臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　　別：數學

作 品 名 稱 ：再論巴斯卡三角形

學校 / 作者 ：國立虎尾高級中學　　　　　　郭士恩

目次

個人簡介

我是個標準的好奇寶寶，在家中時，一有疑惑就一定打破沙鍋問到底，不時讓爸媽和姊姊頭疼。在求學過程中，我覺得文學與數理都很重要，在數理方面，我比較喜歡思考、推理和創造的過程，而不只是接收知識和答案，往往坐在書桌前苦思一道數學難題，忘了時間；在文學方面，我也常常接觸古文和寫新詩。另外，在課餘時間，我會卸下繁重的課業，讀讀科學人以與新知接軌，彈鋼琴或打爵士鼓放鬆心情，有時候也會閱讀聖經調劑心靈。

摘要

本研究以高中課程中的巴斯卡三角形為研究對象，將原先巴斯卡以「1」為首、「+」為運算符號的規律三角形，改為以「-1」及「ω」為首、「×」為運算符號，分別就其產生的新三角形作探討，發現其中似乎隱藏著原先三角形所沒有的規律性。為了更瞭解這種規律，藉由電腦軟體繪出其圖形，圖形顯示出如碎形般的複製關係，不論放大或縮小，其中的遞迴關係並未改變，頗令人好奇，因此著手研究。

研究過程中對於圖形的規律性採用先臆測、接著歸納、最後給予證明的方式呈現。得到以下的結論：

一、分別以數列呈現新三角形圖形的規律性。

二、分別將新三角形中每一列中的某數字（如-1、ω 或 ω^2）的個數予以通式表之。

三、分別推算出新三角形第 n 列第 j 行的數是「1」或「-1」及「1」或「ω」或「ω^2」。

四、相同的模式，在特定的圖形範圍中，不斷重複出現。

許多研究將巴斯卡三角形中的所有數，以某數為模的餘數紀錄下，去探討其餘數在新產生的巴斯卡三角形中的分布情形；而在碎形的研究中，大部份著重如何畫出碎形。本研究著重圖形其規律性的探討，提供上述研究不同角度的詮釋與探討。

Abstract

This research subject is based on Pascal' s triangle in senior high school curriculum. The regular triangle begins with「1」and use「+」as operation. Let 「1」 be replaced with「-1」and「ω」, the operation sign「+」be changed into「×」. I do research on the new triangle and discover the seemingly hidden regularity which doesn't exist in the original one. To understand more about this regularity, I draw figures through the computer. The figures show the relationship of reproduction as fractal. Whether the figure is enlarged or minimized, it's surprising curious the recursive relationship doesn't change, so we begin to work on research.

In the process of the research, we make careful observations, assumptions and deductions about the regularity of the figure. Finally, we come to some conclusions by means of giving proofs:

（1）Present the regularity of the new triangle figure with progression.

（2）Present such numbers as「-1」,「ω」,「ω^2」in each row of the new triangle with formulas separately.

（3）Figure out the number in the row n and in the column j of the new triangle is「1」or「-1」,and「1」or「ω」or「ω^2」.

（4）The same model appears again and again in the specific range of figure.

Many researches record Pascal's triangle modulo certain number to explore the distribution of remainders in the new triangle. In the research of fractal, how to draw fractal is mostly focused on. The exploration of this research emphasizes the regularity of figure, offering the interpretation and exploration of researches above from different angles.

壹、前言

一、研究動機

高二學到二項式定理時，接觸到巴斯卡三角形（楊輝三角形），它以「1」爲首，而以「+」爲運算符號；由於之前學過1的n次方根，讓我們有了一個念頭：若將「1」改爲「-1」,「ω」,「i」等等，其兩數「相加」改爲兩數「相乘」後，這種三角形所形成的數列，會不會有什麼規律或性質？爲了進一步的探討，因此在電腦老師協助下，首先將「-1」及運算規則「相乘」藉由電腦程式輸出圖形，從電腦中我發現這三角形類似 Sierpinski Triangle 的碎形【註一】，其圖形的遞迴模式讓我感到非常興奮，心想若用其它數是否會有不一樣的碎形產生呢？果真將「ω」,「i」輸入後所產生的圖形更爲複雜，但似乎都隱藏著一些規律。觀察其圖形的複製關係，它們不僅在越來越小的尺度裡重複細節，而且是以某種固定的方式將細節縮小尺寸，並不斷的循環重現，此種模式就如同（陳義裕，2003）指出碎形具有自我模仿特質，自我模仿是一種很容易辨認的特質，係指在愈來愈小的尺度中，重覆製造細節，並且以某種固定方式縮小細節，造成某種循環的複雜現象。

因此我決定以各種不同的角度，探討這些圖形的規律性。在研究過程中也收集了一些國內外有關的文獻，發現國內對於這方面的資訊有些缺乏，找到一篇相關的研究報告（許介彥，2004），作者以代數層面去探討巴斯卡三角形中任意數之奇偶性，並設計演算法以得知第 n 列第 k 行的數爲奇數或偶數，其實跟本次研究中以「-1」爲起首，運算符號爲「×」的三角形類似，然而此次研究著重於尋找圖形本身的規律性，並擴及「ω」,「i」；國外則有較多相關的文獻，其討論主要是將巴斯卡三角形中的所有數以某數爲模的餘數紀錄下，去探討其餘數在新產生的巴斯卡三角形中的分布情形，與本研究的出發點不同，但給予本研究相當大的啓發，特別在使用同餘的觀點上。

【註一】一九七五年，法裔美國數學學者曼德布洛特（Benoit Mandelbrot）創造了碎形（fractal）這個字，他始終相信宇宙間一定有描述不規則形狀的幾何學。Sierpinski Triangle：波蘭數學家 Waclaw Sierpinski 於 1916 年提出 Sierpinski Gasket 碎形圖形。產生 Sierpinski Triangle 的方法：首先，給定一正三角形，取各邊中點，挖掉中間那塊正三角形(其邊界需留下)，剩下三個相同的正三角形，接下來對剩下的每個三角形做同樣的步驟，挖掉其各邊中點連線所成正三角形，重複此步驟無窮次，即形成 Sierpinski Triangle。

二、研究目的

本研究將原先巴斯卡三角形做改變（將「1」改爲「-1」,「ω」，其兩數「相加」改爲兩數「相乘」）後，探討得到的圖形所具有的規律與性質。以下是各種改變後的部分巴斯卡三角形，圖示如下：

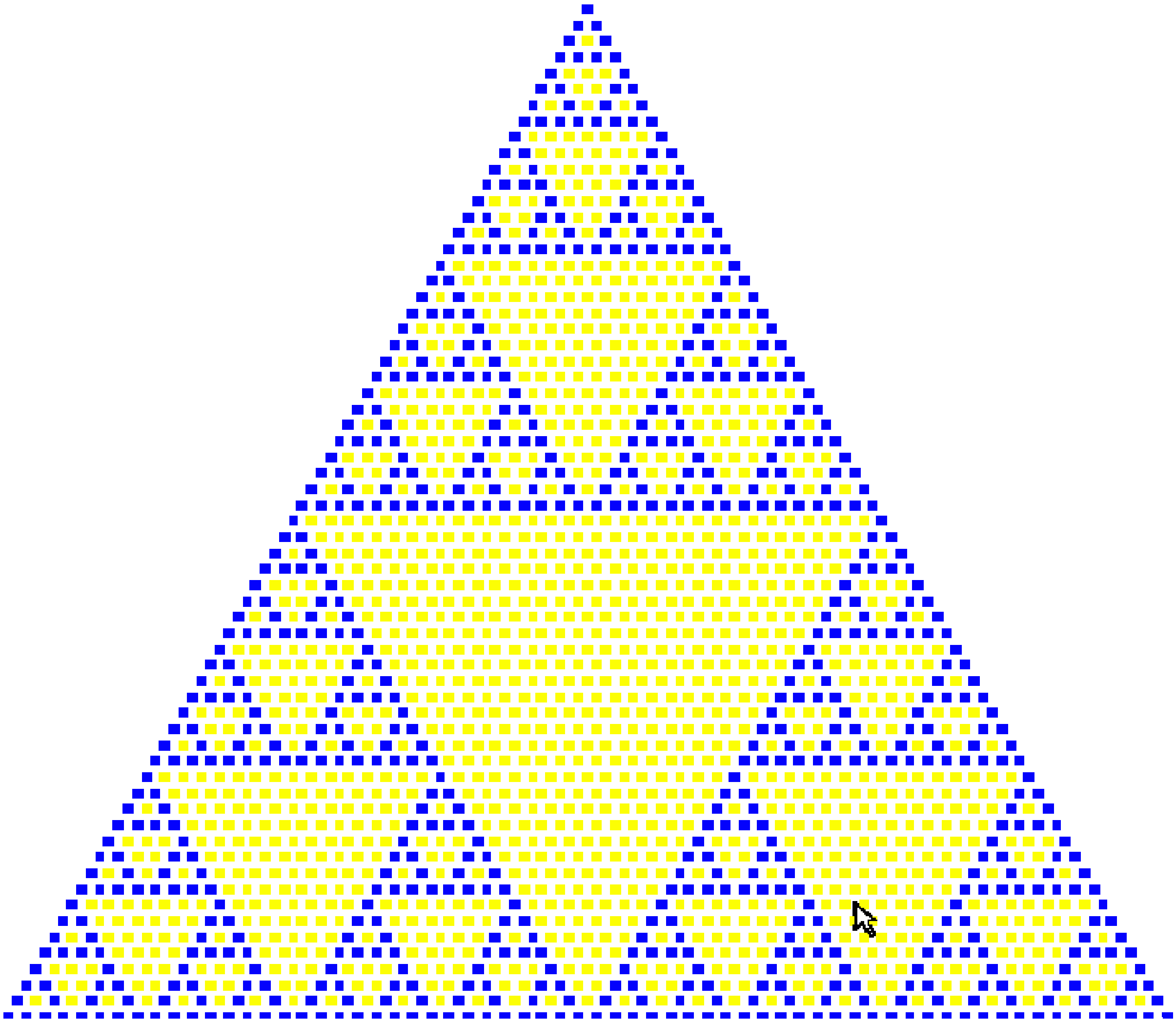
$$
\begin{array}{c}
-1 \\
-1 \quad -1 \\
-1 \quad 1 \quad -1 \\
-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\
-1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \\
-1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \\
-1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad -1 \\
-1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1
\end{array}
$$

圖一：手算的以「-1」爲首的巴斯卡三角形

$$
\begin{array}{c}
\omega \\
\omega \quad \omega \\
\omega \quad \omega^2 \quad \omega \\
\omega \quad 1 \quad 1 \quad \omega \\
\omega \quad \omega \quad 1 \quad \omega \quad \omega \\
\omega \quad \omega^2 \quad \omega \quad \omega \quad \omega^2 \quad \omega \\
\omega \quad 1 \quad 1 \quad \omega^2 \quad 1 \quad 1 \quad \omega \\
\omega \quad \omega \quad 1 \quad \omega^2 \quad \omega^2 \quad 1 \quad \omega \quad \omega \\
\omega \quad \omega^2 \quad \omega \quad \omega^2 \quad \omega \quad \omega^2 \quad \omega \quad \omega^2 \quad \omega
\end{array}
$$

圖二：手算的以「ω」爲首的巴斯卡三角形

從手繪的圖形中似乎隱藏著許多奇妙的規律。進一步藉助電腦程式「$C++$」畫出更延伸的部份，以便讓我們可以更宏觀地檢視這些碎形所具有的規律。以下是部分電腦輸出的圖形，圖示如下：



圖三：程式繪出的以「-1」爲首的巴斯卡三角形（藍色表-1，黃色表1）

三、研究問題

依據研究目的，本研究想要探討的問題如下：

(一) 以「-1」爲首，「$\times$」爲運算符號的三角形，其圖形有何規律性？能否證明之？

(二) 以「-1」爲首，「$\times$」爲運算符號的三角形，其每一列「-1」個數是否有規律？是否可歸納爲通式？

(三) 能否推算出此三角形第 n 列第 j 行的數是「1」或「-1」？

(四) 以「ω」爲首，「$\times$」爲運算符號的三角形，其圖形有何規律性？能否證

明之？

(五) 以「ω」為首，「×」為運算符號的三角形，其每一列「ω」或「ω^2」個數是否有規律？是否可歸納為通式？

(六) 能否推算出此三角形第n列第j行的數是「1」或「ω」或「ω^2」？

貳、研究方法或過程

一、研究方法

本研究屬於「實驗研究法」中的試探性實驗。一般而言，在試探性實驗裡，研究者的興趣在於尋找足以影響依變相的自變項，例如本研究將變項「1」改為「−1」或「ω」，運算符號「＋」改為「×」，從新圖形中尋找其規律性，在試探的過程中，藉由電腦的協助繪出這些三角形，也由於這些圖形，讓本研究與碎形有了第一次接觸，也因為如此使本研究更多了一些研究靈感與方向。

黃光雄、簡茂發（2000）指出如果研究者對於所探討的問題所知有限，則可進行試探性實驗，此時，他至多只能提出一個非正式的假設，等到他在試探性實驗中，得到相關的資料後，他便可以慢慢形成更明確的假設，預測如果改變自變項將有何結果。在此研究中，研究者針對出以「−1」及為首，「×」為運算符號及以「ω」為首，「×」為運算符號的三角形作討論，對於每一個研究主題，首先採臆測，再大膽作假設，但最後均盡量予以證明；而對於圖形規律關係的探討，先以遞迴方式表出，再由遞迴關係中逐步推出其一般式。

二、研究工具及預備知識

本研究的研究工具及預備知識詳述如下：

（一）二項式定理與巴斯卡三角形

在巴斯卡（Blaise Pascal, 1654）的算術三角圖論著一書中，記載了所謂的「算術三角圖」，也就是將二項式定理：

$(x+y)^n = C_0^n X^n + C_1^n x^{n-1}y + C_2^n x^{n-2}y^2 + \dots\dots + C_{n-1}^n xy^{n-1} + C_n^n y^n$，即$\sum_{r=0}^{n} C_r^n x^{n-r} y^r$依$n=1$，2，3，4，5，……將各項係數逐列記錄，今謂之「巴斯卡三角形（Pascal's Triangle）」。中國在宋理宗景定二年（1261），數學家楊輝所寫的詳解九章算法中已出現此圖，稱為「開方作法本源圖」，書中註明「源出釋鎖算書，賈憲用此術」賈憲是北宋時代的人，也就是說早在公元十一世紀時，我們國就已知道此圖了，因此，此三角形亦稱為賈憲或楊輝三角形。圖三為原始的巴斯卡三角形，在頂端放「1」，其他的數依據其正上方兩數的和決定；空白的部分可視為「0」，因為頂端的「1」跟外面的「0」相加恆為「1」，所以兩旁的數恆為「1」。

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

圖四:巴斯卡三角形

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & C_0^0 & & & & & & \\
 & & & & & C_0^1 & & C_1^1 & & & & & \\
 & & & & C_0^2 & & C_1^2 & & C_2^2 & & & & \\
 & & & C_0^3 & & C_1^3 & & C_2^3 & & C_3^3 & & & \\
 & & C_0^4 & & C_1^4 & & C_2^4 & & C_3^4 & & C_4^4 & & \\
 & C_0^5 & & C_1^5 & & C_2^5 & & C_3^5 & & C_4^5 & & C_5^5 & \\
C_0^6 & & C_1^6 & & C_2^6 & & C_3^6 & & C_4^6 & & C_5^6 & & C_6^6
\end{array}
$$

圖五:巴斯卡三角形（以二項式係數表示）

（二）電腦程式

「*C*++」是一個用來寫程式的工具軟體，也可以利用它來觀察一些事情的演變，這些演變也許不是人所做不到的，只是由電腦來做速度會比較快，效率也比較高。對我們來說，*C*++爲我們節省了很多機械式運算的時間，讓我們直接看到最後的結果，譬如說是一個圖形；要強調的是，它並不能直接提供我們要研究的問題的解答，只是一個非常有利的觀察工具。

（三）高斯函數

高斯函數(Gauss)定義如下：$f(x)$=〔x〕=小於或等於 x 的最大整數

（四）十進位數表爲二進位與三進位

古時人類尚未有文字及數字時，人類使用唾手可得之物來計算數量，而最接近人類的當然是人類的雙手，一般人的雙手加起來有十隻手指，這就是十進位的起源，這也是人類爲何較常使用十進位的原因，在計量時以 10 爲基數，權值爲10^{n-1}（n爲位數）。而二進位的基數爲 2，權值爲2^{n-1}；三進位的基數爲 3，權值爲3^{n-1}（n爲位數）。

而要將十進位轉換爲二進位（或三進位）時我們必須將整數部分與小數部分分開轉換，分別說明如下：

1. 整數部分轉換方式：

將該數連續除以二進位制（或三進位制）的基數 2（或 3），直到商數爲 0。由下往上取每次相除所得餘數。

2. 小數部分轉換方式：

將小數點後的數字乘以二進位制（或三進位制）的基數 2（或 3），在將所得成績小數點後的數字乘以 2（或 3），如此重複直到小數點後的數字全爲 0 時停止。由上而下取每次相乘所得的整數。

（五）同餘：

定義：若且唯若 $a-b$ 被 m 整除，稱 a、b 對模 m 同餘。用同餘式來表示：$a \equiv b \pmod{m}$

（六）**Lucas' Theorem**：

令 $n,k \in N, 0 \le k \le n$ ， $n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_m p^m, 0 \le a_i < p$

$k = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 \ldots + b_m p^m, 0 \le b_i < p$

則 $\binom{n}{k} \equiv \binom{a_0}{b_0}\binom{a_1}{b_1}\binom{a_2}{b_2} \ldots \pmod{p}$（ p 爲質數）

三、 研究過程

（一） 關於以「−1」爲首，「×」爲運算符號的三角形的研究

研究開始時，我們思考著首位應該要放「1」還是「−1」，是否有影響？而後來發現，原來三角形中的每個數都可化爲「−1」的次方數，而其指數則呈現一巴斯卡三角形（如圖六）！於是，我們在首位放上 $(-1)^1$ ，也就是「−1」。另外，此三角形外的每個數，也就理所當然的可視爲 $(-1)^0$ ，也就是「1」。

$$(-1)^1$$

$$(-1)^1 \quad (-1)^1$$

$$(-1)^1 \quad (-1)^2 \quad (-1)^1$$

$$(-1)^1 \quad (-1)^3 \quad (-1)^3 \quad (-1)^1$$

$$(-1)^1 \quad (-1)^4 \quad (-1)^6 \quad (-1)^4 \quad (-1)^1$$

$$(-1)^1 \quad (-1)^5 \quad (-1)^{10} \quad (-1)^{10} \quad (-1)^5 \quad (-1)^1$$

$$(-1)^1 \quad (-1)^6 \quad (-1)^{15} \quad (-1)^{20} \quad (-1)^{15} \quad (-1)^6 \quad (-1)^1$$

圖六: 以「−1」爲起首的三角形

$$(-1)^{C_0^0}$$

$$(-1)^{C_0^1} \quad (-1)^{C_1^1}$$

$$(-1)^{C_0^2} \quad (-1)^{C_1^2} \quad (-1)^{C_2^2}$$

$$(-1)^{C_0^3} \quad (-1)^{C_1^3} \quad (-1)^{C_2^3} \quad (-1)^{C_3^3}$$

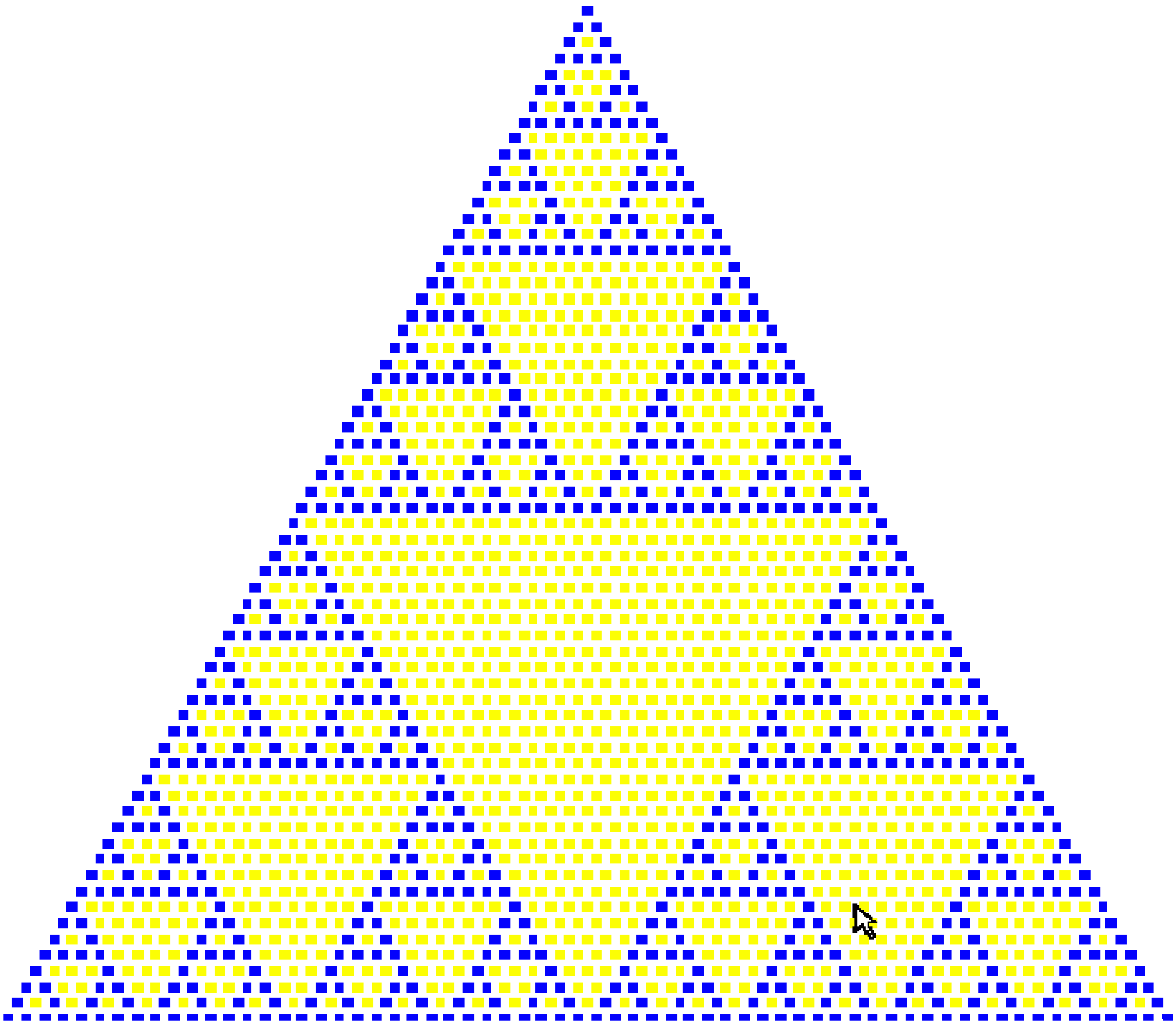
$$(-1)^{C_0^4} \quad (-1)^{C_1^4} \quad (-1)^{C_2^4} \quad (-1)^{C_3^4} \quad (-1)^{C_4^4}$$

$$(-1)C_0^5 \quad (-1)^{C_1^5} \quad (-1)^{C_2^5} \quad (-1)^{C_3^5} \quad (-1)^{C_4^5} \quad (-1)^{C_5^5}$$

$$(-1)^{C_0^6} \quad (-1)^{C_1^6} \quad (-1)^{C_2^6} \quad (-1)^{C_3^6} \quad (-1)^{C_4^6} \quad (-1)^{C_5^6} \quad (-1)^{C_6^6}$$

圖七: 以「−1」爲起首的三角形與巴斯卡三角形的關係

爲了更仔細觀察未看到的規律，便將此運算規則以電腦 $C++$ 程式輸出圖形。



圖八：程式繪出的以「-1」爲首的巴斯卡三角形（藍色表−1，黃色表1）

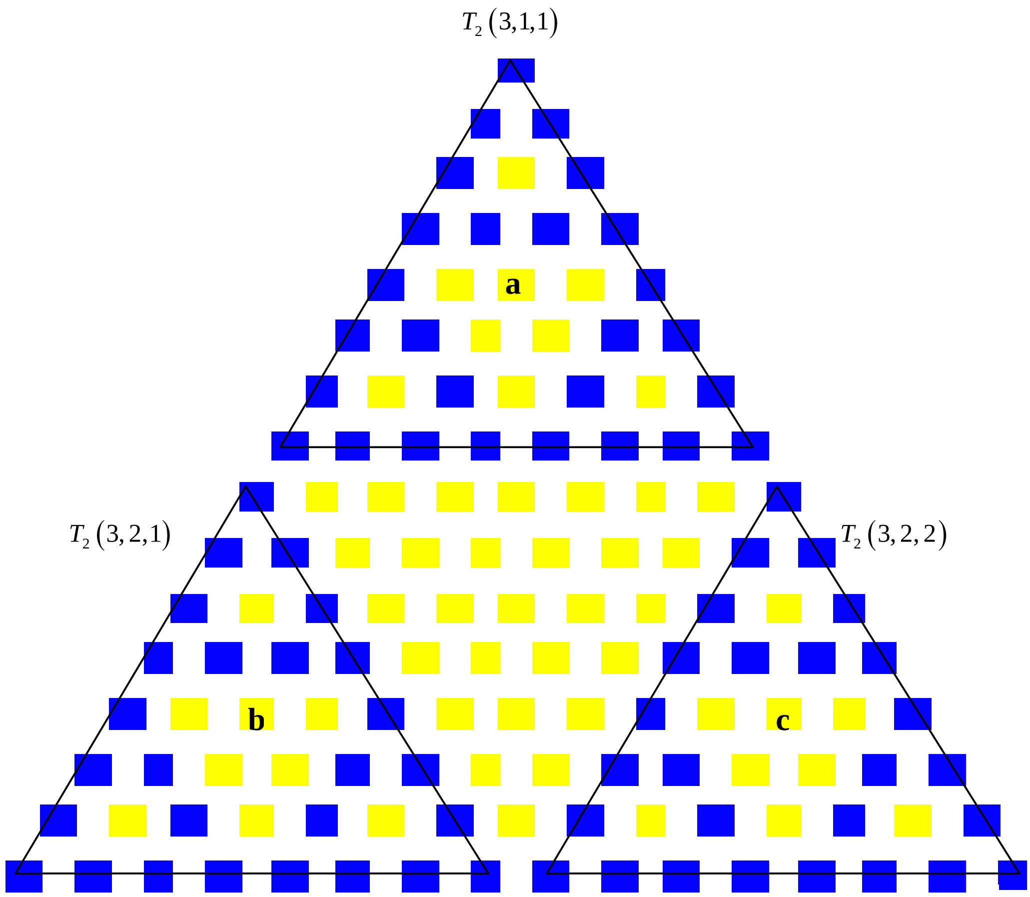
（Lawrence H. Riddle, 1998）以 Lucas's Theorem 來證明此種圖形的複製模式，給予我們不同的靈感，以另一種方式予以證明。

1. 證明圖形的遞迴關係

在證明以前，先定義一個符號$T_m\left(k,s_1,s_2\right)$，定義如下：

$$T_m\left(k,s_1,s_2\right)=\left\{P_m\left(n,j\right)\mid n=\left(s_1-1\right)\cdot m^k+r,\left(s_2-1\right)\cdot m^k<j\le\left(s_2-1\right)\cdot m^k+r\right\}$$
$$\left(m^k\ge r,\quad n,r\in N,k\in N\cup\{0\}\right)$$

直觀來說，將此三角型分為兩階，就是第s_1階第s_2位的k單位三角形。



圖九：以 T 集合表徵以「-1」爲首之巴斯卡三角形各部份

「-1」的指數相當於巴斯卡三角形除以 2 的餘數，故有以下證明。

問題：試證 $T_2\left(k,1,1\right)\equiv T_2\left(k,2,1\right)\equiv T_2\left(k,2,2\right)\left(k\in N\cup\{0\}\right)$

證明：設 a,b,c 各爲$T_2\left(k,1,1\right)$，$T_2\left(k,2,1\right)$，$T_2\left(k,2,2\right)$同一個相對位置上的數（如圖九）。即

$$a=\binom{n-1}{j-1},b=\binom{n-1+2^k}{j-1},c=\binom{n-1+2^k}{j-1+2^k}\left(n,j\in N,k\in N\cup\{0\}\right)\text{又令}$$

$$n-1=n_0+n_1\cdot 2+n_2\cdot 2^2+\dots n_c\cdot 2^c=\left(n_0n_1n_2\dots n_c\right)_2$$
$$j-1=j_0+j_1\cdot 2+j_2\cdot 2^2+\dots j_c\cdot 2^c=\left(j_0j_1j_2\dots j_c\right)_2$$
$$\left(n_i,j_i\in\{0,1\}\right)$$

根據 Lucas' Theorem，可得：

$$a=\binom{n-1}{j-1}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\cdots}{j_0j_1j_2\cdots}$$（三進制，以下同）

$$b=\binom{n-1+2^k}{j-1}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\dots 1}{j_0j_1j_2\dots 0}\equiv\binom{n_0n_1n_2\cdots}{j_0j_1j_2\dots}\binom{1}{0}\equiv 1\cdot\mathrm{a}\pmod 2$$
$$c=\binom{n-1+2^k}{j-1+2^k}\Rightarrow\binom{n_0n_1n_2\dots 1}{j_0j_1j_2\dots 1}\equiv\binom{n_0n_1n_2\cdots}{j_0j_1j_2\dots}\binom{1}{1}\equiv 1\cdot\mathrm{a}\pmod 2$$
$$\Rightarrow a\equiv b\equiv c$$

即對任意k，皆有以下結果

$$\Rightarrow T_2(k,1,1)\equiv T_2(k,2,1)\equiv T_2(k,2,2)\left(k\in\mathbb{N}\cup\{0\}\right)$$

故得證。說明此種模式會反覆遞迴下去。

證明圖形的遞迴關係後，研究者將對此三角形中第n列「$(-1)^1$」的個數作探討。首先將$\omega_2(1,n)$定義爲在以「-1」（$x^2=1$的根）爲首，「×」爲運算符號的三角形中，第n列「$(-1)^1$」的個數。

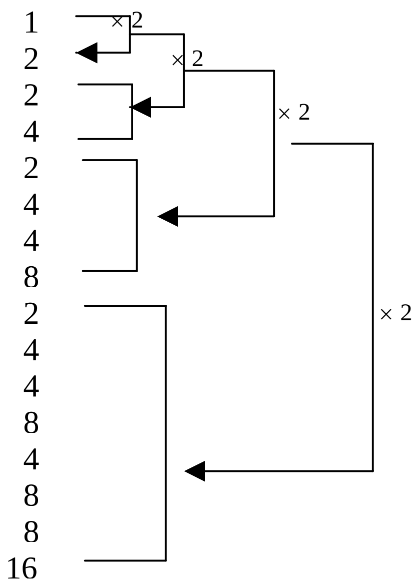
2. 對第n列「$(-1)^1$」的個數（即$\omega_2(1,n)$）的探討

（1）數列$\omega_2(1,n)$的複製關係

觀察數列$\omega_2(1,1),\omega_2(1,2),\omega_2(1,3),\omega_2(1,4),......$

$\Rightarrow 1,2,2,4,2,4,4,8,2,4,4,8,4,8,8,16\dots$

仔細觀察後，我們發現此數列有某種規律性存在，以下是觀察結果，圖示如下：



圖十：數列$\omega_2(1,n)$的複製關係

（**2**）$\omega_2(1,n)$的遞迴關係

觀察圖九的模式，發現若把整個三角形分爲兩個階層，則第二階每一列中的「-1」個數，都是第一階相對列的兩倍。

（$\because T_2(k,1,1)\equiv T_2(k,2,1)\equiv T_2(k,2,2)$），於是可以得到以下結論：

結論：a. 遞迴起點 ：$\omega_2(1,1)=1$ b.當$n>1\in N$ ，令 $n=2^k+r\left(2^k\ge r,\quad n,r\in N,k\in N\cup\{0\}\right)$ $\omega_2(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_2(1,\mathrm{r})$

（**3**）$\omega_2(1,n)$ 一般項的表徵

利用數列$\omega_2(1,n)$的遞迴關係$n=2^k+r,2^k\ge r\left(n,r\in N,k\ge 0\right)$則$\omega_2(1,n)=\omega_2(1,r)$來求$\omega_2(1,n)$的一般項。以下以三個例子作說明，並闡述我們由遞迴關係推出其一般項表徵的過程：

例題：試求 a. $\omega_2(1,56)=?$ **b.** $\omega_2(1,1234)=?$ **c.** $\omega_2(1,49875)=?$

解 **a.**：先以遞迴關係式解題：

$56=2^5+24\Rightarrow\omega_2(1,56)=2\omega_2(1,24)$ $24=2^4+8\Rightarrow\omega_2(1,24)=2\omega_2(1,8)$

$\Rightarrow\omega_2(1,56)=2\omega_2(1,24)=2\cdot 2\omega_2(1,8)=2\cdot 2\cdot 8=32$

但以上之算法，在n值非常大時，將變得極爲繁雜，於是便想利用一個方法，先將n化爲二進制，似乎有很大幫助。

解 **b.**：以二進制解題：

$(1234)_{10}=(10011010010)_2$，以下以二進制來運算

很明顯的，$n=10011010010\Rightarrow r=11010010\Rightarrow r_1=1010010\Rightarrow\ldots$

$$\Rightarrow \omega_2(1,10011010010)=2\cdot\omega_2(1,11010010)$$
$$=2^2\cdot\omega_2(1,1010010)=2^3\cdot\omega_2(1,10010)=2^4\cdot\omega_2(1,10)=2^4\cdot 2=32$$

引進二進制，可以將 $\omega_2(1,n)$ 的一般項表徵出來：

結論：令 $(n)_{10}=(n_0n_1n_2\dots)_2$，且 n_i 中有 k 個1，最小1的權值為 2^x，則： $\omega_2(1,n)=2^{k-1}\cdot 2^x$

解 c：以一般式結論解題：

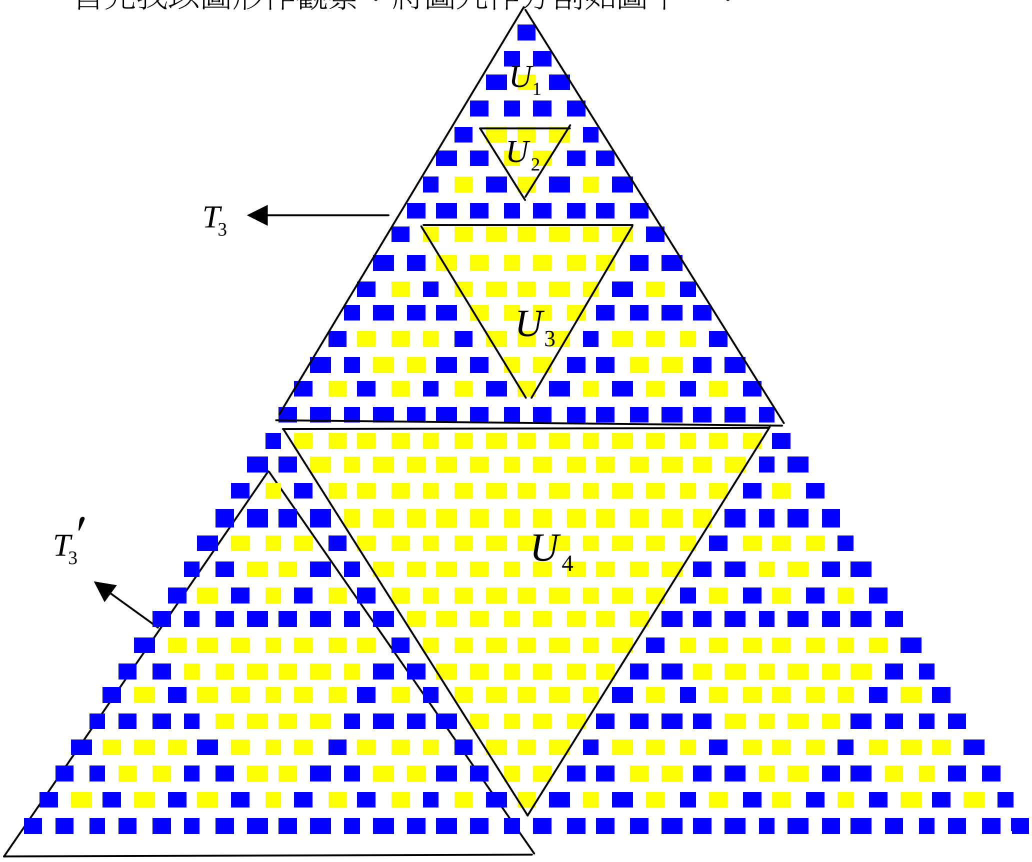
$(49875)_{10}=(1100001011010011)_2\Rightarrow k=8,2^x=2^0$

故 $\omega_2(1,49875)=2^7\cdot 2^0=128$

3. 第 n 列第 j 行是1或−1的討論

以下將針對此圖形第 n 列第 j 行的數是1或−1 作討論。我將 $P_2(n,j)$ 表示「第 n 列第 j 行的數」。因為此三角形左右必對稱，左邊數來第 j 項會等於右邊數來第 j 項，故 $P_2(n,j)=P_2(n,n-j+1)$（對稱數），關於此部分的研討，我最終的目標是想要盡可能簡單迅速地得出 $P_2(n,j)$ 等於何數。而唯一能做的，就是不放過圖中任何的蛛絲螞跡——發現規則性：

首先我以圖形作觀察：將圖九作分割如圖十一：



圖十一：將三角形的各項以集合的觀點分類

初步觀察後，我開始猜測，或許如圖十一的 U 系列集合，其中的每一項會有共同點。我由 U 系列集合三角形的倒立性質，發現對於同一個 U 系列集合，其中最右項與最左項的連線長，與列數成反向變動的關係。以表格的方式呈現：

所屬的集合	列數n	U 系列集合最右數和最左數連線的格子點	此連線的格子點數與列數之和
U_1	$3=2^1+1$	1	2^2
U_2	$5=2^2+1$	3	2^3
	$6=2^2+2$	2	2^3
	$7=2^2+3$	1	2^3
U_3	$9=2^3+1$	7	2^4
	$10=2^3+2$	6	2^4
	$11=2^3+3$	5	2^4
	$12=2^3+4$	4	2^4
	$13=2^3+5$	3	2^4
	$14=2^3+6$	2	2^4
	$15=2^3+7$	1	2^4

表一：分析 U 系列集合三角形與列數的關係

上述連線的格子點數，就等於 U 系列集合中最右項和最左項的項數差加一。而因爲圖形是對稱的，最右和最左的兩數是對稱數，所以此兩數必爲$P_2(n,j)$和$P_2(n,n-j+1)$的關係。只要任一$P_2(n,j)$與其對稱數$P_2(n,n-j+1)$連線的格子點數，小於或等於表中所列的的上限，就表示這個$P_2(n,j)$身在 U 系集合中，也就等於「1」（連線的格子點數$=|n+1-2j|+1$）。我們又發現，在同一個集合的範圍，此連線的格子點數，與列數之和維持一定值2^k。將以上的結論整理如下：

初步結論：

$n=2^k+r,2^k\ge r(n,r\in N,k\ge 0)$ 若且唯若$P_2(n,j)\in U_k$

則$|n+1-2j|+1+n\le 2^{k+1}\Rightarrow |n+1-2j|+1+n-2^k\le 2^{k+1}-2^k$

$\Rightarrow |n+1-2j|+r+1\le 2^k$

這是我得到的初步結論，然而鍥而不捨地設法讓它更單純。只要將$P_2(n,j)$鎖定在三角形的左半部（滿足$j\le\dfrac{\text{n}+1}{2}$），。右半部的數以$P_2(n,j)=P_2(n,n-j+1)$的方式轉換到左半部，則此公式還可以修改得更簡單：

修正後結論 ：	$\because n+1-2j\ge 0\ \therefore \lvert n+1-2j\rvert = n+1-2j\ \ \therefore \lvert n+1-2j\rvert + r+1\le 2^k$ $\Rightarrow n+1-2j+2r+1\le n\ \ \Rightarrow r-j+1\le 0\ \ r-j+1\le 0\Rightarrow P_2(n,j)\in U_k$

但若結果發現 $P_2(n,j)\notin \mathrm{U_k}$ ？譬如說 $n=21, j=3$ ，因爲 $P_2(21,3)$ 已經被鎖定在左半部了（$3\le \frac{21+1}{2}$），又發現 $P_2(21,3)\notin \mathrm{U}_4$ ，則表示 $P_2(21,3)\in T_3'$ 。接著，因爲 T_3' 是 T_3 中所有的數下移 2^{k} 列之後的結果，故 T_3 中所有的數應皆可表爲 $P_2(\mathrm{n}\text{-}2^{\mathrm{k}}, j)$=$P_2(r,j)$ ； $P_2(21,3)$ 在 T_3 中有一個對應的數 $P_2(5,3)$ 。現在換成檢測 $P_2(5,3)$（$3\le \frac{5+1}{2}$）是否在 U_2 中，$\because$ 1-3+1 ≤ 0 ，$\therefore P_2(21,3)$=1 。以此類推，可以得到所要知道的項，我將結論總結於下：

總結論：設 $P_2(n,j)$ 爲第 n 列第 j 行的數，$n=2^k+r, 2^k>r\,(n,r\in N, k\ge 0),\ j\le \frac{\mathrm{n}+1}{2}$

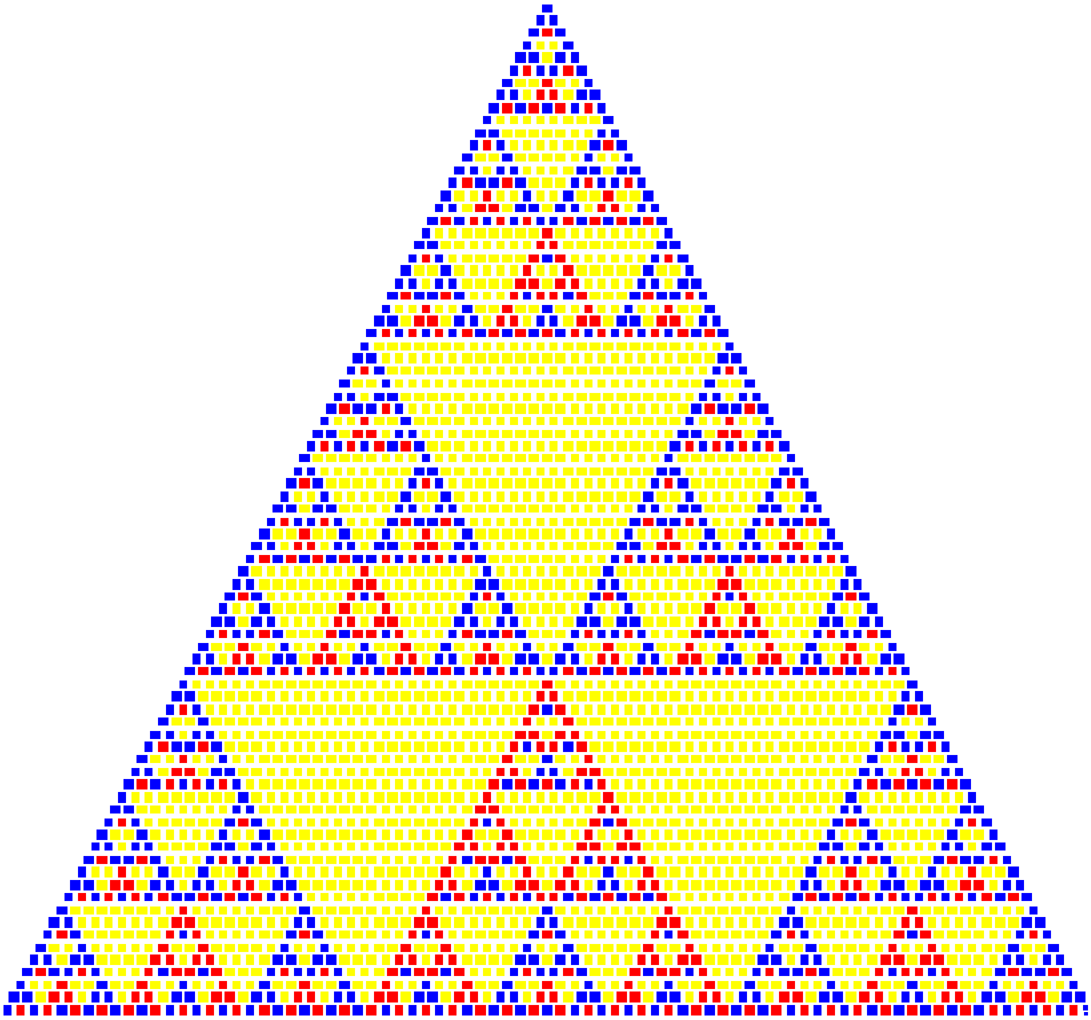
則：1.若 $\mathrm{r}-j+1\le 0\Rightarrow P_2(n,j)=1$

2.若 $\mathrm{r}-j+1>0$ ，則改求 $P_2(r,j_2)$ ，

且 $r=2^{k_2}+r_2, 2^{k_2}>r_2\,(r,r_2\in N, k_2\ge 0),$ ， $j_2\le \frac{r+1}{2}$ 　則回到 1.，

檢驗 r_2-j_2+1；如果又不合，再回到 2.，檢查到能得知 $P_2(r_x, j_{x+1})$ 爲止。

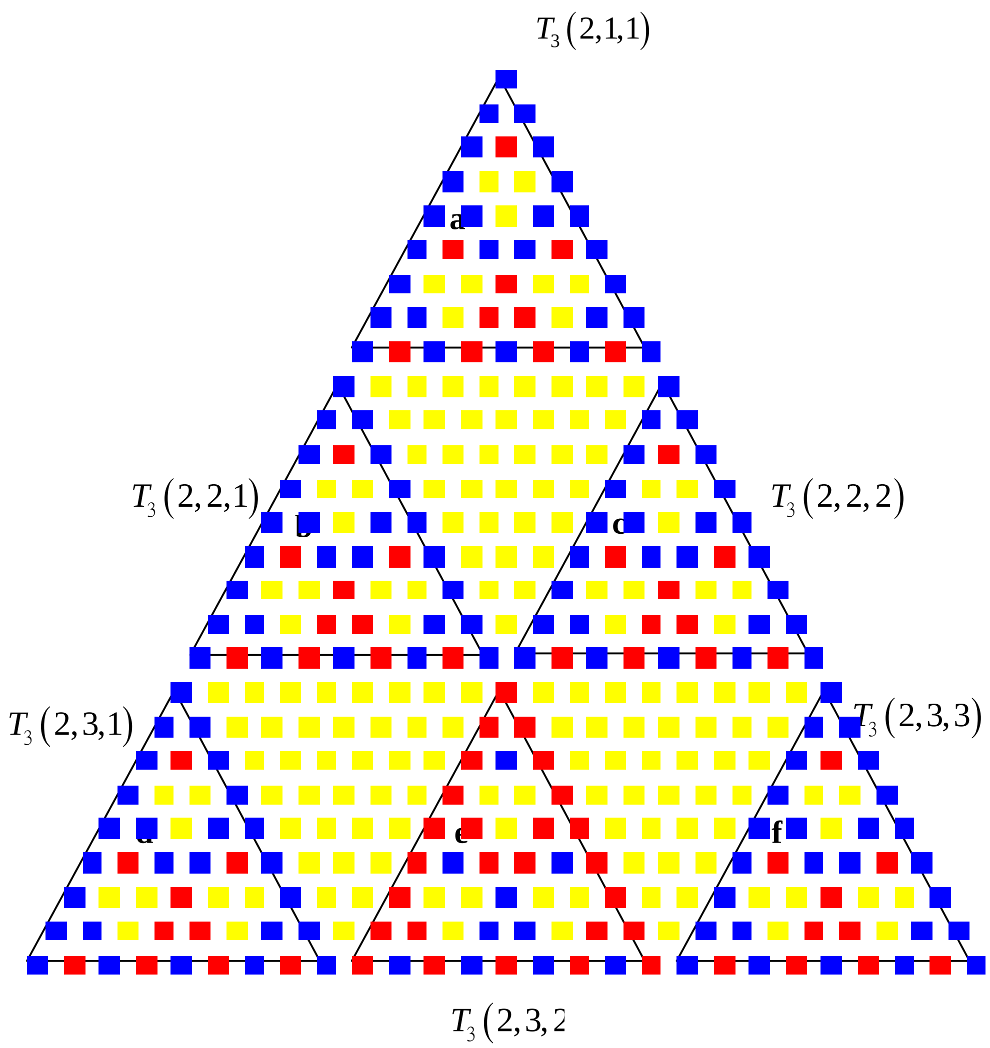
（二）關於以「ω」爲首，「×」爲運算符號的三角形的研究



圖十二：程式繪出的以「ω」為首的巴斯卡三角形(藍色表ω(餘數1)，紅色表ω^2(餘數2)，黃色表1(餘數0))

「ω」的指數相當於巴斯卡三角形除以3的餘數。與「-1」為首，「×」為運算符號的三角形(模2之巴斯卡三角形)相同，我也使用Lucas' Theorem來證明圖形之遞迴性：

1. 證明圖形的遞迴關係



圖十三：以 T 集合表徵以「ω」爲首之巴斯卡三角形各部份

問題：試證 $T_3(k,1,1)\equiv T_3(k,2,1)\equiv T_3(k,2,2)\equiv T_3(k,3,1)\equiv T_3(k,3,3)$`

$\equiv 2\cdot T_3(k,3,2) \qquad (k\in N\cup\{0\})$

證明：設 a,b,c,d,e,f 各爲$T_3(k,1,1)$，$T_3(k,2,1)$，$T_3(k,2,2)$，$T_3(k,3,1)$，$T_3(k,3,2)$，$T_3(k,3,3)$中同一個相對位置上的數（如圖十二）。

即 $a=\binom{n-1}{j-1}, b=\binom{n-1+3^k}{j-1}, c=\binom{n-1+3^k}{j-1+3^k},$

$$d=\binom{n-1+2\cdot 3^k}{j-1}, e=\binom{n-1+2\cdot 3^k}{j-1+3^k}, f=\binom{n-1+2\cdot 3^k}{j-1+2\cdot 3^k}\left(n,j\in N,k\in N\cup\{0\}\right)$$

又令

$$n-1=n_0+n_1\cdot 3+n_2\cdot 3^2+\ldots=\left(n_0n_1n_2\ldots\right)_3$$
$$j-1=j_0+j_1\cdot 3+j_2\cdot 3^2+\ldots=\left(j_0j_1j_2\ldots\right)_3\quad\left(n_i,j_i\in\{0,1,2\}\right)$$

根據 Lucas' Theorem，可得：

$a=\begin{pmatrix}n-1\\j-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots\\j_0j_1j_2\ldots\end{pmatrix}$（三進制，以下同）

$$b=\begin{pmatrix}n-1+3^k\\j-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots1\\j_0j_1j_2\ldots0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots\\j_0j_1j_2\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\equiv1\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$
$$c=\begin{pmatrix}n-1+3^k\\j-1+3^k\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots1\\j_0j_1j_2\ldots1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots\\j_0j_1j_2\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\equiv1\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$
$$d=\begin{pmatrix}n-1+2\cdot3^k\\j-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots2\\j_0j_1j_2\ldots0\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots\\j_0j_1j_2\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}\equiv1\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$
$$f=\begin{pmatrix}n-1+2\cdot3^k\\j-1+2\cdot3^k\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots2\\j_0j_1j_2\ldots2\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots\\j_0j_1j_2\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\equiv1\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$
$$\Rightarrow a\equiv b\equiv c\equiv d\equiv f$$

$$e=\begin{pmatrix}n-1+2\cdot3^k\\j-1+3^k\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots2\\j_0j_1j_2\ldots1\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}n_0n_1n_2\ldots\\j_0j_1j_2\ldots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\equiv2\cdot\mathrm{a}\pmod 3$$
$$\Rightarrow e\equiv 2a\pmod 3$$

意即 $a\equiv1\Leftrightarrow e\equiv2\cdot1\equiv2\pmod 3,a\equiv2\Leftrightarrow e\equiv2\cdot2\equiv1\pmod 3\Leftrightarrow a\equiv2e$

故對任一組 a,b,c,d,e,f $\Rightarrow$ a ≡ b ≡ c ≡ d ≡ f ≡ 2e

$$\Rightarrow T_3(k,1,1)\equiv T_3(k,2,1)\equiv T_3(k,2,2)\equiv T_3(k,3,1)\equiv T_3(k,3,3)\equiv2\cdot T_3(k,3,2)$$

$\left(k\in N\cup\{0\}\right)$ 故得證。說明此種模式會反覆遞迴下去。

證明圖形的遞迴關係後，研究者將對此三角形中第 n 列「ω^1」與「ω^2」的個數作探討。研究者將 $\omega_3(1,n)$ 定義爲在以「ω」（$x^3=1$ 的根）爲首，「×」爲運算符號的三角形中，第 n 列「ω^1」的個數；$\omega_3(2,n)$ 定義爲在以「ω」（$x^3=1$ 的根）爲首，「×」爲運算符號的三角形中，第 n 列「ω^2」的個數：

2. 對第 n 列「ω^1」的個數與「ω^2」個數（$\omega_3(1,\mathrm{n})$, $\omega_3(2,\mathrm{n})$）的探討

（**1**）$\omega_3(1,\mathrm{n})$**與**$\omega_3(2,\mathrm{n})$**的遞迴關係**

由（一）的結論，不難找出$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$之間的關係。

觀察圖十三的模式，發現若把整個三角形分爲三個階層，則第二階每一列中的同類餘數個數，都是第一階相對列的兩倍。（$\because T_3(k,1,1) \equiv T_3(k,2,1) \equiv T_3(k,2,2)$）而第三階，類似的，$T_3(k,1,1) \equiv T_3(k,3,1) \equiv T_3(k,3,3)$，但它還多了一個$T_3(k,3,2) \equiv 2 \cdot T_3(k,1,1)$，使得$T_3(k,3,2)$的$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$恰好與$T_3(k,1,1)$相反。可得到以下結論：

結論：a. 遞迴起點 $\begin{cases} \omega_3(1,1) = 1 \\ \omega_3(2,1) = 0 \end{cases}$

b. 當$3^k < n \le 2 \cdot 3^k, k \in N \cup \{0\}$ 令

$n = 3^k + r\left(3^k \ge r, \quad n, r \in N\right)$

則：$\left\{\omega_3(1,\mathrm{n}) = 2 \cdot \omega_3(1,\mathrm{r}) \quad \omega_3(2,\mathrm{n}) = 2 \cdot \omega_3(2,\mathrm{r})\right\}$

c. $2 \cdot 3^k < n \le 3^{k+1}, k \in N \cup \{0\}$ $n = 2 \cdot 3^k + r\left(3^k \ge r, \quad n, r \in N\right)$

則：$\left\{\omega_3(1,\mathrm{n}) = 2 \cdot \omega_3(1,\mathrm{r}) + \omega_3(2,\mathrm{r}) \; \omega_3(2,\mathrm{n}) = 2 \cdot \omega_3(2,\mathrm{r}) + \omega_3(1,\mathrm{r})\right\}$

得到了$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$相互依賴的遞迴式，但必須繼續探索下去，嘗試找出$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$各自獨立表徵的一般式。

（**2**）$\omega_3(1,\mathrm{n})$**與**$\omega_3(2,\mathrm{n})$ **一般項的表徵**

爲了從如此特殊之遞迴式推導出一般式，我將分幾個階段來進行。

a. 階段一：列數 3^k **列**$\omega_3(1,\mathrm{n})$**與**$\omega_3(2,\mathrm{n})$**一般項的表徵**

觀察圖十三，可以發現，每當列數爲$3^0, 3^1, 3^2, 3^3 \ldots$時，列中餘數都只有1或2（藍點與紅點），似乎比較單純，於是我決定先探討$\omega_3(1,3^{\mathrm{k}})$以及$\omega_3(2,3^{\mathrm{k}})$的一般式爲何。以下我列表以便看出規律：

餘數個數 \ 列數3^{k}	$\omega_3(1,3^{\mathrm{k}})$	$\omega_3(2,3^{\mathrm{k}})$	和
3^0	1	0	$1=3^0$
3^1	$2 \cdot 1 + 0 = 2$	$2 \cdot 0 + 1 = 1$	$3=3^1$
3^2	$2 \cdot 2 + 1 = 5$	$2 \cdot 1 + 2 = 4$	$9=3^2$
3^3	$2 \cdot 5 + 4 = 14$	$2 \cdot 4 + 5 = 13$	$27=3^3$
3^4	$2 \cdot 14 + 13 = 41$	$2 \cdot 13 + 14 = 40$	$81=3^4$
3^5	$2 \cdot 41 + 40 = 122$	$2 \cdot 40 + 41 = 121$	$243=3^5$

表二：第3^{k}列與餘數個數之關係

從表二，可以很清楚地看見，當 k 值改變時，$\omega_3\left(1,3^k\right)$ 及 $\omega_3\left(2,3^k\right)$ 的和總是等於列數，並且 $\omega_3\left(1,3^k\right)$ 比 $\omega_3\left(2,3^k\right)$ 多一，於是我先預測，$\omega_3\left(1,3^k\right)$ 及 $\omega_3\left(2,3^k\right)$ 的一般式應爲：

$$\omega_3\left(1,3^k\right)=\frac{3^k+1}{2}\ ,\ \omega_3\left(2,3^k\right)=\frac{3^k-1}{2}$$

但這只是預測，因此必須加以證明，要證明以上兩式，即需證明以下兩點：第一，在第 3^k 列中餘數只有 1 或 2；第二，在第 3^k 列中餘數 1 比 2 多一個。以下爲我的證明：

問題：試證 $\omega_3\left(1,3^k\right)+\omega_3\left(2,3^k\right)=3^k$（≡在第 3^k 列餘數只有 1 或 2）

證明：根據巴斯卡三角形，第 3^k 列第 j 行的數可表爲 $\begin{pmatrix}3^k-1\\ j-1\end{pmatrix}$【註二】，且

$k\in\cup\{0\}$，$j\in N$。先令 $\begin{pmatrix}3^k-1\\ j-1\end{pmatrix}$ 以三進制表示，即 $\begin{pmatrix}222\ldots2\\ j_0j_1j_2\ldots\end{pmatrix}$，

$j_i\in\{0,1,2\}$；又 $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}=1,\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=2,\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=1$ 又根據 Lucas' Theorem，可

得：$$\begin{pmatrix}222\ldots2\\ j_0j_1j_2\ldots\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}2\\ j_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ j_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ j_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ \ldots\end{pmatrix}\equiv 1or2$$

即以「ω」爲首的巴斯卡三角形第 3^k 列中必不含餘數 0，得證。

問題：試證 $\omega_3\left(1,3^k\right)-\omega_3\left(2,3^k\right)=1$（≡在第 3^k 列中餘數 1 比 2 多一個）

證明：已知：當 $2\cdot3^k<n\le3^{k+1},k\in N\cup\{0\}$，令 $n=2\cdot3^k+r\left(3^k\ge r,\quad n,r\in N\right)$

$$\begin{cases}\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})+\omega_3(2,\mathrm{r})\ldots\ldots(1)\\ \omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})+\omega_3(1,\mathrm{r})\ldots\ldots(2)\end{cases}\qquad(1)-(2)\text{ 可得：}$$

$$\omega_3(1,\mathrm{n})-\omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})-2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})+\omega_3(2,\mathrm{r})-\omega_3(1,\mathrm{r})$$

【註二】因我們定義頂列列數爲一，不同於巴斯卡三角形定義爲零，故要減一以修正。

$=\omega_3(1,\mathrm{r})-\omega_3(2,\mathrm{r})$　將 $n=3^k$ 代入遞迴式

$\omega_3(1,\mathrm{n})-\omega_3(2,\mathrm{n})=\omega_3(1,\mathrm{r})-\omega_3(2,\mathrm{r})$

即 $\omega_3(1,3^k)-\omega_3(2,3^k)=\omega_3(1,3^{k-1})-\omega_3(2,3^{k-1})$

$=\omega_3(1,3^{k-2})-\omega_3(2,3^{k-2})=\ldots \qquad =\omega_3(1,1)-\omega_3(2,1)$

$\because \omega_3(1,1)=1,\omega_3(2,1)=0 \Rightarrow 1-0=1$　故得證。

經由以上的證明，可將第一階段列數 3^k 列一般項表為以下結論：

階段一結論：列數 3^k 列 $\omega_3(1,\mathrm{n})$ 與 $\omega_3(2,\mathrm{n})$ 一般項的表徵

$$\begin{cases}\omega_3(1,3^k)+\omega_3(2,3^k)=3^k \\ \omega_3(1,3^k)-\omega_3(2,3^k)=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\omega_3(1,3^k)=\dfrac{3^k+1}{2} \\ \omega_3(2,3^k)=\dfrac{3^k-1}{2}\end{cases}$$

以上階段一的結論雖有一些進展，但與目標仍有段距離，因為其它列數非 3^k 的列還有更多，而且更難歸納為一般式；而我們也確實遇到瓶頸，決定先回到遞迴式本身，觀察實際數字代入的情形如何。

b. 階段二：列數 非 3^k 列 $\omega_3(1,\mathrm{n})$ 與 $\omega_3(2,\mathrm{n})$ 一般項的表徵

（a）遞迴式之操作求 $\omega_3(1,\mathrm{n})$ 與 $\omega_3(2,\mathrm{n})$ 某特定項

根據（一）的結論，n 值在不同範圍時，有不同的遞迴算法，現在先幾個例子作觀察：

例題一：試求 $\omega_3(1,20072007)=?$

∨　$20072007=14348907+5723100=2\cdot 3^{15}+5723100$

∨　$5723100=4782969+940131=2\cdot 3^{14}+940131$

∨　$940131=531441+408690=3^{12}+408690$

∨　$408690=2\cdot 177147+54396=2\cdot 3^{11}+54396$

∨　$54396=2\cdot 19683+15030=2\cdot 3^{10}+15030$

$$\Rightarrow \omega_3(1,20072007)=2\cdot\omega_3(1,5723100)=4\cdot\omega_3(1,940131)$$

$$=8\cdot\omega_3(1,408690)=16\cdot\omega_3(1,54396)+8\cdot\omega_3(2,54396)$$

$$=\left[32\cdot\omega_3(1,15030)+16\cdot\omega_3(2,15030)\right]+\left[16\cdot\omega_3(2,15030)+8\cdot\omega_3(1,15030)\right]$$

例題一後我又實驗了許多數字，發現似乎一直在重複同樣的步驟（打勾的算式），便想，如果能夠一次處理完這樣的步驟，便能加快演算的速度。而這個答案，仍與三進制有極大關係，因此在第

二部份，我決定引進三進位制求某求某特定項。

（b）引進三進制 求 $\omega_3(1,\mathrm{n})$ 與 $\omega_3(2,\mathrm{n})$ 某特定項

例題一：試求 $\omega_3(1,20072007)=?$

因 20072007=$(1101202202121200)_3$，故

$\omega_3(1,1101202202121200)$ 可直接寫爲 $\omega_3(1,1112222121200)$

【註三】可得

$\omega_3(1,1112222121200)=8\cdot\omega_3(1,2222121200)$

$=16\cdot\omega_3(1,222121200)+8\cdot\omega_3(2,222121200)$

從例題一顯示以三進制表示後，可以明顯地判斷需要處理的步驟。

以上是以三進制搭配遞迴式實際求某特定項的過程。當然，此種方式不是很成熟，在其中也發現一些問題待解決，但至少這樣的嘗試給了我下一步該走的方向，因此我將以三進制繼續探討如何將遞迴式寫成一般式。

（c）引進三進位制 求 $\omega_3(1,\mathrm{n})$ 與 $\omega_3(2,\mathrm{n})$ 一般項的前置討論

爲了將 $\omega_3(1,\mathrm{n})$ 與 $\omega_3(2,\mathrm{n})$ 表爲一般項，我將作一些前置的討論，以便作爲求出一般項的工具，以下將分甲乙丙丁四個部份對 $\omega_3(1,n_0n_1n_2\ldots),n_i\in\{1,2\}$ 作討論：

甲： $\omega_3(1,2)=?$

$\omega_3(1,21)$ 和 $\omega_3(1,1211)$ 中的 2，範圍介在 $2\cdot3^k<n\le3^{k+1},k\in N\cup\{0\}$，而 $\omega_3(1,2)$ 中的 2 有別於其它位數上的 2，因他的範圍是 $3^0<2\le2\cdot3^0$ 。

故 $\omega_3(1,2)=2\cdot\omega_3(1,1)=2$ ；此外，$\omega_3(1,11)=2\cdot\omega_3(1,1)=2$ 。

故可以得到以下的結論：

甲結論： $\omega_3(1(or2),2)=\omega_3(1(or2),11)$

【註三】將 $(1101202202121200)_3$ 表爲 $3^{m_0}+3^{m_1}+\ldots+3^{m_i}$ 時，中間的 0 不會被表達出來，所以可省略。

乙： $\omega_3\left(1,n_0n_1n_2\ldots n_c\right)$中$n_i$的是否符合「交換律」

觀察：

$\omega_3\left(1,2121\right)=2\cdot\omega_3\left(1,121\right)+\omega_3\left(2,121\right)=\ldots=10\cdot\omega_3\left(1,1\right)+8\cdot\omega_3\left(2,1\right)$

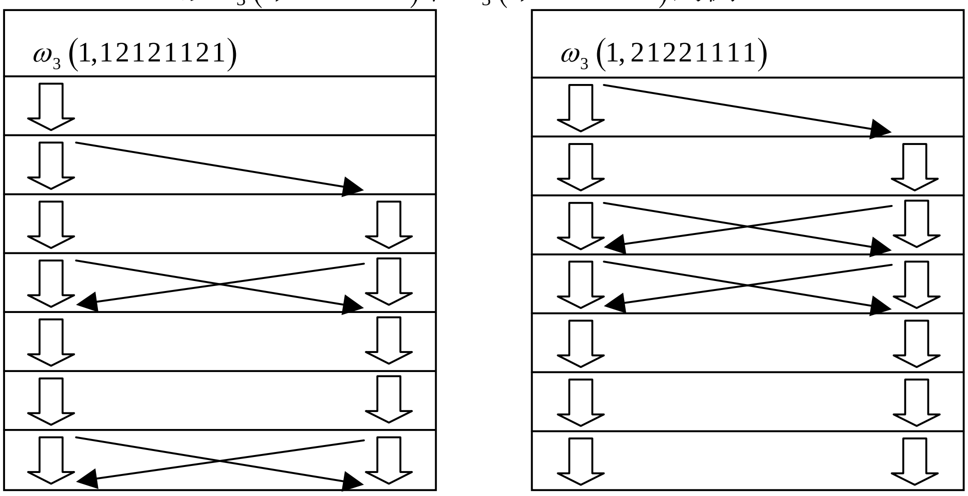
$\omega_3\left(1,1221\right)=2\cdot\omega_3\left(1,221\right)=\ldots=10\cdot\omega_3\left(1,1\right)+8\cdot\omega_3\left(2,1\right)$

$\omega_3\left(1,2211\right)=2\cdot\omega_3\left(1,211\right)+\omega_3\left(2,211\right)=\ldots=10\cdot\omega_3\left(1,1\right)+8\cdot\omega_3\left(2,1\right)$

這些算式的共通點是，它們都「分」兩次，「乘」一次【註四】，而很巧地，它們的計算結果相同；直覺告訴我們其中必有學問，便嘗試其它組數字，例如：

$\omega_3\left(1,22211\right),\omega_3\left(1,22121\right),\omega_3\left(1,21221\right),\omega_3\left(1,12221\right)$都相同；但$\omega_3\left(1,22211\right)$與$\omega_3\left(1,12212\right)$的結果就不同了。似乎只要三進制$n$由一樣多的 1、一樣多的 2 組成（順序不論），並且尾數相同，$\omega_3\left(1,\mathrm{n}\right)$及$\omega_3\left(2,\mathrm{n}\right)$便不改變。我們找到一個方法來解釋這個現象。

以$\omega_3\left(1,12121121\right)$和$\omega_3\left(1,21221111\right)$爲例：



圖十四：遞迴路徑圖，粗箭頭表「乘以 2」，細箭頭表「餘數 1、2 互換」。

如圖十四，這是$\omega_3\left(1,12121121\right)$和$\omega_3\left(1,21221111\right)$以遞迴求解的過程，需要做七次運算（因尾數是 1 不用算，若是 2 則要算）。我們稱之爲「遞迴的路徑圖」，每一個小矩形內即一次運算，稱之爲「段」；只有粗箭頭的段稱爲「直行段」，否則稱之爲「分岔段」。從圖中可以看到，左右圖皆有三個分岔段，四個直行段，正反映著n的三個 2，四個1。

【註四】「分」表示$\omega_3\left(1,\mathrm{n}\right)=2\cdot\omega_3\left(1,\mathrm{r}\right)+\omega_3\left(2,\mathrm{r}\right)$的過程，而用「乘」表示$\omega_3\left(1,\mathrm{n}\right)=2\cdot\omega_3\left(1,\mathrm{r}\right)$的過程。

現在來看這些直行段，當中只有粗箭頭，也就是$\omega_3(1,\mathrm{r})$乘以二，$\omega_3(2,\mathrm{r})$也乘以二，簡言之，直行段即代表「同乘以二」；反過來說，將直行段抽出後，相當於把原本計算結果「同除以二」了。而將左右圖四個直行段抽出後，剩下的路徑是相同的，而根據等量公理，原本左右圖路徑的值也必相同。即$\omega_3(1,12121121)=\omega_3(1,21221111)$。

不只如此，將抽出的直行段插回不同的地方，答案也會相等。另外，由於$\omega_3(1,2)=\omega_3(1,11)$爲直行段，而$\omega_3(1,12212)=\omega_3(1,122111)$，當然。這一切就解釋了 乙 的現象，因此可以得到以下的結論：

> **乙結論：**只要$n_0n_1n_2\ldots n_c$與$m_0m_1m_2\ldots m_c$中有相同個數的1，又有相同個數的 2，且$n_c=m_c$，則
> $\omega_3(1(or2),n_0n_1n_2\ldots n_c)=\omega_3(1(or2),m_0m_1m_2\ldots m_c)$

丙：$\omega_3\left(1(or2),\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)=?$

觀察：

$$\omega_3(1,21)=2\cdot\omega_3(1,1)+\omega_3(2,1)=2$$
$$\omega_3(1,221)=2\cdot\omega_3(1,21)+\omega_3(2,21)=5\cdot\omega_3(1,1)+4\cdot\omega_3(2,1)=5$$
$$\omega_3(1,2221)=\ldots=14\cdot\omega_3(1,1)+13\cdot\omega_3(2,1)=14$$

這些計算結果給我一種似曾相識的感覺，這才想到，原來這跟之前的$\omega_3(1,10),\omega_3(1,100),\omega_3(1,1000)$【註五】一模一樣。我猜想$\omega_3(1,21)$及$\omega_3(1,10)$應該均適用$\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})+\omega_3(2,\mathrm{r})$這個算式，即其路徑都只有分岔段。但這只是猜想，應該加以證明，我採用之前證明$\omega_3(1,3^k)$與$\omega_3(2,3^k)$一般式的方法：

> **問題：**試證$\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)+\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)=3^k$

證明：根據巴斯卡三角形，第$\overbrace{222\ldots21}^{k}$列第$j$行的數可表爲

$\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}$（三進制），且$k\in N\cup\{0\}$， $j_i\in\{0,1,2\}$；

【註五】爲$\omega_3(1,3^1),\omega_3(1,3^2),\omega_3(1,3^3)$之三進制。

又$\binom{0}{0}=1,\binom{0}{1}=0,\binom{0}{2}=0,\binom{2}{0}=1,\binom{2}{1}=2,\binom{2}{2}=1$

根據 Lucas' Theorem，可得：

$$\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}\equiv\binom{2}{j_0}\binom{2}{j_1}\binom{2}{j_2}\binom{2}{\ldots}\binom{2}{j_{k-1}}\binom{0}{j_k}$$

(a) 當 $j_k=0$ ，$\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}\equiv 1or2$

(b) 當 $j_k=1or2$ ，$\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}\equiv 0$

第$\overbrace{222\ldots21}^{k}$列有$3^{k+1}-2$個數，而$j$是從$0$到$222\ldots20$ ，尾數j_k以$0,1,2$一直循環。共有$\frac{\left(3^{k+1}-2\right)+2}{3}=3^k$個$j_k=0$ ，使得$\binom{222\ldots20}{j_0j_1j_2\cdots j_k}\equiv 1or2$ 。

$$\Rightarrow \omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)+\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)=3^k$$ ，得證。

問題： 已知：$\omega_3\left(1,\mathrm{n}\right)-\omega_3\left(2,\mathrm{n}\right)=\omega_3\left(1,\mathrm{r}\right)-\omega_3\left(2,\mathrm{r}\right)$ ，

$n=2\cdot3^k+r,r\le3^k\in N$

試證：$\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)-\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)=1$

證明：$\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)-\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots21}^{k}\right)$

$$=\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots21}^{k-1}\right)-\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots21}^{k-1}\right)$$

$$=\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots21}^{k-2}\right)-\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots21}^{k-2}\right)$$

$$=\ldots=\omega_3(1,1)-\omega_3(2,1)=1$$

由以上兩個的證明，可以得到以下的結論： 可以得到：

丙結論：

1. $\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots2}^{k}1\right)=\dfrac{3^k+1}{2}=\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots0}^{k}\right)$

2. $\omega_3\left(2,\overbrace{222\ldots2}^{k}1\right)=\dfrac{3^k-1}{2}=\omega_3\left(2,1\overbrace{000\ldots0}^{k}\right)$

丁： $\omega_3\left(1(or2),\overbrace{222\ldots2}^{k_1}1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)=?$

設 $\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots2}^{k_1}1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)$

$$=a_1\cdot\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots2}^{k_1-1}1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)+b_1\cdot\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots2}^{k_1-1}1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)$$

$$=a_2\cdot\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots2}^{k_1-2}1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)+b_2\cdot\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots2}^{k_1-2}1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)$$

$$=\ldots\ldots$$

$$=a_{k_1}\cdot\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)+b_{k_1}\cdot\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)$$

觀察 $a_2=2\cdot a_1+b_1, b_2=2\cdot b_1+a_1$ 可推得

$$a_{k_1}+b_{k_1}=\left(2\cdot a_{k_1-1}+b_{k_1-1}\right)+\left(2\cdot b_{k_1-1}+a_{k_1-1}\right)=3\left(a_{k_1-1}+b_{k_1-1}\right)$$

$$=3\left[\left(2\cdot a_{k_1-2}+b_{k_1-2}\right)+\left(2\cdot b_{k_1-2}+a_{k_1-2}\right)\right]=3^2\left(a_{k_1-2}+b_{k_1-2}\right)$$

$$=\ldots\ldots=3^{k_1-1}\left(a_{k_1-(k_1-1)}+b_{k_1-(k_1-1)}\right)=3^{k_1-1}\left(a_1+b_1\right)=3^{k_1-1}(2+1)=3^{k_1}$$

$$a_{k_1}-b_{k_1}=\left(2\cdot a_{k_1-1}+b_{k_1-1}\right)-\left(2\cdot b_{k_1-1}+a_{k_1-1}\right)=a_{k_1-1}-b_{k_1-1}$$

$$=\left(2\cdot a_{k_1-2}+b_{k_1-2}\right)-\left(2\cdot b_{k_1-2}+a_{k_1-2}\right)=a_{k_1-2}-b_{k_1-2}$$

$$=\ldots\ldots=a_{k_1-(k_1-1)}-b_{k_1-(k_1-1)}=a_1-b_1=2-1=1$$

由$\begin{cases} a_{k_1}+b_{k_1}=3^{k_1} \\ a_{k_1}-b_{k_1}=1 \end{cases}$可得$a_{k_1}=\dfrac{3^{k_1}+1}{2}, b_{k_1}=\dfrac{3^{k_1}-1}{2}$

故

$$\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots2}^{k_1}1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)$$

$$=a_{k_1}\cdot\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)+b_{k_1}\cdot\omega_3\left(1,1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)$$

$$=\frac{3^{k_1}+1}{2}\cdot\frac{3^{k_2}+1}{2}+\frac{3^{k_1}-1}{2}\cdot\frac{3^{k_2}-1}{2}$$

$$=\frac{\left(3^{k_1+k_2}+3^{k_1}+3^{k_2}+1\right)+\left(3^{k_1+k_2}-3^{k_1}-3^{k_2}+1\right)}{4}$$

$$=\frac{2\left(3^{k_1+k_2}+1\right)}{4}=\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}$$

丁結論：$\omega_3\left(1,\overbrace{222\ldots2}^{k_1}1\overbrace{000\ldots0}^{k_2}\right)=\dfrac{2\left(3^{k_1+k_2}+1\right)}{4}=\dfrac{3^{k_1+k_2}+1}{2}$

經過以上甲、乙、丙、丁的討論，所需的工具已具備，以下將逐步導出$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$的一般式。

（**d**）導出$\omega_3(1,\mathrm{n})$和$\omega_3(2,\mathrm{n})$的一般式

欲導出最後的一般式，必先將n化爲三進制，再依化簡後的結果求出一般式。以下以兩個例子作說明：

甲：$\omega_3(1,n_0n_1n_2\ldots n_c), n_i\in\{0,1,2\}$化簡的方法：

例題一：$\omega_3(1,1002001021122212000)$

I. 將中間的 0 去掉（∵在化簡過程中，這些 0 不涉及任何運算）

$\Rightarrow\ \omega_3(1,12121122212000)$

II. 與 0 相接的數（或最後一個數）若爲 2，則將 2 化爲11

$\Rightarrow\ \omega_3(1,121211222111000)$

III. 不與 0 相接的 1 皆移至前方（∵已證明 1 或 2 的順序不影響運算結果）$\Rightarrow\ \omega_3(1,111111222221000)$

IV. 有五個 1 在前面，有五個 2 及三個 0 在後面，所以

$$\omega_3(1,1002001021122212000)=2^5\times\frac{3^5+1}{2}=3904$$

例題二： $\omega_3(1,20010211120121000)$

I. 同上，將中間的 0 去掉 $\Rightarrow$ $\omega_3(1,2121112121000)$

II. 不與 0 相接的 1 皆移至前方$\Rightarrow$ $\omega_3(1,1111122221000)$

III. 有五個 1 在前面，有四個 2 及三個 0 在後面，故

$$\omega_3(1,20010211120121000)=2^5\times\frac{3^7+1}{2}=11680$$

乙：結論

I. 將中間的 0 去掉

II. 若與 0 相接的爲 2，則將 2 化爲 11

III. 不與 0 相接的 1 皆移至前方

IV. 化爲$\omega_3\left(\overbrace{11\cdots1}^{l}\overbrace{22\cdots2}^{k_1}1\overbrace{00\cdots0}^{k_2}\right)$的形式，則

此列有$2^k\times\dfrac{3^{l+m}+1}{2}$個餘數 1

依以上化簡的結論，可以將$\omega_3(1,\mathrm{n})$，$\omega_3(2,\mathrm{n})$的一般式，作以下的結論：

結論：

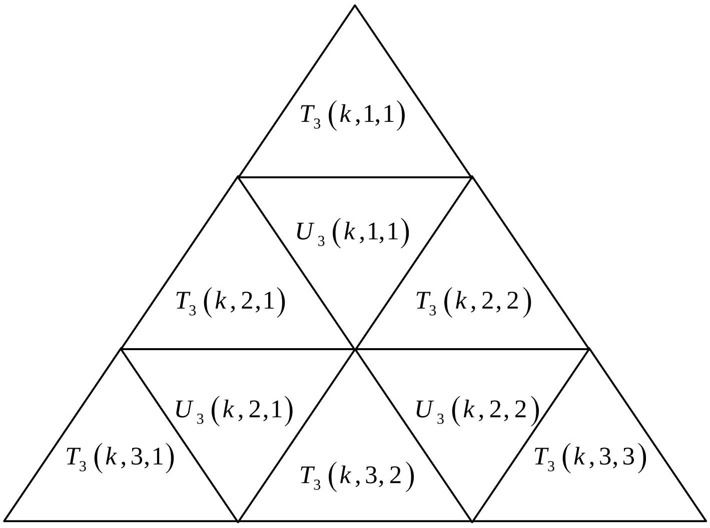
$$\omega_3(1,n)=\omega_3\left(1,\overbrace{11\ldots1}^{l}\overbrace{22\ldots2}^{k_1}1\overbrace{00\ldots0}^{k_2}\right)=2^l\times\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}=2^{l-1}\left(3^{k_1+k_2}+1\right)$$

$$\omega_3(2,n)=\omega_3\left(1,\overbrace{11\ldots1}^{l}\overbrace{22\ldots2}^{k_1}1\overbrace{00\ldots0}^{k_2}\right)=2^l\times\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}=2^{l-1}\left(3^{k_1+k_2}-1\right)$$

最後將針對此圖形第n列第j行的數是「1」或「ω」或「ω^2」，作討論。

3、第n列第j行的數是「1」或「ω」或「ω^2」的探討。

陳義裕（2003）指出碎形隱含一種整體性，我們可從某一尺度的碎形，來推知另一尺度的「同一個」碎形的大致樣，因此研究者試著以集合的觀點表徵出這三角形中的第n列第j行的數是「1」或「ω」或「ω^2」。



圖十四：簡化後的以「ω」爲首的巴斯卡三角形（以集合表示）

圖十四中每個集合均有一定範圍限制，以下用表格來觀察各個集合的範圍爲何。定義 $P_3(n, j)$ 表以「ω」爲首，「×」爲運算符號的三角形第 n 列第 j 行的數。

$T_3(k,1,1)$		$T_3(k,2,1)$		$T_3(k,2,2)$	
n	j 範圍	n	j 範圍	n	j 範圍
1	1	3^k+1	1	3^k+1	3^k+1
2	1~2	3^k+2	1~2	3^k+2	$3^k+1 \sim 3^k+2$
3	1~3	3^k+3	1~3	3^k+3	$3^k+1 \sim 3^k+3$
N	$1 \sim n$	3^k+r	$1 \sim r$	3^k+r	$3^k+1 \sim 3^k+r$
$T_3(k,3,1)$		$T_3(k,3,2)$		$T_3(k,3,3)$	
n	j 範圍	n	j 範圍	n	j 範圍
$2\cdot 3^k+1$	1	$2\cdot 3^k+1$	3^k+1	$2\cdot 3^k+1$	$2\cdot 3^k+1 \sim 2\cdot 3^k+1$
$2\cdot 3^k+2$	1~2	$2\cdot 3^k+2$	$3^k+1 \sim 3^k+2$	$2\cdot 3^k+2$	$2\cdot 3^k+1 \sim 2\cdot 3^k+2$
$2\cdot 3^k+3$	1~3	$2\cdot 3^k+3$	$3^k+1 \sim 3^k+3$	$2\cdot 3^k+3$	$2\cdot 3^k+1 \sim 2\cdot 3^k+3$
$2\cdot 3^k+r$	$1 \sim r$	$2\cdot 3^k+r$	$3^k+1 \sim 3^k+r$	$2\cdot 3^k+r$	$2\cdot 3^k+1 \sim 2\cdot 3^k+r$
$U_3(k,1,1)$		$U_3(k,2,1)$		$U_3(k,2,2)$	
n	j 範圍	n	j 範圍	n	j 範圍
3^k+1	$2 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+1$	$2 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+1$	$3^k+2 \sim 2\cdot 3^k$
3^k+2	$3 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+2$	$3 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+2$	$3^k+3 \sim 2\cdot 3^k$
3^k+3	$4 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+3$	$4 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+3$	$3^k+4 \sim 2\cdot 3^k$
3^k+r	$r+1 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+r$	$r+1 \sim 3^k$	$2\cdot 3^k+r$	$3^k+r+1 \sim 2\cdot 3^k$

表三：以「ω」爲首之巴斯卡三角形各個集合的範圍

從表三可知以「ω」爲首，「×」爲運算符號的三角形的 T 集合可定義爲：

$T_3(k,s_1,s_2)=\{P_3(n,j)\mid n=(s_1-1)\cdot 3^k+r,(s_2-1)\cdot 3^k<j\le(s_2-1)\cdot 3^k+r\}$
$(3^k\ge r,\quad n,r\in N,k\in N\cup\{0\})$

我們發現同在第二階上的$T_3(k,2,1)$、$U_3(k,1,1)$、$T_3(k,2,2)$，其 j 值範圍分別為$[1,r]$、$[r+1,3^k]$、$[3^k+1,n]$；

同在第三階上的$T_3(k,3,1)$、$U_3(k,2,1)$、$T_3(k,3,2)$、$U_3(k,2,2)$、$T_3(k,3,3)$，其 j 值範圍分別為$[1,r]$、$[r+1,3^k]$、$[3^k+1,3^k+r]$、$[3^k+r+1,2\cdot 3^k]$、$[2\cdot 3^k+1,n]$。故此，由 n 與 j 的關係就能判斷出$P_3(n,j)$所位於的集合。因此可以結論如下：

結論： 若$P_3(n,j)$位於

1. U 集合，則$P_3(n,j)=0$
2. $T_3(k,s_1,s_2)$，$(s_1,s_2)\ne(3,2)$，則$P_3(n,j)=P_3(r,j-(s_2-1)\cdot 3^k)$
3. $T_3(k,3,2)$，則$P_3(n,j)\equiv 2\cdot P_3(r,j-(s_2-1)\cdot 3^k)$

以下舉兩個例子作說明：

例題 1：$P_3(666,123)=?$

解：$666=2\cdot 243+180$，可分五區間$[1,180]$、$[181,243]$、$[244,423]$、$[424,486]$、$[487,666]$ $\because j=123\in[1,180]\Rightarrow P_3(666,123)\in T_3(5,3,1)$，
$\therefore P_3(666,123)=P_3(180,123)$ $180=2\cdot 81+18$，又可分五區間$[1,18]$、$[19,81]$、$[82,99]$、$[100,162]$、$[163,180]$
$\because j=123\in[100,162]\Rightarrow P_3(180,123)\in T_3(4,3,2)$，$\therefore P_3(180,123)=0$

例題 2：$P_3(243,21)=?$（n 為 3 的 k 次方時）

解：$243=2\cdot 81+81$，只可分三區間$[1,81]$、$[82,162]$、$[163,243]$，因此列無 U 集合。$\because j=21\in[1,81]\Rightarrow P_3(243,21)\in T_3(4,3,1)$，
$\therefore P_3(243,21)=P_3(81,21)\cdots\cdots$以此類推至答案。

參、研究結果與討論

針對以上的研究過程，將本研究的研究結果詳述如下：

一、在以「-1」為首，「×」為運算符號的三角形中，其圖形存在以下的遞迴關係：

若$T_2(k,s_1,s_2)=\{P_2(n,j)\mid n=(s_1-1)\cdot 2^k+r,(s_2-1)\cdot 2^k<j\le(s_2-1)\cdot 2^k+r\}$，直觀來說，將此三角型分為二階，就是第$s_1$階第$s_2$位的$k$單位三角形，則$T_2(k,1,1)\equiv T_2(k,2,1)\equiv T_2(k,2,2)(k\in N\cup\{0\})$，在研究過程中已予證明。

二、將$\omega_2(1,n)$定義為在以「-1」為首，「×」為運算符號的三角形中，第n列「$(-1)^1$」的個數，則 $\omega_2(1,\mathrm{n})$，具：有 $\omega_2(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_2(1,\mathrm{r})$ 的遞迴關係，在研究過程中已予證明。

而$\omega_2(1,\mathrm{n})$之一般式，與二進位制密切相關：若令$(n)_{10}=(n_0n_1n_2\ldots)_2$，且$n_i$中有$k$個1，最小 1 的權値為$2^x$，則 $\omega_2(1,\mathrm{n})=2^{k-1}\cdot 2^x$ 。

三、在以「-1」為首，「×」為運算符號的三角形中，設$P_2(n,j)$為其第n列的第j行的數，若 $n=2^k+r,2^k>r$ 且 $n,r\in N,k\ge 0,j\le\dfrac{\mathrm{n}+1}{2}$，則有下列兩種情形：若 $\mathrm{r}-j+1\le 0\Rightarrow$ 則$P_2(n,j)=1$； 若$\mathrm{r}-j+1>0$，則改求$P_2(r,j_2)$，且$r=2^{k_2}+r_2,2^{k_2}>r_2\left(r,r_2\in N,k_2\ge 0\right)$, ， $\mathrm{j}_2\le\dfrac{r+1}{2}$ 則再次檢驗r_2-j_2+1；如果又不合，再回到 2.，檢查到能得知$P_2(r_x,j_{x+1})$為止

四、在以「ω」為首，「×」為運算符號的三角形中，其圖形存在以下的遞迴關係：

若$T_3(k,s_1,s_2)=\left\{P_3(n,j)\,|\,n=(s_1-1)\cdot 3^k+r,(s_2-1)\cdot 3^k<j\le(s_2-1)\cdot 3^k+r\right\}$
直觀說，將此三角型分為三階，即第s_1階第s_2位的k單位三角形，則
$T_3(k,1,1)\equiv T_3(k,2,1)\equiv T_3(k,2,2)\equiv T_3(k,3,1)\equiv T_3(k,3,3)\equiv 2\cdot T_3(k,3,2)$
$\left(k\in N\cup\{0\}\right)$，在研究過程中已予證明。

五、在以「ω」為首，「×」為運算符號的三角形中，第n列「ω^1」的個數$\omega_3(1,\mathrm{n})$與「ω^2」個數$\omega_3(2,\mathrm{n})$，有較為複雜的遞迴關係，結論如下：

（一）當$3^k<n\le 2\cdot 3^k,k\in N\cup\{0\}$，令$n=3^k+r\left(3^k\ge r,\quad n,r\in N\right)$，則

$$\begin{cases}\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})\\ \omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})\end{cases}。$$

（二）當$2\cdot 3^k<n\le 3^{k+1},k\in N\cup\{0\}$，令$n=2\cdot 3^k+r\left(3^k\ge r,\quad n,r\in N\right)$，則

$$\begin{cases}\omega_3(1,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(1,\mathrm{r})+\omega_3(2,\mathrm{r})\\ \omega_3(2,\mathrm{n})=2\cdot\omega_3(2,\mathrm{r})+\omega_3(1,\mathrm{r})\end{cases}。$$

以上（一）（二），在研究過程中已予證明。

而$\omega_3(1,\mathrm{n})$、$\omega_3(2,\mathrm{n})$之一般式，與三進位制密切相關，其結論如下：

$$\omega_3(1,n)=\omega_3\left(1,\overbrace{11\ldots1}^{l}\overbrace{22\ldots2}^{k_1}\overbrace{100\ldots0}^{k_2}\right)=2^l\times\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}=2^{l-1}\left(3^{k_1+k_2}+1\right)$$

$$\omega_3(2,n)=\omega_3\left(1,\overbrace{11\ldots1}^{l}\overbrace{22\ldots2}^{k_1}1\overbrace{00\ldots0}^{k_2}\right)=2^l\times\frac{3^{k_1+k_2}+1}{2}=2^{l-1}\left(3^{k_1+k_2}-1\right)$$

六、在以「ω」爲首，「×」爲運算符號的三角形中，第n列第j行的數是「1」或「ω」或「ω^2」，以集合觀點來探討，判斷出$P_3(n,j)$所位於的集合。若$P_3(n,j)$位於

1. U 集合，則$P_3(n,j)=0$
2. $T_3(k,s_1,s_2)$，$(s_1,s_2)\neq(3,2)$，則$P_3(n,j)=P_3\left(r,j-(s_2-1)\cdot 3^k\right)$
3. $T_3(k,3,2)$，則$P_3(n,j)\equiv 2\cdot P_3\left(r,j-(s_2-1)\cdot 3^k\right)$

肆、結論與應用

一、 研究結論與其應用

碎形幾何數學概念已應用在不同的領域，如生理學、經濟學、社會學、天文學等。許多不規則、不穩定的現象都會應用碎形加以詮釋，或利用碎形幾何製作出不同的模型作爲研究參考（陳義裕，2003）。但現今在碎形方面研究，較多的部份集中在碎形的輸出上；而本研究實際對於以「-1」爲首，「×」爲運算符號，及以「ω」爲首，「×」爲運算符號所產生的碎形，對於其內部的複製模式、圖形中的遞迴規律關係、圖形中某列某行的數是多少、並討論圖形中「-1」，或「ω」「ω^2」的個數，目的是對於這兩個碎形內部作更細部的分析，雖然作出的成果未臻完整，但期望能提供碎形幾何研究者不同的角度的思考與參考。

此外在巴斯卡三角形的研究方面，較多以代數層面去探討，例如：許介彥（2004）針對巴斯卡三角形中任意數之奇偶性作探討。又國外大部份研究，其討論的重點是將巴斯卡三角形中的所有數以某個數爲模的餘數紀錄下，再去探討其餘數在新產生的巴斯卡三角形中的分布情形（James G.. Huard, Blair K. Spearman & Kenneth S. Williams, 1998）；而本研究著重於圖形規律性的探討，雖然其方向不同，希望能使巴斯卡三角形方面的研究更多樣性。

二、 研究展望

雖然本研究已對以「-1」或「ω」爲首且運算符號爲「×」的巴斯卡三角形，其圖形的複製、遞迴規律，以及任一列「-1」或「ω」、「ω^2」的個數，及以遞迴的方式推算出第n列第j行是何數。但我覺得本研究尙有幾個部份值得繼續探討：

（一） 將第n列第j行的數是「1」或「-1」及「1」或「ω」或「ω^2」，以一個通式表出。

（二） 將圖形改爲以「i」爲起首，且運算符號「＋」改爲「×」，並且繼續探討以下的問題：

1. 以「i」爲起首，且運算符號「＋」改爲「×」三角形，其圖形有何

規律性？

2. 以「 i 」爲起首，且運算符號「＋」改爲「×」三角形，其每一列「 -1 」或「 i 」或「 $-i$ 」個數是否有規律？是否可歸納爲通式？
3. 能否推算出此三角形第 n 列第 j 行的數是「 1 」或「 -1 」或「 i 」或「 $-i$ 」？

（三） 是否將圖形的遞迴規律推廣到以 $x^p=1$（ p 爲質數）的根爲首，運算符號爲「×」，之巴斯卡三角形，繼續討論。

在不斷的探索中陸續發現新的元素，也在整個研究過程中發現許多原先預想不到的結果，也希望在往後的研究中能有更驚奇的發現，我們正繼續努力著。

伍、參考文獻

一、黃光雄、簡茂發（2000）。教育研究法。師大書苑有限公司。.309～337 頁。

二、諸明嘉（1979）。楊輝三角形。人間文化事業公司。.1～.58 頁。

三、旗立電腦研究室、施威銘（2003）。高中電腦。旗立資訊股份有限公司。62～.67 頁

四、許介彥（2004）。巴斯卡三角形的幾個性質。科學教育月刊。275 期。

五、陳義裕（2003）。碎形，奇怪的形狀、無窮的應用。科學發展月刊。370 期。48 ~ 53 頁

六、James G.. Huard, Blair K. Spearman & Kenneth S. Williams（1998）. Pascal’s Triangle（mod 8）. In Europ. J. Combinatorics, 19, 45-62
Lawrence H. Riddle（1998）. Pascal's Triangle (mod 2).

陸、附註

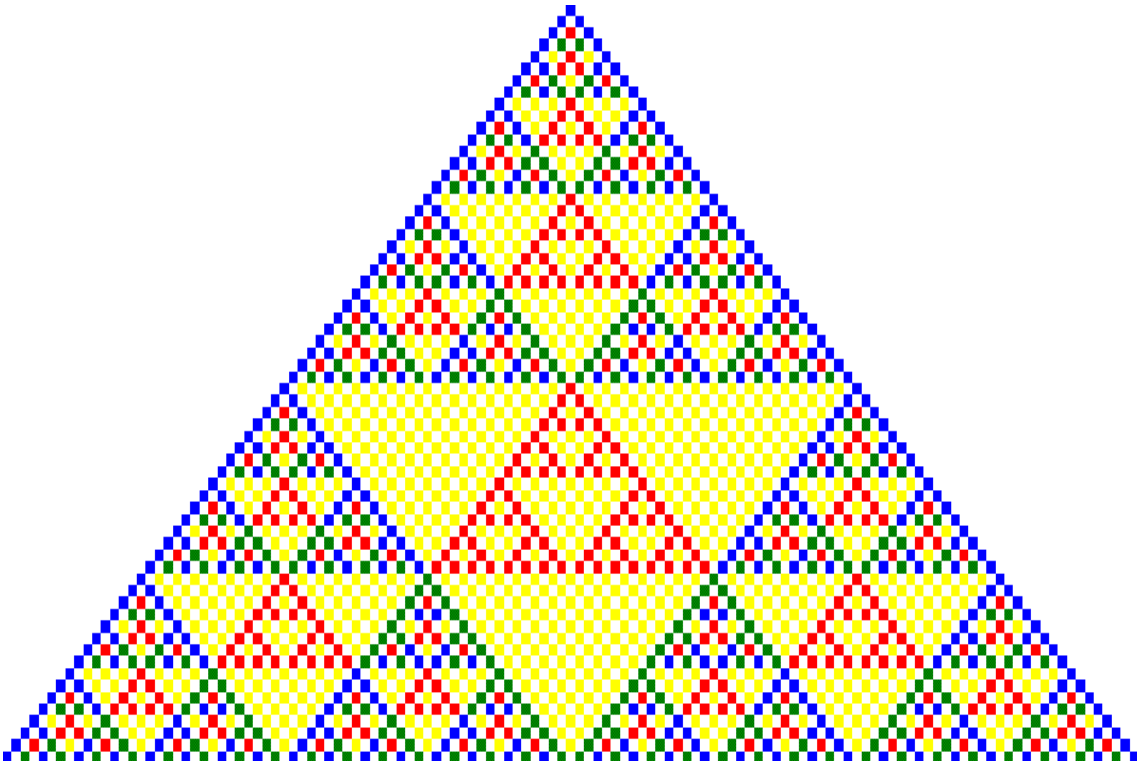
一、將本研究中所使用的程式，其程式碼附註於下：

```
//---------------------------------------------------------------------------
#include <vcl.h>
#pragma hdrstop

#include "Unit1.h"
//---------------------------------------------------------------------------
#pragma package(smart_init)
#pragma resource "*.dfm"
TForm1 *Form1;

//---------------------------------------------------------------------------
__fastcall TForm1::TForm1(TComponent* Owner)
        : TForm(Owner)
{
  ComboBox1->ItemIndex=0;
  ComboBox2->ItemIndex=1;
  ComboBox3->ItemIndex=1;
}
//---------------------------------------------------------------------------


void __fastcall TForm1::BitBtn1Click(TObject *Sender)
```

```
{
  const TColor
Ctable[]={clBlue,clRed,clGreen,clPurple,clLime,clFuchsia,clAqua,clMaroon,clNavy,clSilver,clTeal,cl
Gray,clOlive,clBlack,clWhite,clYellow};
  TCanvas *P;
  int x,y,z,P1,P2,tmpx,tmpy;
  int n,lines,dy;
  int **table1,table2[16];

  n=ComboBox1->Items->Strings[ComboBox1->ItemIndex].ToInt();
  try{lines=ComboBox2->Text.ToInt();}
  catch ( ... ){    return;}
    dy=ComboBox3->Items->Strings[ComboBox3->ItemIndex].ToInt();

  table1=new int*[n];
  for(z=0;z<n;z++)
  {
    table1[z]=new int[n];
    table2[z]=Ctable[z];
  }
  table2[n-1]=clYellow;

  for(x=0;x<n;x++)
    for(y=0;y<n;y++)
      table1[y][x]=(x+y+1)%n;

  Image1->Width=lines*2-1;
  Image1->Height=(lines-1)*dy+1;
  Image1->Picture->Bitmap->Width=Image1->Width;
  Image1->Picture->Bitmap->Height=Image1->Height;
  P=Image1->Picture->Bitmap->Canvas;
  P->Brush->Color=clWhite;
  P->FillRect(Rect(0,0,Image1->Width,Image1->Height));

  for(y=0;y<lines;y++)
  {
    for(x=0;x<=y;x++)
    {
      if(x==0 || x==y)
      {
        P->Pixels[lines-1-y+2*x][dy*y]=table2[0];
      }
      else
      {
        for(z=0;z<n;z++)
        {
          if(P->Pixels[lines-2-y+2*x][dy*(y-1)]==table2[z])
          {
            P1=z;break;
          }
        }
        for(z=0;z<n;z++)
        {
          if(P->Pixels[lines-y+2*x][dy*(y-1)]==table2[z])
          {
            P2=z;break;
          }
        }
        P->Pixels[lines-1-y+2*x][dy*y]=table2[table1[P1][P2]];
      }
    }
  Application->ProcessMessages();
  }

  tmpx=Image1->Width*0.8; tmpy=Image1->Height/32; P->Font->Size=10;
  for(z=0;z<n;z++)
  {
    P->Font->Color=table2[z];
    P->TextOut(tmpx,tmpy*z,"Color "+String(z+1));
  }

  for(z=0;z<n;z++)
    delete[] table1[z];
  delete[] table1;
}
//---------------------------------------------------------------------------
```

```
void __fastcall TForm1::BitBtn2Click(TObject *Sender)
{
 Image1->Picture->SaveToFile("Result.bmp");
}
//---------------------------------------------------------------------------

void __fastcall TForm1::ComboBox1Change(TObject *Sender)
{
 switch(ComboBox1->ItemIndex)
  {
   case 0: ComboBox2->ItemIndex=1; ComboBox3->ItemIndex=1; break;
   case 1: ComboBox2->ItemIndex=3; ComboBox3->ItemIndex=0; break;
   case 2: ComboBox2->ItemIndex=1; ComboBox3->ItemIndex=1; break;
   case 3: ComboBox2->ItemIndex=2; ComboBox3->ItemIndex=0; break;
   case 4: ComboBox2->ItemIndex=5; ComboBox3->ItemIndex=0; break;
   case 5: ComboBox2->ItemIndex=0; ComboBox3->ItemIndex=1; break;
   case 6: ComboBox2->ItemIndex=1; ComboBox3->ItemIndex=1; break;
   case 7: ComboBox2->ItemIndex=3; ComboBox3->ItemIndex=0; break;
   case 8: ComboBox2->ItemIndex=4; ComboBox3->ItemIndex=0; break;
  }
}
//---------------------------------------------------------------------------
```

二、以下是以「i」爲起頭的巴斯卡三角形



圖七：以i 爲首的巴斯卡三角形

藍色的點代表“i”；紅色的點代表“-1”；綠色的點代表“$-i$”；黃色的點代表“1”。

評語

研究精神可嘉，表達能力好，唯過去已有相當多類似研究，較難突顯其創新性。作者探討碎形圖形中的規律，並推算出巴斯卡三角形中第ｎ列，第ｊ行的數爲何，及第ｎ列藍格（或紅格）的個數等等。建設觀察各列藍格之個數之間的關係，亦可探討藍格出現的位址是否有規律，並思考其應用性。