1}, a_{n\text{-}2}$。

(二) 若 $a_{1\text{-}1}=\mathrm{Max}\{a_{1\text{-}1}, a_{2\text{-}1}, a_{3\text{-}1}, \ldots, a_{n\text{-}1}\}\rightarrow$ $\begin{array}{ll}\text{先：} & a_{1-1} \\ \text{後：} & a_{2-1}\vee a_{3-1}\vee a_{4-1}\vee\ldots\vee a_{n-1}\end{array}$ →化歸。

(三) 若 $a_{n\text{-}1}=\mathrm{Max}\{a_{1\text{-}1}, a_{2\text{-}1}, \ldots, a_{n\text{-}1}\}$ 且 $a_{n\text{-}1}\geqq a_{n\text{-}2}\rightarrow$ $\begin{array}{ll}\text{先：} & a_{n-1} \\ \text{後：} & a_{1-1}\vee a_{2-1}\vee\ldots\vee a_{n-2}\end{array}$ →化歸。

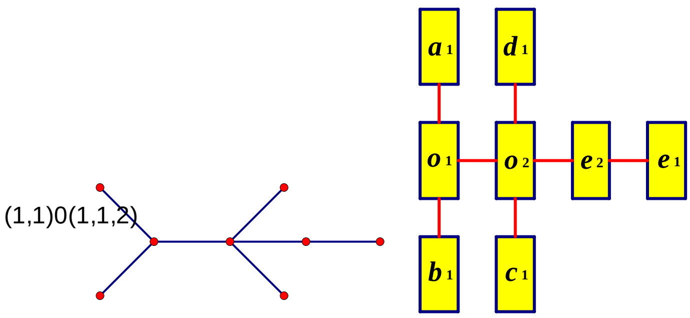
(四) 若 $a_{n\text{-}2}\geqq a_{n\text{-}1}\geqq a_{1\text{-}1}\geqq a_{2\text{-}1}\geqq a_{3\text{-}1}\geqq\ldots\rightarrow$ $\begin{array}{ll}\text{先：} & a_{1-1}\left[\begin{array}{c}\text{化} \\ a_{2-1}\vee a_{3-1}\vee a_{4-1}\vee\ldots\end{array}\vee\begin{array}{c}a_{n-2} \\ a_{n-1}\end{array}\right]_{?} \\ \text{後：} & \end{array}$。

一條分支上放置兩個箱子的情況下，將金幣數量更多的箱子放置在此分支的內部，如同設下陷阱，引誘先手不小心犯錯。但是細心的先手仍有很好的策略，可把後手的每一輪都限制住而最終致勝。條件就是先手必須記住：這個情況下是不能一輪化歸的，應該要慢慢來，先拿外面第二大的。

(五) 因此先手必勝。

我們用特徵碼來代表某一條分支有兩個箱子的圖形，就是括號裡的數字除了一個「2」之外，其它都是「1」。但是這是有例外的，包括「B8~(1,2)0(1,1,1)」及「B8~(1,1)1(1,2)」都是，在該圖形的解法後附有原因。所以，我們必須在加一個條件：擁有兩個箱子的分支所在的叉點度數(Degree)應不小於三。

十八、B8~(1,1)0(1,1,2)



(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, e_2$。

因為有兩個叉點，所以要討論的情況比較多，但原理是一樣的。

(二) 若 $a_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}\rightarrow$ 先：a_1 後：$b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1$ → 化歸。

(三) 若 $e_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}$ 且 $e_1 \geqq e_2 \rightarrow$ 先：e_1 後：$a_1 \vee b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_2$ → 化歸。

外面最大的箱子（「e_1」）在有兩個箱子的分支（「E」）上。

(四) 若 $e_2 \geqq e_1 \geqq a_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1\}\rightarrow$ 先：a_1 [化 ∨ e_2] 後：$d_1 \vee b_1 \vee c_1$ e_1 ? 。

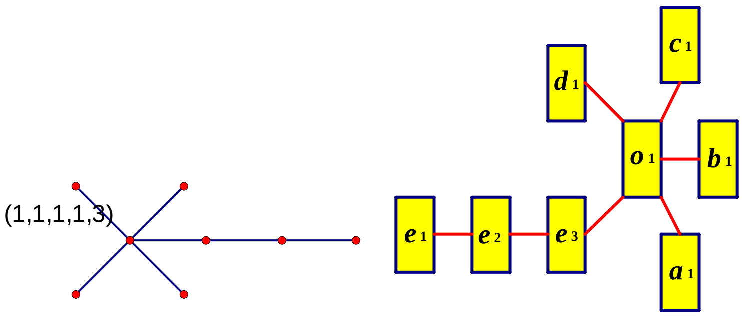
(五) 因此先手必勝。

(C)恰一條分支有多個箱子的圖形

如果某一條分支有三個箱子，情況又變得不一樣了。在這裡要介紹的新解法是「部分黑白塗色法」，是黑白塗色法的延伸用法之一。

另外，在箱子數更多的情形中，我們則使用「替換黑白塗色法」，雖不能保證先手能拿到所有的黑色或白色，但是先手可以藉由拿到一個有更多金幣的箱子彌補，仍保證可勝過後手。也就是說，後手可能拿走先手所指定的顏色，即使這與黑白塗色法原本的精神相牴觸，先手還是保有優勢。

十九、B8~(1,1,1,1,3)



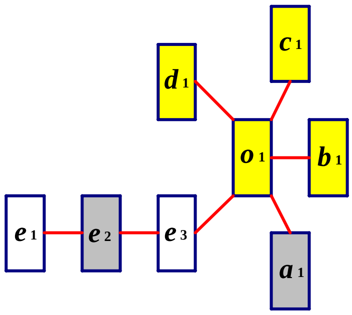
(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, e_2, e_3$。

(二) 若 $a_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}\rightarrow$ 先：a_1 後：$b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1$ → 化歸。

(三) 若 $e_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}$ 且 $e_1 \geqq e_2 \rightarrow$ 先：e_1 後：$a_1 \vee b_1 \vee c_1 \vee d_1$ → 化歸。

(四) 若 $e_2 \geqq e_1 \geqq a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \geqq d_1 \rightarrow$ 黑：a_1 e_2 白：e_1 e_3



只將其中一部分箱子（在這裡有四個）塗色，此方法爲部分黑白塗色法；它與其它黑白塗色法一樣，目的都是拿比較多的顏色。

1. 若黑≧白→ $\begin{array}{ll} \text{先：} & a_1 \left[\quad \text{化} \quad \vee\ e_2 \right] \\ \text{後：} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \quad e_1\ ? \end{array}$ 。

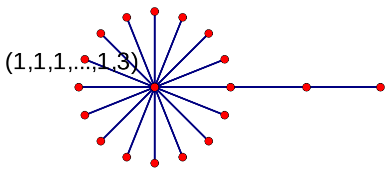
先手拿「a_1」，後手只能拿「e_1」避免被化歸，先手則拿「e_2」；此時分兩種情況：一種是後手拿「e_3」（之所以必須動用部分黑白塗色法的原因就在這裡，因爲分支「E」有三個箱子，二輪化歸無法保證後手不會拿可能很大的第三個箱子），因爲「黑≧白」、先手化歸；第二種是後手拿「b_1」（或其它任何一個），因爲「$e_2 \geqq e_1$」且「$a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \geqq d_1$」，故 $a_1+e_2 \geqq e_1+b_1$ 先手還是可以化歸。

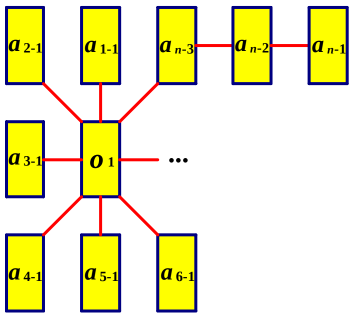
2. 若白＞黑→ $\begin{array}{ll} \text{先：} & e_1 \left[\quad \text{化} \quad \vee\ e_3 \right] \\ \text{後：} & a_1 \vee b_1 \vee c_1 \vee d_1 \quad e_2\ ? \end{array}$ 。

在這種情況下，先手又改爲拿起外面最大的了，不過這一次是因爲黑白塗色法保證先手拿到「e_3」後一定會比後手多，所以不怕後手拿比「e_1」大的「e_2」，$e_1+e_3 \geqq e_2+a_1 \geqq e_2+b_1 \geqq e_2+c_1 \geqq e_2+d_1$。

(五) 因此先手必勝。

二十、Bn+3~(1,1,1,…,1,3)





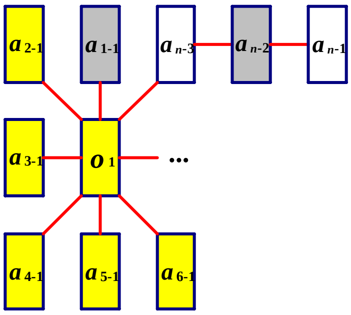
(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_{1\text{-}1}, a_{2\text{-}1}, a_{3\text{-}1}, \ldots, a_{n\text{-}1}, a_{n\text{-}2}, a_{n\text{-}3}$。

(二) 若 $a_{1\text{-}1}=\mathrm{Max}\{a_{1\text{-}1}, a_{2\text{-}1}, a_{3\text{-}1}, \ldots, a_{n\text{-}1}\}$→ $\begin{array}{ll} \text{先：} & a_1 \\ \text{後：} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee \ldots \vee z_1 \end{array}$ → 化歸。

(三) 若 $a_{n\text{-}1}=\mathrm{Max}\{a_{1\text{-}1}, a_{2\text{-}1},\ldots, a_{n\text{-}1}\}$且 $a_{n\text{-}1} \geqq a_{n\text{-}2}$→ $\begin{array}{ll} \text{先：} & a_{n-1} \\ \text{後：} & a_{1-1} \vee a_{2-1} \vee \ldots \vee a_{n-2} \end{array}$ → 化歸。

(四) 若 $a_{n\text{-}2} \geqq a_{n\text{-}1} \geqq a_{1\text{-}1} \geqq a_{2\text{-}1} \geqq a_{3\text{-}1} \geqq \ldots$→ $\begin{array}{lll} \text{黑：} & a_{1-1} & a_{n-2} \\ \text{白：} & a_{n-1} & a_{n-3} \end{array}$

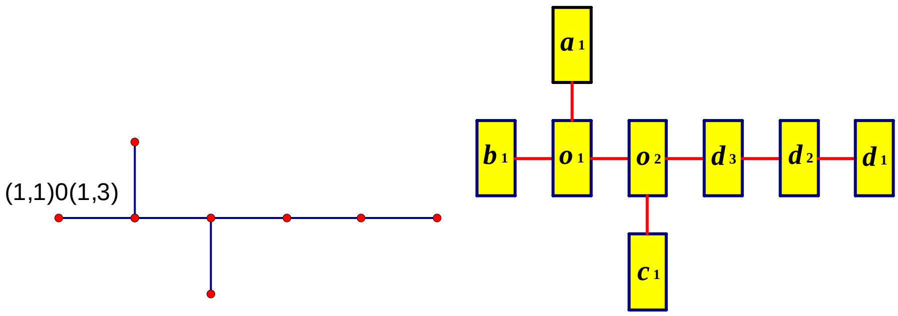


1. 若黑≧白→ 先： a_{1-1} [化 $\vee$ a_{n-2}] 。
   後： $a_{2-1}\vee a_{3-1}\vee a_{4-1}\vee\dots\vee a_{n-3}$ a_{n-1} ?
2. 若白＞黑→ 先： a_{n-1} [化 $\vee$ a_{n-3}] 。
   後： $a_{1-1}\vee a_{2-1}\vee a_{3-1}\vee\dots$ a_{n-2} ?

再解釋一次整個作法：在三個箱子的分支及外面第二大的箱子上塗色。將外面第二大的箱子與有三個箱子的分支上中間那個箱子塗黑色，其它二個箱子塗白色，如果是黑的大，則拿第二大的，在後手拿第一手後即可決定進行何種化歸。如果是白的大，直接拿三個箱子的分支上的第一個，依然在後手拿第一手後即可決定進行何種化歸。

(五) 因此先手必勝。

廿一、B8~(1,1)0(1,3)

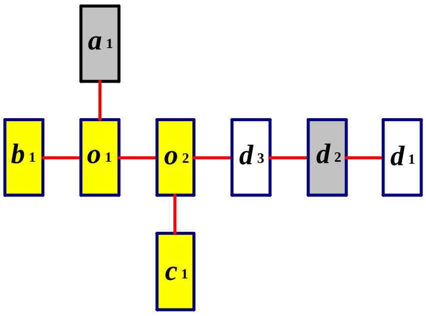


(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，
分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, d_2, d_3$。

(二) 若 $a_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$→ 先： a_1 → 化歸。
後： $b_1\vee c_1\vee d_1$

(三) 若 $d_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$ 且 $d_1\geqq d_2$→ 先： d_1 → 化歸。
後： $a_1\vee b_1\vee c_1\vee d_2$

(四) 若 $d_2\geqq d_1\geqq a_1\geqq b_1\geqq c_1$→ 黑： a_1 d_2
白： d_1 d_3



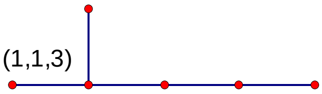
這是部分黑白塗色法，分以下兩種情況討論：

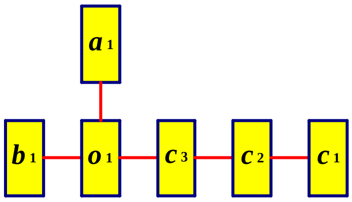
1. 若黑≧白→ 先：a_1 [化 $\vee$ d_2] 。
   後：$c_1 \vee b_1$ d_1 ?

2. 若白＞黑→ 先：d_1 [化 $\vee$ d_3] 。
   後：$a_1 \vee b_1 \vee c_1$ d_2 ?

(五) 因此先手必勝。

廿二、B6~(1,1,3)

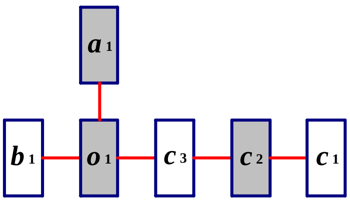




(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 a_1, b_1, c_1, c_2, c_3。

(二) 若 $a_1 \geqq b_1$→ 黑：o_1 a_1 c_2
白：b_1 c_1 c_3



1. 若黑≧白→ 先：黑 。
   後：白

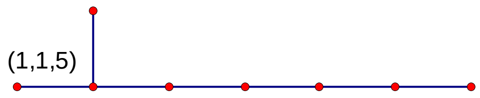
先手拿黑色的箱子「a_1」後，叉點就不再是叉點了，先手能拿到所有黑色的箱子。

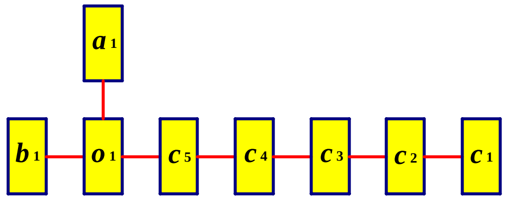
2. 若白＞黑→ 先：c_1 [白 $\vee$ a_1] 。
   後：黑 b_1 $o_1 \vee c_2$

如果說後手都拿黑，先手全拿到白，先手就贏了。而後手唯一可能拿到的白（反敗爲勝的機會）就是「a_1」，如果後手拿了它，先手雖然不能全白，但是可以拿「b_1」來代替「a_1」。因爲「b_1」較大，所以這樣不僅不吃虧，甚至多贏了些。這種不求全黑、全白的黑白塗色法稱爲「替換黑白塗色法」，因爲它是用替換來保證不吃虧的。

(三) 因此先手必勝。

廿三、B8~(1,1,5)



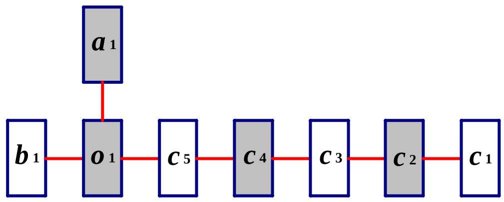


(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$。

(二) 若 $a_1 \geqq b_1 \rightarrow$ 黑： $o_1 \quad a_1 \quad c_2 \quad c_4$

白： $b_1 \quad c_1 \quad c_3 \quad c_5$

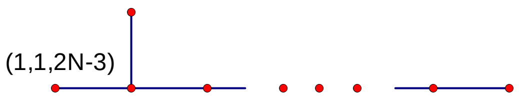


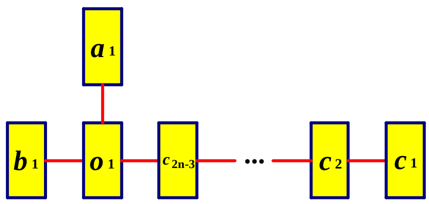
1. 若黑≧白→先： 黑 。
後： 白

2. 若白＞黑→先： $c_1[$白 $\vee$ $a_1]$ 。
後： 黑 $b_1 \; o_1 \vee c_2 \vee c_4$

(三) 因此先手必勝。

廿四、B2*n*~(1,1,2*n*-3)



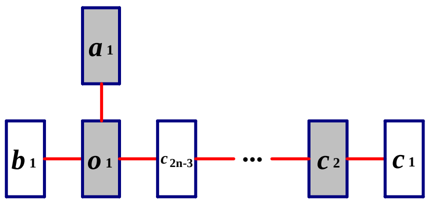


(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_{2n-3}$。

(二) 若 $a_1 \geqq b_1 \rightarrow$ 黑： $o_1 \quad a_1 \quad c_2 \quad c_4 \quad c_6 \quad \cdots \quad c_{2n-4}$

白： $b_1 \quad c_1 \quad c_3 \quad c_5 \quad c_7 \quad \cdots \quad c_{2n-3}$



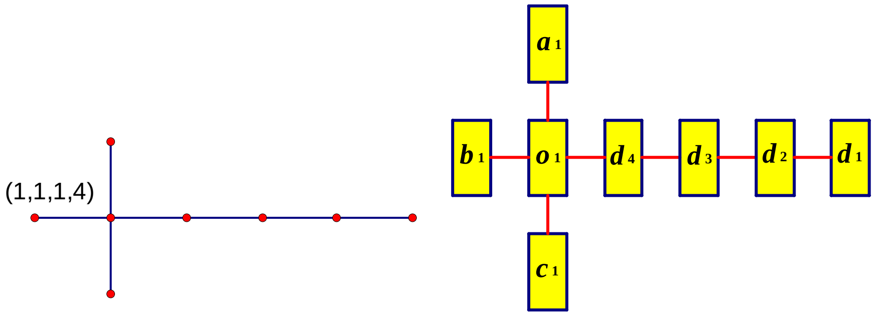
1. 若黑≧白→先： 黑 。
後： 白

2.　若白＞黑→ $\begin{array}{ll} \text{先：} & c_1\left[\begin{array}{c}\text{白}\\ \text{黑}\end{array}\vee\begin{array}{c}a_1\\ b_1\end{array}\right] \\ \text{後：} & o_1\vee c_2\vee c_4\vee c_6\vee\cdots\vee c_{2n-4}\end{array}$ 。

當初之所以要發展第二種黑白塗色法：替換黑白塗色法，就是因爲過去適用於無叉點圖形的交錯黑白塗色法在套用時出現了問題。此類的圖形有三個端點，因此一定會有兩個同顏色的箱子露在外面。交錯黑白塗色法能保證先手拿到所有指定顏色的箱子，憑的是輪到後手時不會有該顏色的箱子露在外面。但是現在有兩個同顏色的箱子同時露在外面，只能放棄其中一個，但只要被替換的比放棄的還大，失之東隅收之西隅，一樣可以讓先手獲勝，所以就設計了這種巧妙的方法。

(三) 因此先手必勝。

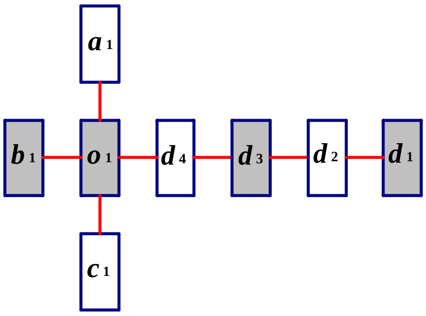
廿五、B8~(1,1,1,4)



(一) 叉點上的數為 o_1，

　　分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, d_2, d_3, d_4$。

(二) 若 $a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \rightarrow \begin{array}{lllll} \text{黑：} & o_1 & b_1 & d_1 & d_3 \\ \text{白：} & a_1 & c_1 & d_2 & d_4 \end{array}$



1.　若黑≧白→ $\begin{array}{ll} \text{先：} & d_1\left[\begin{array}{c}\text{黑}\\ \text{白}\end{array}\vee\begin{array}{c}a_1\\ b_1\end{array}\right] \\ \text{後：} & c_1\vee d_2\vee d_4\end{array}$ 。

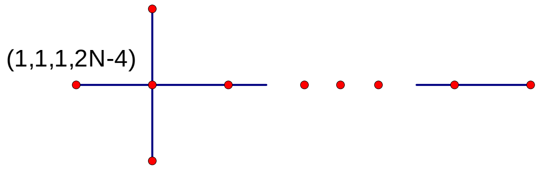
在這個應對中，在先手取了「d_1」後，後手若拿「d_2」會有兩個箱子露在外面，此時先手應該拿「d_3」而不是「b_1」。除非後手拿了「b_1」，先手才需要注意替換。

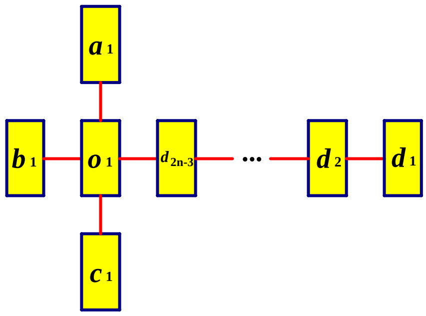
2.　若白＞黑→ $\begin{array}{ll} \text{先：} & a_1\left[\begin{array}{c}\text{白}\\ \text{黑}\end{array}\vee\begin{array}{c}b_1\\ c_1\end{array}\right] \\ \text{後：} & o_1\vee d_1\vee d_3\end{array}$ 。

在此情況要用二次替換黑白塗色法，因爲這個圖的分支點較多，共有兩黑兩白露在外面。爲了在兩種情況都能提供替換的對象，所以從「$a_1 \geqq b_1 \geqq c_1$」找了兩組替換，分別是「a_1, b_1」及「b_1, c_1」。

(三) 因此先手必勝。

廿六、B2n~(1,1,1,2n-4)

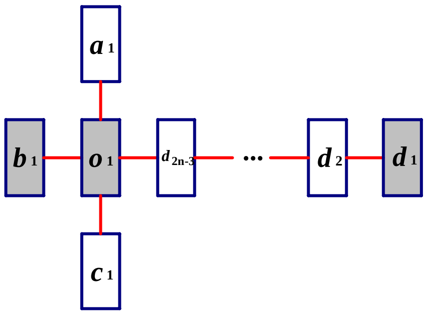




(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{2n-4}$。

(二) 若 $a_1 \geqq b_1 \geqq c_1 \rightarrow \begin{array}{l} \text{黑：}\ o_1 \quad b_1 \quad d_1 \quad d_3 \quad d_5 \quad \cdots \quad d_{2n-5} \\ \text{白：}\ a_1 \quad c_1 \quad d_2 \quad d_4 \quad d_6 \quad \cdots \quad d_{2n-4} \end{array}$



1. 若黑≧白→ $\begin{array}{l} \text{先：}\ d_1\left[\begin{array}{c}\text{黑}\\ \text{白}\end{array}\vee\begin{array}{c}a_1\\ b_1\end{array}\right] \\ \text{後：}\qquad\qquad\quad c_1\vee d_2\vee d_4\vee d_6\vee\cdots\vee d_{2n-4}\end{array}$。

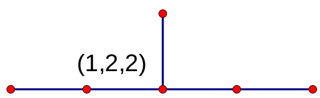
2. 若白＞黑→ $\begin{array}{l} \text{先：}\ a_1\left[\begin{array}{c}\text{白}\\ \text{黑}\end{array}\vee\begin{array}{c}b_1\\ c_1\end{array}\right] \\ \text{後：}\qquad\qquad\quad o_1\vee d_1\vee d_3\vee d_5\vee\cdots\vee d_{2n-5}\end{array}$。

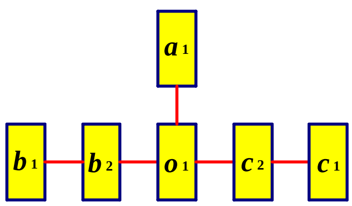
(三) 因此先手必勝。

(D)其它的圖形

剩下的圖形都不屬於前述分類的圖形，或是特徵尚未發現、不明顯的圖形。除了使用之前介紹過的替換黑白塗色法外，在此我們還使用了「化歸黑白塗色法」及「多重黑白塗色法」等新方法。

廿七、B6~(1,2,2)

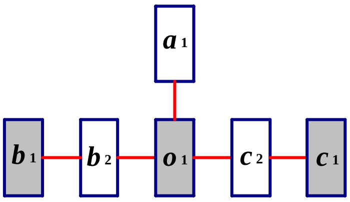




(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 a_1, b_1, b_2, c_1, c_2。

(二) 若 $b_1 \geqq c_1 \rightarrow$ 黑： $o_1 \quad b_1 \quad c_1$
白： $a_1 \quad b_2 \quad c_2$



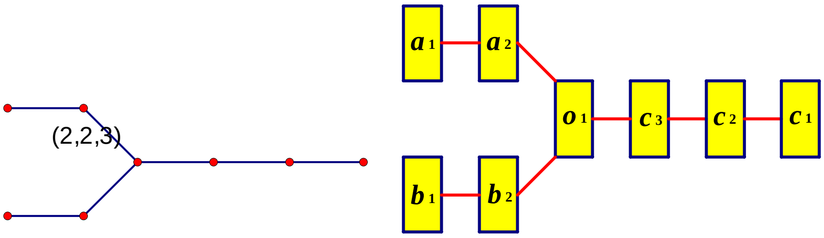
1. 若黑≧白→ 先： b_1[黑 ∨ 化]
後： [白 c_1]? 。

2. 若白＞黑→ 先：白
後：黑 。

先手拿白色的箱子「a_1」後，叉點就不再是叉點了，先手能拿到所有白色的箱子。

(三) 因此先手必勝。

廿八、B8~(2,2,3)



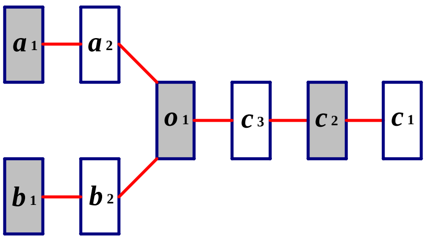
(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3$。

(二) 若 $a_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1\}$且 $a_1 \geqq a_2 \rightarrow$ 先： a_1
後： $b_1 \vee c_1 \vee a_2$ → 化歸 。

(三) 若 $c_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1\}$且 $c_1 \geqq c_2 \rightarrow$ 先： c_1
後： $a_1 \vee b_1 \vee c_2$ → 化歸 。

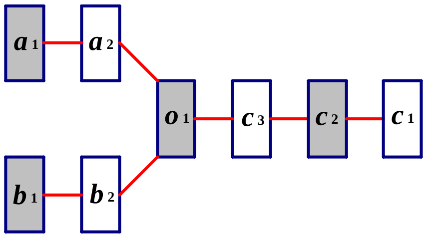
(四) 若 $a_2 \geqq a_1 \geqq b_1$ 且 $a_1 \geqq c_1 \rightarrow$ 黑： $o_1 \quad a_1 \quad b_1 \quad c_2$
白： $a_2 \quad b_2 \quad c_1 \quad c_3$



1. 若黑≧白→ 先： b_1[黑 ∨ a_2]
後： [白 a_1]? 。

2. 若白＞黑→ $\begin{array}{l}\text{先：白}\\ \text{後：黑}\end{array}$ 。

(五) 若 $c_2 \geqq c_1 \geqq a_1 \geqq b_1$→ $\begin{array}{lllll}\text{黑：} & o_1 & a_1 & b_1 & c_2\\ \text{白：} & a_2 & b_2 & c_1 & c_3\end{array}$



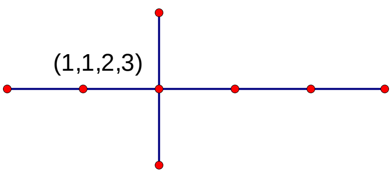
1. 若黑≧白→ $\begin{array}{ll}\text{先：} & a_1\left[\begin{array}{ccc}\text{黑} & & \text{化}\\ & \vee & \\ \text{白} & & b_1\end{array}\right]\\ \text{後：} & \qquad ?\end{array}$ 。

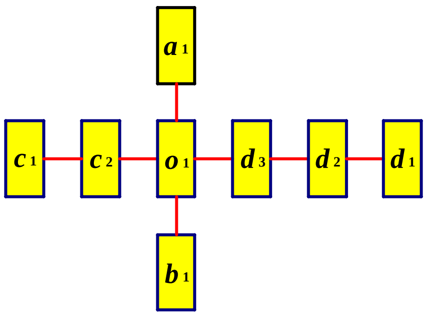
化歸黑白塗色法，在第一輪及第二輪時均可化歸。二輪化歸之所以能照顧先手到第二輪，主要是因爲前面的假設。在這個圖形中，因爲「$a_1 \geqq b_1$」，所以後手拿「b_1」時能化歸；又因爲「$c_2 \geqq c_1$」，所以第二輪也可以化歸。如果後手半途不想被先手化歸，先手還是能使用黑白塗色法贏後手。

2. 若白＞黑→ $\begin{array}{l}\text{先：白}\\ \text{後：黑}\end{array}$ 。

(六) 因此先手必勝。

廿九、B8~(1,1,2,3)





(一) 叉點上的數為 o_1，

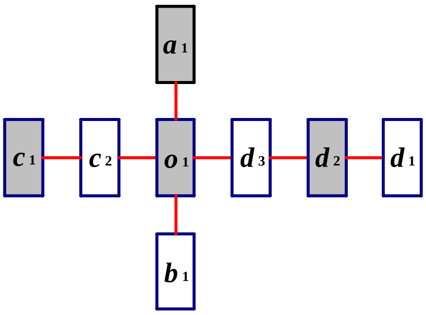
分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, c_2, d_1, d_2, d_3$。

(二) 若 a_1=Max{a_1, b_1, c_1, d_1}→ $\begin{array}{ll}\text{先：} & a_1\\ \text{後：} & b_1 \vee c_1 \vee d_1\end{array}$ → 化歸。

(三) 若 c_1=Max{a_1, b_1, c_1, d_1}且 $c_1 \geqq c_2$→ $\begin{array}{ll}\text{先：} & c_1\\ \text{後：} & a_1 \vee b_1 \vee c_2 \vee d_1\end{array}$ → 化歸。

(四) 若 d_1=Max{a_1, b_1, c_1, d_1}且 $d_1 \geqq d_2$→ $\begin{array}{ll}\text{先：} & d_1\\ \text{後：} & a_1 \vee b_1 \vee c_1 \vee d_2\end{array}$ → 化歸。

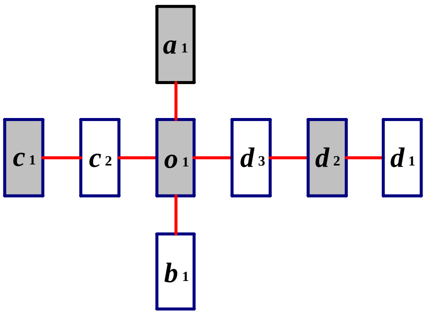
(五) 若 $c_2 \geqq c_1 \geqq a_1 \geqq b_1$ 且 $c_1 \geqq d_1$→ $\begin{array}{lllll}\text{黑：} & o_1 & a_1 & c_1 & d_2\\ \text{白：} & b_1 & c_2 & d_1 & d_3\end{array}$



1. 若黑≧白→ $\begin{array}{l}\text{先：}\ a_1\overset{\text{黑}}{[}\vee\ c_2] \\ \text{後：}\quad \text{白}\quad c_1\ \ b_1\vee c_2\vee d_1\vee d_3\end{array}$ 。

2. 若白＞黑→ $\begin{array}{l}\text{先：}\ d_1\overset{\text{白}}{[}\vee\ a_1] \\ \text{後：}\quad \text{黑}\quad b_1\ \ o_1\vee c_1\vee d_2\end{array}$ 。

(六) 若 $d_2 \geqq d_1 \geqq a_1 \geqq b_1$ 且 $d_1 \geqq c_1$→ $\begin{array}{lllll}\text{黑：} & o_1 & a_1 & c_1 & d_2 \\ \text{白：} & b_1 & c_2 & d_1 & d_3\end{array}$



1. 若黑≧白

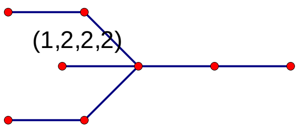
(1) 若 $a_1 \geqq c_1$→ $\begin{array}{l}\text{先：}\ a_1\overset{\text{黑}}{[}\vee\ \text{化}] \\ \text{後：}\quad \text{白}\quad c_1\ ?\end{array}$ 。

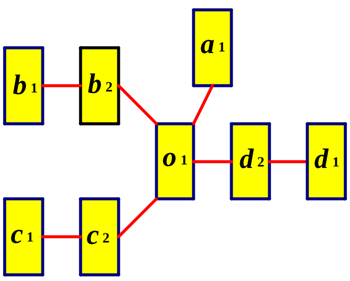
(2) 若 $c_1 > a_1$→ $\begin{array}{l}\text{先：}\ c_1\overset{\text{黑}}{[}\vee\ \text{化}] \\ \text{後：}\quad \text{白}\quad a_1\ ?\end{array}$ 。

2. 若白＞黑→ $\begin{array}{l}\text{先：}\ d_1\overset{\text{白}}{[}\vee\ a_1] \\ \text{後：}\quad \text{黑}\quad b_1\ \ o_1\vee c_1\vee d_2\end{array}$ 。

(七) 因此先手必勝。

三十、B8~(1,2,2,2)





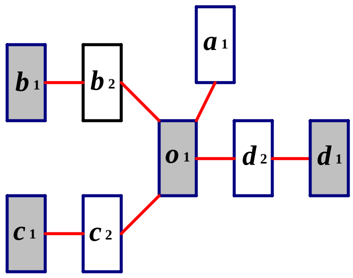
(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2$。

(二) 若 a_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$→ $\begin{array}{ll} 先: & a_1 \\ 後: & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \end{array}$ → 化歸 。

(三) 若 b_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$且 $b_1 \geqq b_2$ 且→ $\begin{array}{ll} 先: & b_1 \\ 後: & a_1 \vee b_2 \vee c_1 \vee d_1 \end{array}$ →化歸 。

(四) 若 $b_2 \geqq b_1 \geqq a_1$ 且 $b_1 \geqq c_1 \geqq d_1$→ $\begin{array}{lllll} 黑: & o_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 白: & a_1 & b_2 & c_2 & d_2 \end{array}$



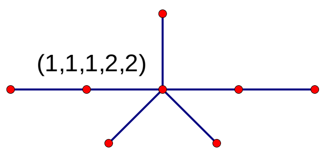
1. 若黑≧白→ $\begin{array}{ll} 先: & c_1\left[\begin{array}{ccccc} 黑 & & 化 & & b_2 \\ & \vee & & \vee & \\ 白 & & d_1 & & b_1 \end{array}\right]? \\ 後: & \end{array}$ 。

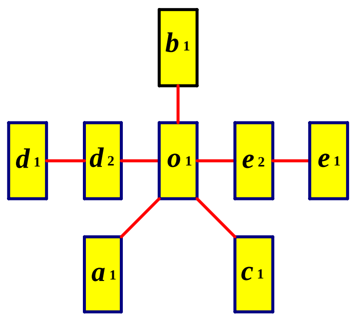
   這裡同時用到了化歸及替換。

2. 若白＞黑→ $\begin{array}{ll} 先: & 白 \\ 後: & 黑 \end{array}$ 。

(五) 因此先手必勝。

卅一、B8~(1,1,1,2,2)





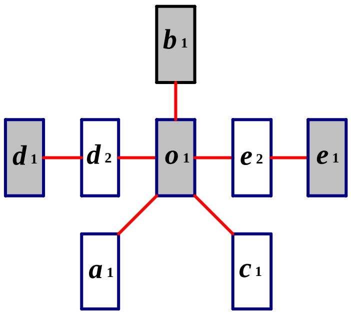
(一) 叉點上的數為 o_1，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, d_1, d_2, e_1, e_2$。

(二) 若 a_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}$→ $\begin{array}{ll} 先: & a_1 \\ 後: & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \vee e_1 \end{array}$ → 化歸 。

(三) 若 d_1=Max$\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}$且 $d_1 \geqq d_2$→ $\begin{array}{ll} 先: & d_1 \\ 後: & a_1 \vee b_1 \vee c_1 \vee d_2 \vee e_1 \end{array}$ →化歸 。

(四) 若 $d_2 \geqq d_1 \geqq a_1 \geqq b_1 \geqq c_1$ 且 $d_1 \geqq e_1$→ $\begin{array}{lllll} 黑: & o_1 & b_1 & d_1 & e_1 \\ 白: & a_1 & c_1 & d_2 & e_2 \end{array}$

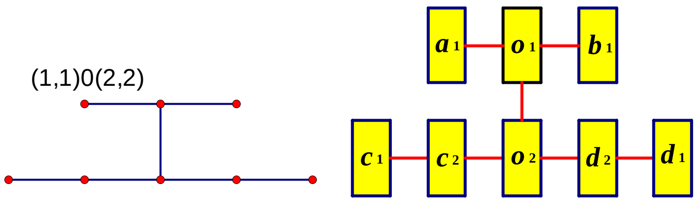


1. 若黑≧白→$\begin{array}{ll} \text{先：} & e_1\left[\begin{array}{c}\text{黑}\\ \text{白}\end{array} \vee \begin{array}{c}a_1\\ b_1\end{array} \vee \begin{array}{c}d_2\\ d_1\end{array}\right] \\ \text{後：} & \qquad\qquad c_1 \vee d_2 \vee e_2 \end{array}$ 。

2. 若白＞黑→$\begin{array}{ll} \text{先：} & a_1\left[\begin{array}{c}\text{白}\\ \text{黑}\end{array} \vee \begin{array}{c}b_1\\ c_1\end{array}\right] \\ \text{後：} & \qquad o_1 \vee d_1 \vee e_1 \end{array}$ 。

(五) 因此先手必勝。

卅二、B8~(1,1)0(2,2)



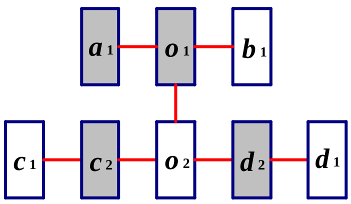
(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, c_1, c_2, d_1, d_2$。

(二) 若 a_1=Max{a_1, b_1, c_1, d_1}→$\begin{array}{ll} \text{先：} & a_1 \\ \text{後：} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \end{array}$ → 化歸。

(三) 若 c_1=Max{a_1, b_1, c_1, d_1}且 $c_1 \geqq c_2$→$\begin{array}{ll} \text{先：} & c_1 \\ \text{後：} & a_1 \vee b_1 \vee c_2 \vee d_1 \end{array}$ → 化歸。

(四) 若 $c_2 \geqq c_1 \geqq d_1$ 且 $c_1 \geqq a_1 \geqq b_1$→$\begin{array}{lllll} \text{黑：} & o_1 & a_1 & c_2 & d_2 \\ \text{白：} & o_2 & b_1 & c_1 & d_1 \end{array}$

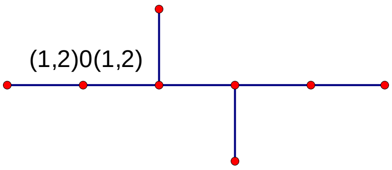


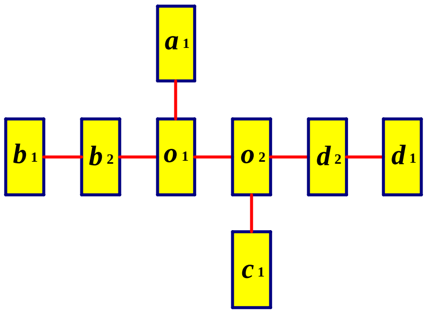
1. 若黑≧白→$\begin{array}{ll} \text{先：} & \text{黑} \\ \text{後：} & \text{白} \end{array}$ 。

2. 若白＞黑→$\begin{array}{ll} \text{先：} & d_1\left[\begin{array}{c}\text{白}\\ \text{黑}\end{array} \vee \begin{array}{c}a_1\\ b_1\end{array} \vee \begin{array}{c}c_2\\ c_1\end{array}\right] \\ \text{後：} & \qquad\qquad o_1 \vee c_2 \vee d_2 \end{array}$ 。

(五) 因此先手必勝。

卅三、B8~(1,2)0(1,2)





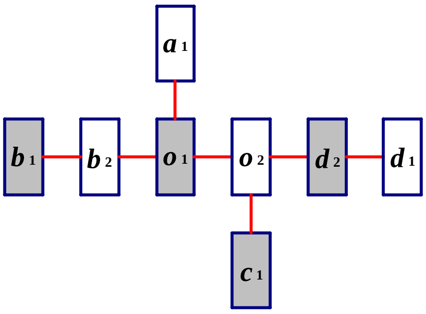
(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, b_2, c_1, d_1, d_2$。

(二) 若 $a_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1\}\rightarrow\begin{array}{ll}\text{先:} & a_1\\ \text{後:} & b_1\vee c_1\vee d_1\end{array}\rightarrow$ 化歸。

(三) 若 $b_1=\text{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1\}$ 且 $b_1\geqq b_2\rightarrow\begin{array}{ll}\text{先:} & b_1\\ \text{後:} & a_1\vee b_2\vee c_1\vee d_1\end{array}\rightarrow$ 化歸。

(四) 若 $b_2\geqq b_1\geqq a_1$ 且 $b_1\geqq c_1$ 且 $b_1\geqq d_1\rightarrow\begin{array}{lllll}\text{黑:} & o_1 & b_1 & c_1 & d_2\\ \text{白:} & o_2 & a_1 & b_2 & d_1\end{array}$



1. 若黑≧白$\rightarrow\begin{array}{ll}\text{先:} & c_1\left[\begin{array}{ccc}\text{黑} & \vee & b_2\\ \text{白} & & b_1\end{array}\right]\\ \text{後:} & \qquad\qquad a_1\vee o_2\vee d_1\end{array}$。

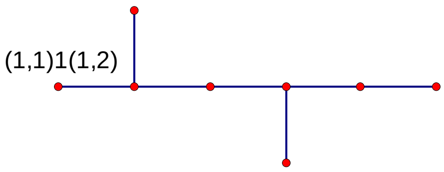
2. 若白＞黑

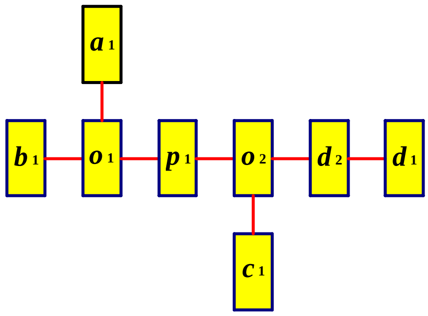
(1) 若 $a_1\geqq d_1\rightarrow\begin{array}{ll}\text{先:} & a_1\left[\begin{array}{ccc}\text{白} & \vee & \text{化}\\ \text{黑} & & d_1\end{array}\right]?\\ \text{後:} & \end{array}$。

(2) 若 $d_1>a_1\rightarrow\begin{array}{ll}\text{先:} & d_1\left[\begin{array}{ccc}\text{白} & \vee & \text{化}\\ \text{黑} & & a_1\end{array}\right]?\\ \text{後:} & \end{array}$。

(五) 因此先手必勝。

卅四、B8~(1,1)1(1,2)





(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

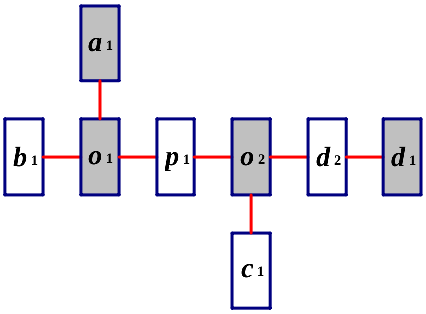
叉點間的數為 p_1，

分支上的數依序為 a_1, b_1, c_1, d_1, d_2。

(二) 若 a_1=Max{a_1, b_1, c_1, d_1}→ $\begin{array}{ll} \text{先:} & a_1 \\ \text{後:} & b_1 \vee c_1 \vee d_1 \end{array}$ →化歸。

(三) 若 d_1=Max{a_1, b_1, c_1, d_1}且 $d_1 \geqq d_2$→ $\begin{array}{ll} \text{先:} & d_1 \\ \text{後:} & a_1 \vee b_1 \vee c_1 \vee d_2 \end{array}$ → 化歸。

(四) 若 $d_2 \geqq d_1 \geqq a_1 \geqq b_1$ 且 $d_1 \geqq c_1$→ $\begin{array}{lllll} \text{黑:} & o_1 & o_2 & a_1 & d_1 \\ \text{白:} & p_1 & b_1 & c_1 & d_2 \end{array}$

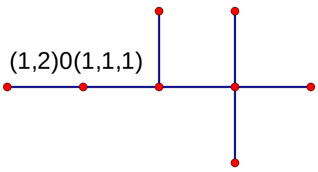


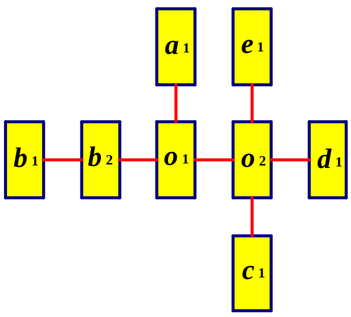
1. 若黑≧白→ $\begin{array}{ll} \text{先:} & a_1 \left[\begin{array}{ccc} \text{黑} & & d_2 \\ & \vee & \\ \text{白} & & d_1 \end{array} \right] \\ \text{後:} & \qquad\qquad p_1 \vee b_1 \vee c_1 \end{array}$ 。

2. 若白＞黑→ $\begin{array}{ll} \text{先:} & c_1 \left[\begin{array}{ccc} \text{白} & & a_1 \\ & \vee & \\ \text{黑} & & b_1 \end{array} \right] \\ \text{後:} & \qquad\qquad o_1 \vee d_1 \vee o_2 \end{array}$ 。

(五) 因此先手必勝。

卅五、B8~(1,2)0(1,1,1)





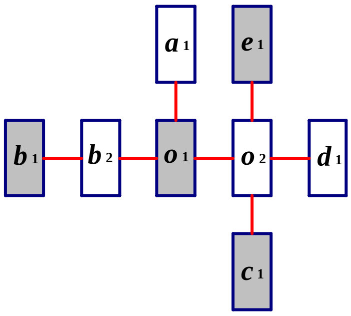
(一) 叉點上的數依序為 o_1, o_2，

分支上的數依序為 $a_1, b_1, b_2, c_1, d_1, e_1$。

(二) 若 $a_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}\to\begin{matrix}\text{先:} & a_1\\ \text{後:} & b_1\vee c_1\vee d_1\vee e_1\end{matrix}\to$ 化歸 。

(三) 若 $b_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1, d_1, e_1\}$ 且 $b_1\geqq b_2\to\begin{matrix}\text{先:} & b_1\\ \text{後:} & a_1\vee b_2\vee c_1\vee d_1\vee e_1\end{matrix}\to$ 化歸 。

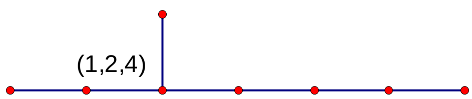
(四) 若 $b_2\geqq b_1\geqq a_1$ 且 $b_1\geqq c_1\geqq d_1\geqq e_1\to\begin{matrix}\text{黑:} & o_1 & b_1 & c_1 & e_1\\ \text{白:} & o_2 & a_1 & b_2 & d_1\end{matrix}$

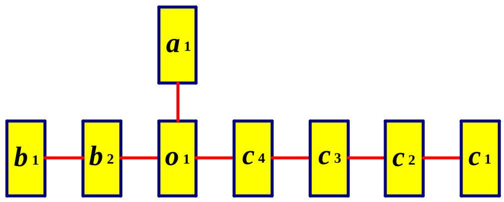


1. 若黑≧白→ $\begin{matrix}\text{先:} & c_1\left[\begin{matrix}\text{黑}\\ \text{白}\end{matrix}\vee\begin{matrix}b_2\\ b_1\end{matrix}\vee\begin{matrix}d_1\\ e_1\end{matrix}\right]\\ \text{後:} & o_2\vee a_1\vee b_2\end{matrix}$ 。
2. 若白＞黑→ $\begin{matrix}\text{先:} & a_1\left[\begin{matrix}\text{白}\\ \text{黑}\end{matrix}\vee\begin{matrix}c_1\\ d_1\end{matrix}\right]\\ \text{後:} & o_1\vee b_1\vee e_1\end{matrix}$ 。

(五) 因此先手必勝。

卅六、B8~(1,2,4)





(一) 叉點上的數為 o_1，

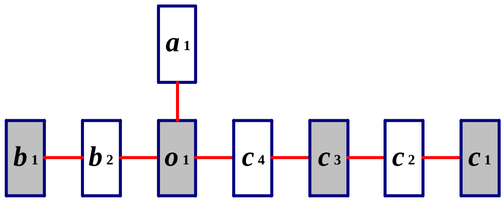
分支上的數依序為 $a_1, b_1, b_2, c_1, c_2, c_3, c_4$。

(二) 若 $a_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1\}\to\begin{matrix}\text{先:} & a_1\\ \text{後:} & b_1\vee c_1\end{matrix}\to$ 化歸 。

(三) 若 $b_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1\}$ 且 $b_1\geqq b_2\to\begin{matrix}\text{先:} & b_1\\ \text{後:} & a_1\vee b_2\vee c_1\end{matrix}\to$ 化歸 。

(四) 若 $c_1=\mathrm{Max}\{a_1, b_1, c_1\}$ 且 $c_1\geqq c_2\to\begin{matrix}\text{先:} & c_1\\ \text{後:} & a_1\vee b_1\vee c_2\end{matrix}\to$ 化歸 。

(五) 若 $b_2\geqq b_1\geqq a_1$ 且 $b_1\geqq c_1\to\begin{matrix}\text{黑:} & o_1 & b_1 & c_1 & c_3\\ \text{白:} & a_1 & b_2 & c_2 & c_4\end{matrix}$



1. 若黑≧白→ $\begin{array}{l}\text{先：}\\ \text{後：}\end{array}\ b_1\left[\begin{array}{ccc}\text{黑} & & \text{化}\\ & \vee & \\ \text{白} & & c_1\end{array}\right]?$ 。

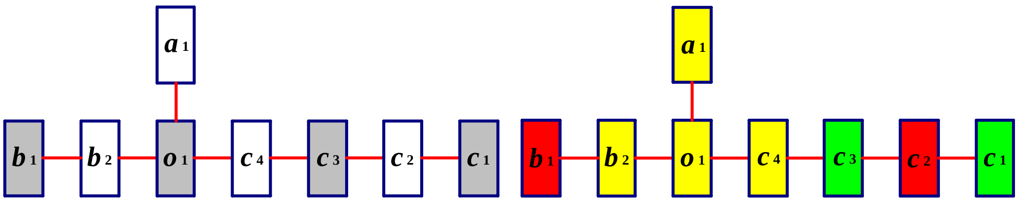
黑白塗色法之所以要和化歸合併使用，有一項很重要的理由就是：化歸能限制後手可能的拿法（尤其是二輪化歸）。在端點數較多的圖形裡，替換黑白塗色法雖然可以解決（但不是避免）後手拿到先手指定顏色的箱子，但是畢竟是要有可替換的箱子。某些情況下，端點數較多的圖形有部分的分支上可能有多於一個的箱子。如果可替換的箱子（指替換中較大、非指定顏色的箱子，而不是被替換的箱子）裡面還有指定顏色的箱子，後手還是能再一次拿到先手指定顏色的箱子，且此箱子不再有可替換的箱子。

化歸黑白塗色法在後手第一次拿到先手指定顏色的箱子時就進行化歸，不受上述的限制。缺點是為了方便進行化歸，先手在後手拿到先手指定顏色的箱子之前都必須保持優勢。相對來說，替換黑白塗色法幾乎就是黑白塗色法，只要替換的箱子較被替換的箱子大即可，兩種方法都各有其優缺點。

2. 若白＞黑→ $\begin{array}{ll}\text{先：} & \text{白}\\ \text{後：} & \text{黑}\end{array}$ 。

先手拿白色的箱子「a_1」後，叉點就不再是叉點了，先手能拿到所有白色的箱子。

(六) 若 $c_2 \geqq c_1 \geqq a_1$ 且 $c_1 \geqq b_1$→ $\begin{array}{lllll}\text{黑：} & o_1 & b_1 & c_1 & c_3\\ \text{白：} & a_1 & b_2 & c_2 & c_4\end{array}$ & $\begin{array}{lll}\text{紅：} & b_1 & c_2\\ \text{綠：} & c_1 & c_3\end{array}$



這是多重黑白塗色法，其中一組是部分黑白塗色法。當一組塗法無法解決問題時，就使用兩組並用，故取名為多重黑白塗色法。為了描述方便，將第二組的「黑白」改成「紅綠」。

在這裡，「b_1」及「c_1」只能選一個先拿，並使用化歸或替換保護另一個箱子。如果我們用化歸保護較少的「b_1」，後手可以依序拿「c_2」、「b_1」而破解這個化歸，因為我們不知道「c_2+b_1」及「c_1+c_1」的大小。如果我們用替換保護較大的「c_1」後手則可以依序拿「c_1」、「c_3」而破解這個替換，而我們還是不知道「c_2+b_1」及「c_1+c_1」的大小。所以，我們就用另一組塗色來比較「c_2+b_1」及「c_1+c_1」的大小。

1. 若黑≧白

(1) 若紅≧綠→ $\begin{array}{l}\text{先：}\\ \text{後：}\end{array}\ b_1\left[\begin{array}{ccc}\text{黑} & & \text{紅}\\ & \vee & \\ \text{白} & & \text{綠}\end{array}\right]?$ 。

多重黑白塗色法是在化歸及替換都無法完成目的時，模仿化歸（部分黑白塗色）及替換（完全黑白塗色）的作用進行黑白塗色，所以會有主塗法（套用化歸、替換的塗法）

及副塗法（模仿化歸、替換的塗法）之分。其中，因爲是模仿替換或化歸的作用，副塗法都會與主塗法相似。

(2)　若綠＞紅→ 先：　c_1[黑 ∨ 綠 ∨ 化] 。
後：　白　紅　b_1 ?

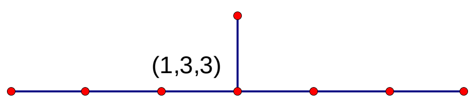
根據這裡的應對，會有另外三種情況發生：後手在第一輪時拿到「b_1」，然後被化歸；拿「紅」，然後被化歸；或是拿「白」，最後比黑的少。

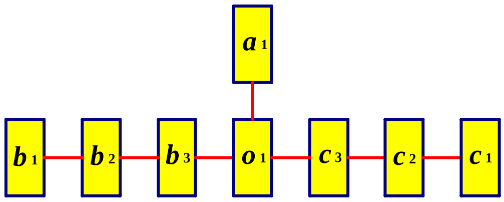
2.　若白＞黑→ 先：　白 。
後：　黑

先手拿白色的箱子「a_1」後，叉點就不再是叉點了，先手能拿到所有白色的箱子。

(七) 因此先手必勝。

卅七、B8~(1,3,3)





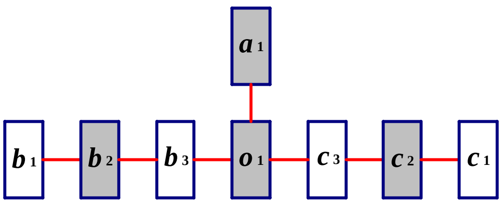
(一) 叉點上的數為 o_1，

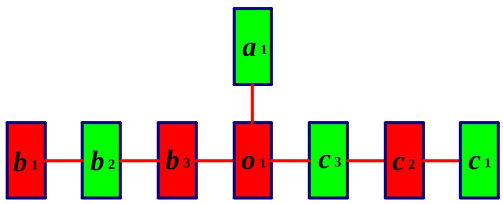
分支上的數依序為 $a_1, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$。

(二) 若 a_1=Max{a_1, b_1, c_1}→ 先：　a_1 → 化歸 。
後：　$b_1 \vee c_1$

(三) 若 b_1=Max{a_1, b_1, c_1}且 $b_1 \geqq b_2$→ 先：　b_1 → 化歸 。
後：　$a_1 \vee b_2 \vee c_1$

(四) 若 $b_2 \geqq b_1 \geqq a_1$ 且 $b_1 \geqq c_1$→ 黑：　o_1　a_1　b_2　c_2 & 紅：　o_1　b_1　b_3　c_2
白：　b_1　b_3　c_1　c_3　　綠：　a_1　b_2　c_1　c_3





這是另一個用到多重塗色法的圖形，和之前不同的是，這裡的副塗法是模仿替換的，也不是部分黑白塗色法。

在這裡，也不能單純用替換或一輪化規來保護「b_1」及「c_1」。原因還是一樣，可替換的箱子內有先手指定的顏色，所以無法替換。若欲使用化歸，後手就先按照先手的期望拿第一輪（先拿「b_2」）再拿「c_1」。而且也不能用部分黑白塗色法，因爲無論先手如何塗，後手都可以在前二輪時分別拿到兩組塗色指定的顏色。

1.　若黑≧白→ 先：　黑 。
後：　白

先手拿黑色的箱子「a_1」後，叉點就不再是叉點了，先手能拿到所有黑色的箱子。

2. 若白＞黑

(1) 若紅≧綠→ 先： b_1 [白 ∨ 紅 ∨ 化]
後： 黑 綠 c_1 ? 。

先手在使用黑白塗色法時，最怕後手拿到不該拿的箱子。爲了防止（因應）後手拿到先手指定的顏色，先手可以中途化歸或使用替換。另外還有一種方法，就是多重黑白塗色法。多重黑白塗色法的優點在於：就算後手拿了其中一組塗法中先手指定的顏色，先手只要把目標轉爲另一組塗法中較大的顏色即可。

當先手決定在後手拿到指定顏色時使用化歸，那麼他就必須注意化歸的有效期限。如果先手「並沒有其他的方法保護這個箱子」，他就必須在化歸失效前拿走這個箱子。這也使得後手不可能再拿到該箱子，自然就不會發生後手拿了卻不用（不能）化歸的情況，所以都不需要加括號。

這裡的情況比較特別。如果後手在第一輪時拿到「c_1」，先手似乎可以放棄「白」而改拿「紅」，也就是在第二輪時拿「c_2」。但是如果後手接著拿「c_3」，那就沒有紅的箱子在外面了。所以，這個化歸是必要的。但如果後手在前兩輪時分別拿「b_2」和「c_1」，先手就無法保證能化歸了。不過，先手這時就可以放棄「白」而改拿「紅」了。

這個部份在實際操作時比描述它還簡單，先手只有在少數不得已的情況才需使用黑白塗色，但是爲了追求應對的整潔，在某些能化歸的情況下是繼續使用黑白塗色法的。

(2) 若綠＞紅→ 先： c_1 [白 ∨ 綠]
後： 黑 紅 $o_1 \vee b_2 \vee c_2$ 。

這裡甚至用了兩組替換，一個是「b_1」換成「b_2」，另一個則是「a_1」換成「b_2」。

特別要注意的是，後手在某些情況下可能拿到白箱子且先手無法拿到所有的綠箱子，不過這並不代表先手不能贏，因爲「$b_2>b_1$」的關係，先手能繼續黑白塗色法而獲勝。

(五) 因此先手必勝

肆、結論

一、將八個或以下帶有固定數字的結點，排列成任意的樹狀圖（包含沒有叉點的圖、三叉點的圖及多叉點的圖）後，都可以使用黑白塗色法、化歸等方法，使先手穩操勝算。

二、將八個或以下的結點，排列成任意的樹狀圖（包含沒有叉點的圖、三叉點的圖及多叉點的圖）後再填上數字，都可以使用黑白塗色法、化歸等方法，使先手依然穩操勝算。

三、包括沒有叉點的圖形、每條分支一個結點的圖形、恰有一條分支兩個結點的圖形、恰有一條分支多個結點的圖形等四種同類型的圖形在結點數繼續增加為「$2n$」後，仍能使用相同的方法，使先手獲勝。

四、結點數為奇數時，雖然先手可多拿一個箱子，但仍無法保證一定贏。

五、在尋求結點數量大於十個的圖形的解法時，我們可以用化歸的原理，每次解決部分特徵子圖，一步一步將圖形化整為零。但是仍有部份情況無法化歸、尚待進一步研究。例如 10 個結點的樹狀圖有 106 種，大約有一半的圖形須進一步研究。

六、除了能推廣的圖形外，我猜測在結點數更多的圖形中，先手還是能保有優勢。

伍、參考文獻

張遠南　使人聰明的數學遊戲　一版　台北市　九章　P205　1996

林福來　離散數學初步　四版　台北市　九章　P71~P147

邵慰慈、潘建強　基礎離散數學　一版　台北市　九章　P113~220

評語

將２ｎ個相異數字任意排成樹狀圖，由兩人輪流取，本文探討保證先手取得總數字和一半以上的策略，本研究非常複雜瑣碎，但作者研究得很完整，而且寫得很有趣，吸引人，作者還是國中生，真的很不容易，從此可看出他的潛力無窮，非常值得栽培。建議再進一步綜合分析嘗試，將本文更簡潔有力的呈現。