臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　　別：數學

作 品 名 稱 ：立體尺規作圖-PES 作球

學校 / 作者　：國立臺中第一高級中學　　　　　蔡易儒

作者簡介

這張照片的取景地點是我的國小母校，這裡是我接受啓蒙的地方，我就是從這裡紮根、成長的。我很慶幸我總是享有一群好的老師和同學們，也受過許多人的幫助，每每我回想自己的成長過程，心中總是充滿著數不盡的美好回憶，而這些點點滴滴，我都珍藏在心裡。

我是一個普通的高中生，我喜歡聽音樂、逛百貨、看電影，喜歡數學，更喜歡英文，尤其在高中階段，我更是進步了不少呢！我的座右銘是「以自然爲師」，這是我國中的藝文老師在我畢業前留給我的。我想未來如果我能有一點小小的成就，我要感謝我的師長和愛我的家人。

立體尺規作圖—*PES* 作球

geometric construction in 3*D*—the *PES* construction

英文摘要(*Abstract*)

In this study, we mainly explore the geometric construction in 3*D*. By conducting some problems about constructing circles, we define the *PLC* construction in 2*D* as constructing a circle, either passing through a given point (*P*), tangent to a given line (*L*) or tangent to a given circle (*C*). Besides, we aim to discuss the properties of the *PLC* construction and the relations between each other. We discover if we find a plane satisfying certain conditions in space, the properties in the *PLC* construction can apply to such a plane. Furthermore, we extend the properties in *PLC* to the *PES* construction in 3*D*, defined as constructing a sphere, either passing through a given point (*P*), tangent to a given plane (*E*) or tangent to a given sphere (*S*). Also we discuss the relations among them.

中文摘要

這個研究主要在探討 3*D* 的尺規實作。藉由歸納某些有關作圓的題目，我們定義 2*D* 中的 *PLC* 作圖—作圓，過已知點（*P*）、切已知線（*L*）、切已知圓（*C*）。並探討 *PLC* 作圖的性質及彼此的關聯性。而我們發現：在空間中只要找到滿足特定條件的平面，則 2*D* 幾何作圖性質在該平面仍能沿用。此外，運用 *PLC* 作圖性質，我們進一步推廣到空間中的 *PES* 作圖—作球，過已知點（*P*）、切已知面（*E*）、切已知球（*S*），並探討各個類型間的關聯性。

壹、研究動機

我從小就對數學有濃厚的興趣。在國中時我曾作過許多幾何作圖題，其中某些有關作圓的題目，經過整理後發現可歸納其共通性—過已知點（P）、切已知線（L）、切已知圓（C）。而我們知道決定一個圓至少需要三個條件，藉由已知條件 P、L、C 的排列組合，共可產生 10 種類型（如 PPL、PCC⋯）。而我發現，某些類型的作圖法經條件轉換後可化簡爲其他已解決的類型，因此我開始對圖形間的關聯性產生好奇，進一步想推廣到空間中決定一個球至少需要四個條件，若將已知條件改爲過已知點（P）、切已知面（E）、切已知球（S），作球時，共會有 15 種類型。我想知道—平面上的幾何作圖性質是否能沿用到空間中的作圖？作球的 15 種類型中，是否也能用條件轉換，化簡成已知其作圖法的類型？各個類型間的關聯性爲何？

貳、研究目的

一、研究平面上 PLC 作圖的性質及彼此的關聯性。

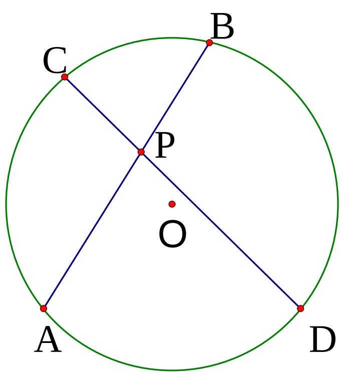
二、運用 PLC 作圖性質，推廣到空間中 PES 作圖，並探討各個類型間的關聯性。

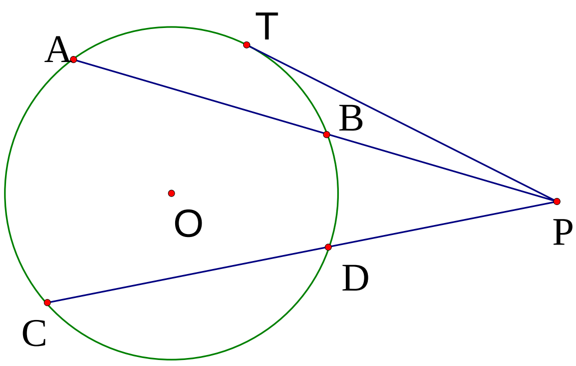
三、利用 GSP、$Cabri3D$ 等作圖軟體，實作 PLC 和 PES 的尺規作圖。

參、背景資料

（一）與圓相關的定理

【定理一】—【圓冪定理】

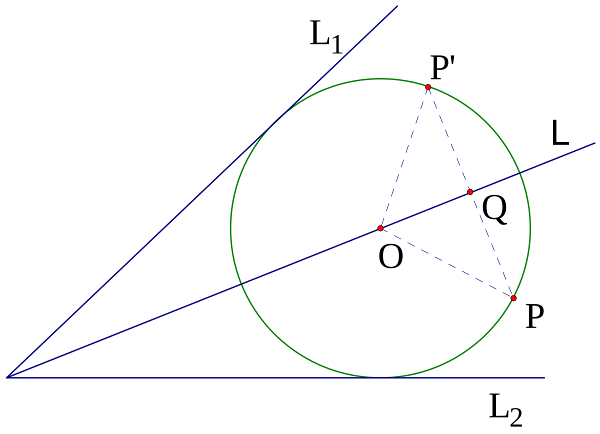




給定一點 P 與一圓 O。過點 P，作直線 L_1 交圓 O 於 A、B 兩點，作直線 L_2 交圓 O 於 C、D 兩點，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}$ 。

若 P 在圓外，過 P 點作圓 O 切線，設一切點 T，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=\overline{PC}\cdot\overline{PD}=\overline{PT}^2$ 。

【定理二】



已知定直線L_1、L_2，定點P，若有圓O過P點，且與L_1、L_2均相切，則點P關於L_1、L_2的角平分線L之對稱點P'亦在圓O上。

＜證明＞

$\because$圓O與L_1、L_2均相切，$\therefore d(O,L_1)=d(O,L_2)=R$，$\therefore$圓心$O$在$L_1$、$L_2$的角平分線$L$上

連$\overline{PP'}$，令$\overline{PP'}$交L於Q

$\because P'$為P關於L之對稱點

$\therefore \angle OQP=\angle OQP'=90°$—（1）

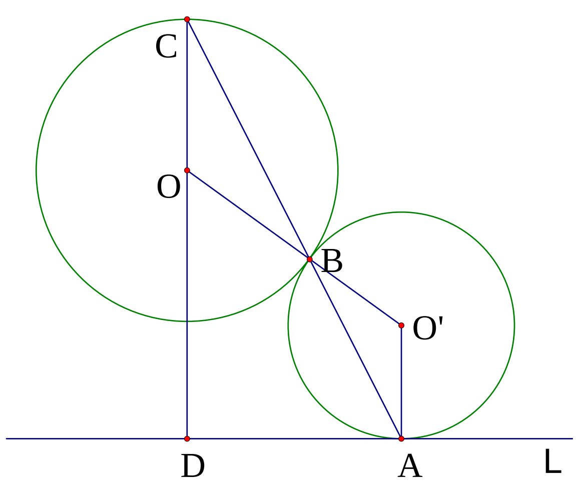
$\overline{QP}=\overline{QP'}$—（2）

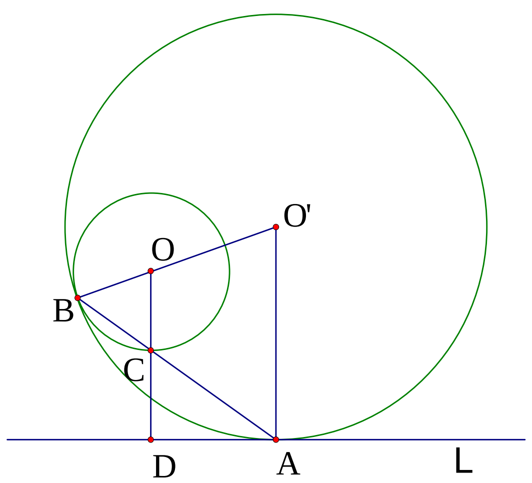
$\overline{OQ}=\overline{OQ}$—（3）

$\therefore \Delta OQP\cong\Delta OQP'$ (SAS)

$\therefore \overline{OP'}=\overline{OP}=R$，$\therefore P'$亦在圓$O$上，得證。

【定理三】





已知一圓 O 與圓外一直線 L，過圓心 O，作 L 的垂線，交圓 O 於 C、交 L 於 D。若有一圓 O' 切圓 O 於 B，切 L 於 A，則 A、B、C 三點共線。

註：若圓 O 內切於圓 O'，取 $d(C,L)<d(O,L)$；若圓 O 外切於圓 O'，取 $d(C,L)>d(O,L)$

＜證明＞

$\because B$ 爲切點，$\therefore O$、B、O' 共線

連接 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{AC}$

$\because \overleftrightarrow{OC} \perp L$,$\overline{O'A} \perp L$ ，$\therefore \overleftrightarrow{OC} // \overline{O'A}$

$\therefore \angle BOC = \angle BO'A$—（1）

$\overline{OB} : \overline{O'B} = \overline{OC} : \overline{O'A}$—（2）

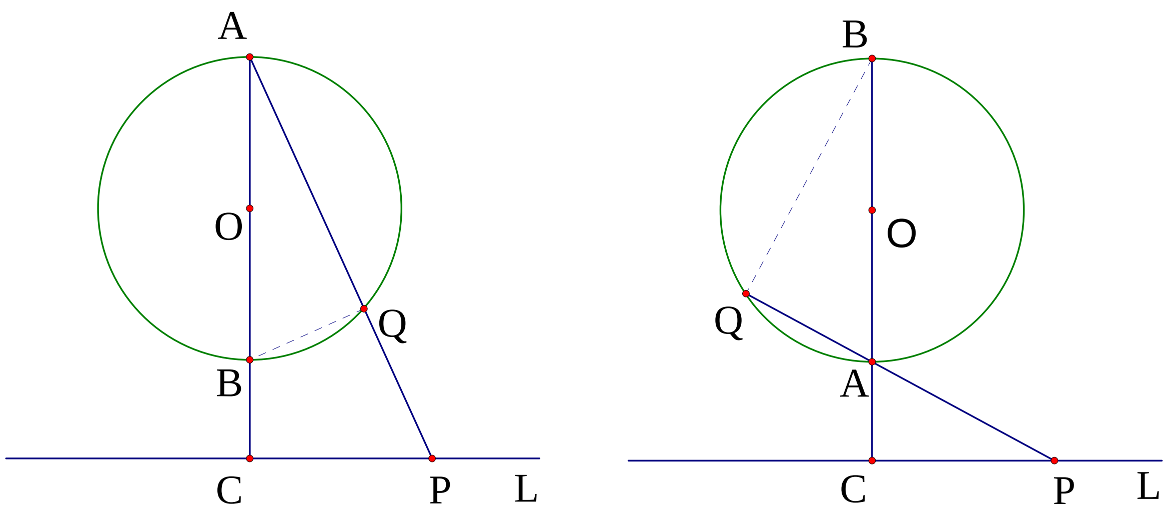
$\therefore \Delta OBC \sim \Delta O'BA\ (SAS)$

$\therefore \angle OBC = \angle O'BA$

又 O、B、O' 共線

$\therefore A$、B、C 三點共線，得證。

【定理四】



已知一圓 O 與圓 O 外一直線 L，過圓心 O，作 L 的垂線，交圓 O 於 A、B，交 L 於 C。設 L 上任一點 P，$\overleftrightarrow{AP}$ 交圓 O 於 Q，則 $\overline{AQ} \cdot \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ 。

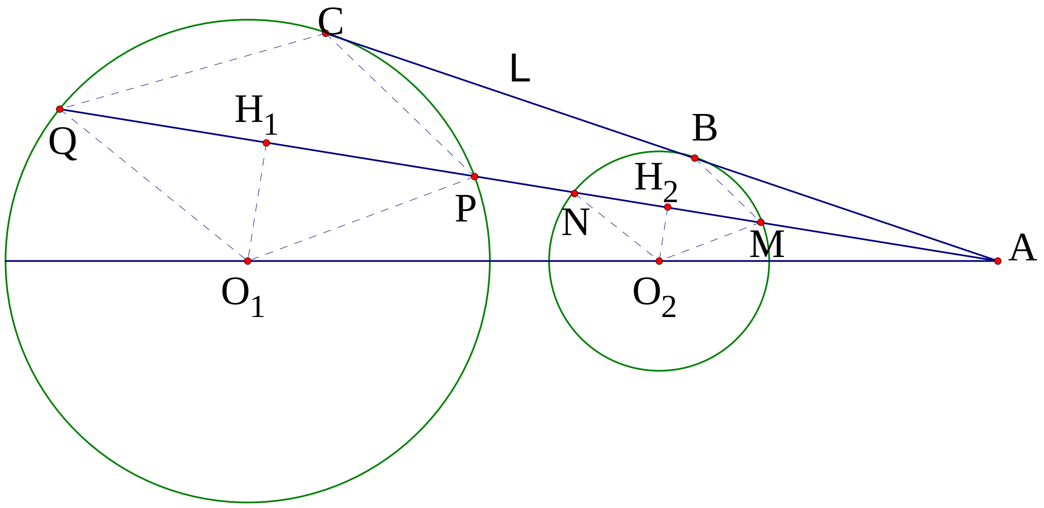
＜證明＞

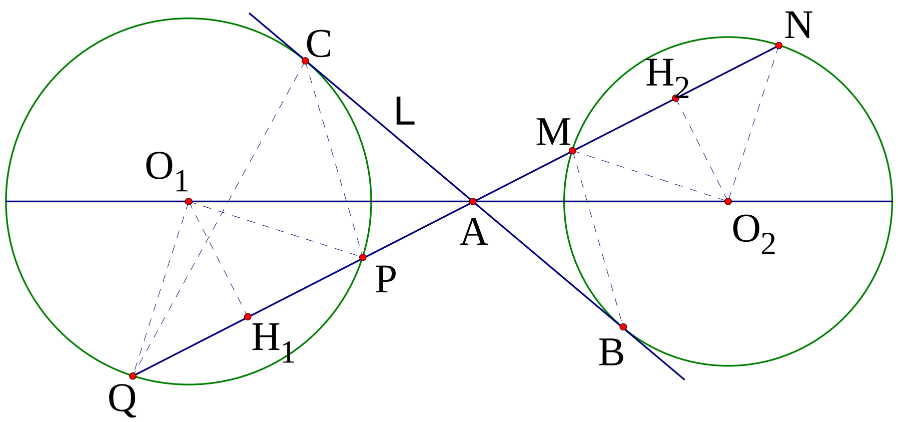
$\because \angle BCP = \angle BQP = 90°$

$\therefore B$、C、P、Q 共圓

$\therefore \overline{AQ} \cdot \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ，得證。

【定理五】





設 A 爲定圓 O_1、O_2 的位似中心，過 A 作公切線 L 切 O_1 於 C，切 O_2 於 B，過 A 引任意割線交 O_1 於 P、Q，交 O_2 於 M、N，則 $\overline{AM}\cdot\overline{AQ}=\overline{AN}\cdot\overline{AP}=\overline{AB}\cdot\overline{AC}$ 。

註：

把兩個圓的連心線分成兩線段的比，等於兩個圓的半徑比的點，稱作位似中心。如果這點是內分點，稱作內位似中心；如果這點是外分點，稱作外位似中心。

已知兩圓 O_1、O_2，若圓 O_1、O_2 之內公切線交 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 於點 A，圓 O_1、O_2 之外公切線交 $\overleftrightarrow{O_1O_2}$ 於點 A'，則 $\overline{AO_1}:\overline{AO_2}=\overline{A'O_1}:\overline{A'O_2}=R_1:R_2$，即連心線與公切線的交點爲位似中心。

＜證明＞

（a）

作 $\overline{O_1H_1}\perp\overleftrightarrow{AQ}$ 於 H_1，$\overline{O_2H_2}\perp\overleftrightarrow{AQ}$ 於 H_2

得 $\overline{H_1P}=\overline{H_1Q}$，$\overline{H_2M}=\overline{H_2N}$

(b)

$\because \angle O_1H_1A = \angle O_2H_2A = 90^\circ$

$\angle O_1AH_1 = \angle O_2AH_2$

$\therefore \Delta O_1H_1A \sim \Delta O_2H_2A$

$\therefore \overline{O_1H_1} : \overline{O_2H_2} = \overline{AH_1} : \overline{AH_2} = \overline{AO_1} : \overline{AO_2} = R_1 : R_2$

(c)

$\because \overline{O_1H_1} : \overline{O_2H_2} = \overline{O_1P} : \overline{O_2M} = R_1 : R_2$

$\angle O_1H_1P = \angle O_2H_2M = 90^\circ$

$\therefore \Delta O_1H_1P \sim \Delta O_2H_2M \ (RHS)$

$\therefore \overline{H_1P} : \overline{H_2M} = \overline{O_1P} : \overline{O_2M} = R_1 : R_2$

$$\therefore \frac{R_1}{R_2} = \frac{\overline{AH_1}}{\overline{AH_2}} = \frac{\overline{H_1P}}{\overline{H_2M}} = \frac{\overline{H_1Q}}{\overline{H_2N}} = \frac{\overline{AH_1} - \overline{H_1P}}{\overline{AH_2} - \overline{H_2M}} = \frac{\overline{AH_1} + \overline{H_1Q}}{\overline{AH_2} + \overline{H_2N}}$$

$$\therefore \frac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{AN}} \Rightarrow \overline{AM} \cdot \overline{AQ} = \overline{AN} \cdot \overline{AP}$$

(d)

$\because \overline{AP} : \overline{AM} = \overline{AC} : \overline{AB} = R_1 : R_2$

$\angle CAP = \angle BAM$

$\therefore \Delta CAP \sim \Delta BAM \ (SAS)$

$$\therefore \angle ABM = \angle ACP = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CP} = \angle CQP$$

$\therefore \angle ABM = \angle AQC$

$\angle BAM = \angle QAC$

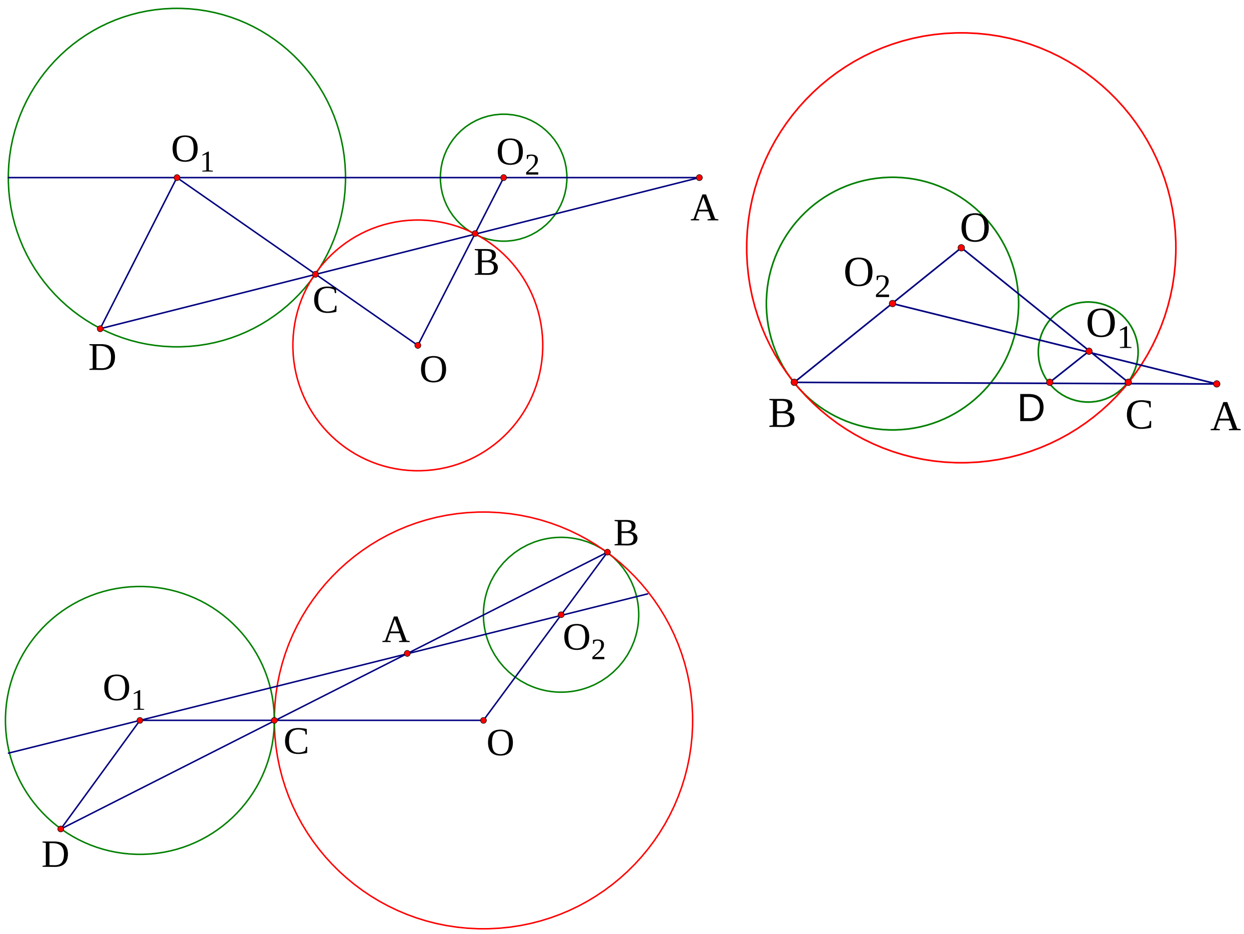
$\therefore \Delta BAM \sim \Delta QAC$

$\therefore \overline{AB} : \overline{AQ} = \overline{AM} : \overline{AC}$

$\therefore \overline{AB} \cdot \overline{AC} = \overline{AM} \cdot \overline{AQ}$

$\therefore \overline{AM} \cdot \overline{AQ} = \overline{AN} \cdot \overline{AP} = \overline{AB} \cdot \overline{AC}$ ，得證。

【定理六】



已知定圓O_1、O_2，若有一圓 O 切O_1於 C，切O_2於 B，則$\overleftrightarrow{BC}$與$\overleftrightarrow{O_1O_2}$的交點 A 爲O_1、O_2之位似中心。

＜證明＞

$\because B$、C爲切點，$\therefore O$、C、O_1共線，O、B、O_2共線。

令$\overleftrightarrow{BC}$交O_1於 D，

$\therefore \angle O_2BA = \angle OBC = \angle OCB = \angle O_1CD = \angle O_1DC$

$\therefore \angle O_2BA = \angle O_1DA$

$\angle O_2AB = \angle O_1AD$

$\therefore \Delta O_2AB \sim \Delta O_1AD$

$\therefore \overline{AO_1} : \overline{AO_2} = \overline{O_1D} : \overline{O_2B} = R_1 : R_2$

$\therefore A$ 點爲O_1、O_2之位似中心，得證。

（二）說明

我們這個主題所討論的作圖法以不失一般性爲前提，即我們並不討論特例、退化、不可作圖等情形。（如 *PPP* 作圖中三點共線、*PPL* 作圖中已知兩定點分別在已知直線異側等，則所求圓並不存在。）此外，我們所探討的 *PLC*、*PES* 作圖，都是以已知條件各自獨立爲原則。以 *PLC* 作圖來說，即已知點不在已知線上、已知圓上、已知圓內；已知線與已知圓不相交、相切；已知圓與已知圓皆外離，不會有相交、相切或大圓包小圓的內離關係等。然而即使有上述的情形出現，其實 *PLC* 依然可作圖，我們也有研究出其作圖法，只是我們還是以一般情形來探討，並不強調特殊情形，一方面也避免當我們推廣到 *PES* 作圖時，有些類型會過度複雜，因此在與圓相關的定理中我們也是以此爲前提來證明，因爲在特殊情形的作圖中，我們所要運用的定理其性質是不變的，只是可能要作細部的修正。（以【定理五】來說，若定圓 O_1 、O_2 內離，則圓 O_1 、O_2 依然有位似中心，卻不會有公切線，但仍會有過位似中心引任意割線與兩圓產生交點，造成線段長乘積相等的性質。如此當我們在探討 *PCC* 型時，因已知圓外離，有公切線，爲方便說明，我們才取公切線段長乘積由圓冪性質產生點，但由【定理五】得知，取割線段長乘積也成立。）由於我們在此不討論特殊情形，定理也就不另外證明。

（三）代數觀點

已知二維平面中圓方程式可表示爲 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ ，爲二元二次方程式；二維平面中直線方程式可表示爲 $ax+by+c=0$ ，爲二元一次方程式。兩者無論以何種方式解聯立，只有可能解出 2^n 次方根的解，不可能解出 3 次方根（如 $\sqrt[3]{2}$ ）等的解。同理，在三維空間中球方程式可表示爲 $x^2+y^2+z^2+Dx+Ey+Fz+G=0$ ，爲三元二次方程式；三維空間中平面方程式可表示爲 $ax+by+cz+d=0$ ，爲三元一次方程式。兩者無論以何種方式解聯立，只有可能解出 2^n 次方根的解，不可能解出如 3 次方根等的解。即在尺規作圖中，只有可作出長度爲 2^n 次方根的線段，不可能作出長度爲 3 次方根等的線段。我們這個主題主要是以假設其可作圖，並找出作圖法爲研究方向，但不排除發生無法尺規作圖的可能性，萬一給定條件的方程式，用代數解所求的圓、球，若其結果會產生如 3 次方根等無法尺規作圖的解時，則我們視該類型爲不可尺規作圖。

肆、研究過程

（一）PLC平面幾何作圖

我們分以下十種類型討論：PPP、LLL、PPL、PLL、LLC、PLC、LCC、PPC、PCC、CCC

【型一】—PPP型

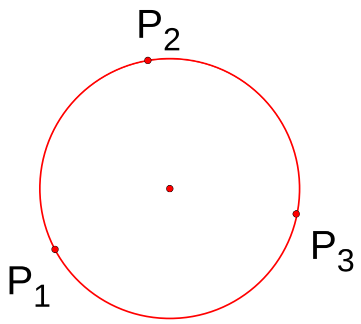
已知：定點P_1、P_2、P_3。

求作：過三點P_1、P_2、P_3的圓。

作法：

作P_1、P_2、P_3任兩點之中垂線，交點 O，可得一圓$P_1P_2P_3$（圓心 O）。

註：此型有 1 解。



【型二】—LLL 型

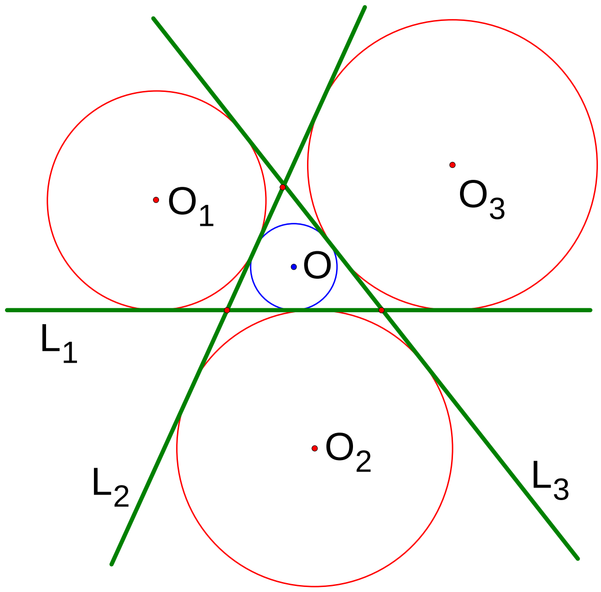
已知：定直線L_1、L_2、L_3。

求作：與L_1、L_2、L_3皆相切的圓。

作法：

作L_1、L_2、L_3任兩線之角平分線，交點 O、O_1、O_2、O_3，可得一內切圓，三傍切圓。

註：此型有 4 解。



【型三】—*PPL* 型

已知：定點 P_1 、 P_2 ，定直線 L。

求作：過點 P_1 、 P_2 ，且與 L 相切的圓。

作法：

1.作 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 交 L 於 A

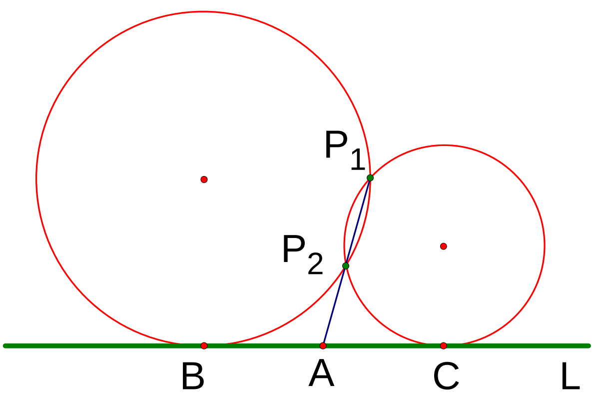
2.在 L 上取兩點 B、C，使 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 = \overline{AP_1} \cdot \overline{AP_2}$ 。利用 *PPP* 作圖法，則圓 P_1P_2B 、 P_1P_2C 即爲所求。

<說明>

如圖：

$\because$ 圓 P_1P_2B 滿足 $\overline{AB}^2 = \overline{AP_1} \cdot \overline{AP_2}$ ，由【定理一】，知 B 爲切點。$\therefore$ 圓 P_1P_2B 爲所求圓。同理圓 P_1P_2C 亦爲所求圓。

註：此型有 2 解。



【型四】—*PLL* 型

已知：定點 P，定直線 L_1 、 L_2 。

求作：過點 P，且與 L_1 、 L_2 相切的圓。

作法：

1.作一直線 L 平分 L_1 、 L_2

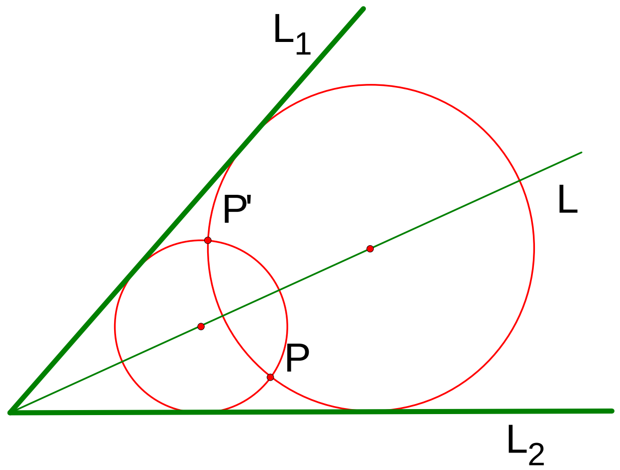
2.作點 P 關於 L 之對稱點 P'

3.以 P、 P' 、 L_1 ，由 *PPL* 作圖法作圓即為所求

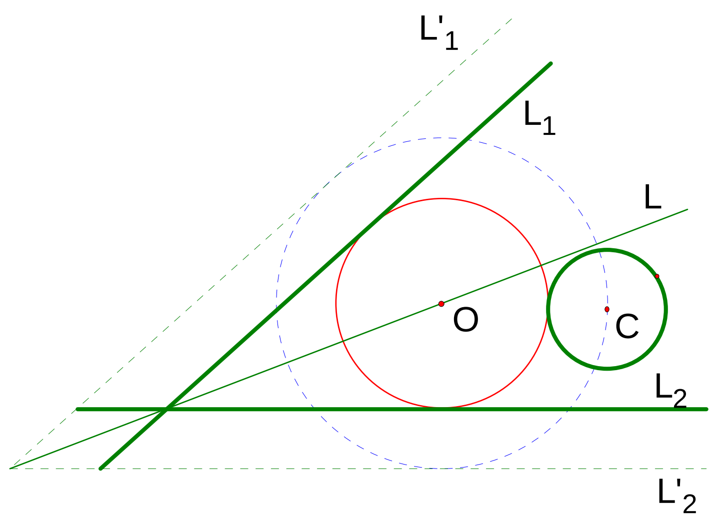
＜說明＞

由【定理二】，則 P' 必在所求圓上。

註：此型有 2 解。



【型五】—*LLC* 型



已知：定直線L_1、L_2，定圓C。

求作：與L_1、L_2、圓C皆相切的圓。

作法：

1.以圓 C 半徑為平移量，平移L_1產生$L_1^{'}$，平移L_2產生$L_2^{'}$，滿足$d(C,L_1^{'})>d(C,L_1)$，$d(C,L_2^{'})>d(C,L_2)$。

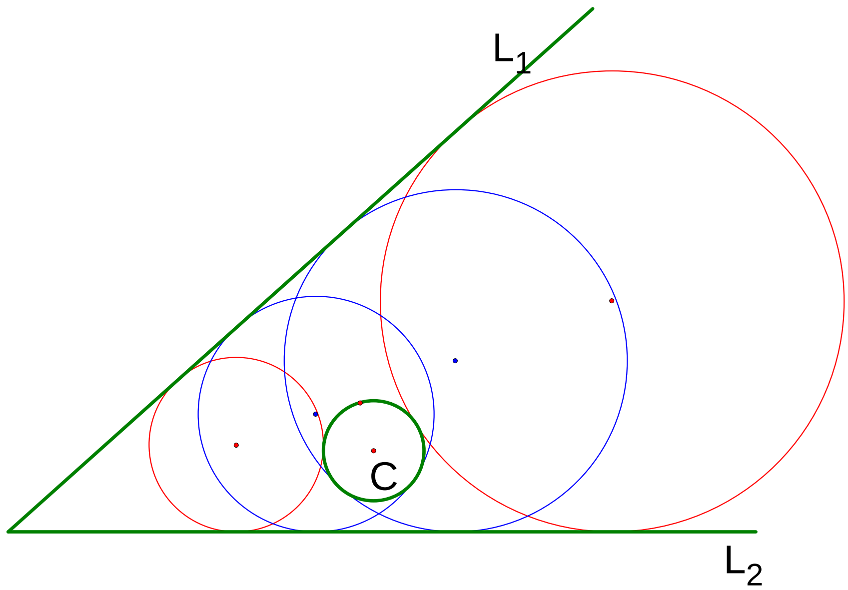
2.以點C、兩直線$L_1^{'}$、$L_2^{'}$，由PLL作圖法作圓，設其圓心O。

3.以O為圓心，作與L_1、L_2相切的圓即為所求。

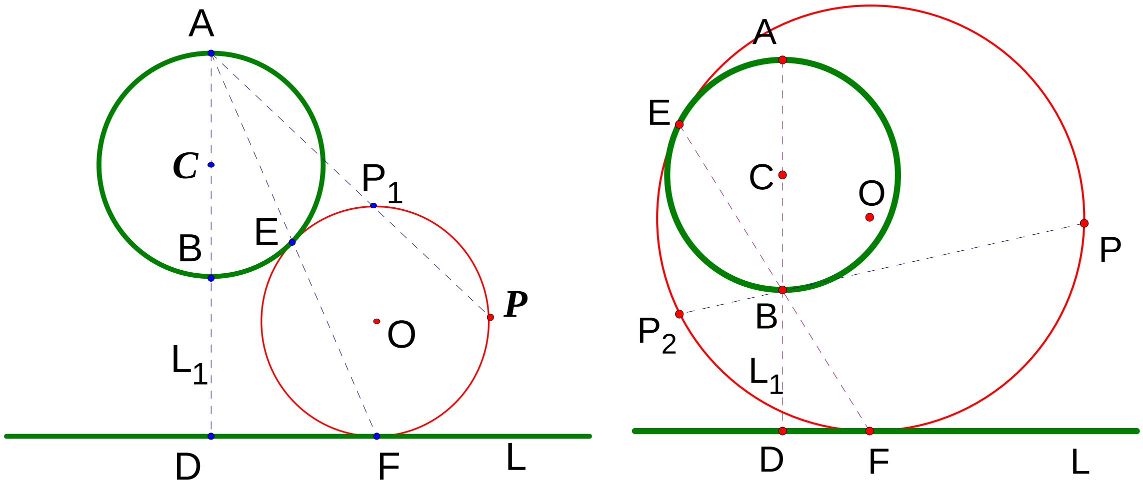
＜說明＞

設O為所求圓圓心，以O為圓心，$\overline{OC}$為半徑作圓。引平行於直線L_1且和此圓相切的直線$L_1^{'}$，引平行於直線L_2且和此圓相切的直線$L_2^{'}$，則$d(L_1,L_1^{'})=d(L_2,L_2^{'})=R_C$。∴若作過點$C$且與$L_1^{'}$、$L_2^{'}$相切的圓，則其圓心亦為所求圓的圓心。又以$R_C$為平移量平移$L_1$所產生的$L_1^{'}$有兩條，以$R_C$為平移量平移$L_2$所產生的$L_2^{'}$也有兩條，若取點 C、$L_1^{'}$、$L_2^{'}$，滿足$d(C,L_1^{'})<d(C,L_1)$，$d(C,L_2^{'})<d(C,L_2)$，重複以上作法，又可得兩解，∴此型有 4 解。

註：此型有 4 解。



【型六】—*PLC*型



已知：定點 P，定直線 L，定圓 C。

求作：過點 P，且與直線 L、圓 C 相切的圓。

作法：

1.過點 C，作 $L_1 \perp L$ 於 D，交圓 C 於 A，B，且 $d(A,L) > d(B,L)$。

2.在 $\overleftrightarrow{AP}$ 上取一點 P_1，使 $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AP_1} \cdot \overline{AP}$

3.以 P、P_1、L，由 PPL 作圖法作圓即爲所求

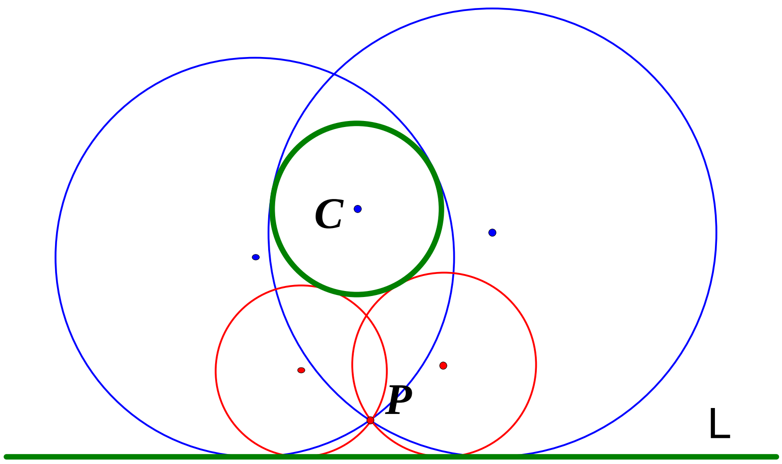
＜說明＞

設 O 爲所求圓圓心，設圓 O 切圓 C 於 E、切 L 於 F。

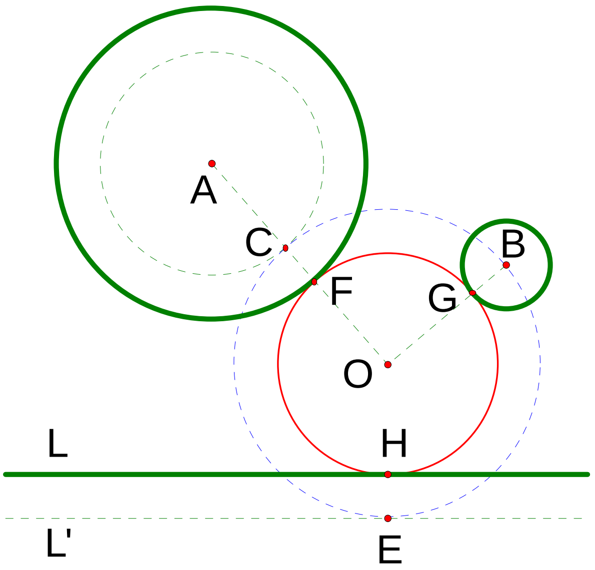
（1）若圓 O 和圓 C 外切時，由【定理三】，則 A、E、F 三點共線。由【定理四】，$\therefore \overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AE} \cdot \overline{AF}$。又若連 $\overleftrightarrow{AP}$ 交圓 O 於點 P_1，則 $\overline{AE} \cdot \overline{AF} = \overline{AP_1} \cdot \overline{AP}$。則若在 $\overleftrightarrow{AP}$ 上取一點 P_1，使 $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AP_1} \cdot \overline{AP}$，則 P_1 必在所求圓上。

（2）同理，若圓 O 和圓 C 內切時，由【定理三】，則 B、E、F 三點共線。由【定理四】，$\therefore \overline{BA} \cdot \overline{BD} = \overline{BE} \cdot \overline{BF}$。又若連 $\overleftrightarrow{BP}$ 交圓 O 於點 P_2，則 $\overline{BE} \cdot \overline{BF} = \overline{BP_2} \cdot \overline{BP}$。則若在 $\overleftrightarrow{BP}$ 上取一點 P_2，使 $\overline{BA} \cdot \overline{BD} = \overline{BP_2} \cdot \overline{BP}$，則 P_2 必在所求圓上。

註：此型有 4 解。



【型七】—*LCC*型



已知：定直線 L，定圓 A、B，不失一般性，設圓 A 半徑 R_A >圓 B 半徑 R_B 。

求作：與 L、圓 A、圓 B 皆相切的圓。

作法：

1.以 A 爲圓心，以 $R_A - R_B$ 爲半徑作圓 A'

2. 以 R_A 爲平移量，平移 L 產生 L' ，滿足 $d(A,L') > d(A,L)$ 。

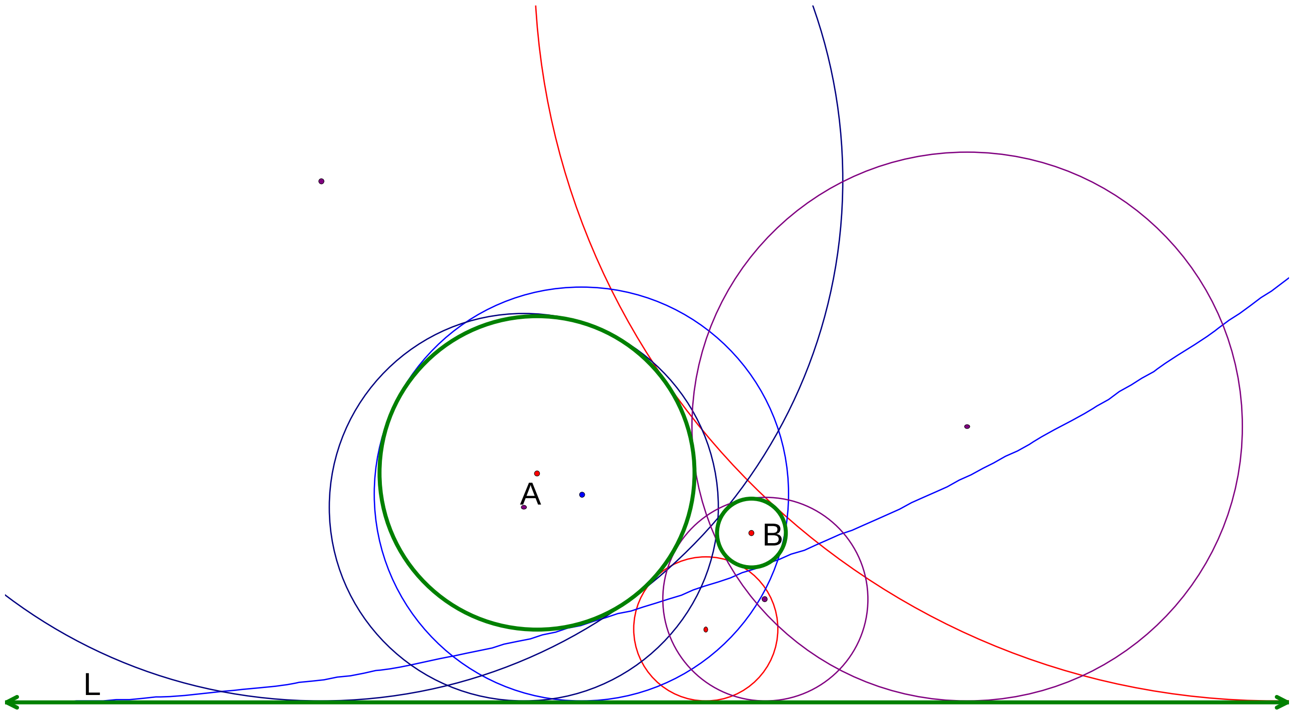
3.以點 B、L' 、圓 A' ，由 *PLC* 作圖法作圓，設其圓心 O

4.以點 O 爲圓心，作與 L 相切的圓即爲所求。

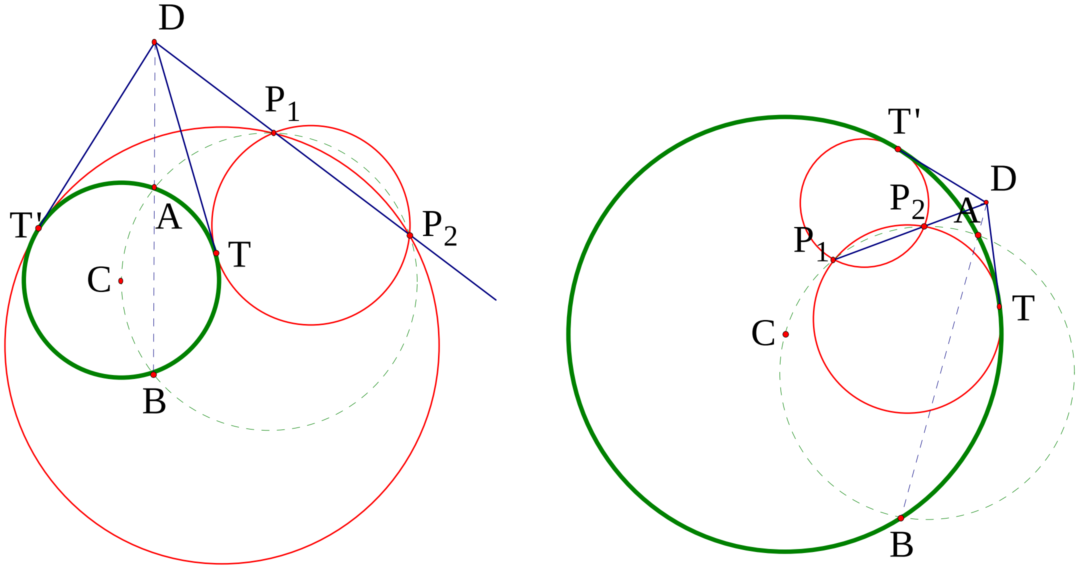
＜說明＞

設 O 爲所求圓圓心，設圓 O 切圓 A 於 F、切圓 B 於 G、切 L 於 H。以 O 爲圓心，$\overline{OB}$ 爲半徑作圓 O'，交 $\overleftrightarrow{OA}$ 於點 C，則 $\overline{CF}=\overline{BG}=R_B$。以 A 爲圓心，$\overline{AC}$ 爲半徑作圓 A'，則 C 爲圓 A' 與圓 O' 之切點。再作平行於 L 且圓 O' 相切的直線 L'，設其切點爲 E，則 $\overline{EH}=\overline{CF}=\overline{BG}=R_B$。則圓 O' 過點 B、與圓 A'、直線 L' 相切。$\therefore$ 若作過點 B、與圓 A'、直線 L' 相切的圓，其圓心亦爲所求圓之圓心。又以 R_C 爲平移量平移 L 所產生的 L' 有兩條，以 R_C 爲伸縮量伸縮圓 A 所產生的圓 A' 有兩個，所以 L' 的選擇上有兩種，A' 的選擇上也有兩種，重複以上作圖法，則此型至多有 8 解。

註：此型至多有 8 解。



【型八】—PPC型



已知：定點P_1、P_2，定圓C。

求作：過點P_1、P_2，且與圓C相切的圓。

作法：

1.連$\overleftrightarrow{P_1P_2}$，過點$P_1$、$P_2$，作適當大小的圓使之與圓$C$相交，設其交圓$C$於$A$、$B$，$\overleftrightarrow{AB}$交$\overleftrightarrow{P_1P_2}$於$D$

2.過D，作$\overline{DT}$、$\overline{DT'}$切圓C於T、T'

3.作圓P_1P_2T、圓P_1P_2T'即爲所求。

＜說明＞

$\because \overleftrightarrow{DT}$是定圓$C$的切線，$\therefore \overline{DT}^2=\overline{DA}\cdot\overline{DB}$

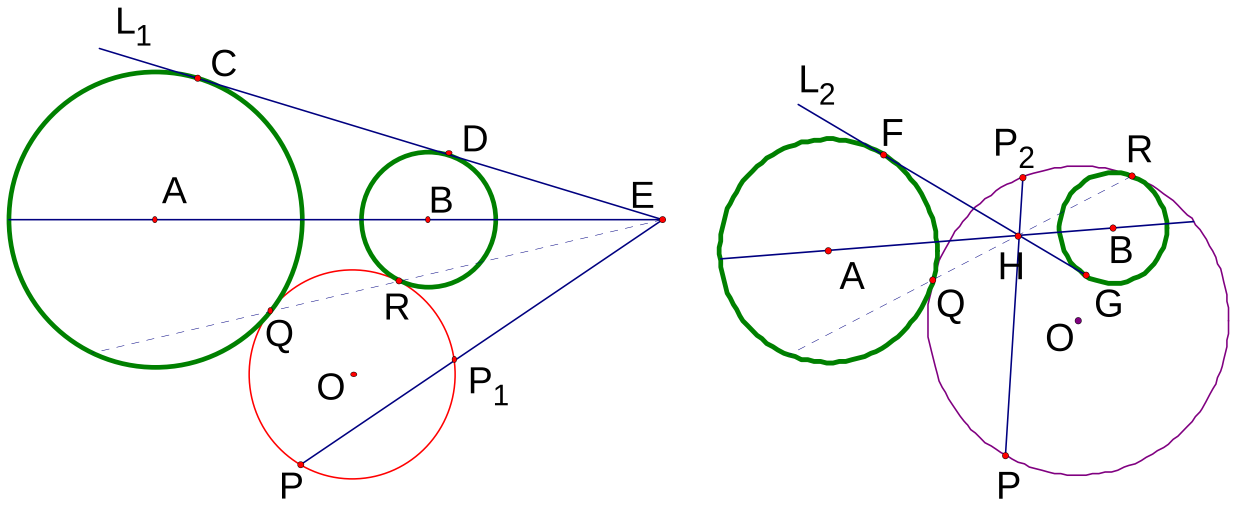
又A、B、P_1、P_2共圓，$\therefore \overline{DA}\cdot\overline{DB}=\overline{DP_1}\cdot\overline{DP_2}$

$\therefore \overline{DT}^2=\overline{DP_1}\cdot\overline{DP_2}$

$\therefore$圓P_1P_2T和$\overleftrightarrow{DT}$相切，$\overleftrightarrow{DT}$爲圓P_1P_2T與圓C之公切線，切點T。同理圓P_1P_2T'亦爲所求圓。

註：此型有2解。

【型九】—PCC型



已知：定點 P，定圓 A、B。

求作：過點 P，且與圓 A、B 相切的圓。

作法：

1.過圓 A、B 之外位似中心 E，作圓 A、B 之外公切線 L_1 切圓 A 於 C、切圓 B 於 D

2.在 $\overleftrightarrow{PE}$ 上取一點 P_1，使 $\overline{EC}\cdot\overline{ED}=\overline{EP}\cdot\overline{EP_1}$

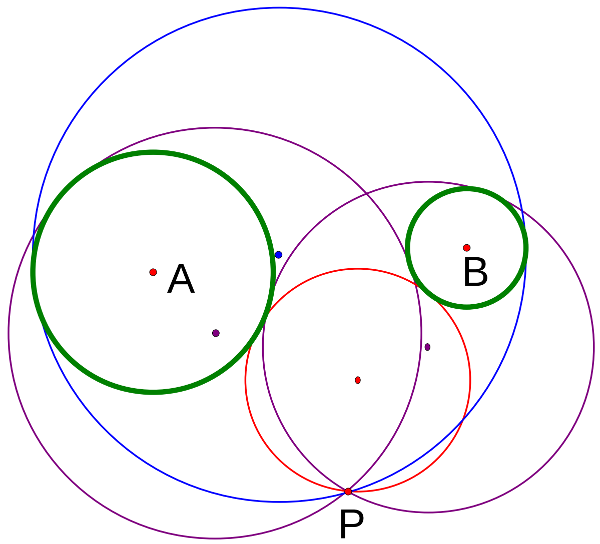
3.以 P、P_1、圓 A，由 PPC 作圖法作圓即為所求

＜說明＞

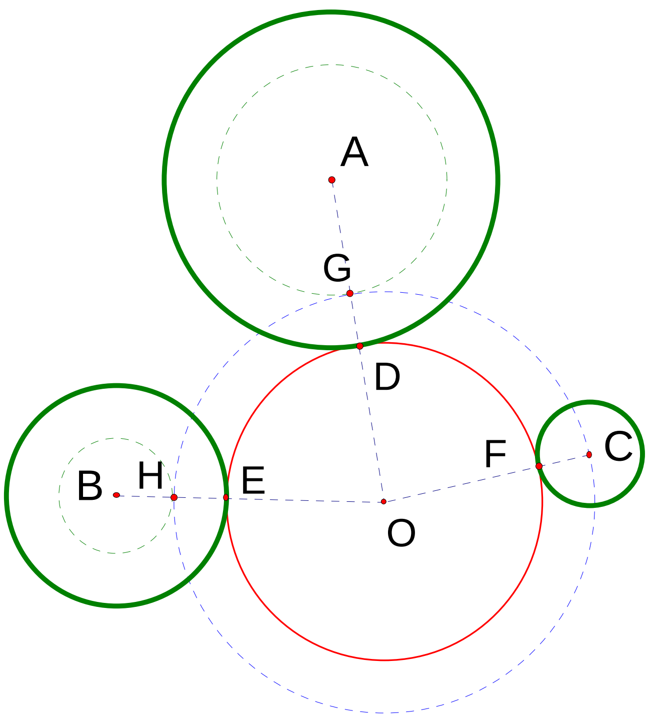
設 O 為所求圓圓心，設圓 O 切圓 A 於點 Q，切圓 B 於點 R。因為 E 為圓 A、B 之外位似中心，又根據【定理六】，則 $\overleftrightarrow{QR}$ 過圓 A、B 之位似中心，$\therefore E$、Q、R 共線。若連 $\overleftrightarrow{PE}$ 交圓 O 於 P_1，則 Q、R、P、P_1 共圓 O，$\therefore \overline{EQ}\cdot\overline{ER}=\overline{EP}\cdot\overline{EP_1}$，又根據【定理五】，$\therefore \overline{EQ}\cdot\overline{ER}=\overline{EC}\cdot\overline{ED}\Rightarrow\overline{EC}\cdot\overline{ED}=\overline{EP}\cdot\overline{EP_1}$，$\therefore$ 若在 $\overleftrightarrow{PE}$ 上取一點 P_1，使 $\overline{EC}\cdot\overline{ED}=\overline{EP}\cdot\overline{EP_1}$，則 P_1 必在所求圓上。

若所求圓與圓 A、B 一內切、一外切時，過圓 A、B 之內位似中心 H，作圓 A、B 之內公切線 L_2 切圓 A 於 F、切圓 B 於 G，。同理，在 $\overleftrightarrow{PH}$ 上取一點 P_2，使 $\overline{HF}\cdot\overline{HG}=\overline{HP}\cdot\overline{HP_2}$，可知 P_2 亦在所求圓上。

註：此型有 4 解。



【型十】—CCC型



已知：定圓 A、B、C，不失一般性，設圓 A 半徑 R_A>圓 B 半徑 R_B>圓 C 半徑 R_C 。

求作：與圓 A、B、C 皆相切的圓。

作法：

1.分別以 A、B 爲圓心，$R_A - R_C$ 、 $R_B - R_C$ 爲半徑作圓 A' 、 B'

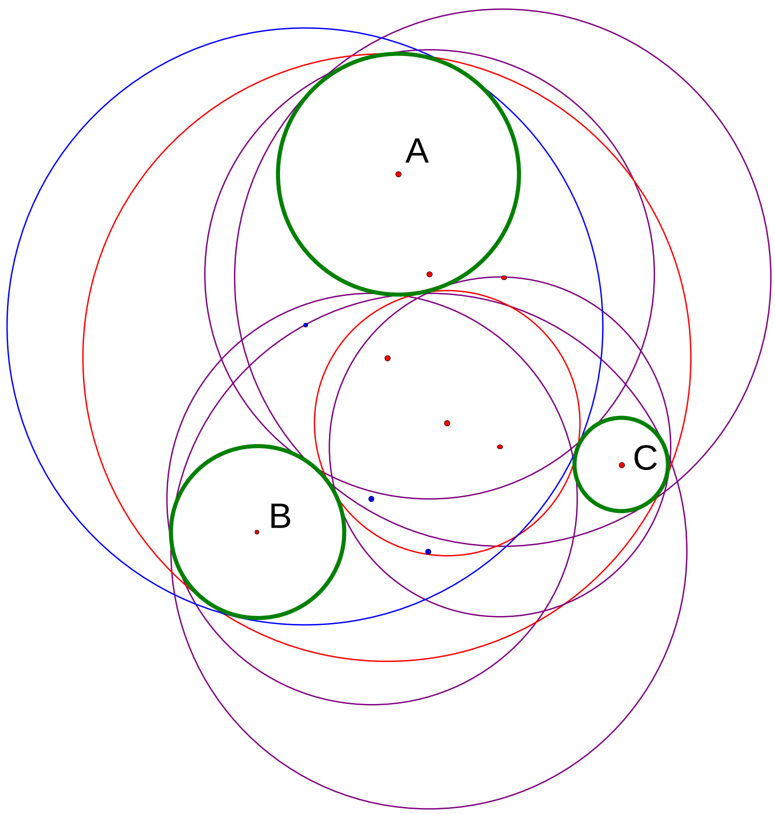
2.以點 C、圓 A' 、圓 B' ，由 PCC 作圖法作圓，設其圓心 O

3.以點 O 爲圓心，作與圓 A、B 相切的圓即爲所求。

<說明>

設 O 爲所求圓圓心。設圓 O 切圓 A 於 D、切圓 B 於 E、切圓 C 於 F。以點 O 爲圓心，$\overline{OC}$ 爲半徑作圓 O'，分別交 $\overleftrightarrow{AD}$ 於 G、交 $\overleftrightarrow{BE}$ 於 H，則 $\overline{DG}=\overline{EH}=R_C$。分別以點 A、點 B 爲圓心，$\overline{AG}$、$\overline{BH}$ 爲半徑作圓 A'、B'，則圓 O' 過點 C，切圓 A' 於 G、切圓 B' 於 H。$\therefore$ 若作過點 C、與圓 A'、B' 相切的圓，其圓心亦爲所求圓之圓心。又以 R_C 爲伸縮量伸縮圓 A 所產生的圓 A' 有兩個，以 R_C 爲伸縮量伸縮圓 B 所產生的圓 B' 有兩個，所以圓 A' 的選擇上有兩種，圓 B' 的選擇上也有兩種，重複以上作圖法，則此型至多有 8 解。

註：此型至多有 8 解。



小結：

類型	流程	解的個數
PPP	PPP	1
LLL	LLL	4
PPL	$PPL \rightarrow PPP$	2
PLL	$PLL \rightarrow PPL \rightarrow PPP$	2
LLC	$LLC \rightarrow PLL \rightarrow PPL \rightarrow PPP$	4
PLC	$PLC \rightarrow PPL \rightarrow PPP$	4
LCC	$LCC \rightarrow PLC \rightarrow PPL \rightarrow PPP$	8
PPC	$PPC \rightarrow PPP$	2
PCC	$PCC \rightarrow PPC \rightarrow PPP$	4
CCC	$CCC \rightarrow PCC \rightarrow PPC \rightarrow PPP$	8

（二）尺規作圖的規則與定義

爲了將尺規作圖由 $2D$ 推廣到 $3D$，我們將說明 $2D$ 尺規作圖的規則，並定義 $3D$ 的尺規作圖。

【二維尺規作圖規則】

只使用圓規和直尺，並且只准許使用有限次，來解決不同的平面幾何作圖題。

(1) 直尺必須沒有刻度，無限長。只可以用它來將兩個點連在一起，不可以在上畫刻度。

(2) 圓規可以開至無限寬，但上面亦不能有刻度。它只可以拉開成你之前構造過的長度。

可操作物件：

(1)點

(2)線：包含直線物件與圓物件(曲線)

直尺可得直線物件，圓規可得圓物件。二相異點可以決定一直線。以一點爲圓心，過另外一點可以決定一個圓。

已知的物件之間可以產生相交的物件(若存在的話)

例如：直線與直線的交點，直線與圓的交點，圓與圓的交點

【立體尺規的定義】

可用工具如下,且只准許使用有限次。

(1)直尺　(2)圓規　(3)面尺　(4)球規

面尺：可產生平面物件。以不共線的三點，可以畫出一個平面，無限延伸，其他限制仿直尺。

球規：可產生球面物件。以一點爲球心，過另外一點，可以畫出一個空心球面，其他限制仿圓規。

可操作物件：

(1)點

(2)線：包含直線物件與圓物件(曲線)

(3)面：包含平面物件與球面物件(曲面)

已知的物件之間可以產生相交的物件(若存在的話)

例如：

直線與直線的交點，直線與圓的交點，直線與平面交點，直線與球面交點

圓與圓的交點，圓與平面交點，圓與球面交點

平面與平面的交線，平面與球面的交圓

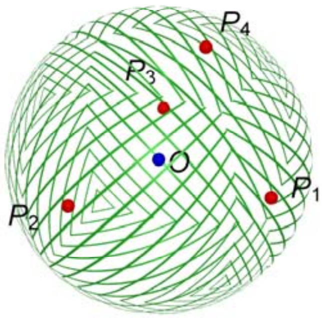
球面與球面的交圓

（三）*PES* 空間幾何作圖

運用 2*D* 的 *PLC* 作圖性質，我們將進一步探討 3*D* 的 *PES* 作圖。由於我們在 *PES* 作圖中某些類型會運用平面作圖中伸縮、平移等技巧，且所求切球又可能爲內切球或外切球，其個數也可能不止一個，而空間中的立體圖形不容易呈現出彼此相切的情形，爲說明方便與避免畫面紛亂造成混淆，若太過複雜的類型，我們將僅用一種相切的情形作說明，其餘的切球也皆可由作圖法作出來。

我們分以下十五種類型討論：*PPPP*、*EEEE*、*PPPE*、*PPEE*、*PEEE*、*EEES*、*PPES*、*PEES*、*EESS*、*PESS*、*ESSS*、*PPPS*、*PPSS*、*PSSS*、*SSSS*

【型一】—$PPPP$型



已知：定點P_1、P_2、P_3、P_4

求作：過四點P_1、P_2、P_3、P_4的球

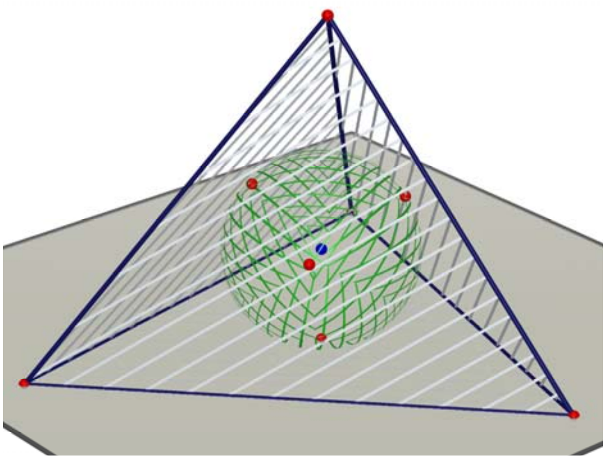
作法：

作P_1、P_2、P_3、P_4任兩點之中垂面，交點O，可得一球$P_1P_2P_3P_4$（球心O）。

＜說明＞

仿PPP作圖。

【型二】—$EEEE$型



已知：定平面E_1、E_2、E_3、E_4

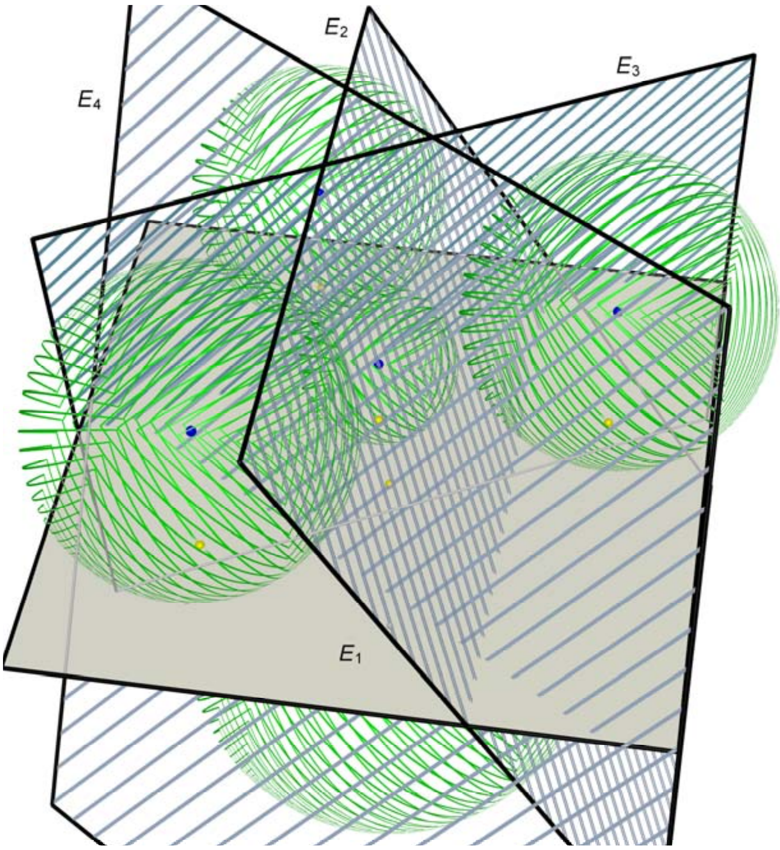
求作：與E_1、E_2、E_3、E_4皆相切的球

作法：

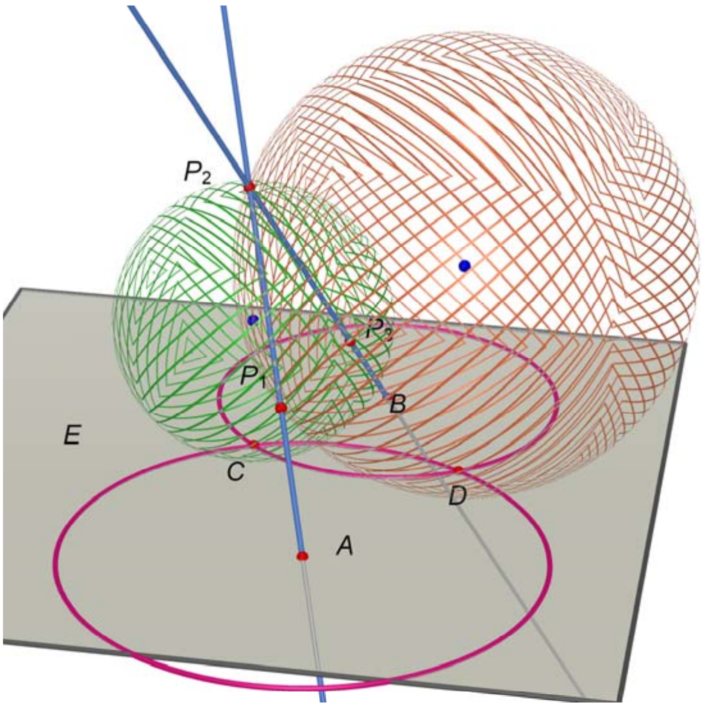
作E_1、E_2、E_3、E_4任兩面之角平分面，其交點即爲所求球之球心。

＜說明＞

仿LLL作圖。



【型三】—*PPPE* 型



已知：定點 P_1 、 P_2 、 P_3 ，定平面 E

求作：過點 P_1 、 P_2 、 P_3 ，且與 E 相切的球

作法：

1.作 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 、 $\overleftrightarrow{P_2P_3}$ 分別交 E 於點 A、B

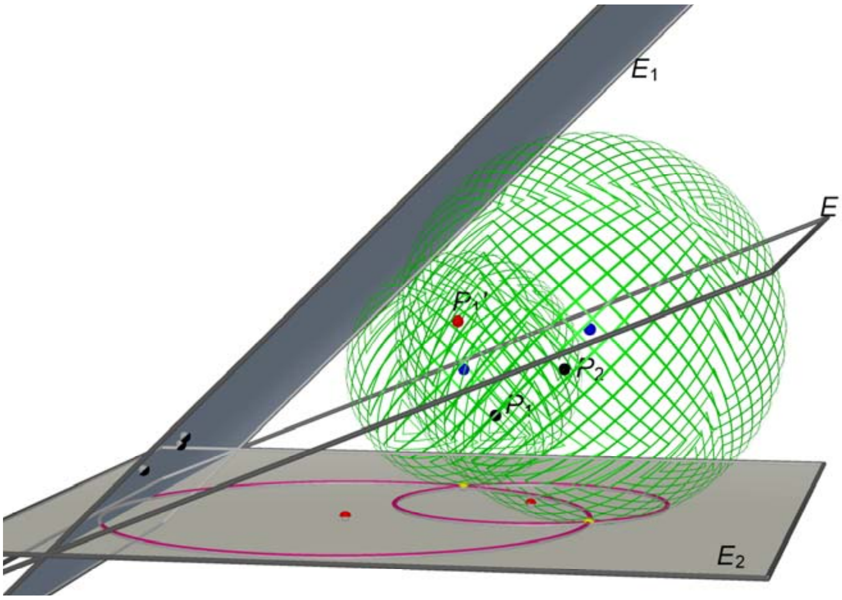
2.在 E 上分別以 A、B 爲球心，R_A 、 R_B 爲半徑作球 A、B，且 $R_A{}^2 = \overline{AP_1} \cdot \overline{AP_2}$ ，$R_B{}^2 = \overline{BP_2} \cdot \overline{BP_3}$ ，球 A 交 E 於一圓 A，球 B 交 E 於一圓 B，圓 A 交圓 B 於點 C、D

3.分別以 P_1 、 P_2 、 P_3 、C；P_1 、 P_2 、 P_3 、D，由 *PPPP* 作圖法作球即爲所求

＜說明＞

仿 *PPL* 作圖。

【型四】—*PPEE* 型



已知：定點 P_1 、 P_2 ，定平面 E_1 、 E_2

求作：過點 P_1 、 P_2 ，與 E_1 、 E_2 皆相切的球

作法：

1.作一平面 E 角平分 E_1 、 E_2

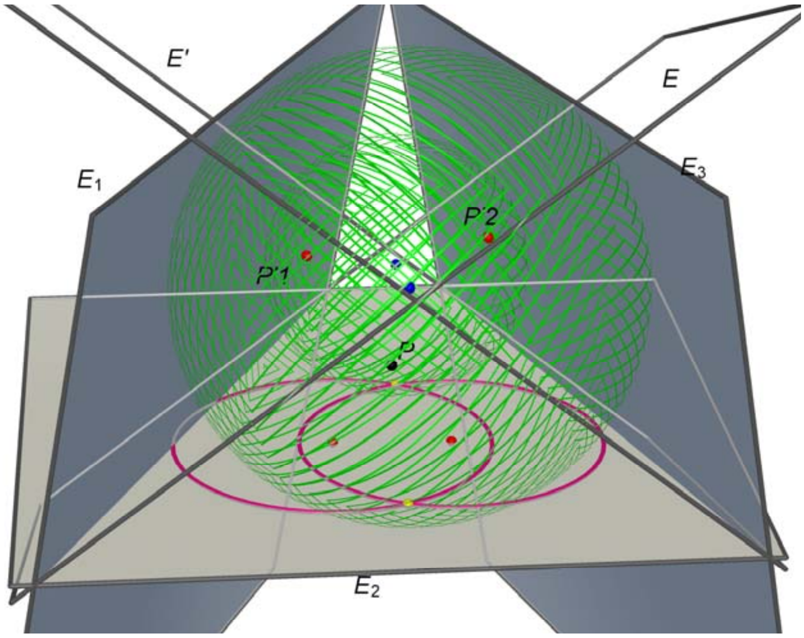
2.作點 P_1 關於 E 之對稱點 P_1'

3.以 P_1 、 P_2 、 P_1' 、 E_1 ，由 *PPPE* 作圖法作球即爲所求

＜說明＞

仿 *PLL* 作圖。

【型五】—*PEEE* 型



已知：定點 P，定平面 E_1 、 E_2 、 E_3

求作：過點 P，與 E_1 、 E_2 、 E_3 皆相切的球

作法：

1.作一平面 E 角平分 E_1 、 E_2 ，作一平面 E' 角平分 E_2 、 E_3

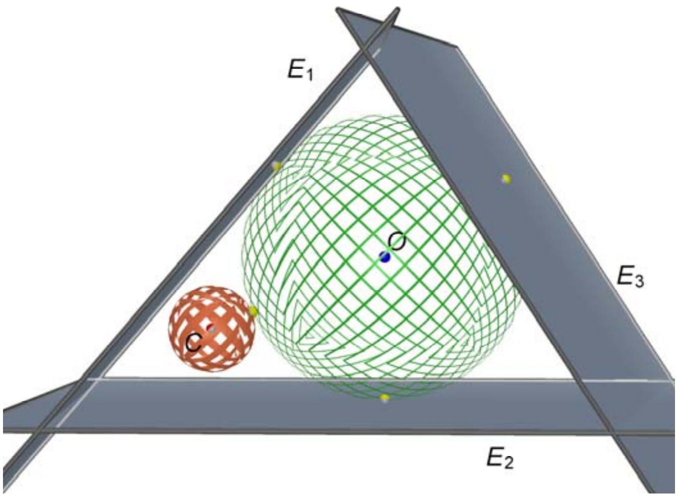
2.分別作點 P 關於 E 之對稱點 P'_1 、點 P 關於 E' 之對稱點 P'_2

3.以 P、 P'_1 、 P'_2 、 E_1 ，由 *PPPE* 作圖法作球即為所求

＜說明＞

仿 *PLL* 作圖。

【型六】—*EEES* 型



已知：定平面E_1、E_2、E_3，定球C

求作：與E_1、E_2、E_3、C皆相切的球

作法：

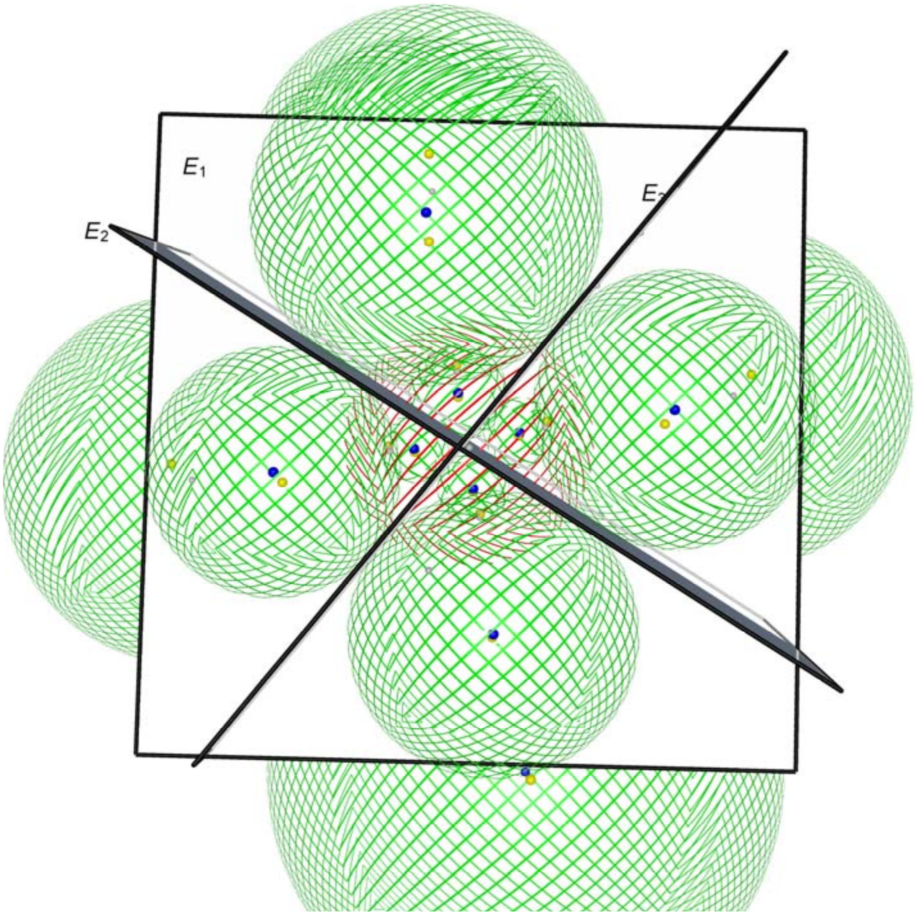
1.以球 C 半徑爲平移量，平移E_1產生$E_1^{'}$，平移E_2產生$E_2^{'}$，平移E_3產生$E_3^{'}$，滿足$d\left(C,E_1^{'}\right)>d\left(C,E_1\right)$，$d\left(C,E_2^{'}\right)>d\left(C,E_2\right)$，$d\left(C,E_3^{'}\right)>d\left(C,E_3\right)$。

2.以點C、三平面$E_1^{'}$、$E_2^{'}$、$E_3^{'}$，由*PEEE*作圖法作球，設其球心O。

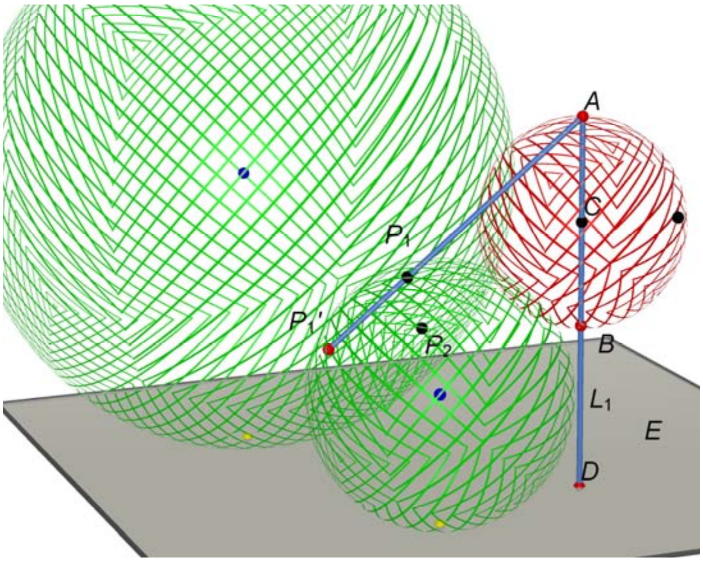
3.以O爲球心，作與E_1相切的球即爲所求。

＜說明＞

仿*LLC*作圖。



【型七】—*PPES* 型



已知：定點 P_1、P_2，定平面 E，定球 C

求作：過點 P_1、P_2，與 E、C 皆相切的球

作法：

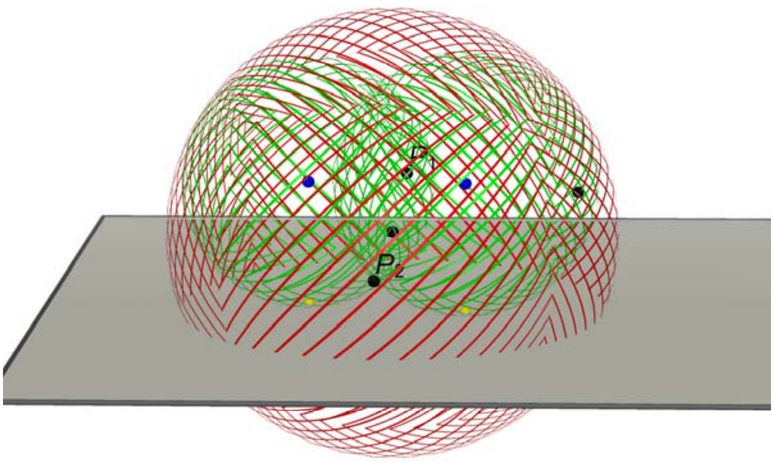
1.過點 C，作 $L_1 \perp E$ 於 D，交球 C 於 A，B，且 $d(A,E) > d(B,E)$。

2.在 $\overleftrightarrow{AP_1}$ 上取一點 P_1'，使 $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AP_1} \cdot \overline{AP_1'}$

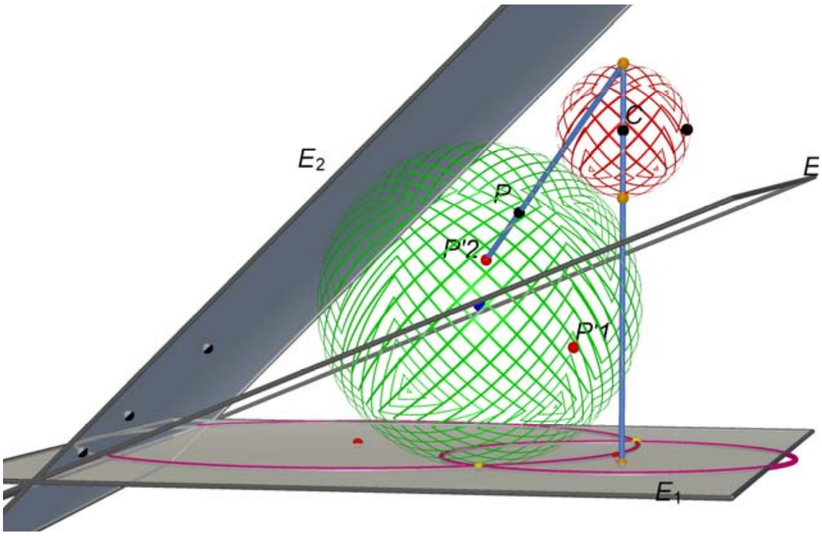
3.以 P_1、P_2、P_1'、E，由 *PPPE* 作圖法作球即為所求

＜說明＞

仿 *PLC* 作圖。



【型八】—*PEES* 型



已知：定點 P，定平面 E_1 、 E_2 ，定球 C

求作：過點 P，與 E_1 、 E_2 、C 皆相切的球

作法：

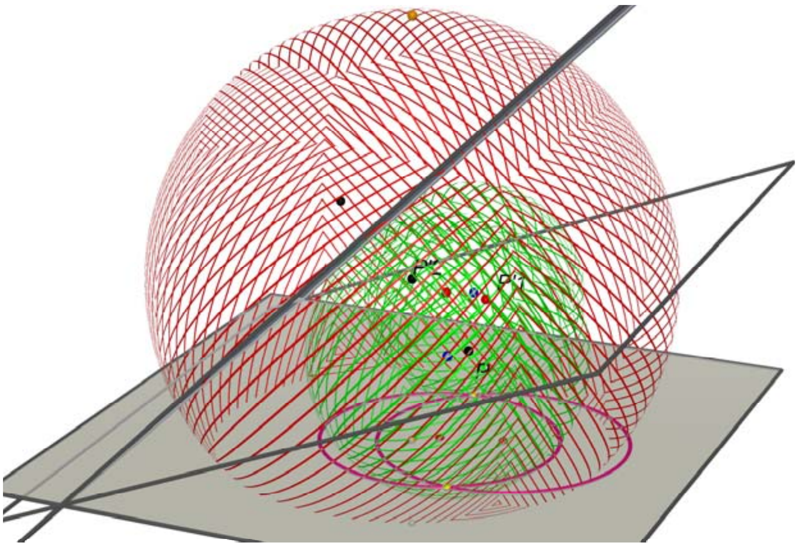
1.作一平面 E 角平分 E_1 、 E_2

2.作點 P 關於 E 之對稱點 P'_1

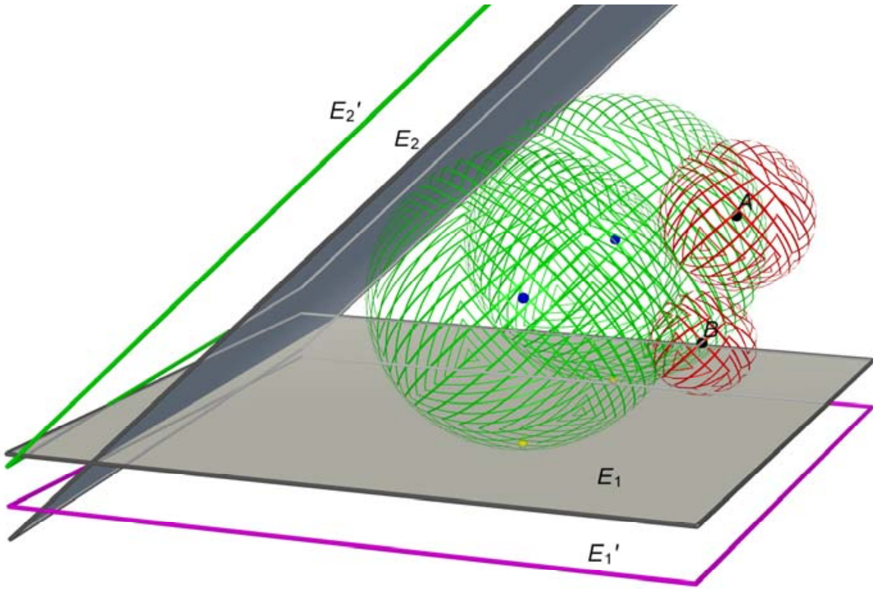
3.以 P、 P'_1 、 E_1 、C，由 *PPES* 作圖法作球即為所求

<說明>

仿 *PLL*、*PLC* 作圖



【型九】—*EESS* 型



已知：定平面 E_1、E_2，定球 A、B，不失一般性，設球 A 半徑 R_A ＞球 B 半徑 R_B

求作：與 E_1、E_2、A、B 皆相切的球

作法：

1.以球 B 半徑爲平移量，平移 E_1 產生 $E_1^{'}$，平移 E_2 產生 $E_2^{'}$，滿足 $d\left(A,E_1^{'}\right)>d\left(A,E_1\right)$，$d\left(A,E_2^{'}\right)>d\left(A,E_2\right)$，以點 A 爲球心，R_A-R_B 爲半徑作球 A'。

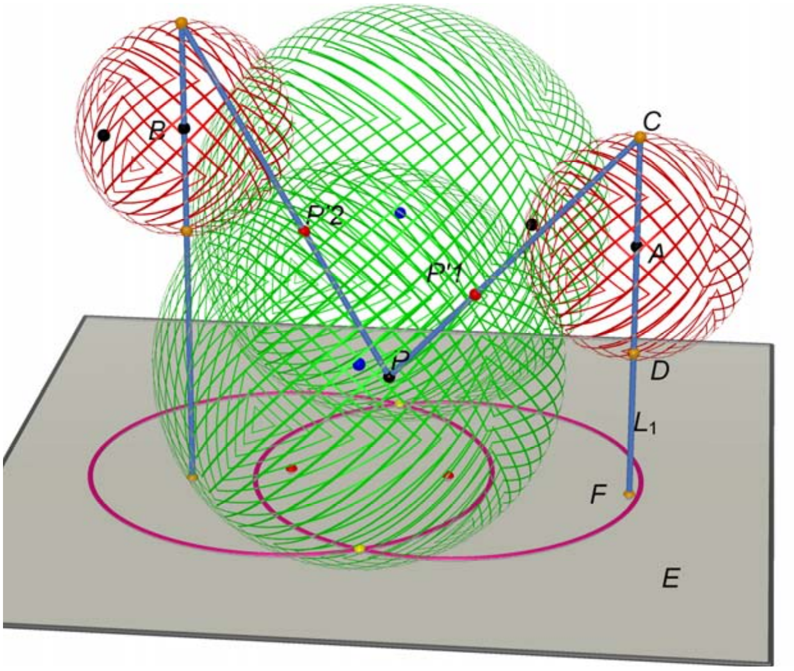
2.以點 B、兩平面 $E_1^{'}$、$E_2^{'}$、球 A'，由 *PEES* 作圖法作球，設其球心 O。

3.以 O 爲球心，作與 E_1 相切的球即爲所求。

＜說明＞

仿 *LCC*、*LLC* 作圖。

【型十】—*PESS*型



已知：定點 P，定平面 E，定球 A、B

求作：過點 P，與 E、A、B 皆相切的球

作法：

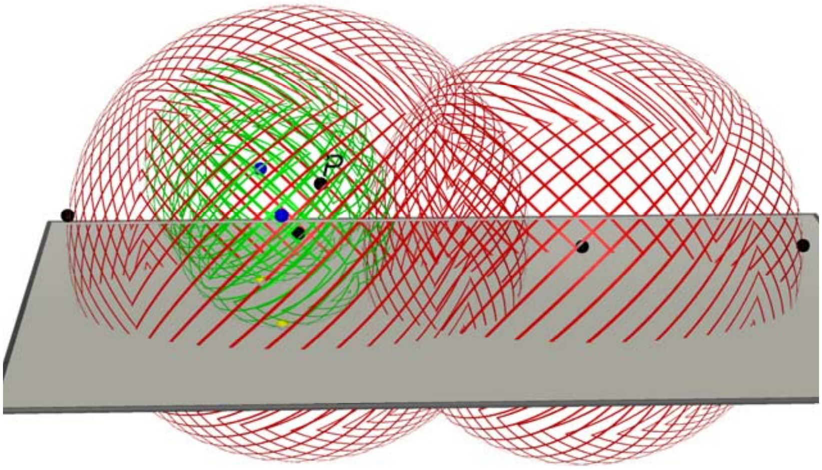
1.過點 A，作 $L_1 \perp E$ 於 F，交球 A 於 C，D，且 $d(C,E) > d(D,E)$。

2.在 $\overleftrightarrow{CP}$ 上取一點 P'_1，使 $\overline{CD} \cdot \overline{CF} = \overline{CP} \cdot \overline{CP'_1}$

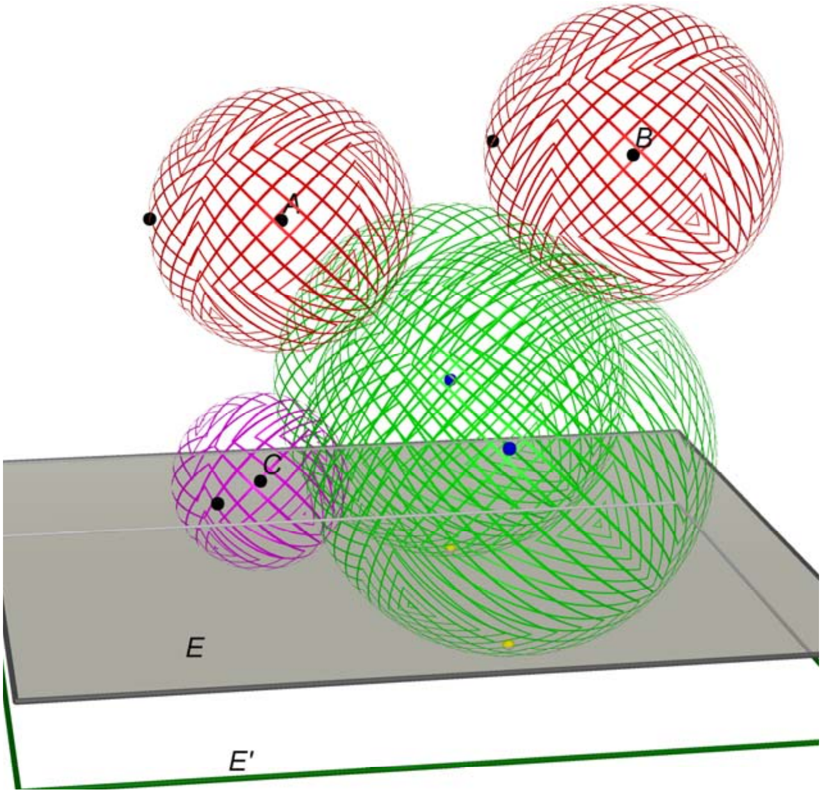
3.以 P、P'_1、E、B，由 *PPES* 作圖法作球即為所求

＜說明＞

仿 *PLC* 作圖。



【型十一】—*ESSS* 型



已知：定平面 E，定球 A、B、C，不失一般性，設球 A 半徑 $R_A >$ 球 B 半徑 $R_B >$ 球 C 半徑 R_C

求作：與 E、A、B、C 皆相切的球

作法：

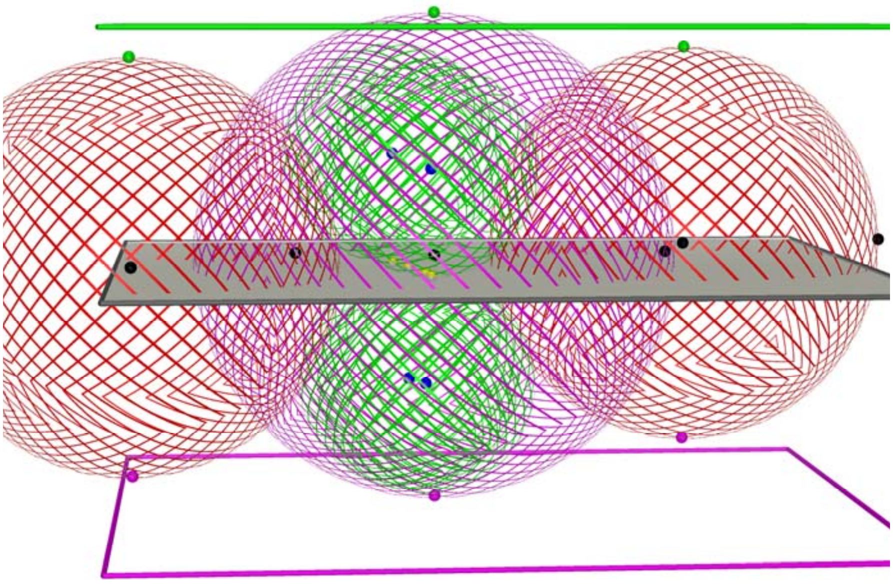
1.以球 C 半徑爲平移量，平移 E 產生 E'，滿足 $d(C,E')>d(C,E)$，分別以點 A、B 爲球心，R_A-R_C 、 R_B-R_C 爲半徑作球 A' 、 B' 。

2.以點 C、平面 E、球 A' 、 B' ，由 *PESS* 作圖法作球，設其球心 O。

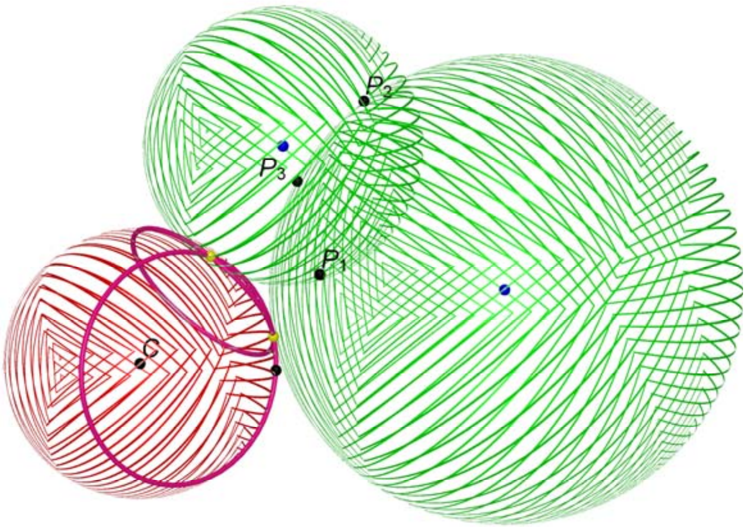
3.以 O 爲球心，作與 E 相切的球即爲所求。

＜說明＞

仿 *LCC* 作圖



【型十二】—*PPPS*型



已知：定點P_1、P_2、P_3，定球C

求作：過點P_1、P_2、P_3，且與C相切的球

作法：

1.作P_1、P_2之中垂面，作P_2、P_3之中垂面，兩中垂面相交於L

2.在L上取適當點O為球心，$\overline{OP_1}$為半徑作球O，使球O交球C於一圓A

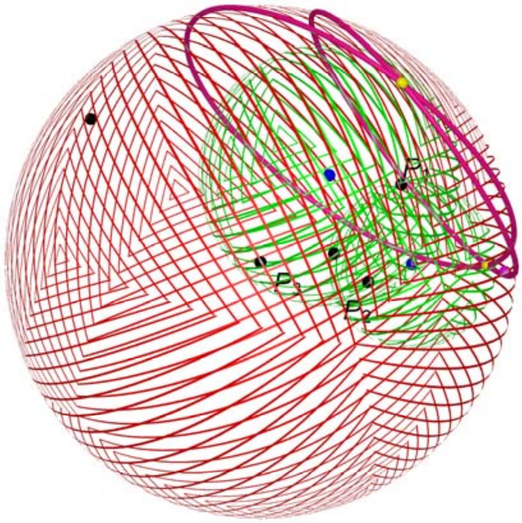
3.作過圓A之平面E，連$\overleftrightarrow{P_1P_2}$交$E$於點$B$，連$\overleftrightarrow{P_2P_3}$交$E$於點$D$

4.分別以B、D為球心，R_B、R_D為半徑作球交球C於圓F、G，且${R_B}^2=\overline{BP_1}\cdot\overline{BP_2}$，${R_D}^2=\overline{DP_2}\cdot\overline{DP_3}$，圓$F$、$G$相交於點$H$、$I$

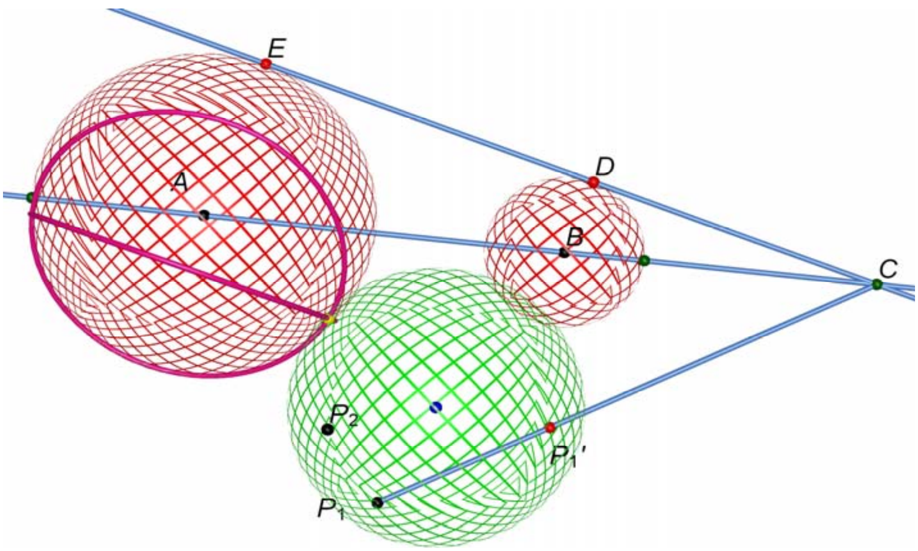
5.由*PPPP*作圖法作球$P_1P_2P_3H$、球$P_1P_2P_3I$即為所求

＜說明＞

仿 *PPC* 作圖。



【型十三】—*PPSS* 型



已知：定點 P_1 、 P_2 ，定球 A、B

求作：過點 P_1 、 P_2 ，與 A、B 皆相切的球

作法：

1.作球 A、B 之外位似中心點 C

2.過 C 作球 A、B 之公切線切球 A 於 E、切球 B 於 D

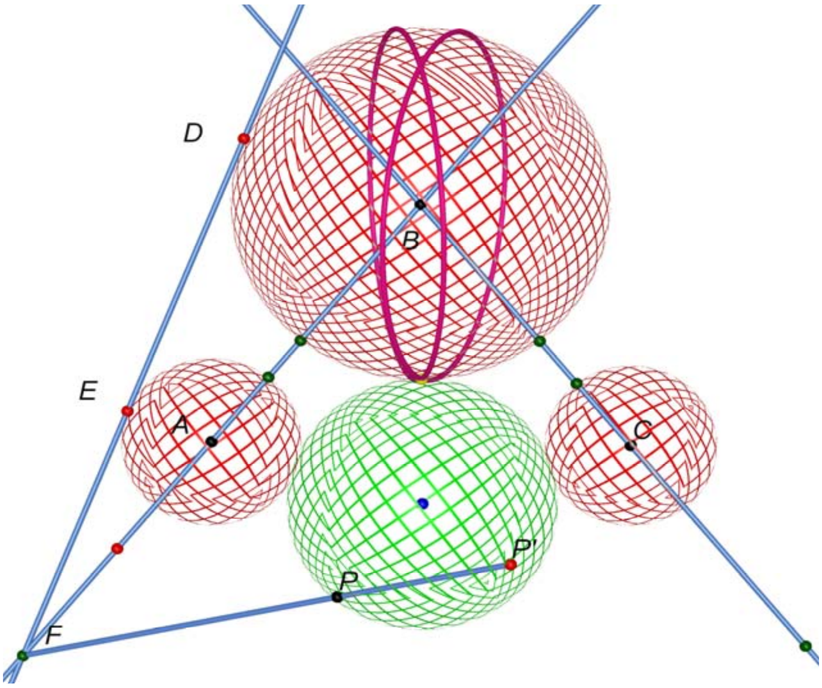
3.在 $\overleftrightarrow{CP_1}$ 取一點 P_1' ，使 $\overline{CD}\cdot\overline{CE}=\overline{CP_1}\cdot\overline{CP_1'}$

4.以 P_1 、 P_2 、 P_1' 、球 A，由 *PPPS* 作圖法作球即爲所求

<說明>

仿 *PCC* 作圖

【型十四】—*PSSS* 型



已知：定點 P，定球 A、B、C

求作：過點 P，與 A、B、C皆相切的球

作法：

1.作球 A、B之外位似中心點 F

2.過 F作球 A、B之公切線切球 A於 E、切球 B於 D

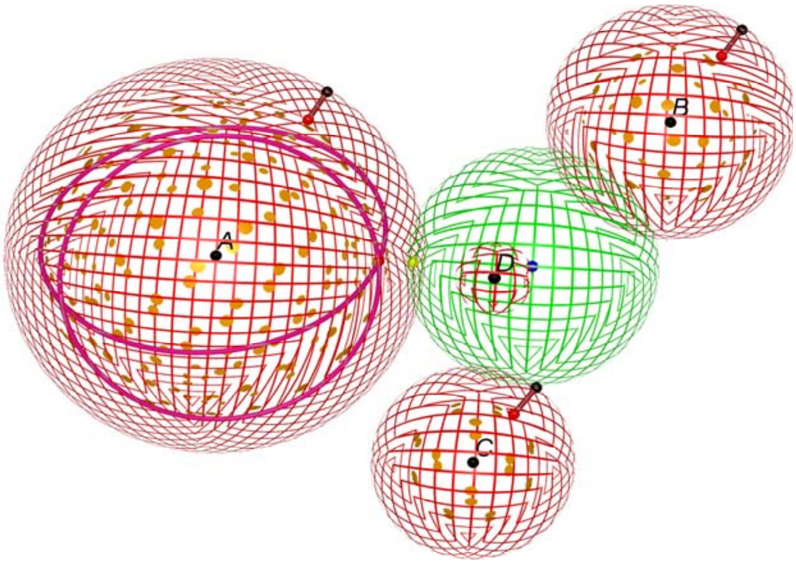
3.在 $\overrightarrow{FP}$ 取一點 P'，使 $\overline{FD}\cdot\overline{FE}=\overline{FP}\cdot\overline{FP'}$

4.以點 P、P'、球 B、C，由 *PPSS* 作圖法作球即爲所求

<說明>

仿 *PCC* 作圖

【型十五】—*SSSS* 型



已知：定球 *A*、*B*、*C*、*D*，不失一般性，設球 *A* 半徑 R_A>球 *B* 半徑 R_B>球 *C* 半徑 R_C>球 *D* 半徑 R_D

求作：與 *A*、*B*、*C*、*D* 皆相切的球

作法：

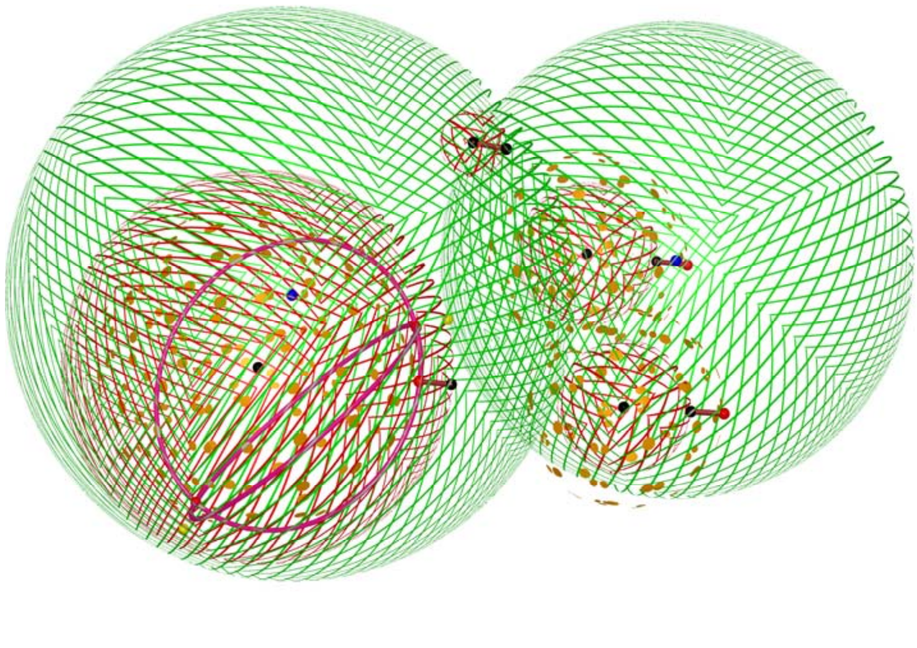
1.分別以 *A*、*B*、*C* 爲球心，R_A-R_D、R_B-R_D、R_C-R_D 爲半徑作圓 A'、B'、C'

2.以點 *D*、球 A'、B'、C'，由 *PSSS* 作圖法作球，設其球心 *O*

3.以點 *O* 爲球心，作與球 *A* 相外切的球即爲所求

＜說明＞

仿 *CCC* 作圖



小結：

類型	流程	解的數量
PPPP	*PPPP*	1
EEEE	*EEEE*	5
PPPE	*PPPE*→*PPPP*	2
PPEE	*PPEE*→*PPPE*→*PPPP*	2
PEEE	*PEEE*→*PPEE*→*PPPE*→*PPPP*	2
EEES	*EEES*→*PEEE*→*PPEE*→*PPPE*→*PPPP*	4
PPES	*PPES*→*PPPE*→*PPPP*	4
PEES	*PEES*→*PPES*→*PPPE*→*PPPP*	4
EESS	*EESS*→*PEES*→*PPES*→*PPPE*→*PPPP*	8
PESS	*PESS*→*PPES*→*PPPE*→*PPPP*	8
ESSS	*ESSS*→*PESS*→*PPES*→*PPPE*→*PPPP*	16
PPPS	*PPPS*→*PPPP*	2
PPSS	*PPSS*→*PPPS*→*PPPP*	4
PSSS	*PSSS*→*PPSS*→*PPPS*→*PPPP*	8
SSSS	*SSSS*→*PSSS*→*PPSS*→*PPPS*→*PPPP*	16

伍、研究結果與討論

一開始我們進行這個研究時，很容易以爲每一個類型都是互相獨立的，彼此沒有特殊關聯。然而隨著我們一步步探討，發現各個類型皆有其關聯性，可以讓彼此之間作條件轉換，將複雜的類型轉變成簡單、已完成的類型，再作所求的圓與球。其關鍵在於—運用幾何的基本定理，創造新的條件，而這個條件，通常是一個點。畢竟 *PLC*、*PES* 作圖的研究內容主要在於作圓和作球，而以作圓來說，最基本的想法不外乎兩種，那就是先找圓心和半徑，以及不共線三點決定一圓。

在先找圓心和半徑時，其中「**中垂線交點求圓心**」、「**角平分線交點求圓心**」是最爲常見的作圖方法，但這兩種作圖法所能解決的問題畢竟有限。而我們發現在只有已知圓和已知線的類型中，如 *LCC*，若要直接作圖並不容易，但是若以最小的已知圓之半徑爲伸縮、平移量，將已知線作平移，將已知圓作伸縮，並使最小的已知圓縮成一個點，會產生最小已知圓圓心一點、已知線平移後的一線、已知圓伸縮後的一圓，此時的 *LCC* 就被我們運用條件轉換化簡爲 *PLC*。而我們發現此時由 *PLC* 作圖法產生的所求圓和原本以 *LCC* 作圖法產生的所求圓爲同心圓，而只要找到圓心，就一定可作所求圓。

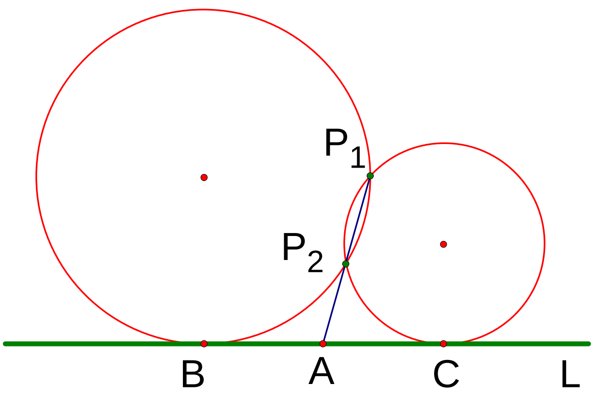
我們的想法是：圓心爲定點，半徑是幾何量，所以半徑是可伸縮的，而我們之所以取最小的已知圓之半徑爲伸縮、平移量，是因爲若是其他已知圓需要內縮時，才能確保其半徑爲正，一方面也保持作圖的一致性。至於圓要內縮還是外擴，線要往哪個方向平移，就要看我們所求的圓與其他已知線、已知圓間的位置、關係而定。此外，我們之所以伸縮平移已知條件的主要目的在於使已知圓縮成點，因此這一類的作圖法使用上的先決條件就是已知條件至少要有一圓，而且只能出現圓和線，不能有點，因爲點不具有方向性，因此有點則不可伸縮平移。我們將這種類型的作圖方法，稱之爲「**伸縮平移產生點，類型轉換，同心圓求圓心**」。

此外，我們知道不共線三點恰決定一圓，既然 *PLC* 作圖就是要作圓，我們當然希望點越多越好，而這些點可以是切點，也可以是所求圓上的點。在研究中我們發現了兩種產生點的方法，即「**對稱性質產生點**」和「**圓冪性質產生點**」。

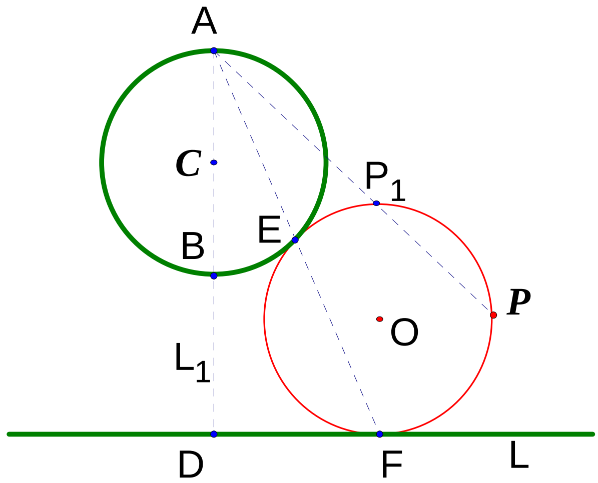
關於對稱性質產生點，以 *PLL* 爲例，我們發現定點關於角平分線之對稱點亦在所求之圓上。此外，我們也發現所求圓也會與已知線、已知圓關於角平分線的對稱圖形相切，因爲角平分線有造成圖形對稱的效果。如此說來，其實兩點的中垂線也有造成圖形對稱的效果，我

們也可以將已知條件關於中垂線作對稱。然而不一定作對稱皆會產生有用的條件，一般來說我們都是取已知點關於角平分線作對稱，產生新的點。我們將這種類型的作圖方法，稱之爲「對稱性質產生點」。

關於圓冪性質產生點，以 PPL（請看【圖一】）爲例，我們知道已知線上一定有切點，又 P_1、P_2 均爲所求圓上的點，作割線 $\overleftrightarrow{P_1P_2}$ 交 L 於 A 點，則 A 點與切點連線爲切線段，對所求圓來說，由切割線定理，知 $\overline{AP_1}\cdot\overline{AP_2}$ =切線段長平方，因此，若我們在 L 上取兩點 B、C，使 $\overline{AB}^2=\overline{AC}^2=\overline{AP_1}\cdot\overline{AP_2}$，則 B、C 必爲切點，我們稱這種由已知線段長乘積產生點的方法，稱爲「圓冪性質產生點」，此時產生的點爲切點。



【圖一】



【圖二】

又以 PLC（請看【圖二】）爲例，設所求圓圓心 O，若圓 O 和圓 C 外切時，由【定理三】，則 A、E、F 三點共線，若連 $\overleftrightarrow{AP}$ 交圓 O 於點 P_1，由圓冪定理，則 $\overline{AE}\cdot\overline{AF}=\overline{AP_1}\cdot\overline{AP}$。又由【定理四】，$\therefore \overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AE}\cdot\overline{AF}$。所以若在 $\overleftrightarrow{AP}$ 上取一點 P_1，使 $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AP_1}\cdot\overline{AP}$，則 P_1 必在所求圓上。我們稱這種由已知線段長乘積產生點的方法，稱爲「圓冪性質產生點」，此時產生的點爲所求圓上點。

但值得注意的是，我們在作圖時都是直接在 $\overleftrightarrow{AP}$ 上取一點 P_1，使 $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=\overline{AP_1}\cdot\overline{AP}$，產生新的點，換句話說，$B$、$D$、$P$、$P_1$ 會四點共圓，所以我們才會稱這種作圖法爲「圓冪性質產生點」，但是如果沒有【定理四】線段乘積相等的性質以及【定理三】三點共線的性質，這個作圖法是不會成立的，尤其【定理三】三點共線的性質更是【定理四】和圓冪定理結合的關鍵，所以「圓冪性質產生點」通常需要一些幾何定理的輔助。但不論產生的點是切點或所求圓上的點，我們通稱這種由已知線段長乘積產生點的作圖法爲「圓冪性質產生點」。

一開始我們並不知道如何將平面的 *PLC* 作圖推廣到空間中的 *PES* 作圖，但後來我們想到：我們就先找特定平面去和 *PES* 作圖中的已知條件相交看其截痕爲何，以 *PPES* 爲例，我們先把所求球作出來，再補上已知條件，也就是說我們先不以正規的方法作圖，先把最後的結果畫出來觀察。這時我們取一平面 E，過所求球球心、已知球球心、以及已知球球心在已知平面上的投影點，我們發現其截痕會類似於 PLC 作圖，即【定理四】線段乘積相等的性質和【定理三】三點共線的性質在空間中仍能沿用。

唯一不同的是，已知點不一定會在平面 E 上，但我們知道圓冪定理是由兩相交割線產生的，又我們必可作一平面包含兩相交割線，此平面與所求球的截痕爲圓，對圓來說切割線定理會成立，所以切割線定理對球仍能沿用，因此我們就能成功的將 *PLC* 作圖法沿用到空間中的 *PPES*，這也就是我們在這個研究一開始的摘要中提到的：在空間中只要找到滿足特定條件的平面，則 $2D$ 幾何作圖性質在該平面仍能沿用。

因此，我們研究的結論就是：*PLC* 作圖使用的定理、作圖方法，皆能沿用到空間中，但有可能要作細部修正。以 *PPL*（請看【圖一】）和 *PPPE* 來比較，在 *PPL* 中我們切點的作法是以 A 爲圓心，$\overline{AP_1}$ 和 $\overline{AP_2}$ 長度的幾何平均爲半徑作圓，與 L 交於 B、C，B、C 即爲切點；在 *PPPE* 中，我們就修正爲作幾均球，與已知平面相交，其截痕爲圓，切點會是兩個截痕圓的交點。

陸、結論

【定義】

一、*PLC* 作圖—作圓，過已知點（*P*）、切已知線（*L*）、切已知圓（*C*）

二、*PES* 作圖—作球，過已知點（*P*）、切已知面（*E*）、切已知球（*S*）

如何作圓：

1.先找圓心和半徑→中垂線求圓心（*PPP*）

→角平分線求圓心（*LLL*）

→伸縮平移產生點，類型轉換，同心圓求圓心

（*LLC*→*PLL*、*LCC*→*PLC*、*CCC*→*PCC*）

2.三點決定一圓：

如何作點：

（1）對稱性質產生點（*PLL*→*PPL*）

（2）圓冪性質產生點→切點（*PPL*→*PPP*、*PPC*→*PPP*）

→所求圓上點（*PLC*→*PPL*、*PCC*→*PPC*）

【推廣】

如何作球：

1.先找球心和半徑→中垂面求球心（*PPPP*）

→角平分面求球心（*EEEE*）

→伸縮平移產生點，類型轉換，同心球求球心

（*EEES*→*PEEE*、*EESS*→*PEES*、*ESSS*→*PESS*、*SSSS*→*PSSS*）

2.四點決定一球：

如何作點：

（1）對稱性質產生點（*PEEE*→*PPPE*、*PPEE*→*PPPE*、*PEES*→*PPES*）

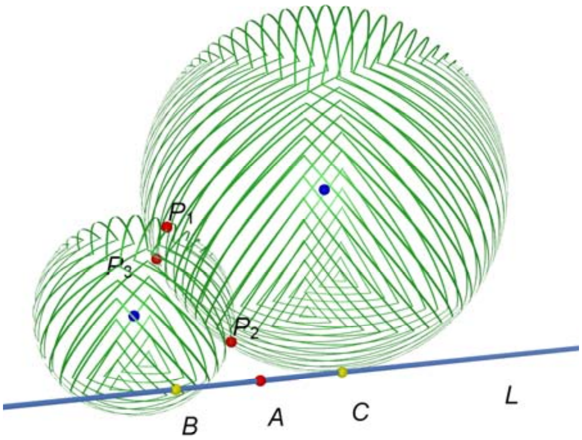
（2）圓冪性質產生點→切點（*PPPE*→*PPPP*、*PPPS*→*PPPP*）

→所求球上點（*PPES*→*PPPE*、*PEES*→*PPPE*、*PESS*→*PPPE*、*PPSS*→*PPPS*、*PSSS*→*PPPS*）

柒、未來展望

我們希望未來能將 ***PES*** 作圖再推廣為 *PLCES* 作圖，雖然它的複雜性會大為提升，但我們相信依然可找到彼此間的關聯性。目前我們已想到 *PPPL* 的作圖法了。

【PPPL 型】



已知：定點 P_1、P_2、P_3，定直線 L

求作：過點 P_1、P_2、P_3，與 L 相切的球

作法：

1.作一平面包含點 P_1、P_2、P_3，交 L 於點 A

2.作圓 $P_1P_2P_3$。過點 A，引圓 $P_1P_2P_3$ 之切線段 $\overline{AT}$ 切圓 $P_1P_2P_3$ 於 T

3.在 L 上取兩點 B、C，使 $\overline{AB}=\overline{AC}=\overline{AT}$

4.由 ***PPPP*** 作圖法分別作球 $P_1P_2P_3B$、$P_1P_2P_3C$ 即為所求

捌、參考文獻

笹部貞市郎　幾何學辭典　三版　台北　九章出版社　965 頁　2003 年

評語

傳統的科展作品都透過平面展示來呈現。受到這樣的限制立體物件就必須透過缺乏真實感的環境來展示。目前 Cabri 3D 所提供的立體動態幾何環境能夠達成某些程度的逼真感。本作品應該多多利用該環境說明由一個退化情形轉變到另一退化的動態變化過程。