臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　別 ：數學

作 品 名 稱 ：費瑪也瘋狂-平面上存在障礙時連接三定點的最佳網絡問題

得 獎 獎 項 ：第二名
匈牙利正選代表:匈牙利 2008 年國際科學博覽會

學校 / 作者 ：國立新竹高級中學　　　　黃劭誠

作者簡介

我是黃劭誠，就讀新竹高中二年級。

我對數學的興趣是源自於小時候和家人一起玩拼圖、積木、大富翁等益智遊戲。而我是從參加了去年的思源科技數學專題競賽後開始接觸到數學研究的。

對我來說，最快樂的除了是和家人在一起的時候之外，便是在經過長久的苦思之後，找到解決問題的方法時那種豁然開朗感覺。

The Fermat Point Problem amidst Obstacles

Abstract

Considering various kinds of obstacles in a plane, such as a line, a segment, a ray, a circle, a triangle or chessboard grids, which function like a red light, we research into the problem of finding the optimal network connecting three given points A, B, C in the plane amidst obstacles described above. Each time when the network crosses an obstacle, it will cause losses, such as five minute's delay or a loss of one hundred dollars. Taking advantage of Fermat points, some basic inequalities concerning triangles and some special qualities about sine or cosine functions, we obtain the optimal networks in different situations. Besides, we consider what the "real distance" between two points is when there are obstacles in a plane.

We also put another obstacle, including a line and a weighted region between two parallel lines, into consideration. In the region, like a river or a muddy ground in real life, the length of the network should be multiplied by a fixed time. Furthermore, we can use GSP to make the networks very accurately.

摘要

在一個有障礙的平面上，給三個定點，我們探討連接此三點的最佳網絡。我們討論了諸如直線、射線、線段、圓、網格狀、三角形……等類的障礙，當網絡每穿越障礙一次，就必須付出代價，例如「拖延 5 分鐘」。所以，設網絡穿越障礙的次數爲 y ，則網絡除了原本的總長度之外，還額外加入 y 倍某固定數值的損耗。

我們以費瑪點的各種性質及三角形不等式等方法爲工具，就不同的穿越障礙次數綜合比較，而找出最佳網絡。在某些情況下，最佳網絡不是以費瑪點來連接三點，而是在障礙(如：直線)上找出符合某種與餘弦值相關特殊性質的點，以該點來連接三點，而此網絡可用 GSP 軟體相當精確地作出。另外，我們也探討在考慮障礙造成損耗的情況下，兩點間的「實際距離」爲何。

最後，我們考慮「混合障礙」問題。在此類問題中，除了前面所討論的障礙，還另加了如同「河流」的兩平行直線間區域之障礙，在這種障礙區域中，網絡的長度要乘以數倍來計算。我們發現，此類問題的最佳網絡也可用特定的正弦條件配合 GSP 而相當精確地作出來。

目錄

壹、研究動機

每天出門時，總會遇到些紅綠燈。一開始，我想探討的是在網格狀道路中，如何在考慮紅燈的情況下找出最佳路線以及要如何調整紅燈秒數，使交通最順暢。後來，經過多次的調整，把網格狀道路中紅燈的概念，轉化爲平面上造成額外損耗的障礙，從而想到在有障礙的情況下，費瑪的三定點捷徑問題要怎麼處理（可以選擇穿越障礙或繞過障礙，就如同可以等紅燈或繞路避開紅燈）。在思考了許多相關的問題後，我們又聯想到：若把這種紅燈型的障礙與 2007 年思源數學專題競賽「鋪路造橋問題」中的河流型障礙混合在一起，那又如何呢？

貳、研究目的

一、分別在有下列不同障礙的情況下，找出連接平面上三定點的最佳網絡：

1.一條直線

2.多條平行直線

3.兩條彼此不平行的直線

4.一條射線

5.一條線段

6.一個圓

二、分別探討與上述問題相關的延伸問題：

1.障礙爲兩條彼此平行之射線的情況

2.障礙爲一個三角形的情況

3.障礙爲網格狀的情況

4.存在障礙情況下兩點間距離的探討

5.包含一條直線障礙與兩平行直線間區域障礙的情況

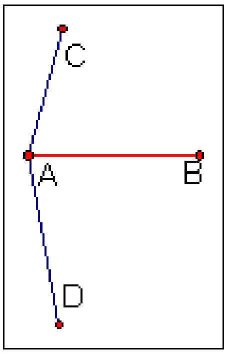
參、研究方法、過程

主題一：平面上給定 A,B,C 三點與障礙，求一連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

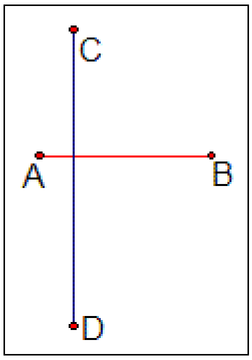
首先，我們要先說明何謂「最佳網絡」：設網絡總長度爲 x，網絡穿越障礙的次數爲 y，a 爲正的常數（可視爲「損耗常數」，例如因紅燈而耽擱的時間），當 $x+ay$ 爲最小時，該網絡即爲最佳網絡。

於是，我們解決問題的方法是就 $y=0$、$y=1$、$y=2$……時，分別找出總長度 x 最小的網絡，再將這些網絡加以綜合比較（比較 $x+ay$ 的大小），即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

在此我們舉個例子說明：如圖 1、圖 2，平面上給定 A,B,C,D 四點，障礙為 $\overline{AB}$，求一連接 C,D 兩點的最佳網絡。設 $a=100$ 單位，且假設已知圖 1 中 $\overline{CA}\cup\overline{AD}$ 為 $y=0$ 時總長度 x 最小的網絡，$x=30$ 單位，圖 2 中 $\overline{CD}$ 為總長度 x 最小的網絡，$x=20$ 單位，此時 $y=1$。



↑ 圖 1



↑ 圖 2

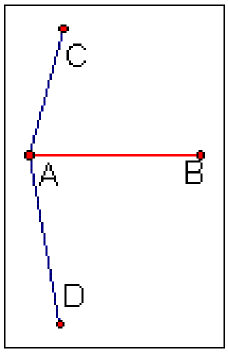
於是，我們知道最佳網絡為此二者中 $x+ay$ 較小者，因為它們分別是 $y=0$、$y=1$ 時 $x+ay$ 最小的網絡，而又因為圖 2 中網絡的總長度 x 已是最小，故若 $y>1$ 則非最佳網絡。現在比較此二網絡 $x+ay$ 之值，圖 1 之例子為 30 而圖 2 之例子為 120，最佳網絡為 $\overline{CA}\cup\overline{AD}$。

如果我們把題目改一下，換成 $a=1$，那麼二網絡 $x+ay$ 之值會有變化，圖 1 之例子為 30 而圖 2 之例子為 21，最佳網絡變為 $\overline{CD}$。

從上述的例子中，我們可以知道：隨著 a 值的變化，有可能造成最佳網絡不同，但無論如何，只要就 $y=0$、$y=1$、$y=2$……時，分別找出總長度 x 最小的網絡，再將這些網絡加以綜合比較，即可得到所要尋找的最佳網絡。

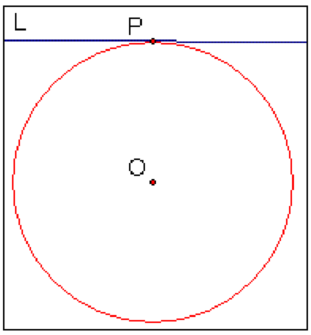
接下來，我們要對「網絡穿越障礙的次數」做個說明。

如右方圖 1，$\overline{AB}$ 為障礙，而路線 $\overline{CA}\cup\overline{AD}$ 穿越 $\overline{AB}$ 的次數為 0，因為可以取一點 P 在 A 的左側且趨近於 A 但不碰到 $\overline{AB}$。同理，圖 3 中直線 L 切圓 O 於 P 點，穿越障礙圓 O 的次數為 0，圖 4 中網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 穿越障礙直線 L 的次數是 1 而不是 2。

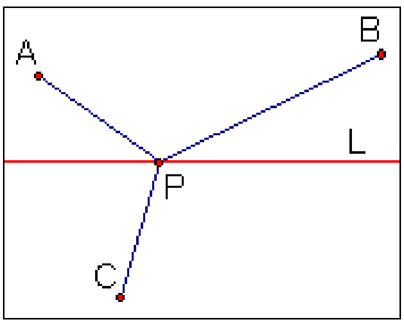


↑ 圖 1

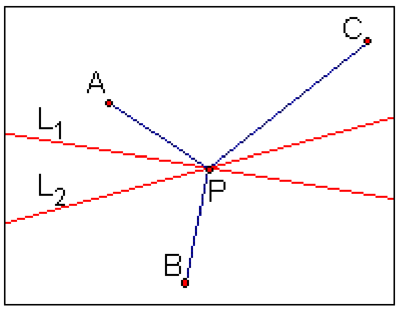
但圖 5 中障礙直線 L_1、L_2 相交於 P 點，網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 穿越障礙的次數為 2，因為此網絡有穿越 L_1 1 次、穿越 L_2 1 次，共兩次。



↑ 圖 3



↑ 圖 4



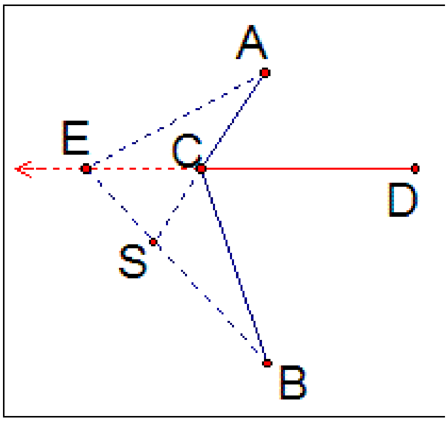
↑ 圖 5

在開始討論連接三點的問題之前，我們要先說明兩點的情形：

首先，我們知道連接平面上兩定點 A, B 最短的網絡爲 $\overline{AB}$ ，可由三角形不等式知：其它任一連接 A, B 的網絡，總長度皆比 $\overline{AB}$ 來得長。

接著，我們討論以下兩問題：

(1)如右方圖 6 所示，求一連接 A, B 兩定點且不穿越障礙 $\overline{CD}$ 的最短網絡。($\overline{AB}$ 有穿越 $\overline{CD}$)



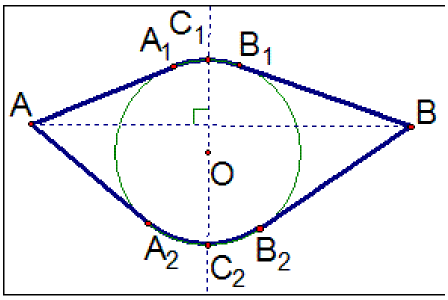
↑ 圖 6

在平面上， A, B 兩定點被 $\overleftrightarrow{CD}$ 隔開，欲連接 A, B 兩定點必得穿越 $\overleftrightarrow{CD}$ ，但又不能穿越 $\overline{CD}$ ，所以此網絡必由 $\overleftrightarrow{CD}-\overline{CD}$ 穿越或是通過 C 或是通過 D 。我們先討論圖中左方的 $\overrightarrow{DC}-\overline{CD}$ 與點 C ，設網絡是由 E 點穿越 $\overleftrightarrow{CD}$ ，我們知道： A, E 兩點最短的連接方式是以 $\overline{AE}$ 連接、 B, E 兩點最短的連接方式是以 $\overline{BE}$ 連接，又若 $E \neq C$ （即 C 在 ΔAEB 內）則可由三角形不等式得到 $\overline{AE}+\overline{EB}=\overline{AE}+(\overline{ES}+\overline{SB})>\overline{AS}+\overline{SB}=\overline{AC}+(\overline{CS}+\overline{SB})>\overline{AC}+\overline{CB}$ ，得知 $\overline{AC}\cup\overline{CB}$ 爲由左方（ $\overrightarrow{DC}-\overline{CD}$ 與點 C ）穿越 $\overleftrightarrow{CD}$ 連接 A, B 兩點的最短網絡。

（我們將這種 C 在 ΔAEB 內部時 $\overline{AE}+\overline{EB}>\overline{AC}+\overline{CB}$ 的性質稱爲**內部性質**）

由上述方法，我們可得兩較佳（總長度較小）的連接方式： $\overline{AC}\cup\overline{CB}$ 與 $\overline{AD}\cup\overline{DB}$ ，而其中較佳者即爲所求之最佳網絡。（兩者可直接由計算比較出何者最佳）

(2)如右方圖 7 所示，求一連接 A, B 兩定點且不穿越障礙圓 O 的最短網絡。($\overline{AB}$ 有穿越圓 O)

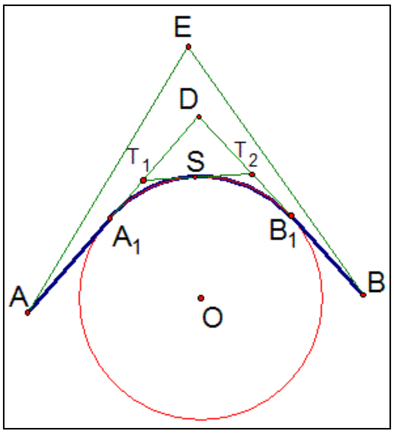


↑ 圖 7

設 $\overline{C_1C_2}\perp\overline{AB}$ 且 $\overline{C_1C_2}$ 爲圓 O 之直徑， A 對圓 O 作兩切線，切點分別爲 A_1, A_2 ， B 對圓 O 作兩切線，切點分別爲 B_1, B_2 。 $\overline{AA_1}\cup$ 弧 $A_1C_1B_1\cup\overline{B_1B}$ 與 $\overline{AA_2}\cup$ 弧 $A_2C_2B_2\cup\overline{B_2B}$ 爲兩較佳的連接方式，其中較佳者即爲所求之最佳網絡。（兩者可直接由計算比較出何者最佳）至於

爲何是此二網絡，我們以 $\overline{AA_1}\cup$弧$A_1C_1B_1\cup\overline{B_1B}$ 來舉例說明：

設 D 爲 $\overrightarrow{AA_1}$ 與 $\overrightarrow{BB_1}$ 的交點且 D 在 ΔAEB 內部、S 在劣弧 A_1B_1 上且 S 異於 A_1, B_1，過 S 作圓 O 之切線依序分別交 $\overrightarrow{AA_1}$、$\overrightarrow{BB_1}$ 於 T_1、T_2 兩點。

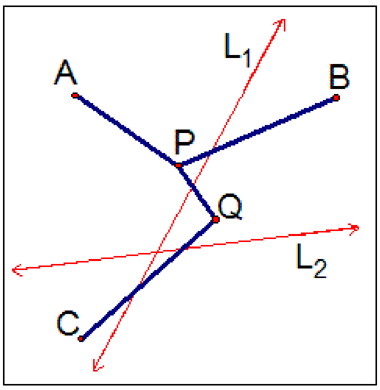


↑圖 8

如圖 8 所示，欲於圓 O 上方連接 A, B 兩點，如圖中 $\overline{AE}\cup\overline{EB}$，由內部性質知：$\overline{AE}+\overline{EB}>\overline{AD}+\overline{DB}$，$\overline{AD}\cup\overline{DB}$ 爲較 $\overline{AE}\cup\overline{EB}$ 佳的連接方式，而 $\overline{AD}\cup\overline{DB}$ 中 A_1, B_1 間的連接方式（即 $\overline{A_1D}\cup\overline{DB_1}$）只要沒有處處緊連著圓 O，那麼就可以於圓 O 上找到一點 S，作出 $\overline{T_1T_2}$，使得 $\overline{T_1T_2}<\overline{T_1D}+\overline{DT_2}$，該連接方式非最佳的連接方式（即存在更佳之連接方式），因此，$\overline{AA_1}\cup$弧$A_1C_1B_1\cup\overline{B_1B}$ 爲由圓 O 上方連接 A, B 兩點的最短網絡。

接下來，我們正式開始討論$\boxed{\text{主題一}}$的問題：
平面上給定 A, B, C 三點與障礙，求一連接 A, B, C 三點的最佳網絡。
（註：在接下來的報告中，A, B, C 爲給定的三定點，我們設 F 爲 ΔABC 的費瑪點，設 $\Delta ABC'$、$\Delta BCA'$、$\Delta CAB'$ 依序是以 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$ 爲邊長向 ΔABC 外部所作的正三角形，如後面的圖 10 所示。另外，A, B, C 三點是相對、可互換的，故我們只就某一情形討論。）

首先，我們要說明：不論平面上無障礙或是平面上的障礙爲直線（包括一條直線，多條平行直線，或是兩條彼此不平行的直線等），最佳網絡必定是先找出一最佳的點 P，最佳網絡是由 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 三段線段所構成，因爲相較於其它網絡，其總長度 x 較小（可由三角形不等式推得）且穿越障礙次數 y 也沒有比其它網絡大，$x+ay$ 值較小，爲最佳網絡。請看下列例子：

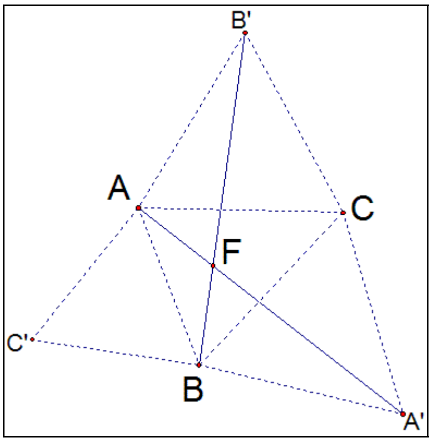


↑圖 9

如圖 9，欲找一連接平面上三定點 A, B, C 的最佳網絡，而障礙爲兩直線 L_1, L_2。圖中所舉例的網絡爲 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PQ}\cup\overline{QC}$，由三角形不等式，我們知道 $\overline{PQ}+\overline{QC}>\overline{PC}$，另外，我們可從圖中明顯地看出，由於障礙爲直線，所以 $\overline{PC}$ 穿越障礙的次數不比 $\overline{PQ}\cup\overline{QC}$ 來得多，此例子中 $\overline{PC}$ 穿越 L_2 1 次而 $\overline{PQ}\cup\overline{QC}$ 穿越 L_1

2 次、穿越 L_2 1 次，共 3 次。綜合以上結果，可知：最佳網絡必定是 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 此類由三段線段構成的網絡（註：亦或若 $P=B$ 時則爲 $\overline{PA}\cup\overline{PC}$ 此類由兩段線段構成的網絡），我們將此性質稱爲**三線段性質**。

再來，我們要介紹許多關於費瑪點的性質，這些性質在接下來的報告中將會不斷地用到。
於平面上找一點 F ，以此點連接 A,B,C 三點，使得網絡總長最短，此點即爲 ΔABC 的費瑪點。
首先，我們要先說明不同情況下 ΔABC 費瑪點的位置：

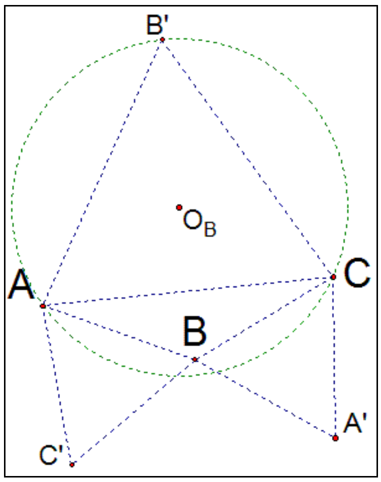


↑ 圖 10

如圖 10，當 ΔABC 各內角皆小於 $120°$ 時，$\overline{AA'}$ 與 $\overline{BB'}$ 的交點即爲 ΔABC 的費瑪點 F 。

因爲將 $\Delta ACA'$ 以 C 爲中心順時針旋轉 $60°$ 即爲 $\Delta B'CB$
（由於 $\Delta BCA'$ 、 $\Delta CAB'$ 皆爲正三角形），
所以 $\angle AFB'=\angle BFA'=60°$ 。 $\angle AFB'=\angle ACB'=60°$ ，
A,B',C,F 四點共圓； $\angle BFA'=\angle BCA'=60°$ ，
B,A',C,F 四點共圓； $\angle AFB=180°-\angle AFB'=120°$ ，
$\angle AFB+\angle C'=180°$ ， A,C',B,F 四點共圓。
因爲 A,B',C,F 四點共圓且 A,C',B,F 四點共圓，
所以 $\angle CFB'=\angle CAB'=60°$ 且 $\angle AFC'=\angle ABC'=60°$ ，
$\angle CFC'=\angle CFB'+\angle B'FA+\angle AFC'=180°$ ， C,F,C' 三點共線，即費瑪點 F 爲 $\overline{AA'},\overline{BB'},\overline{CC'}$ 共同的交點。

（在接下來的報告中，設 O_C,O_A,O_B 依序爲 $\Delta ABC'$ 、 $\Delta BCA'$ 、 $\Delta CAB'$ 的外接圓）



↑ 圖 11

當 ΔABC 有一內角不小於 $120°$ 時，如圖 11 的例子中 $\angle B>120°$ ，此時 $F=B$ 。
可由圓的角度性質知：當 $\angle B>120°$ 時， B 在圓 O_B 內；
當 $\angle B=120°$ 時， B 在圓 O_B 上。

底下，我們逐一介紹將會用到的性質：（性質一、性質二已於前述討論中得證）

費瑪點的性質一，**共圓性質**：

(1)當 ΔABC 各內角皆小於 $120°$ 時， A,B',C,F 四點共圓， B,A',C,F 四點共圓， A,C',B,F 四點共圓。（已知 F 爲 $\overline{AA'},\overline{BB'},\overline{CC'}$ 共同的交點）亦即 F 爲 O_A 與 $\overline{AA'}$ 的交點，亦是 O_B 與 $\overline{BB'}$ 的交點，亦是 O_C 與 $\overline{CC'}$ 的交點。

(2)若ΔABC有一內角不小於$120°$，如：當$\angle B>120°$時，B在圓O_B內；當$\angle B=120°$時，B在圓O_B上。

費瑪點的性質二，**120 度性質**：

(1)當ΔABC各內角皆小於$120°$時，$\angle AFB=\angle BFC=\angle CFA=120°$。

(2)當ΔABC有一內角不小於$120°$時，$\angle F\geq 120°$。

費瑪點的性質三，**線段替換性質**：

(1)當ΔABC有一內角等於$120°$時，如：當$\angle B=120°$時，$\overline{BA}+\overline{BC}=\overline{BB'}$。

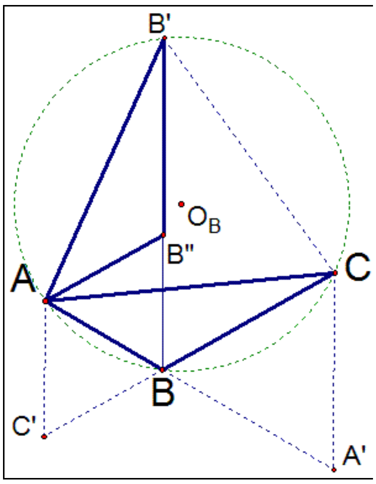
(2)當ΔABC各內角皆小於$120°$時，$\overline{FA}+\overline{FB}=\overline{FC'}$，$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{CC'}$；$\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{FA'}$，

$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{AA'}$；$\overline{FA}+\overline{FC}=\overline{FB'}$，$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{BB'}$。

(3)當ΔABC有一內角大於$120°$時，如：當$\angle B>120°$時，$\overline{BA}+\overline{BC}>\overline{BB'}$。

※ 證明：

(1)如圖 12 所示，作正三角形ABB''，由於$\angle ABB'=60°$，所以B''在$\overline{BB'}$上，於是，將ΔABC以A爲中心逆時針旋轉$60°$即爲$\Delta AB''B'$，$\overline{BC}=\overline{B''B'}$，$\overline{BA}+\overline{BC}=\overline{BB''}+\overline{B''B'}=\overline{BB'}$，故得證。

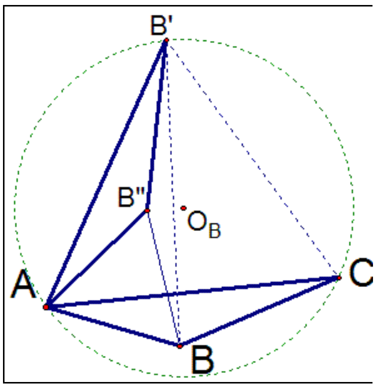


↑ 圖 12

(2)與(1)相同的原因，$\overline{FA}+\overline{FB}=\overline{FC'}$，而又因爲$C,F,C'$三點共線，所以$\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}=\overline{FC'}+\overline{FC}=\overline{CC'}$，故得證。

(3)如圖 13 所示，將ΔABC以A爲中心逆時針旋轉$60°$得到$\Delta AB''B'$，由於$\angle ABC>120°$，所以$\angle ABB'>60°$，B''不在$\overline{BB'}$上，再由三角形不等式知：(顯然$\Delta AB''B$爲正三角形)

$\overline{BA}+\overline{BC}=\overline{B''A}+\overline{B''B'}=\overline{B''B}+\overline{B''B'}>\overline{BB'}$，故得證。



↑ 圖 13

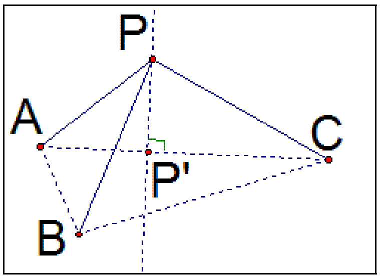
費瑪點的性質四，**最短性質**：

(1)當 ΔABC 各內角皆小於 $120°$ 時，$\overline{FA}\cup\overline{FB}\cup\overline{FC}$ 為連接 A,B,C 三點總長度最短的網絡。

(2)若 ΔABC 有一內角不小於 $120°$，如：當 $\angle B\geq 120°$ 時，$\overline{BA}\cup\overline{BC}$ 為連接 A,B,C 三點總長度最短的網絡。

※ 證明：

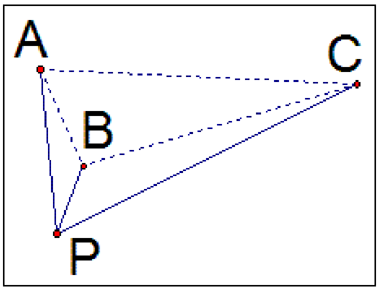
由先前討論過的三線段性質，我們知道最佳網絡必定是先找出一最佳的點 P，由 P 分別連接 A,B,C 三點。另外，最佳的點 P 必不在 ΔABC 的外部，因為若 P 在圓外，如圖 14 所示，



↑ 圖 14

P 在 $\overline{AC}$ 上方，作 P 在 $\overline{AC}$ 上的正射影 P'，

$\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}<\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，$\overline{P'A}\cup\overline{P'B}\cup\overline{P'C}$ 為總長度較 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 短的網絡，P 非最佳的點。若 P' 不存在，如圖 15 所示，則由內部性質知：



↑ 圖 15

$\overline{BA}+\overline{BC}<\overline{PA}+\overline{PC}$，$\overline{BA}+\overline{BC}<\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，$\overline{BA}\cup\overline{BC}$ 為總長度較 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 短的網絡，P 非最佳的點。

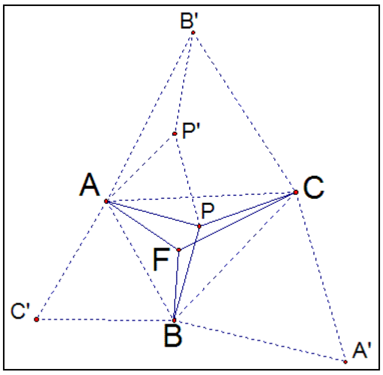
綜合上述結果，可得：最佳的點 P 必不在 ΔABC 的外部。

接下來我們分情況證明：

(1)如圖 16，於 ΔABC 內任取一異於 F 的點 P，欲證：

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$。

將 ΔAPC 以 A 為中心逆時針旋轉 $60°$ 得到 $\Delta AP'B'$，再由三角形不等式知：(顯然 $\Delta APP'$ 為正三角形)



↑ 圖 16

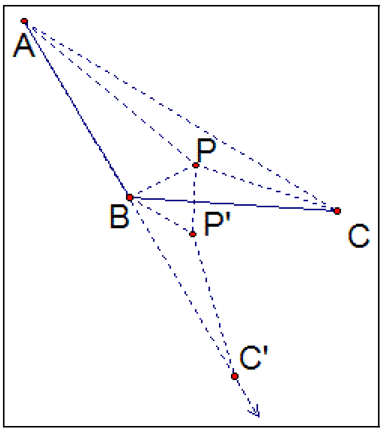
$\overline{PA}+\overline{PC}=\overline{P'A}+\overline{P'B'}=\overline{P'P}+\overline{P'B'}\geq\overline{PB'}$，

然後由三角形不等式與線段替換性質得知：

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\geq\overline{PB'}+\overline{PB}>\overline{BB'}=\overline{FA}+\overline{FB}+\overline{FC}$，故得證。

(2)如圖 17，於 ΔABC 內任取一異於 F 的點 P，欲證：

$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}>\overline{BA}+\overline{BC}$。



↑ 圖 17

將 ΔBPC 以 B 為中心順時針旋轉為 $\Delta BP'C'$，其中 C' 在 $\overrightarrow{AB}$ 上

，因爲$\angle ABC \geq 120°$，所以$\angle PBP' = \angle CBC' \leq 60°$，$\overline{BP} \geq \overline{PP'}$，再由三角形不等式知：

$$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}=\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{P'C'}\geq\overline{PA}+\overline{PP'}+\overline{P'C'}\geq\overline{PA}+\overline{PC'}>\overline{AC'}=\overline{AB}+\overline{BC'}=\overline{AB}+\overline{BC}$$，

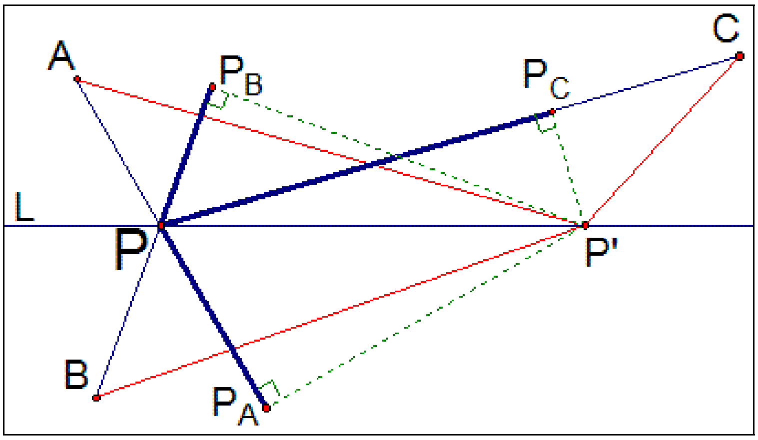
故得證。

在開始分情況討論之前，我們要先介紹一些解決問題的方法與相關性質，由於它們彼此關係極爲密切，所以我們把將會用到的主要性質在此一併討論：

（這些主要性質將有：1.餘弦條件與線上最佳點
2.總長嚴格遞增關係
3.費馬點最佳關係
4.遠處排除方法與圓的餘弦條件
5.縮小範圍方法）

1.餘弦條件與線上最佳點

如圖 18，平面上給定A,B,C三點與直線L，若P是直線L上使$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$爲最小的點，我們稱$P$爲$L$的**線上最佳點**。



↑圖 18

設P'爲L上任一與P相異的點，當P符合$\cos\angle APP'+\cos\angle BPP'+\cos\angle CPP'=0$的條件時，此點$P$即爲所求。我們稱此條件爲**餘弦條件**。

※ 證明：

設P'爲L上任一與P相異的點，欲證$\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$。

如圖 18，分別作P'在$\overleftrightarrow{PA},\overleftrightarrow{PB},\overleftrightarrow{PC}$上的正射影$P_A,P_B,P_C$，於是，

因爲$\cos\angle APP'+\cos\angle BPP'+\cos\angle CPP'=0$，

$$\overline{PP_A}+\overline{PP_B}-\overline{PP_C}=\overline{PP'}\times(\cos\angle P'PP_A+\cos\angle P'PP_B-\cos\angle P'PP_C)$$

$$=\overline{PP'}\times[-(\cos\angle APP'+\cos\angle BPP'+\cos\angle CPP')]=0$$，

所以 $\overline{PP_A}+\overline{PP_B}=\overline{PP_C}$ ，又因爲直角三角形斜邊大於一股，所以 $\overline{P'A}>\overline{AP_A}$ ，$\overline{P'B}>\overline{BP_B}$ ，

$\overline{P'C}>\overline{CP_C}$ 。綜合以上結果：

$$
\begin{aligned}
\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C} > \overline{AP_A}+\overline{BP_B}+\overline{CP_C} &= \overline{AP_A}+\overline{BP_B}+\overline{CP_C}+(\overline{PP_C}-\overline{PP_A}-\overline{PP_B}) \\
&= (\overline{AP_A}-\overline{PP_A})+(\overline{BP_B}-\overline{PP_B})+(\overline{CP_C}+\overline{PP_C}) \\
&= \overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}\text{ ，}
\end{aligned}
$$

$\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}>\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ ，故得證。

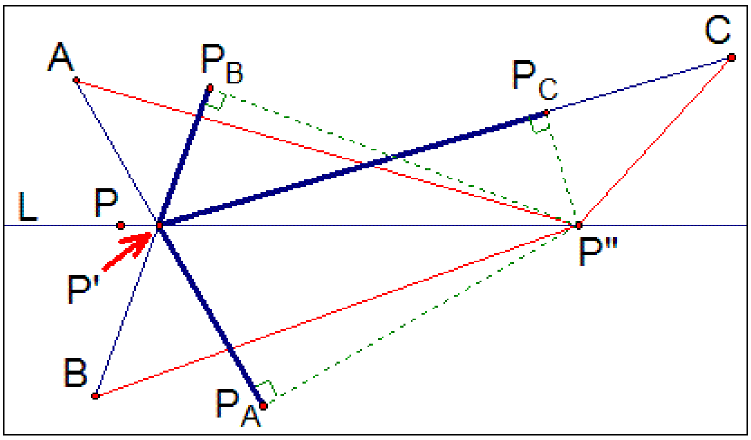
由此結果，我們亦可得知：一條直線上的線上最佳點是唯一的。

2.總長嚴格遞增關係

如圖 19，平面上給定 A,B,C 三點與直線 L ，P,P',P'' 三相異點皆在 L 上，其中 P 爲 L 的線上最佳點，P' 在 $\overline{PP''}$ 上。

已知 P 爲 L 的線上最佳點，若 P',P'' 相對於 P 來說，是在 L 上的同一側，且 $\overline{PP''}>\overline{PP'}$ ，則

$\overline{P''A}+\overline{P''B}+\overline{P''C}>\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$ 。我們稱此關係爲**總長嚴格遞增關係**。



↑圖 19

※ 證明：

欲證 $\overline{P''A}+\overline{P''B}+\overline{P''C}>\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$ 。如圖 19，分別作 P'' 在 $\overleftrightarrow{P'A},\overleftrightarrow{P'B},\overleftrightarrow{P'C}$ 上的正射影

P_A,P_B,P_C ，於是，因爲 $\cos\angle APP''+\cos\angle BPP''+\cos\angle CPP''=0$ ，$\angle AP'P''>\angle APP''$ ，
$\angle BP'P''>\angle BPP''$ ，$\angle CP'P''>\angle CPP''$ ，所以 $\cos\angle AP'P''+\cos\angle BP'P''+\cos\angle CP'P''<0$ 。

$\overline{P'P_A}+\overline{P'P_B}-\overline{P'P_C}=\overline{P'P''}\times(\cos\angle P''P'P_A+\cos\angle P''P'P_B-\cos\angle P''P'P_C)$

$$=\overline{P'P''}\times[-(\cos\angle AP'P''+\cos\angle BP'P''+\cos\angle CP'P'')]>0\text{ ，}$$

所以$\overline{P'P_A}+\overline{P'P_B}>\overline{P'P_C}$，又因爲直角三角形斜邊大於一股，所以$\overline{P''A}>\overline{AP_A}$，$\overline{P''B}>\overline{BP_B}$，

$\overline{P''C}>\overline{CP_C}$。綜合以上結果：

$$\begin{aligned}\overline{P''A}+\overline{P''B}+\overline{P''C}>\overline{AP_A}+\overline{BP_B}+\overline{CP_C}&>\overline{AP_A}+\overline{BP_B}+\overline{CP_C}+(\overline{P'P_C}-\overline{P'P_A}-\overline{P'P_B})\\&=(\overline{AP_A}-\overline{P'P_A})+(\overline{BP_B}-\overline{P'P_B})+(\overline{CP_C}+\overline{P'P_C})\\&=\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}\end{aligned}$$
，

$\overline{P''A}+\overline{P''B}+\overline{P''C}>\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$，故得證。

若P',P''在P左側，上述證明方法仍適用。

（註：當A,B,C三點中有點在直線L上時，有時候仍可直接用上述的方法得到關於餘弦條件與總長嚴格遞增關係的性質，但有時候則可直接單純地用三角形不等式推得：

1.L的線上最佳點位置。2.L的線上最佳點是唯一的。3.總長嚴格遞增關係仍適用。

另外，前面所討論的是直線的線上最佳點，在此我們也說明：

1.射線的線上最佳點：若$\overleftrightarrow{PQ}$的線上最佳點在$\overrightarrow{PQ}$上，則$\overleftrightarrow{PQ}$的線上最佳點即爲$\overrightarrow{PQ}$的線上最佳點；若$\overleftrightarrow{PQ}$的線上最佳點不在$\overrightarrow{PQ}$上，則P即爲$\overrightarrow{PQ}$的線上最佳點。

2.線段的線上最佳點：若$\overleftrightarrow{PQ}$的線上最佳點在$\overline{PQ}$上，則$\overleftrightarrow{PQ}$的線上最佳點即爲$\overline{PQ}$的線上最佳點；若$\overleftrightarrow{PQ}$的線上最佳點不在$\overrightarrow{PQ}$上，則P即爲$\overline{PQ}$的線上最佳點；若$\overleftrightarrow{PQ}$的線上最佳點不在$\overrightarrow{QP}$上，則Q即爲$\overline{PQ}$的線上最佳點。

這是依據總長嚴格遞增關係得來的。）

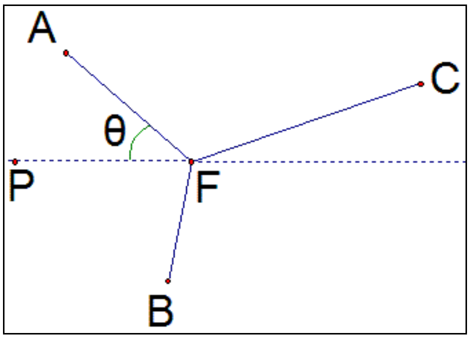
3.費馬點最佳關係

如圖 20，平面上給定A,B,C三點，$\overleftrightarrow{PF}$爲任一通過F的直線。對任一通過費瑪點F的直線來說，F爲該直線的線上最佳點。我們稱此關係爲**費馬點最佳關係**。

※ 證明：

如圖 20，欲證F爲$\overleftrightarrow{PF}$的線上最佳點。

設$\angle AFP=\theta$，由費瑪點的 120 度性質，我們知道$\angle BFP=120°-\theta$，$\angle CFP=120°+\theta$，



↑圖 20

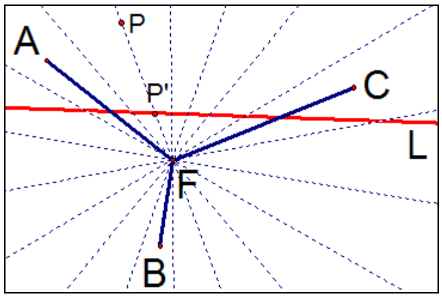
$$\cos\angle AFP+\cos\angle BFP+\cos\angle CFP=\cos\theta+\cos(120°-\theta)+\cos(120°+\theta)=0$$

，故得證F爲$\overleftrightarrow{PF}$的線上最佳點。

上述所討論的是ΔABC各內角皆小於$120°$的情況，但不論ΔABC各內角是否皆小於$120°$，都可以用下列觀點解釋費馬點最佳關係：
由費瑪點的最短性質，我們知道整個平面中連接A,B,C三點總長度最短的網絡就是用F來連接，因此，在這個包含F的直線上去找，其線上最佳點必然就是F。

4.遠處排除方法與圓的餘弦條件

如圖 21，平面上給定A,B,C三點與直線L，F在L下方，欲於平面上找一點P，使得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小且$P$不在$L$下方，那麼$P$必恰在$L$上。我們把此尋找$P$的方法稱為**遠處排除方法**。

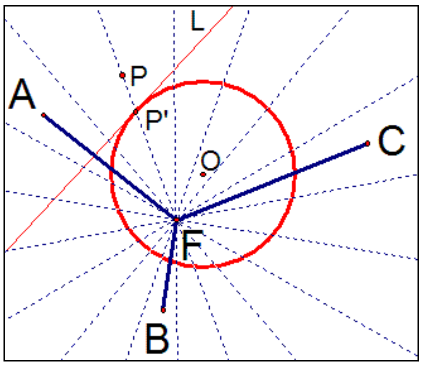


↑ 圖 21

※ 證明：

如圖 21，若P在L上方而不在L上，設P'為$\overline{PF}$與L的交點，那麼由費馬點最佳關係，我們知道F為$\overleftrightarrow{PF}$的線上最佳點，又因為F在L下方且$\overline{P'F}<\overline{PF}$，再由總長嚴格遞增關係，可知$L$上存在$P'$符合$\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}<\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，與「$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小」矛盾，故得證$P$必恰在$L$上。

相同的道理，如圖 22，平面上給定A,B,C三點與圓O，F在圓O內，欲於平面上找一點P，使得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小且$P$不在圓$O$內，那麼$P$必恰在圓$O$上。
我們也把此尋找P的方法稱為遠處排除方法。



↑ 圖 22

※ 證明：

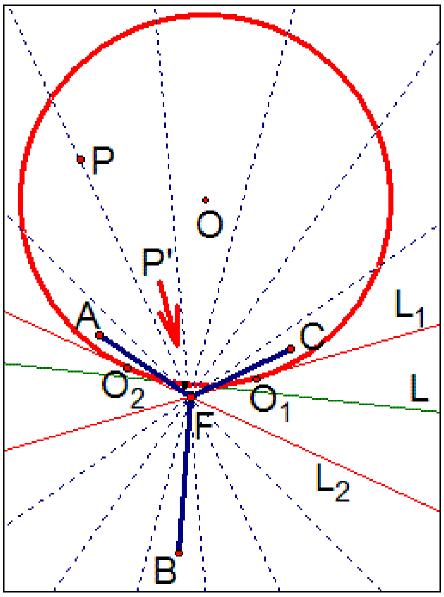
如圖 22，若P在圓O外而不在圓O上，設P'為$\overline{PF}$與L的交點，那麼由費馬點最佳關係，我們知道F為$\overleftrightarrow{PF}$的線上最佳點，又因為F在圓O內且$\overline{P'F}<\overline{PF}$，再由總長嚴格遞增關係，可知圓$O$上存在$P'$符合$\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}<\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，與「$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小」矛盾，故得證$P$必恰在$L$上。

如之前的圖 22，平面上給定A,B,C三點與圓O，F在圓O內，欲於圓O上找一點P，使得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小，那麼過$P$(如圖中的$P'$)作圓$O$的切線$L$，$P$(如圖中的$P'$)必符合餘弦條件，為$L$的線上最佳點。我們把此性質稱為**圓的餘弦條件**。

※ 證明：

如圖 22，若P'不符合餘弦條件，非L的線上最佳點，則可於L上找到一異於P'之L的線上最佳點P''，使得$\overline{P''A}+\overline{P''B}+\overline{P''C}<\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$且此$P''$在圓$O$的外部（由於圓$O$的切線$L$與圓$O$只交於切點$P'$一點）。設$Q$為$\overline{P''F}$與圓$O$的交點，那麼由費馬點最佳關係，我們知道$F$為$\overleftrightarrow{P''F}$的線上最佳點，又因$F$在圓$O$內且$\overline{QF}<\overline{P''F}$，再由總長嚴格遞增關係，可知圓$O$上存在$Q$符合$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}<\overline{P''A}+\overline{P''B}+\overline{P''C}<\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$，此與「$\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$為最小」矛盾，故得證$P'$必符合圓的餘弦條件。

類似的道理，如圖 23，平面上給定A,B,C三點與圓O，F在圓O外，設L_1,L_2為F對圓O所作的兩切線，依序切圓O於O_1,O_2兩點。欲於平面上找一點P，使得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小且$P$不在圓$O$外，那麼$P$必恰在圓$O$上且在劣弧$O_1O_2$上。
我們也把此尋找P的方法稱為遠處排除方法。



↑ 圖 23

※ 證明：

如圖 23，若P在圓O內而不在劣弧O_1O_2上，設P'為$\overline{PF}$與劣弧O_1O_2的交點，那麼由費馬點最佳關係，我們知道F為$\overleftrightarrow{PF}$的線上最佳點，又因為F在圓O外且$\overline{P'F}<\overline{PF}$，再由總長嚴格遞增關係，可知劣弧$O_1O_2$上存在$P'$符合$\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}<\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$，與「$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小」矛盾，故得證$P$必在劣弧$O_1O_2$上。

如之前的圖 23，欲於劣弧O_1O_2上找一點P，使得$\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$為最小，那麼過$P$(如圖中的$P'$)作圓$O$的切線$L$，若$P$(如圖中的$P'$)符合餘弦條件，為$L$的線上最佳點，則此點$P$(如圖中的$P'$)即為所求。我們也把此性質稱為圓的餘弦條件。

※ 證明：

如圖 23，設Q爲劣弧O_1O_2上任一異於P'的點，P''爲$\overline{QF}$與L的交點（異於P'）。因爲P'符合餘弦條件，爲L的線上最佳點且P''在L上而異於P'，所以

$\overline{P''A}+\overline{P''B}+\overline{P''C}>\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$。另外，由費馬點最佳關係，我們知道$F$爲$\overleftrightarrow{QF}$的線上最佳點，又因$F$在圓$O$外且$\overline{QF}>\overline{P''F}$，再由總長嚴格遞增關係，可知

$$\overline{QA}+\overline{QB}+\overline{QC}>\overline{P''A}+\overline{P''B}+\overline{P''C}>\overline{P'A}+\overline{P'B}+\overline{P'C}$$

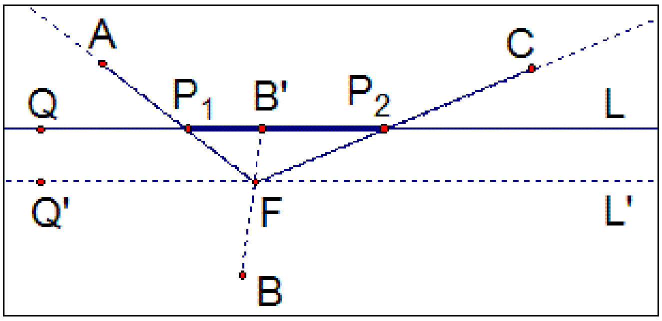
，故得證：若劣弧O_1O_2上的P'符合餘弦條件，爲L的線上最佳點，則此點P'即爲所求。
（註：上述證明中，由於Q在劣弧O_1O_2上且O_1,O_2依序爲圓O外的F對圓O所作的兩切線之切點，又圓O的切線L與圓O只交於切點P'一點，故$\overline{QF}$與L的交點P''必存在且P''在圓O外。）

上述關於圓的遠處排除方法與圓的餘弦條件對所有凸而平滑的封閉曲線皆適用，如：橢圓，因爲所有凸而平滑的封閉曲線之切線都只與該曲線有一個交點，故可用與上述相同的證明得到相同的結果。

5.縮小範圍方法

先舉個例子說明：

如圖 24，若直線L依序分別交$\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FC}$於$P_1,P_2$兩點，則$L$的線上最佳點必在$\overline{P_1P_2}$上。



↑圖 24

※ 證明：

如圖 24，作直線L'平行L且F在L'上，設Q,Q'依序分別爲在L,L'上$\overrightarrow{FA}$左側極遠處的定點，B'爲$\overrightarrow{BF}$與L的交點。由費馬點最佳關係，我們知道F爲L'的線上最佳點，

$\cos\angle AFQ'+\cos\angle BFQ'+\cos\angle CFQ'=0$。因爲$L'//L$，所以$\angle AFQ'=\angle AP_1Q$，$\angle BFQ'=\angle BB'Q$，$\angle CFQ'=\angle CP_2Q$，另外，顯然$\angle BP_1Q>\angle BB'Q$，$\angle CP_1Q>\angle CP_2Q$，綜合以上結果可得：

$$\begin{aligned}\cos\angle AP_1Q+\cos\angle BP_1Q+\cos\angle CP_1Q&<\cos\angle AP_1Q+\cos\angle BB'Q+\cos\angle CP_2Q\\&=\cos\angle AFQ'+\cos\angle BFQ'+\cos\angle CFQ'=0\text{，}\end{aligned}$$

$$\cos\angle AP_1Q+\cos\angle BP_1Q+\cos\angle CP_1Q<0$$

同理，$\angle AP_2Q<\angle AP_1Q$，$\angle BP_2Q<\angle BB'Q$，

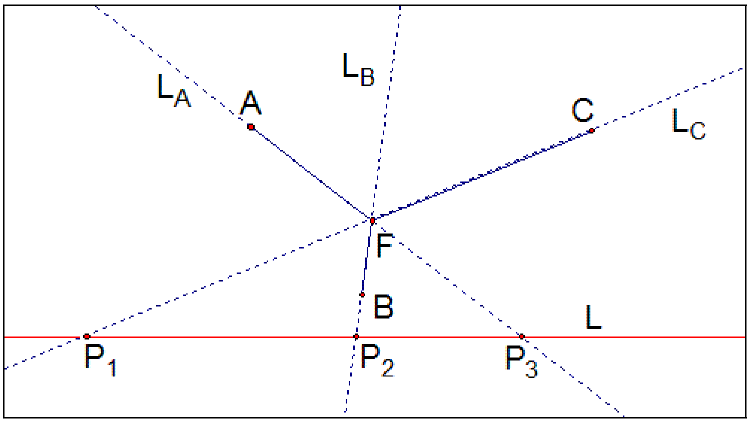
$$\begin{aligned}\cos\angle AP_2Q+\cos\angle BP_2Q+\cos\angle CP_2Q&>\cos\angle AP_1Q+\cos\angle BB'Q+\cos\angle CP_2Q\\&=\cos\angle AFQ'+\cos\angle BFQ'+\cos\angle CFQ'=0\text{，}\end{aligned}$$

$$\cos\angle AP_2Q+\cos\angle BP_2Q+\cos\angle CP_2Q>0$$

設 P 爲 L 上的動點，當 P 沿著 L 由右向左移動時，$\angle APQ,\angle BPQ,\angle CPQ$ 的大小個別皆有嚴格遞增的關係，所以 $\cos\angle APQ+\cos\angle BPQ+\cos\angle CPQ$ 的大小有嚴格遞減的關係，又因 $\cos\angle AP_1Q+\cos\angle BP_1Q+\cos\angle CP_1Q<0$ 且 $\cos\angle AP_2Q+\cos\angle BP_2Q+\cos\angle CP_2Q>0$ ，故得證：

L 的線上最佳點必在 $\overline{P_1P_2}$ 上。

相同的道理，可以得到下列結果：



↑ 圖 25

如圖 25，設三直線 L_A,L_B,L_C 依序爲 $\overleftrightarrow{FA},\overleftrightarrow{FB},\overleftrightarrow{FC}$ ，平面上任一直線 L 若與 L_A,L_B,L_C 三直線各有一交點，爲 P_1,P_2,P_3（順序不固定），其中 P_2 在 $\overline{P_1P_3}$ 上，則 L 的線上最佳點必在 $\overline{P_1P_3}$ 上。

我們把此尋找線上最佳點的方法稱爲**縮小範圍方法**。

上述所討論的是 ΔABC 各內角皆小於 $120°$ 的情況，若 ΔABC 有一內角不小於 $120°$ ，例如：

當 $\angle B\geq 120°$ 時， $F=B$ ，若直線 L 依序分別交 $\overrightarrow{FA},\overrightarrow{FC}$ 於 P_1,P_2 兩點，則 L 的線上最佳點必在 $\overline{P_1P_2}$ 上。（此結果可單純地由三角形不等式推得）

（註：關於前述這些性質，我們是如何想到的，在此做個說明：餘弦條件是最基本、最重要的性質，這是在解決「直線 L 上找一點 P ，使 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 爲最小」這個問題時，發現關鍵在於角度而非線段的長度，再加上先前於 2007 年思源數學專題競賽中，我們有用到[1]，再加上多次的 GSP 實驗，便不難聯想到餘弦條件與其證明，另外，此結果亦可用微分得到。至於其它的性質與方法，則是在嘗試解決底下各情況問題的過程中陸續想到的，其中有關切線的部份，靈感來自[2]。）

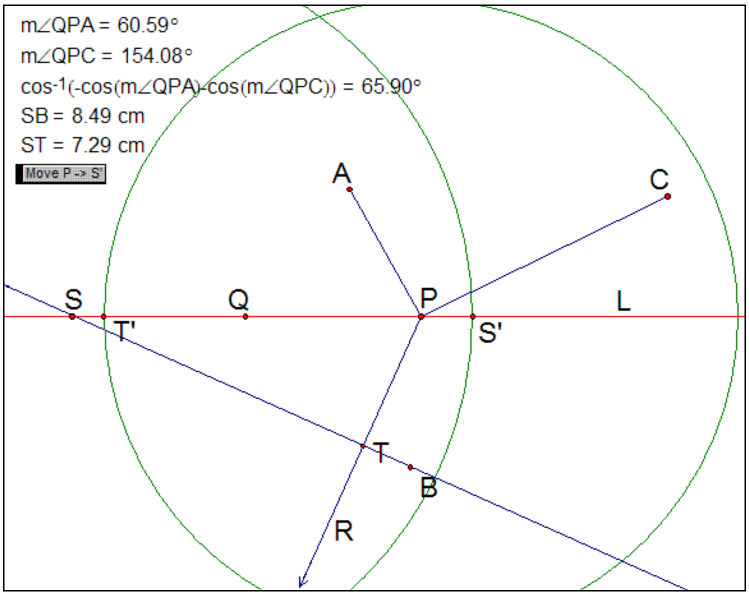
最後，在開始分情況討論前，我們要對**作圖方法**做個說明：

若是單純與費瑪點相關的部份，可以直接用尺規作圖，但若是有關餘弦條件的部份，直線線

上最佳點的精確位置，我們認爲這很可能沒有尺規作圖的方法，因爲它涉及到解三次以上的方程式，目前爲止我們也尚未找到尺規作圖的方法，但是我們有一種用 GSP 作圖的方法：
如圖 26，平面上給定 A,B,C 三點與直線 L ，欲求 L 的線上最佳點之精確位置。
設 P 爲 L 上一動點，於 L 的左側任取一異於 P 的點 Q，用 GSP”measure”的功能得到 $\angle QPA$ 、$\angle QPC$ ，再用”calculate”計算出 $\cos^{-1}[-\cos(\angle QPA)-\cos(\angle QPC)]$，將 $\overrightarrow{PQ}$ 以 P 爲中心逆時針旋轉該角度，得到射線 R ，當 R 通過 B 時， P 即爲 L 的線上最佳點。過 B 作 R 的垂線，依序交 L 、 R 於 S 、 T 兩點，以 P 爲圓心、 $\overline{ST}$ 的長度爲半徑，作圓，於 P 的左方交 L 於 T' ，再以 T' 爲圓心、 $\overline{SB}$ 的長度爲半徑作圓，於 T' 的右方交 L 於 S' ，最後，用 GSP”move”的功能把 P 移向 S' ，使 $P=S'$ ，此時 $\overline{SB}=\overline{ST}$ ，即 R 通過 B 。

我們可將此方法套用到所有關於餘弦條件的作圖問題上。

此方法運用餘弦條件相當精準地作出線上最佳點，能夠迅速、有效地求出其位置與網絡總長，無須用目測估計或是無限次的逼近。



↑ 圖 26

有了前述這些討論之後，底下，我們要針對不同形狀的障礙逐一討論$\boxed{\text{主題一}}$的問題：

平面上給定 A,B,C 三點與障礙，求一連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

（項目劃分可參考「貳、研究目的」）
（註：在接下來的報告中，我們用**費瑪點網絡**這個名詞表示：

當 ΔABC 各內角皆小於 $120°$ 時，費瑪點網絡爲 $\overline{FA}\cup\overline{FB}\cup\overline{FC}$ ；

當 ΔABC 有一內角不小於 $120°$ 時，如：當 $\angle B\geq 120°$ 時，費瑪點網絡爲 $\overline{BA}\cup\overline{BC}$ 。）

一、障礙爲一條直線 L 時

（註：因爲障礙是一條直線，所以費瑪點網絡穿越障礙次數不可能超過 2 次）

1.費瑪點網絡穿越障礙 0 次的情況。

連接 A,B,C 三點的最佳網絡爲費瑪點網絡。

因爲在此情況下，費瑪點網絡的 x（網絡總長度）爲最小（費瑪點的最短性質）且 $y=0$（網絡穿越障礙 0 次），所以 $x+ay$ 爲最小，費瑪點網絡即爲所求。

2.費瑪點網絡穿越障礙 1 次的情況。

（註：最佳網絡的 y 不可能比費瑪點網絡的 y 來得大，因爲由費瑪點的最短性質，我們知道費瑪點網絡的總長度 x 已是最小。

所以，在後面的報告中，我們就不討論 y 比費瑪點網絡大的網絡。）

當 $y=1$ 時，x 最小的網絡爲費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）

而 y 不可能爲 0，因爲由費瑪點的最短性質之證明，我們知道 F 必不在 ΔABC 外，所以若費瑪點網絡有穿越障礙直線 L，則所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙，$y\neq 0$。

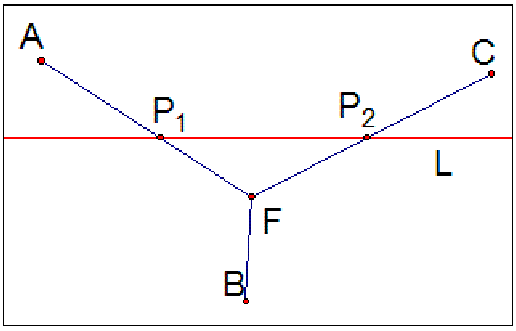
綜合以上結果，連接 A,B,C 三點的最佳網絡爲費瑪點網絡。

因爲在此情況下，x 爲最小且 y 爲最小，所以 $x+ay$ 爲最小，費瑪點網絡即爲所求。

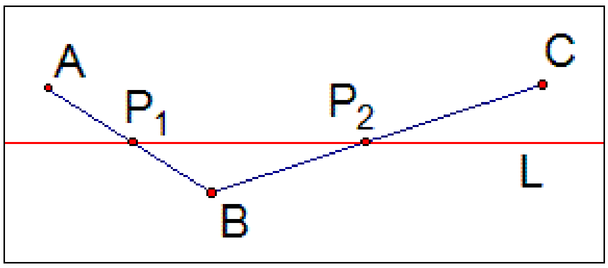
（註：此關於最佳網絡 $x+ay$ 的討論於後面的報告中將不再重複敘述。）

3.費瑪點網絡穿越障礙 2 次的情況，如圖 27、28。

（設直線 L 依序分別交 $\overline{FA},\overline{FC}$ 於 P_1,P_2 兩點，圖 28 中 $\angle ABC\geq 120°$，$F=B$。）



↑ 圖 27



↑ 圖 28

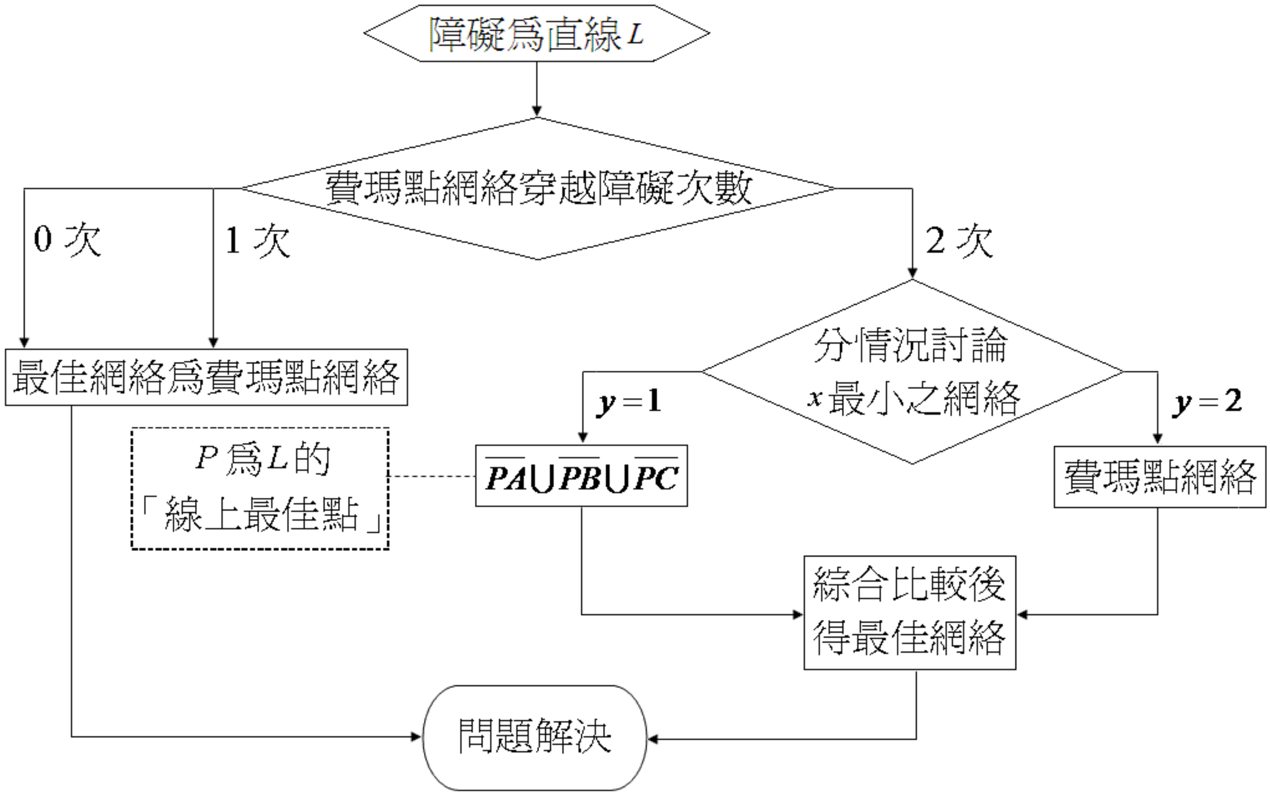
當 $y=2$ 時，x 最小的網絡爲費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）

當 $y=1$ 時，由三線段性質，我們知道 x 最小的網絡必定是 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 此類由三段線段構成的網絡，然後，再用遠處排除方法可知，若欲使 $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}$ 爲最小且該網絡之 $y=1$（P 不在 L 下方），那麼點 P 必恰在 L 上，且符合餘弦條件，爲 L 的線上最佳點，可由縮小範圍方法，我們知道 P 在 $\overline{P_1P_2}$ 上。$y=1$ 時，x 最小的網絡即爲 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。

而 y 不可能爲 0，因爲由費瑪點的最短性質之證明，我們知道 F 必不在 ΔABC 外，所以若費瑪點網絡有穿越障礙直線 L，則所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙，$y\neq 0$。

將 $y=2$、$y=1$ 時 x 最小的此二網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

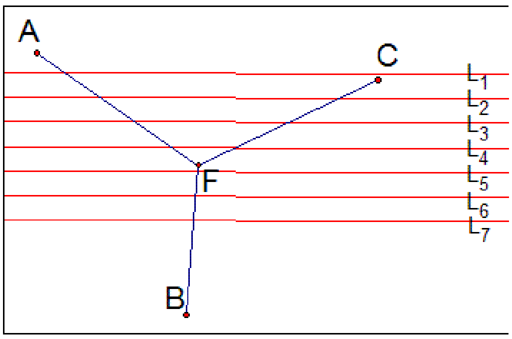
綜合上述結果，我們可繪出下頁的圖 29：



↑ 圖 29

二、障礙爲多條平行直線時

如圖 30，障礙爲 $L_1, L_2, L_3, L_4, L_5, L_6, L_7$ 這 7 條直線，其中，費瑪點網絡穿越 L_1, L_5, L_6, L_7 各 1 次、穿越 L_2, L_3, L_4 各 2 次，總共穿越障礙 10 次。



↑ 圖 30

當 $y=10$ 時，x 最小的網絡爲費瑪點網絡。
（費瑪點的最短性質）

由三線段性質，我們知道，最佳網絡必定是 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 此類由三段線段構成的網絡，

因此，我們設最佳網絡爲 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ ，探討 P 點位置。

當 $y=9$ 時，P 點必在 L_3, L_4 之間或恰在 L_4 上，我們可將此情況視爲障礙只有直線 L_4 ，用與「一、障礙爲一條直線時」相同的方法，得到：P 必恰在 L_4 上，且符合餘弦條件，爲 L_4 的線上最佳點。得知 $y=9$ 時，P 點的位置與 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 。

當 $y=8$ 時，P 點必在 L_2, L_3 之間或恰在 L_3 上或 L_1 上方，我們可將此情況視爲障礙只有直線 L_3 ，用與「一、障礙爲一條直線時」相同的方法，得到：P 必恰在 L_3 上，且符合

餘弦條件，爲 L_3 的線上最佳點。得知 $y=8$ 時，P 點的位置與 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 。

當 $y=7$ 時， P 點必在 L_1,L_2 之間或恰在 L_2 上或恰在 L_1 上，我們可將此情況視爲障礙只有直線 L_2 ，用與「一、障礙爲一條直線時」相同的方法，得到： P 必恰在 L_2 上，且符合餘弦條件，爲 L_2 的線上最佳點。得知 $y=7$ 時，P 點的位置與 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 。

y 不可能小於 7，因爲網絡連接了 A,B,C 三點，而 A,B 兩點間有 7 條直線穿越。
將 $y=10$ 、 $y=9$ 、 $y=8$ 、 $y=7$ 時 x 最小的此四網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

相同的道理，其它關於障礙爲多條平行直線的情況（包括 ΔABC 有一內角不小於 $120°$ 的情況），我們皆可用與上述討論相同的方法解決。

三、障礙爲兩條彼此不平行的直線 L_1,L_2 時

（註：因爲障礙是 2 條直線，所以費瑪點網絡穿越障礙次數不可能超過 4 次）

1.費瑪點網絡穿越障礙 0 次的情況。

連接 A,B,C 三點的最佳網絡爲費瑪點網絡。(原因同「一、障礙爲一條直線時」)

2.費瑪點網絡穿越障礙 1 次的情況。

連接 A,B,C 三點的最佳網絡爲費瑪點網絡。(原因同「一、障礙爲一條直線時」)

3.費瑪點網絡穿越障礙 2 次的情況。

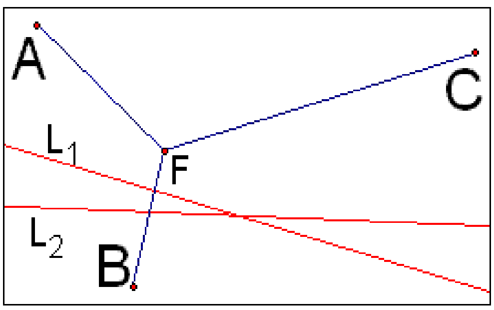
(1)費瑪點網絡只有穿越其中一條直線且穿越該直線兩次，則此情況同「一、障礙爲一條直線時」。

(2)費瑪點網絡穿越兩條直線各一次，如圖 31、32：

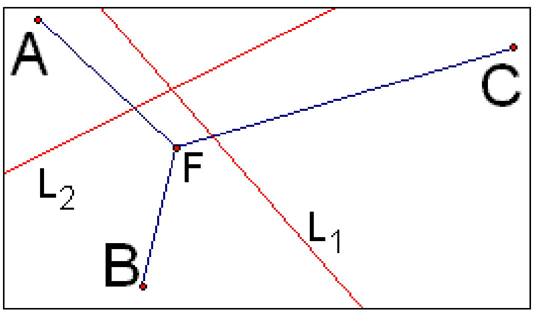
當 $y=2$ 時， x 最小的網絡爲費瑪點網絡。(費瑪點的最短性質)

而 y 不可能小於 2，因爲由費瑪點的最短性質之證明，我們知道 F 必不在 ΔABC 外，所以若費瑪點網絡有穿越兩條直線障礙各一次，則所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙 2 次， y 不小於 2。

綜合以上結果，連接 A,B,C 三點的最佳網絡爲費瑪點網絡。



↑圖 31



↑圖 32

4.費瑪點網絡穿越障礙 3 次的情況，如圖 33、34。

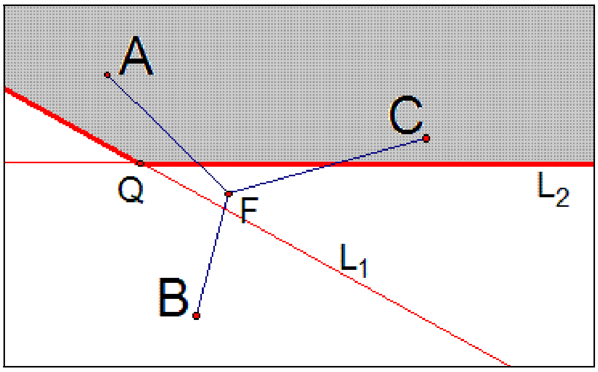
當 $y=3$ 時，x 最小的網絡爲費瑪點網絡。(費瑪點的最短性質)

當 $y=2$ 時，由三線段性質，我們知道，最佳網絡必定是 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 此類由三段線段構成的網絡，因此，我們設最佳網絡爲 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$，探討 P 點位置。

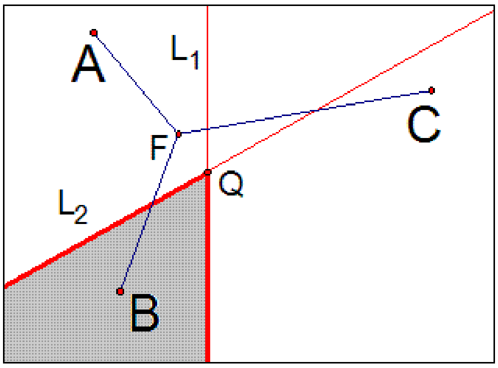
設 Q 爲 L_1,L_2 之交點，以 Q 將圖 33、34 中的 L_1 分成上下兩部份、L_2 分成左右兩部份，而 Q 同時在這四個射線上。

如圖 33，若 $y=2$ 則 P 必在圖中陰影區域或恰在粗線上(包括 L_1 上半部、L_2 右半部與 Q)，由遠處排除方法，P 必恰在粗線上。分別找出出現中兩射線的線上最佳點 P_1,P_2，再比較 $\overline{P_1A}+\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$ 與 $\overline{P_2A}+\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$ 之大小，若 $\overline{P_1A}+\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$ 較小則 $P=P_1$；若 $\overline{P_2A}+\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$ 較小則 $P=P_2$，於是我們便得到 $y=2$ 時 P 點的位置與 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。

如圖 34，若 $y=2$ 則 P 必在圖中陰影區域或恰在粗線上(包括 L_1 下半部、L_2 左半部與 Q)，由遠處排除方法，P 必恰在粗線上。分別找出粗線中兩射線的線上最佳點 P_1,P_2，再比較 $\overline{P_1A}+\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$ 與 $\overline{P_2A}+\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$ 之大小，若 $\overline{P_1A}+\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$ 較小則 $P=P_1$；若 $\overline{P_2A}+\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$ 較小則 $P=P_2$，於是我們便得到 $y=2$ 時 P 點的位置與 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。



↑ 圖 33



↑ 圖 34

y 不可能小於 2，因爲由費瑪點的最短性質之證明，我們知道 F 必不在 ΔABC 外，所以若費瑪點網絡有穿越兩條直線障礙，則所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙 2 次，y 不小於 2。

將 $y=3$、$y=2$ 時 x 最小的此二網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

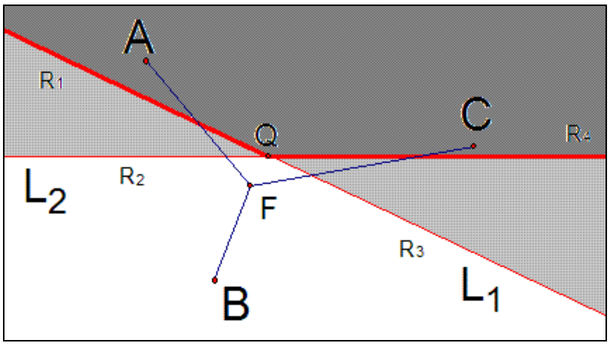
5.費瑪點網絡穿越障礙 4 次的情況，如圖 35、36。

（設 Q 為 L_1,L_2 之交點，圖 35、36 中，以 Q 將的 L_1 分成上下兩部份，依序為射線 R_1,R_3；以 Q 將的 L_2 分成左右兩部份，依序為射線 R_2,R_4，而 Q 同時在這四個射線上。）

當 $y=4$ 時，x 最小的網絡為費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）

當 $y=3$、$y=2$ 時，由三線段性質，我們知道，最佳網絡必定是 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 此類由三段線段構成的網絡，因此，我們設最佳網絡為 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$，探討 P 點位置。

如圖 35，若 $y=3$ 則 P 必在圖中淺色陰影區域或恰在細線上（包括 R_2、R_3），由遠處排除方法，P 必恰在細線上。分別找出兩射線的線上最佳點 P_2,P_3，再比較 $\overline{P_2A}+\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$ 與 $\overline{P_3A}+\overline{P_3B}+\overline{P_3C}$ 之大小，若 $\overline{P_2A}+\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$ 較小則 $P=P_2$

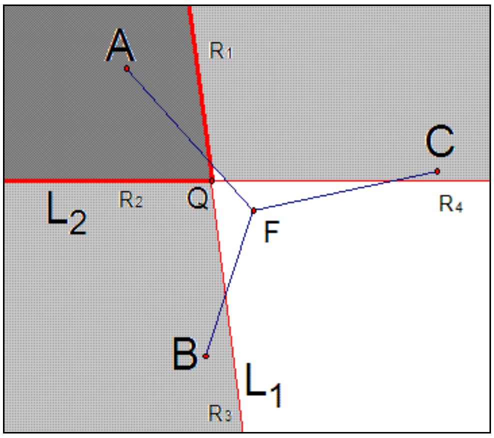


↑圖 35

；若 $\overline{P_3A}+\overline{P_3B}+\overline{P_3C}$ 較小則 $P=P_3$，於是我們便得到 $y=3$ 時 P 點的位置與 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。

如圖 35，若 $y=2$ 則 P 必在圖中深色陰影區域或恰在粗線上（包括 R_1、R_4），由遠處排除方法，P 必恰在粗線上。分別找出兩射線的線上最佳點 P_1,P_4，再比較 $\overline{P_1A}+\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$ 與 $\overline{P_4A}+\overline{P_4B}+\overline{P_4C}$ 之大小，若 $\overline{P_1A}+\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$ 較小則 $P=P_1$；若 $\overline{P_4A}+\overline{P_4B}+\overline{P_4C}$ 較小則 $P=P_4$，於是我們便得到 $y=2$ 時 P 點的位置與 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。

如圖 36，若 $y=3$ 則 P 必在圖中淺色陰影區域或恰在細線上（包括 R_3、R_4），由遠處排除方法，P 必恰在細線上。分別找出兩射線的線上最佳點



↑圖 36

P_3,P_4，再比較 $\overline{P_3A}+\overline{P_3B}+\overline{P_3C}$ 與 $\overline{P_4A}+\overline{P_4B}+\overline{P_4C}$ 之大小，若 $\overline{P_3A}+\overline{P_3B}+\overline{P_3C}$ 較小則 $P=P_3$；若 $\overline{P_4A}+\overline{P_4B}+\overline{P_4C}$ 較小則 $P=P_4$，於是我們便得到 $y=3$ 時 P 點的位置與 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。

若 $y=2$ 則 P 必在圖中深色陰影區域或恰在粗線上（包括 R_1、R_2），由遠處排除方法，P

必恰在粗線上。分別找出兩射線的線上最佳點 P_1, P_2，再比較 $\overline{P_1A}+\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$ 與 $\overline{P_2A}+\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$ 之大小，若 $\overline{P_1A}+\overline{P_1B}+\overline{P_1C}$ 較小則 $P=P_1$；若 $\overline{P_2A}+\overline{P_2B}+\overline{P_2C}$ 較小則 $P=P_2$，於是我們便得到 $y=2$ 時 P 點的位置與 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。

y 不可能小於 2，因爲由費瑪點的最短性質之證明，我們知道 F 必不在 ΔABC 外，所以若費瑪點網絡有穿越兩條直線障礙，則所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙 2 次，y 不小於 2。

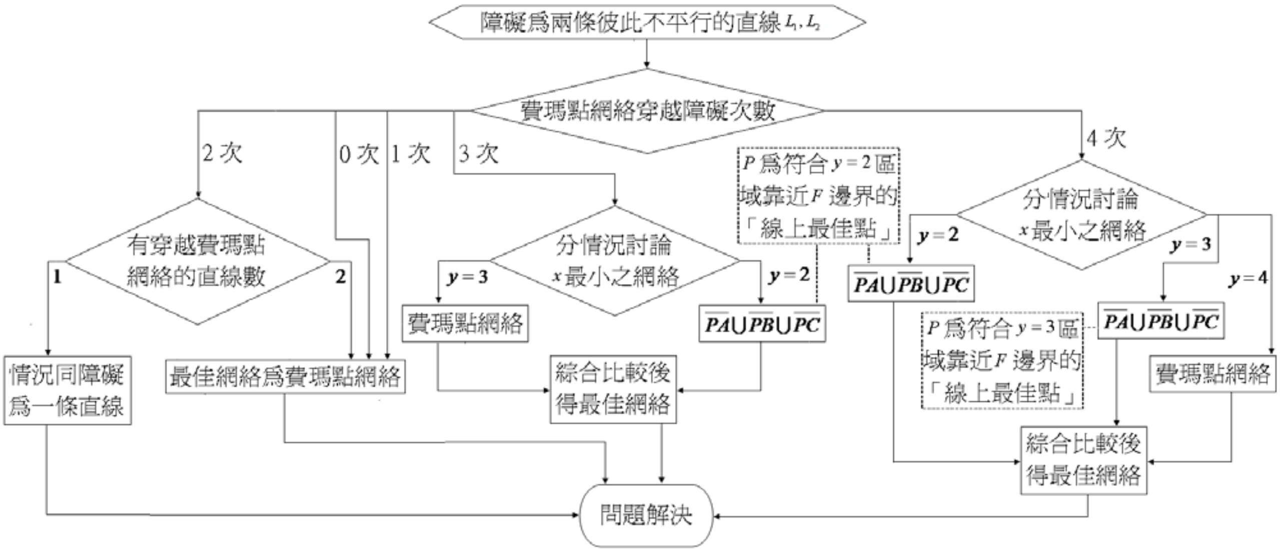
將 $y=4$、$y=3$、$y=2$ 時 x 最小的此三網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

關於完整的情況劃分，也可參考下表：（上列的情況劃分已包含下表中的所有情況）

情況	網絡有穿越 L_1 的部份	網絡有穿越 L_2 的部份	費瑪點網絡穿越障礙次數
a	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者	同 L_1	4 次（如圖 35）
b	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者（有異於 L_1 的）	4 次（如圖 36）
c	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者（異於 L_1 的）	3 次（如圖 33）
d	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者（有穿越 L_1 的）	3 次（如圖 34）
e	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者	同 L_1	2 次（如圖 31）
f	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者（異於 L_1 的）	2 次（如圖 32）

（註：表中省略費瑪點網絡穿越障礙次數不到 2 次之單純情況。另外，若障礙有穿越 F，則可在不改變費瑪點網絡穿越障礙次數的前提下，將問題視爲障礙穿越 $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者而很接近 F 處，用與前述相同的方法解決。）

綜合上述結果，我們可繪出下頁的圖 37：



↑圖 37

四、障礙爲一條射線（$\overrightarrow{EE'}$）時

（註：因爲障礙是一條射線，所以費瑪點網絡穿越障礙次數不可能超過 2 次）

設射線 $R=(\overleftrightarrow{EE'}-\overrightarrow{EE'})\cup\{E\}$，注意到，我們讓 E 在 R 上。

設 F' 爲 ΔABE 的費瑪點、 F_B 爲 ΔBCE 的費瑪點、 F_A 爲 ΔACE 的費瑪點。

1.費瑪點網絡穿越障礙 0 次的情況。

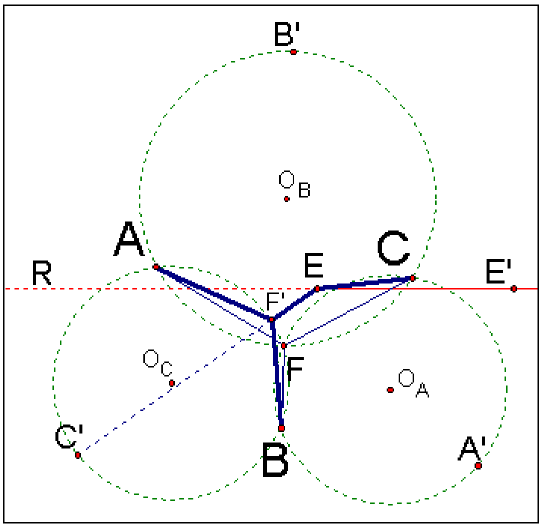
連接 A,B,C 三點的最佳網絡爲費瑪點網絡。（原因同「一、障礙爲一條直線時」）

2.費瑪點網絡穿越障礙 1 次的情況。（我們討論穿越障礙部份爲 $\overline{FC}$ 的情況）

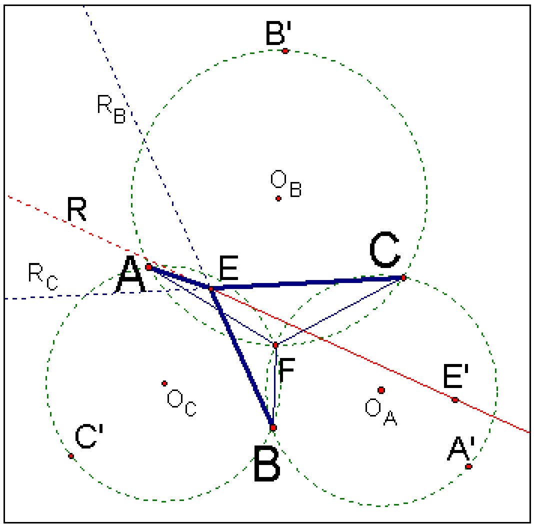
當 $y=1$ 時， x 最小的網絡爲費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）
當 $y=0$ 時，我們要找 x 最小的網絡。
因爲由費瑪點的最短性質之證明，我們知道 F 必不在 ΔABC 外，所以若費瑪點網絡有穿越障礙 $\overrightarrow{EE'}$ ，則所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越 $\overrightarrow{EE'}$ ，而此情況是連接 A,B,C 三點的網絡沒有穿越 $\overrightarrow{EE'}$ ，故此網絡必與 R 有交點。接下來，我們要依據 $\overrightarrow{EE'}$ 是否與 $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者平行或有重疊的部份，來分情況討論：

(1)在 $\overrightarrow{EE'}$ 與 $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中任一者皆不平行且沒有重疊的部份之情況下。

如下頁的圖 38、39，首先，我們要證明： E 必在此 x 最小的網絡上。
（在費瑪點網絡穿越障礙 1 次的前提下）



↑ 圖 38



↑ 圖 39

※證明：

由先前的討論，我們知道此網絡必與 R 有交點，設 P 為此網絡與 R 的交點中最接近 E 者。首先，我們知道，若此網絡為 x 最小的網絡，則在不破壞網絡連接與不改變穿越障礙次數的前提下，此網絡各部份皆得是以總長最短的網絡連接，否則就會存在 x 比此網絡小的網絡，這與「此網絡為 x 最小的網絡」矛盾。再由費瑪點的最短性質及其證明（不在三角形外）與內部性質，我們知道若要以總長最短的網絡連接 A, C, P 三點且網絡不穿越 $\overrightarrow{EE'}$，則此網絡必為 $\overline{PA} \cup \overline{PC}$，而其中的 $\overline{PC}$ 是不會與連接 A, B, P 三點的網絡有交互影響，故此網絡中必包含 $\overline{PC}$，綜合以上結果，由費瑪點的線段替換性質，我們知道這整個網絡的 x 必不小於 $\overline{C'P} + \overline{PC}$。但是，如圖 38，若 E 不在 O_C 內部，則由費瑪點的線段替換性質與內部性質，如果 $P \neq E$，那麼就會有：

$\overline{C'P} + \overline{PC} > \overline{C'E} + \overline{EC} = \overline{F'A} + \overline{F'B} + \overline{F'E} + \overline{EC}$，這與「此網絡為 x 最小的網絡」矛盾，故 $P = E$，得證 E 必在此網絡上；如圖 39，若 E 在 O_C 內部，那麼我們要分情況討論：

（設射線 $R_B = (\overrightarrow{BE} - \overline{BE}) \cup \{E\}$、$R_C = (\overrightarrow{CE} - \overline{CE}) \cup \{E\}$）

(a) 若 P 在 O_C 內部或恰在 O_C 上，則 $\angle APB \geq 120°$，由費瑪點的最短性質，我們知道：

連接 A, B, P 三點且總長最短的網絡為 $\overline{PA} \cup \overline{PB}$，所求的網絡為 $\overline{PA} \cup \overline{PB} \cup \overline{PC}$ 此類由三段線段構成的網絡，又由於 P 在射線 R 上，所以 P 在 R_B, R_C 間所夾包括 A 的區域（也包括 R_B, R_C），可由遠處排除方法、縮小範圍方法與費瑪點的最短性質（$\angle AEB \geq 120°$）知：若此網絡為 x 最小的網絡，則 $P = E$，得證 E 必在此網絡上。

(b) 若 P 在 O_C 外，設 F_P 為 ΔABP 的費瑪點，由費瑪點的最短性質，我們知道：

此網絡總長必不小於 $\overline{F_PA} + \overline{F_PB} + \overline{F_PP} + \overline{PC}$，又由費瑪點的位置，由於 P 在 R_B, R_C

間所夾包括 A 的區域，故 F' 必在此區域且在 O_C 上，再由三角形不等式知

$\overline{F_PA}+\overline{F_PB}+\overline{F_PP}+\overline{PC}>\overline{F_PA}+\overline{F_PB}+\overline{F_PC}$ ，$\overline{F_PA}+\overline{F_PB}+\overline{F_PC}$ 爲由三段線段構成的

網絡，可由同(a)的方法知：$\overline{F'A}+\overline{F'B}+\overline{F'C}>\overline{EA}+\overline{EB}+\overline{EC}$ ，得證若 P 在 O_C 外則

此包含 P 而連接 A,B,C 三點的網絡必非 x 最小的網絡。

綜合以上證明結果，得證 E 必在此 x 最小的網絡上。

我們將上述 E 必在此 x 最小的網絡上之證明稱爲 **E 證明**。

得知 E 必在此 x 最小的網絡上後，由其證明過程中，我們知道網絡中必包含 $\overline{EC}$ ，再由

費瑪點的最短性質，我們知道：當 $y=0$ 時，x 最小的網絡必爲 $\overline{F'A}\cup\overline{F'B}\cup\overline{F'E}\cup\overline{EC}$ 。

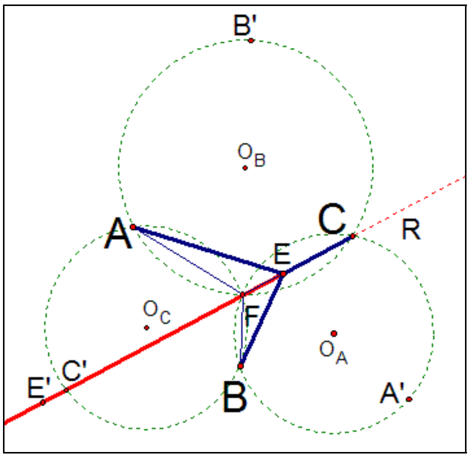
（當 $\angle AEB\geq 120°$ 時，$F'=E$。不論 ΔABC 各內角是否大於 $120°$ 皆適用上述討論與證明）

(2)在 $\overrightarrow{EE'}$ 與 $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者（我們討論 $\overline{FC}$ 的情況）平行或有重疊的部份之情況下。

類似 E 證明的方法，我們可推得：E 必在此 x 最小的網絡上。

我們要分情況討論：

(a)如圖 40，當 E 在 $\overline{FC}$ 上時，$\angle AEC\geq 120°$ 且 $\angle BEC\geq 120°$ ，$E=F_A=F_B$ ，由費瑪點的最短性質，我們知道：當 $y=0$ 時，x 最小的網絡必爲 $\overline{EA}\cup\overline{EB}\cup\overline{EC}$ 。

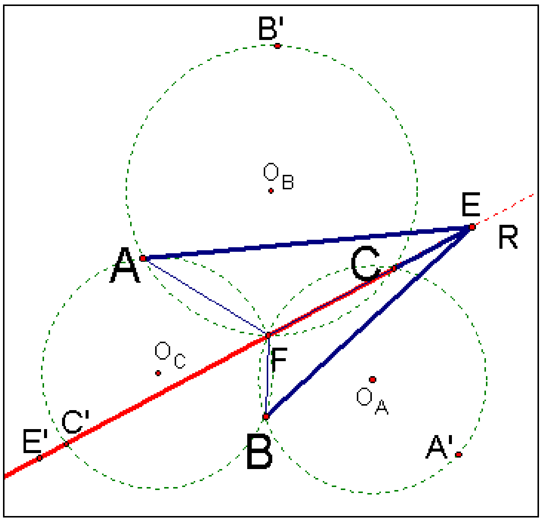


↑ 圖 40

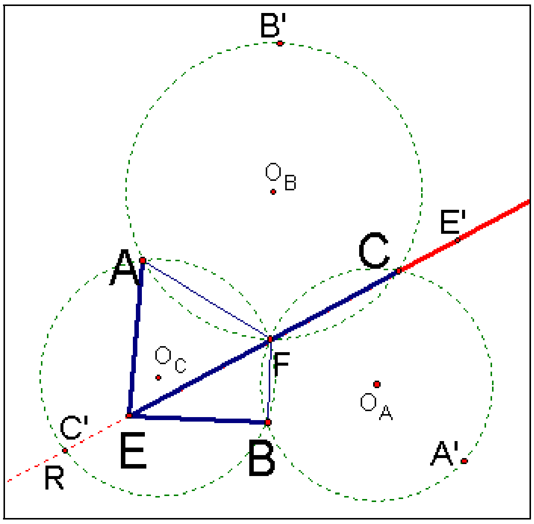
(b)如圖下頁的 41、42，當 E 不在 $\overline{FC}$ 上時，$\overline{EA}\cup\overline{EB}\cup\overline{EC}$ 爲 x 較小的網絡但非 x 最小的網絡，由費瑪點的最短性質，我們知道：

當 $y=0$ 時，x 最小的網絡爲 $\overline{EA}\cup\overline{F_BB}\cup\overline{F_BC}\cup\overline{F_BE}$ 、$\overline{EB}\cup\overline{F_AA}\cup\overline{F_AC}\cup\overline{F_AE}$ 兩網絡中 x 較小者。（圖 41 中，$\angle ACE\geq 120°$ 且 $\angle BCE\geq 120°$ ，$F_A=F_B=C$ ）

（當 ΔABC 有內角不小於 $120°$ 時不可能存在(2)的情況，故我們不討論。）



↑ 圖 41



↑ 圖 42

最後，將 $y=1$ 、 $y=0$ 時 x 最小的此二網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

3.費瑪點網絡穿越障礙 2 次的情況。(我們討論穿越障礙部份為 $\overline{FA}$ 與 $\overline{FC}$ 的情況)

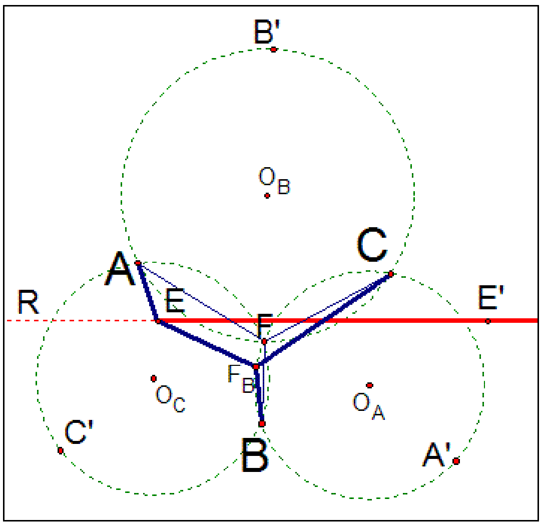
當 $y=2$ 時， x 最小的網絡為費瑪點網絡。(費瑪點的最短性質)

當 $y=1$ 時，類似 E 證明的方法，我們可推得： E 必在此 x 最小的網絡上。

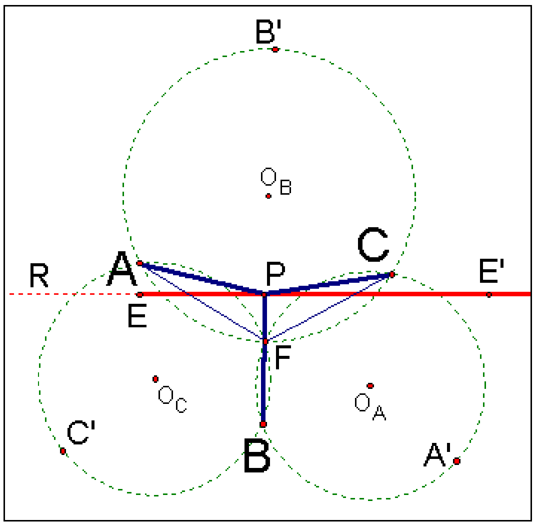
x 最小的網絡為下列(a)、(b)兩網絡中 x 較小者：

(a)如圖 43，網絡 $\overline{EA}\cup\overline{F_BB}\cup\overline{F_BC}\cup\overline{F_BE}$ 。(由費瑪點的線段替換性質， $x=\overline{AE}+\overline{EA'}$)

(b)如圖 44，設 P 為 $\overrightarrow{EE'}$ 的線上最佳點，此網絡僅存在於 $P\neq E$ 時，網絡為 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 。



↑ 圖 43



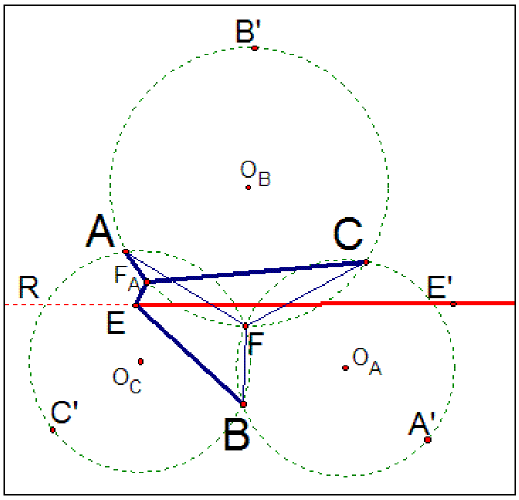
↑ 圖 44

當 $y=0$ 時，類似 E 證明的方法，我們可推得：E 必在此 x 最小的網絡上。如圖 45，當 $y=0$ 時，x 最小的網絡爲

$\overline{EB} \cup \overline{F_A A} \cup \overline{F_A C} \cup \overline{F_A E}$ 。（由費瑪點的

線段替換性質，$x = \overline{BE} + \overline{EB'}$ ）

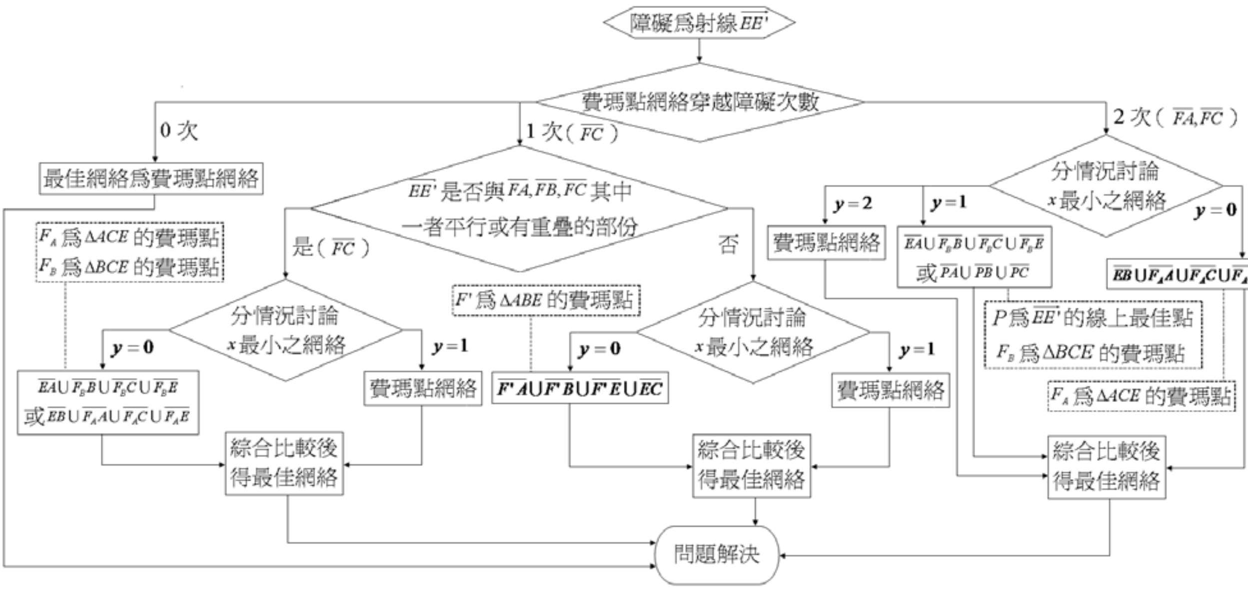
最後，將 $y=2$ 、 $y=1$ 、 $y=0$ 時 x 最小的此三網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。



↑ 圖 45

ΔABC 有一內角不小於$120°$的情況，我們仍可用與以上討論相同的方法得到相同結果。

綜合上述結果，我們可繪出圖 46：



↑ 圖 46

五、障礙爲一條線段（ $\overline{DE}$ ）時

（註：因爲障礙是一條線段，所以費瑪點網絡穿越障礙次數不可能超過 2 次）

設 F' 爲 ΔABD 的費瑪點、 F'' 爲 ΔABE 的費瑪點、 F_A 爲 ΔACD 的費瑪點、 F_B 爲 ΔBCD 的費瑪點、 F_A' 爲 ΔACE 的費瑪點、 F_B' 爲 ΔBCE 的費瑪點、 F_C 爲 ΔCDE 的費瑪點、 F_G 爲 ΔBDE 的費瑪點。

1.費瑪點網絡穿越障礙 0 次的情況。

連接 A,B,C 三點的最佳網絡爲費瑪點網絡。（原因同「一、障礙爲一條直線時」）

2.費瑪點網絡穿越障礙 1 次的情況。（我們討論穿越障礙部份爲 $\overline{FC}$ 的情況）

當 $y=1$ 時，x 最小的網絡為費瑪點網絡。(費瑪點的最短性質)
當 $y=0$ 時，我們要找 x 最小的網絡。
類似 E 證明的方法，我們可推得：D,E 必至少有一點在此 x 最小的網絡上。

接下來，我們依據 $\overline{DE}$ 是否與 $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者平行或有重疊之部份，分情況討論：

(1)在 $\overline{DE}$ 與 $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中任一者皆不平行

且沒有重疊的部份之情況下。
如圖 47，x 最小的網絡為

$\overline{DC}\cup\overline{F'A}\cup\overline{F'B}\cup\overline{F'D}$、

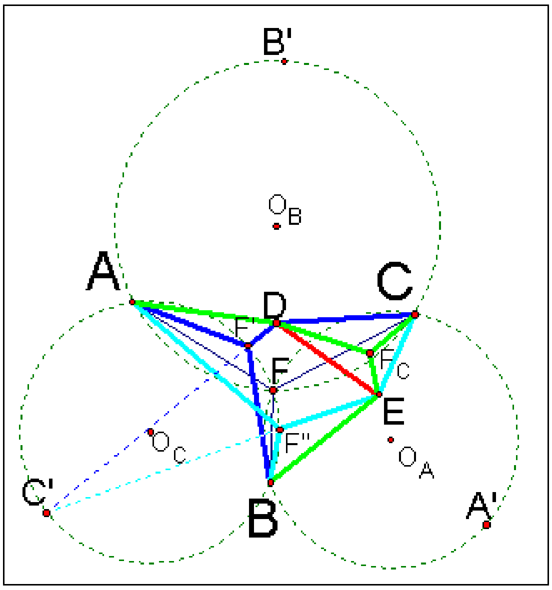
$\overline{EC}\cup\overline{F''A}\cup\overline{F''B}\cup\overline{F''E}$、

$\overline{AD}\cup\overline{F_CC}\cup\overline{F_CD}\cup\overline{F_CE}\cup\overline{BE}$ 三網絡中 x

較小者。(由費瑪點的線段替換性質，

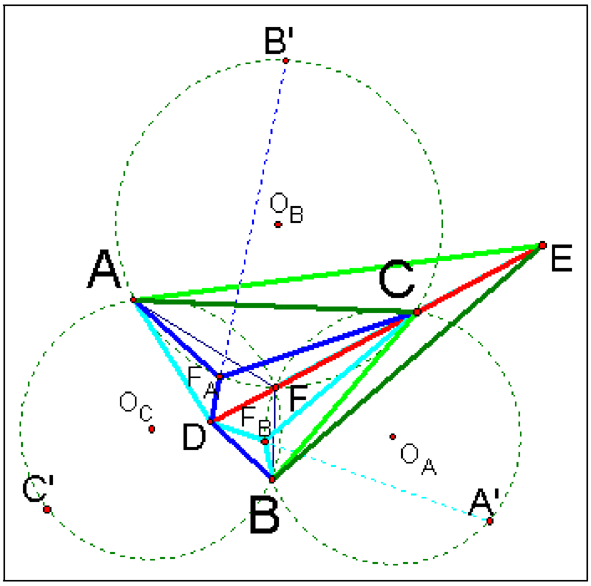
$\overline{DC}+\overline{F'A}+\overline{F'B}+\overline{F'D}=\overline{CD}+\overline{DC'}$，

$\overline{EC}+\overline{F''A}+\overline{F''B}+\overline{F''E}=\overline{CE}+\overline{EC'}$)

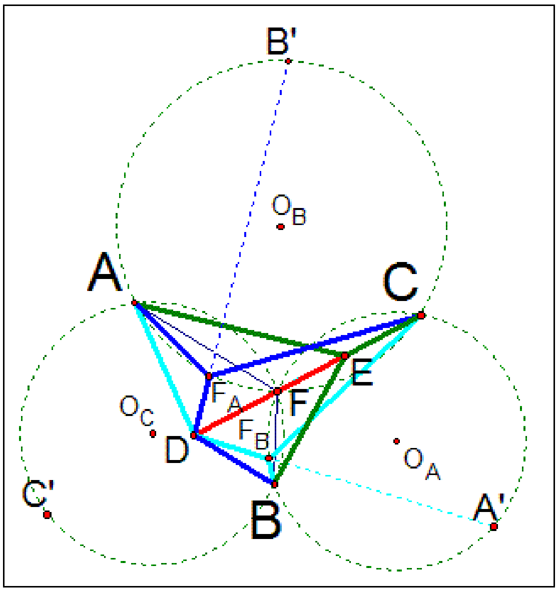


↑ 圖 47

(2)在 $\overline{DE}$ 與 $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者(我們討論 $\overline{FC}$ 的情況)平行或有重疊的部份之情況下。



↑ 圖 48



↑ 圖 49(相關說明請見下頁)

我們要分情況討論：

(a)如圖 48，當 D 在 $\overrightarrow{FC'}$ 上且 E 不在 $\overrightarrow{CD}$ 上時，x 最小的網絡為 $\overline{DB}\cup\overline{F_AA}\cup\overline{F_AC}\cup\overline{F_AD}$、

$\overline{DA}\cup\overline{F_BB}\cup\overline{F_BC}\cup\overline{F_BD}$、$\overline{AC}\cup\overline{CE}\cup\overline{EB}$、$\overline{AE}\cup\overline{EC}\cup\overline{CB}$四網絡中$x$較小者。(顯然$\angle ACE>120°$且$\angle BCE>120°$，$C=F_A'=F_B'$。另外，由費瑪點的線段替換性質，

$\overline{DB}+\overline{F_AA}+\overline{F_AC}+\overline{F_AD}=\overline{BD}+\overline{DB'}$，$\overline{DA}+\overline{F_BB}+\overline{F_BC}+\overline{F_BD}=\overline{AD}+\overline{DA'}$。)

(b)如圖 49，當D在$\overrightarrow{FC'}$上且E在$\overline{CD}$上時，x最小的網絡為$\overline{DB}\cup\overline{F_AA}\cup\overline{F_AC}\cup\overline{F_AD}$、

$\overline{DA}\cup\overline{F_BB}\cup\overline{F_BC}\cup\overline{F_BD}$、$\overline{EA}\cup\overline{EB}\cup\overline{EC}$三網絡中$x$較小者。

(顯然$\angle AEC>120°,\angle BEC>120°$，$E=F_A'=F_B'$。另外，由費瑪點的線段替換性質，

$\overline{DB}+\overline{F_AA}+\overline{F_AC}+\overline{F_AD}=\overline{BD}+\overline{DB'}$，$\overline{DA}+\overline{F_BB}+\overline{F_BC}+\overline{F_BD}=\overline{AD}+\overline{DA'}$。)

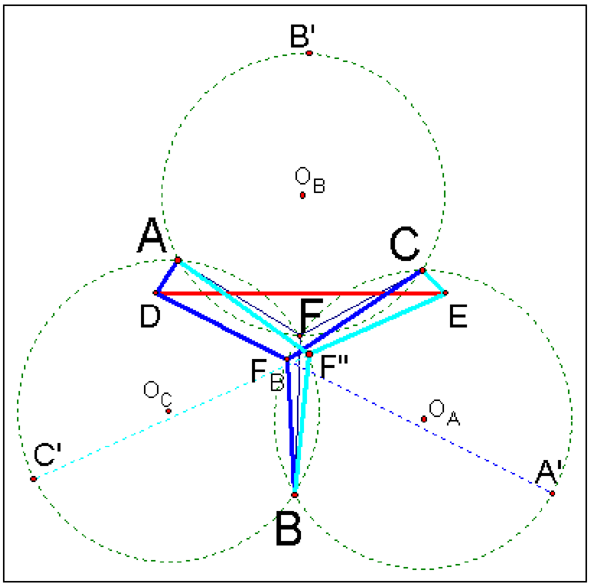
(當ΔABC有內角不小於$120°$時不可能存在(2)的情況，故我們不討論。)

最後，將$y=1$、$y=0$時x最小的此二網絡加以綜合比較，即可得到連接A,B,C三點的最佳網絡。

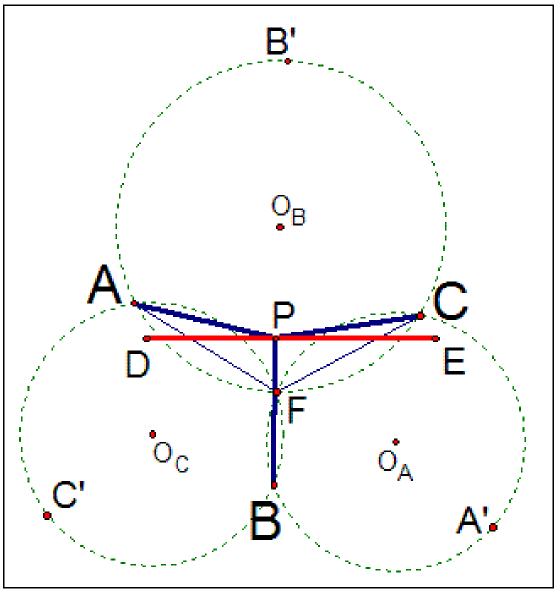
3.費瑪點網絡穿越障礙 2 次的情況。

(我們討論穿越障礙部份為$\overline{FA}$與$\overline{FC}$的情況且D靠近$\overline{FA}$、E靠近$\overline{FC}$。)

當$y=2$時，x最小的網絡為費瑪點網絡。(費瑪點的最短性質)
當$y=1$時，類似 E 證明的方法，我們可推得：D,E必至少有一點在此x最小的網絡上。
x最小的網絡為下頁(a)、(b)、(c)三網絡中x最小者：



↑圖 50(相關說明請見下頁)



↑圖 51(相關說明請見下頁)

(a)如圖 50，網絡 $\overline{DA}\cup\overline{F_BB}\cup\overline{F_BC}\cup\overline{F_BD}$。此網絡僅存在於 $\overline{DA}\cup\overline{F_BB}\cup\overline{F_BC}\cup\overline{F_BD}$ 符合 $y=1$ 的情況。(由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{AD}+\overline{DA'}$)

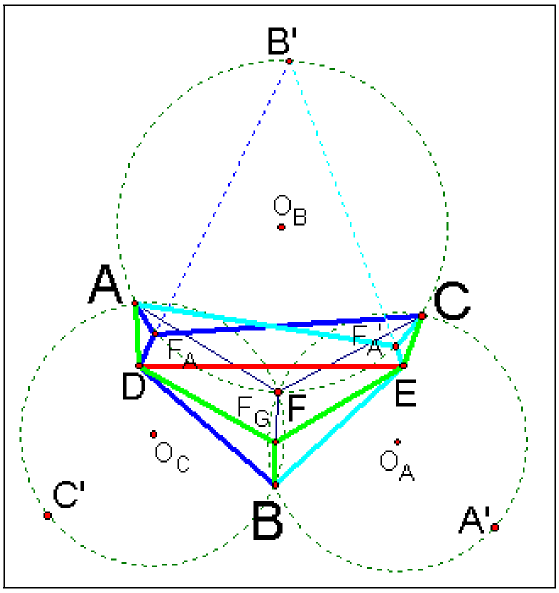
(b)如圖 50，網絡 $\overline{EC}\cup\overline{F''A}\cup\overline{F''B}\cup\overline{F''E}$。此網絡僅存在於 $\overline{EC}\cup\overline{F''A}\cup\overline{F''B}\cup\overline{F''E}$ 符合 $y=1$ 的情況。(由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{CE}+\overline{EC'}$)

(c)如圖 51，設 P 為 $\overline{DE}$ 的線上最佳點，網絡為 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。此網絡僅存在於 $P\neq D$ 且 $P\neq E$ 時。

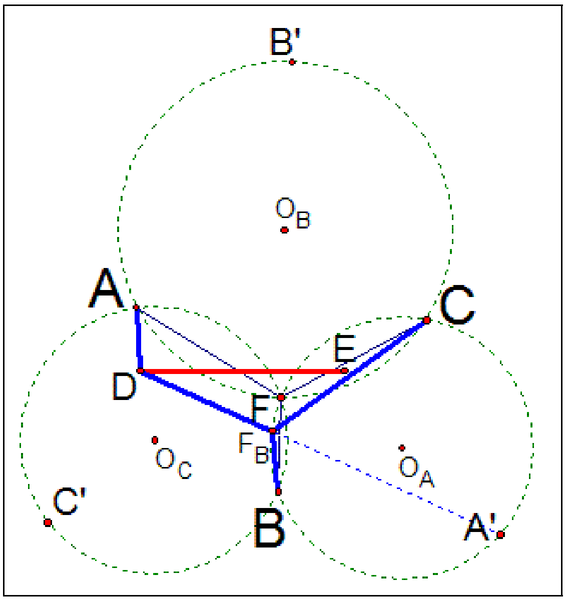
當 $y=0$ 時，我們要找 x 最小的網絡。

類似 E 證明的方法，我們可推得：D,E 必至少有一點在此 x 最小的網絡上。

x 最小的網絡為下列(a)、(b)、(c)、(d)、(e)五網絡中 x 最小者：



↑ 圖 52



↑ 圖 53

(a)如圖 52，網絡 $\overline{DB}\cup\overline{F_AA}\cup\overline{F_AC}\cup\overline{F_AD}$。(由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{BD}+\overline{DB'}$)

(b)如圖 52，網絡 $\overline{EB}\cup\overline{F_A'A}\cup\overline{F_A'C}\cup\overline{F_A'E}$。(由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{BE}+\overline{EB'}$)

(c)如圖 52，網絡 $\overline{DA}\cup\overline{F_GB}\cup\overline{F_GD}\cup\overline{F_GE}\cup\overline{EC}$。

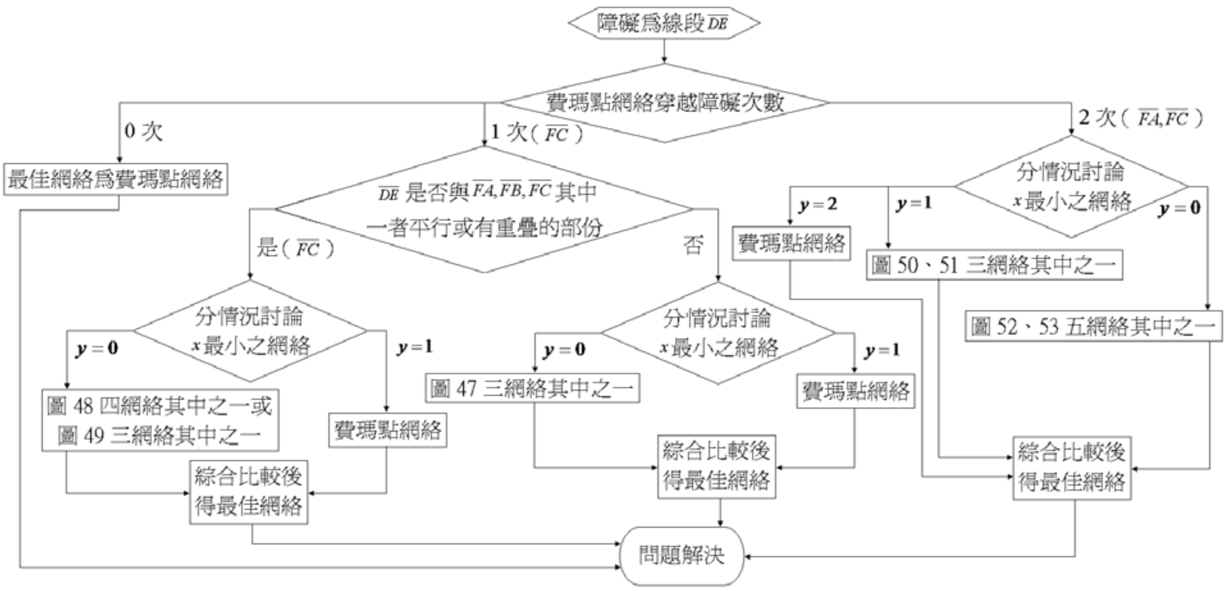
(d)如圖 53，網絡 $\overline{DA}\cup\overline{F_BB}\cup\overline{F_BC}\cup\overline{F_BD}$。此網絡僅存在於 $\overline{DA}\cup\overline{F_BB}\cup\overline{F_BC}\cup\overline{F_BD}$ 符合 $y=0$ 的情況。(由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{AD}+\overline{DA'}$)

(e)類似圖 53，網絡 $\overline{EC}\cup\overline{F''A}\cup\overline{F''B}\cup\overline{F''E}$。此網絡僅存在於 $\overline{EC}\cup\overline{F''A}\cup\overline{F''B}\cup\overline{F''E}$ 符

合 $y=0$ 的情況。(由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{CE}+\overline{EC'}$)

最後，將 $y=2$ 、 $y=1$ 、 $y=0$ 時 x 最小的此三網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

ΔABC 有一內角不小於$120°$的情況，我們仍可用與以上討論相同的方法得到相同結果。綜合上述結果，我們可繪出圖 54：



↑ 圖 54

六、障礙爲一個圓（圓 O ）時

首先，我們將障礙爲圓 O 時的所有情況分類（如下表）

情況(例圖)	說明
a	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 皆不穿越圓 O ，即費瑪點網絡穿越障礙 0 次。
b(圖 55)	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者穿越圓 O （1 次），A,B,C 其中一點在圓內。
c(圖 56)	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者穿越圓 O （1 次），A,B,C 其中兩點在圓內。
d(圖 57)	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者穿越圓 O （2 次），A,B,C 皆在圓外。
e(圖 58)	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者穿越圓 O （各 1 次），A,B,C 其中一點在圓內。
f(圖 59)	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者穿越圓 O （各 1 次），A,B,C 其中兩點在圓內。
g(圖 60)	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者穿越圓 O （共 3 次），A,B,C 其中一點在圓內。

h(圖 61)	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者穿越圓O（各 2 次），A,B,C 皆在圓外。
i(圖 64)	$\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 三者同時穿越圓O，A,B,C 皆在圓外。

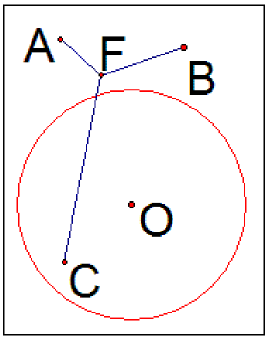
接下來，我們逐一討論這九種情況：

(a) $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 皆不穿越圓O，即費瑪點網絡穿越障礙 0 次。

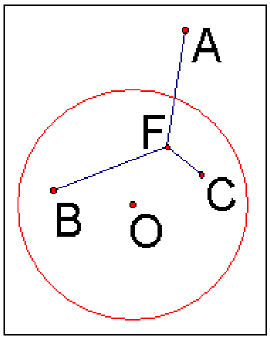
連接 A,B,C 三點的最佳網絡為費瑪點網絡。
因為在此情況下，費瑪點網絡的 x 為最小且 $y=0$，費瑪點網絡即為所求。

(b) $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者穿越圓O（1 次），A,B,C 其中一點在圓內，如圖 55。

當 $y=1$ 時，x 最小的網絡為費瑪點網絡。
（費瑪點的最短性質）而 y 不可能為 0，
因為 A,B,C 其中一點在圓內，所以所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙，$y\neq 0$。
綜合以上結果，
連接 A,B,C 三點的最佳網絡為費瑪點網絡。



↑ 圖 55



↑ 圖 56

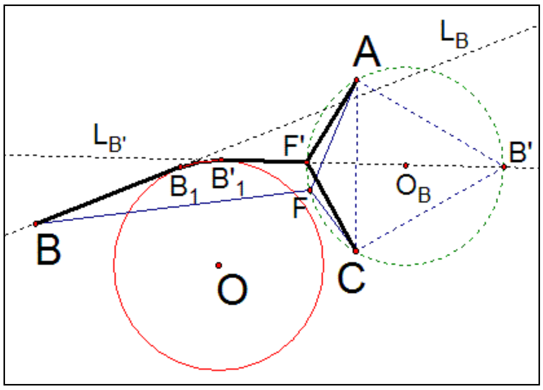
(c) $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者穿越圓O（1 次），A,B,C 其中兩點在圓內，如圖 56。

當 $y=1$ 時，x 最小的網絡為費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）
而 y 不可能為 0，因為 A,B,C 其中一點在圓內，所以所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙，$y\neq 0$。綜合以上結果，連接 A,B,C 三點的最佳網絡為費瑪點網絡。

(d) $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中一者穿越圓O（2 次），A,B,C 皆在圓外，如圖 57。

當 $y=2$ 時，x 最小的網絡為費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）
當 $y=1$ 時，所有的網絡必非最佳網絡，因為 A,B,C 皆在圓外，若 $y=1$ 則表示此網絡有一部分穿越進入圓O而沒有再穿越到圓O外，此部份為多餘的。
當 $y=0$ 時，如圖 57 所示，從 B 對圓O作切線 L_B 切圓O於 B_1，從 B' 對圓O作切線 $L_{B'}$ 切圓O於 B'_1，設 F' 為 $L_{B'}$ 與圓O_B 的交點，網絡

$\overline{F'A}\cup\overline{F'C}\cup\overline{F'B'_1}\cup$ 劣弧$B'_1B_1\cup\overline{B_1B}$ 即為



↑ 圖 57

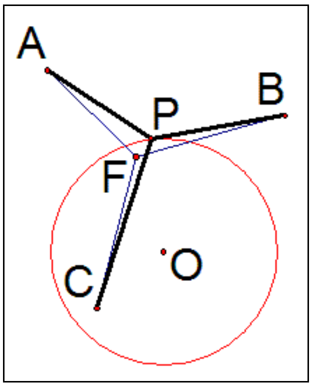
$y=0$ 時 x 最小的網絡。（由費瑪點的共圓性質，F' 為 $\Delta ACB'_1$ 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{BB_1}+$ 劣弧$B_1B'_1$ 弧長 $+\overline{B'_1B'}$）

最後，將 $y=2$ 、 $y=0$ 時 x 最小的此二網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

(e) $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者穿越圓 O （各 1 次）， A,B,C 其中一點在圓內，如圖 58。

當 $y=2$ 時， x 最小的網絡爲費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）
當 $y=1$ 時，如圖 58， P 在 O 上且符合圓的餘弦條件， x 最小的網絡爲 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 。

（若 $\overline{PB}$ 或 $\overline{PA}$ 有穿越圓 O 則需將網絡調整爲報告後方類似「情況 h，當 $y=2$ 時」 x 最小的網絡）
而 y 不可能爲 0，因爲 A,B,C 其中一點在圓內，所以所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙， $y\neq 0$ 。

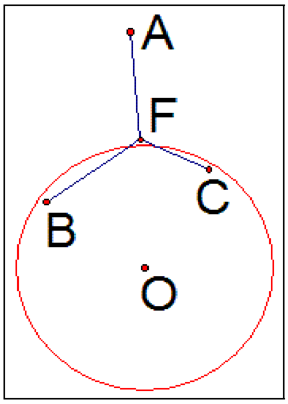


↑ 圖 58

最後，將 $y=2$ 、 $y=1$ 時 x 最小的此二網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

(f) $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者穿越圓 O （各 1 次）， A,B,C 其中兩點在圓內，如圖 59。

當 $y=2$ 時， x 最小的網絡爲費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）
當 $y=1$ 時， P 在 O 上且符合圓的餘弦條件， x 最小的網絡爲 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 。（類似圖 58 中的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ ）
而 y 不可能爲 0，因爲 A,B,C 其中兩點在圓內，所以所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙， $y\neq 0$ 。
最後，將 $y=2$ 、 $y=1$ 時 x 最小的此二網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

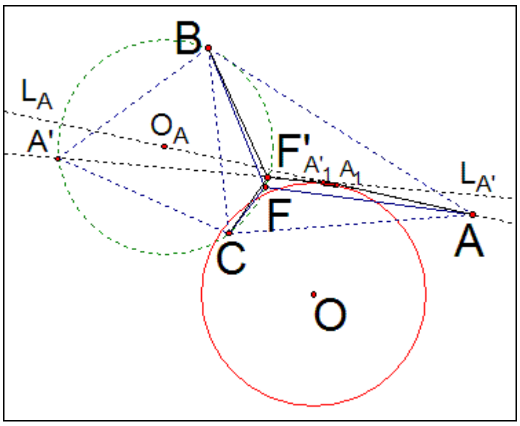


↑ 圖 59

(g) $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 其中兩者穿越圓 O （共 3 次）， A,B,C 其中一點在圓內，如圖 60。

當 $y=3$ 時， x 最小的網絡爲費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）
當 $y=2$ 時， P 在 O 上且符合圓的餘弦條件， x 最小的網絡爲 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 。

（類似圖 58 中的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ ）



↑ 圖 60

當 $y=1$ 時，如圖 60 所示，從 A 對圓 O 作切線 L_A 切圓 O 於 A_1 ，從 A' 對圓 O 作切線 $L_{A'}$ 切圓 O 於 A'_1 ，設 F' 爲 $L_{A'}$ 與圓 O_A 的交點，網絡

$\overline{F'B} \cup \overline{F'C} \cup \overline{F'A'_1} \cup$劣弧$A'_1A_1 \cup \overline{A_1A}$即爲$y=0$時$x$最小的網絡。

（由費瑪點的共圓性質，F'爲$\Delta BCA'_1$的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，

$x=\overline{AA_1}+$劣弧$A_1A'_1$弧長$+\overline{A'_1A'}$。）

而y不可能爲 0，因爲A,B,C其中兩點在圓內，所以所有連接A,B,C三點的網絡必有穿越障礙，$y \neq 0$。

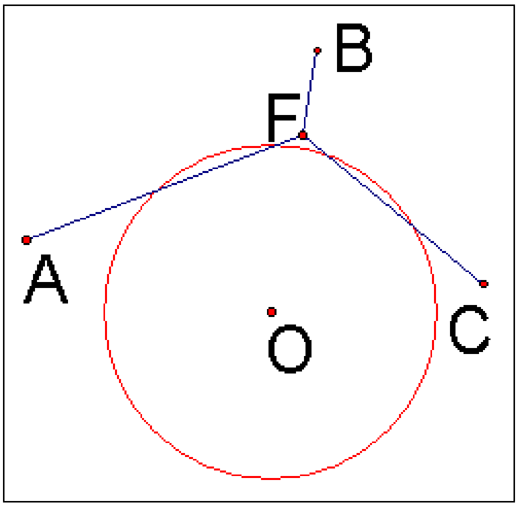
最後，將$y=3$、$y=2$、$y=1$時x最小的此三網絡加以綜合比較，即可得到連接A,B,C三點的最佳網絡。

(h) $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$其中兩者穿越圓$O$（各 2 次），$A,B,C$皆在圓外，如圖 61。

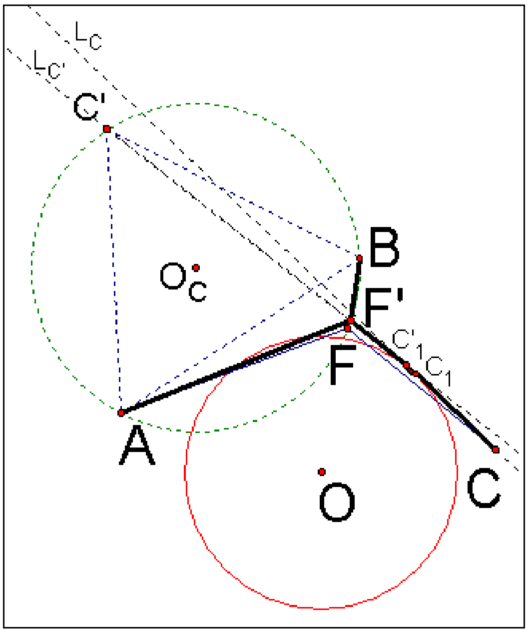
當$y=4$時，x最小的網絡爲費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）

當$y=3$時，P在O上且符合圓的餘弦條件，x最小的網絡爲$\overline{PA} \cup \overline{PB} \cup \overline{PC}$。

（類似圖 58 中的網絡$\overline{PA} \cup \overline{PB} \cup \overline{PC}$）



↑ 圖 61



↑ 圖 62

當$y=2$時，x最小的網絡爲下列(a)、(b)兩網絡中x較小者：

(a)如圖 62，從C對圓O作切線L_C切圓O於C_1，從C'對圓O作切線$L_{C'}$切圓O於C'_1，設F'爲$L_{C'}$與圓O_C的交點，網絡$\overline{F'A} \cup \overline{F'B} \cup \overline{F'C'_1} \cup$劣弧$C'_1C_1 \cup \overline{C_1C}$。

（由費瑪點的共圓性質，F'爲$\Delta ABC'_1$的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，

$x=\overline{CC_1}+$劣弧$C_1C'_1$弧長$+\overline{C'_1C'}$。）此網絡僅存在於它符合$y=2$時。

(b)類似圖 62（只是網絡在另一邊，A,C兩點對換，像圖 64），從A對圓O作切線L_A切圓O於A_1，從A'對圓O作切線$L_{A'}$切圓O於A'_1，設F'爲$L_{A'}$與圓O_A的交點，網絡

$\overline{F'B}\cup\overline{F'C}\cup\overline{F'A'_1}\cup$劣弧$A'_1A_1\cup\overline{A_1A}$。此網絡僅存在於它符合 $y=2$ 時。

（由費瑪點的共圓性質，F' 為 $\Delta BCA'_1$ 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，

$x=\overline{AA_1}+$劣弧$A_1A'_1$弧長$+\overline{A'_1A'}$。）

當 $y=1$ 時，所有的網絡必非最佳網絡，因為 A,B,C 皆在圓外，若 $y=1$ 則表示此網絡有一部分穿越進入圓 O 而沒有再穿越到圓 O 外，此部份為多餘的。

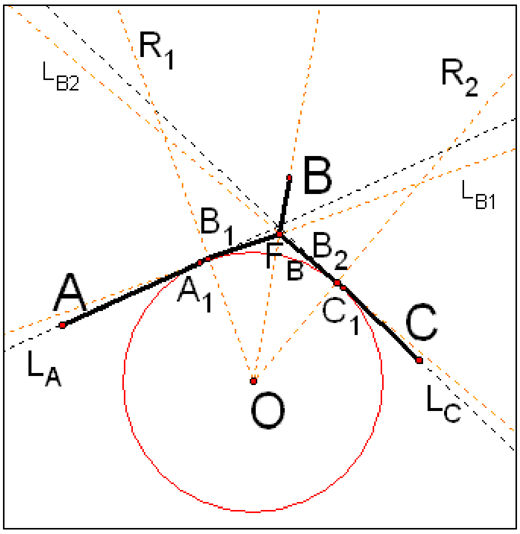
當 $y=0$ 時，如圖 63 所示，

從 A 對圓 O 作切線 L_A 切圓 O 於 A_1，

從 C 對圓 O 作切線 L_C 切圓 O 於 C_1，

再將 $\overrightarrow{OB}$ 以 O 為中心，逆時針旋轉 $30°$ 得射線 R_1，順時針旋轉 $30°$ 得射線 R_2，R_1,R_2 依序分別交圓 O 於 B_1,B_2，依序分別作圓 O 過 B_1,B_2 的切線 L_{B1},L_{B2}，設 F_B 為 L_{B1},L_{B2} 的交點。網絡 $\overline{F_BB}\cup\overline{F_BB_1}\cup\overline{F_BB_2}\cup$劣弧$B_1A_1\cup\overline{A_1A}\cup$劣弧$B_2C_1\cup\overline{C_1C}$ 即為 $y=0$ 時 x 最小的網絡。

（由費瑪點的 120 度性質，F_B 為 ΔBB_1B_2 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，



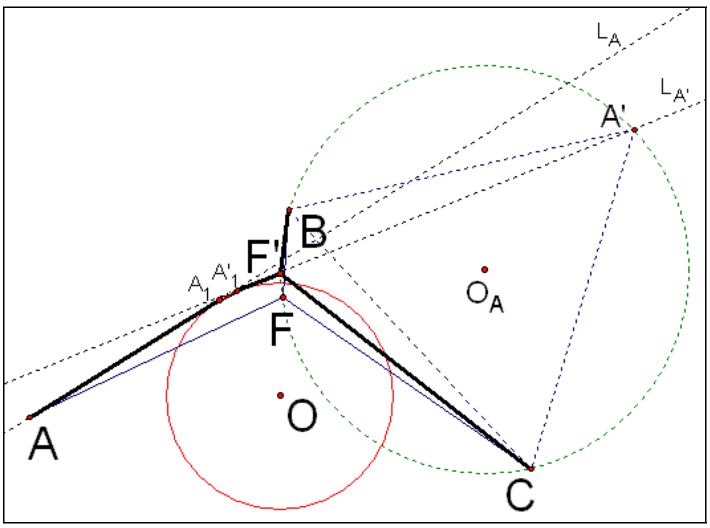
↑ 圖 63

$\overline{F_BB}+\overline{F_BB_1}+\overline{F_BB_2}=\overline{OB}$。）

最後，將 $y=4$、$y=3$、$y=2$、$y=0$ 時 x 最小的此四網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

(i) $\overline{FA},\overline{FB},\overline{FC}$ 三者同時穿越圓 O，A,B,C 皆在圓外，如圖 64。

當 $y=3$ 時，x 最小的網絡為費瑪點網絡。（費瑪點的最短性質）



↑ 圖 64（相關說明請見下頁）

當 $y=2$ 時，x 最小的網絡爲下列(a)、(b)兩網絡中 x 較小者：

(a)如圖 64，從 A 對圓 O 作切線 L_A 切圓 O 於 A_1，從 A' 對圓 O 作切線 $L_{A'}$ 切圓 O 於 A'_1，設 F' 爲 $L_{A'}$ 與圓 O_A 的交點，網絡 $\overline{F'B}\cup\overline{F'C}\cup\overline{F'A'_1}\cup$ 劣弧 $A'_1A_1\cup\overline{A_1A}$。

（由費瑪點的共圓性質，F' 爲 $\Delta BCA'_1$ 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，

$x=\overline{AA_1}+$ 劣弧 $A_1A'_1$ 弧長 $+\overline{A'_1A'}$。）此網絡僅存在於它符合 $y=2$ 時。

(b)類似圖 64（只是網絡在另一邊，A,C 兩點對換，像圖 62），從 C 對圓 O 作切線 L_C 切圓 O 於 C_1，從 C' 對圓 O 作切線 $L_{C'}$ 切圓 O 於 C'_1，設 F' 爲 $L_{C'}$ 與圓 O_C 的交點，網絡

$\overline{F'A}\cup\overline{F'B}\cup\overline{F'C'_1}\cup$ 劣弧 $C'_1C_1\cup\overline{C_1C}$。此網絡僅存在於它符合 $y=2$ 時。

（由費瑪點的共圓性質，F' 爲 $\Delta ABC'_1$ 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，

$x=\overline{CC_1}+$ 劣弧 $C_1C'_1$ 弧長 $+\overline{C'_1C'}$。）

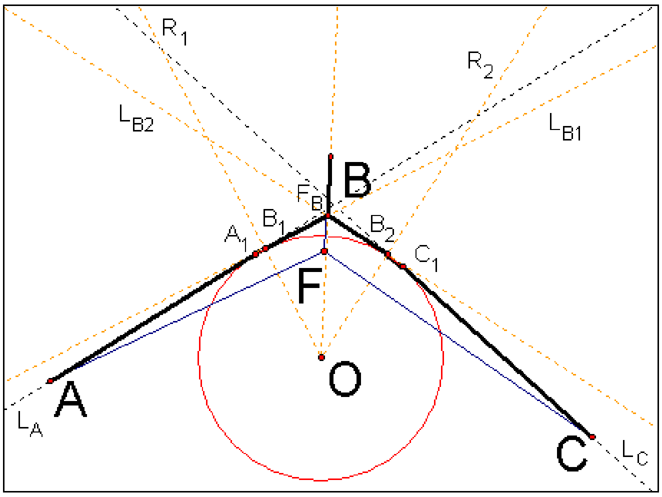
當 $y=1$ 時，所有的網絡必非最佳網絡，因爲 A,B,C 皆在圓外，若 $y=1$ 則表示此網絡有一部分穿越進入圓 O 而沒有再穿越到圓 O 外，此部份爲多餘的。

當 $y=0$ 時，如圖 65 所示，

從 A 對圓 O 作切線 L_A 切圓 O 於 A_1，

從 C 對圓 O 作切線 L_C 切圓 O 於 C_1，

再將 $\overrightarrow{OB}$ 以 O 爲中心，逆時針旋轉 $30°$ 得射線 R_1，順時針旋轉 $30°$ 得射線 R_2，R_1,R_2 依序分別交圓 O 於 B_1,B_2，依序分別作圓 O 過 B_1,B_2 的切線 L_{B1},L_{B2}，設 F_B 爲 L_{B1},L_{B2} 的交點。網絡



↑圖 65

$\overline{F_BB}\cup\overline{F_BB_1}\cup\overline{F_BB_2}\cup$ 劣弧 $B_1A_1\cup\overline{A_1A}\cup$ 劣弧 $B_2C_1\cup\overline{C_1C}$ 即爲 $y=0$ 時 x 最小的網絡。

（由費瑪點的 120 度性質，F_B 爲 ΔBB_1B_2 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，

$\overline{F_BB}+\overline{F_BB_1}+\overline{F_BB_2}=\overline{OB}$。）

最後，將 $y=3$、$y=2$、$y=0$ 時 x 最小的此三網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

若 F,A,B,C 中有點在圓 O 上則將該情況視爲點是在圓內或圓外極接近圓 O 處（選擇穿越次數較少的方式），爲上述九種情況中的一種，用相同的方法解決。

ΔABC 有一內角不小於 $120°$ 的情況，我們仍可用與以上討論相同的方法解決。

在先前的圖 62、64 中，我們可用各種關於費瑪點的性質以及三角形不等式，找到當 $y=2$ 時 x 最小的網絡，但是，若要完整地證明該網絡即爲此情況下 x 最小的網絡則需解釋其他所有連接 A,B,C 三點且符合 $y=2$ 的網絡之 x 皆較大。這是其困難處，也是我們尚未完整證明的原因。

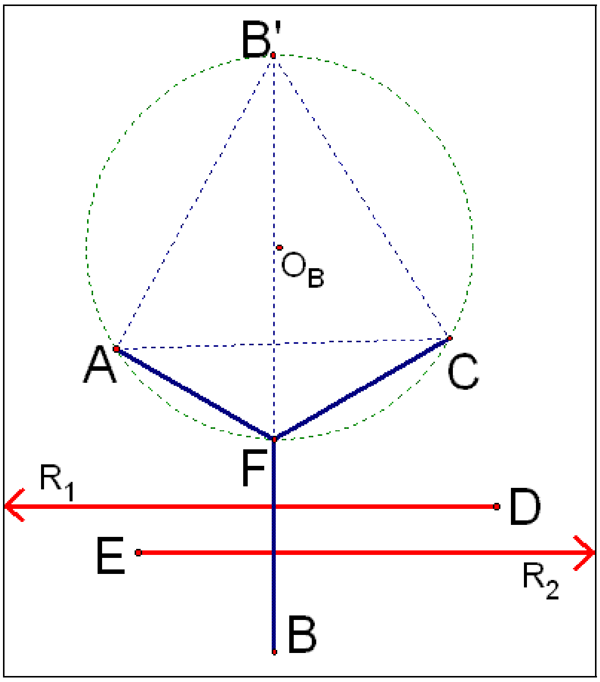
主題二：探討與主題一相關的延伸問題，我們將分別逐一探討下列各問題：

1.當障礙爲兩條彼此平行的射線 R_1,R_2 時的例子
2.當障礙爲一個三角形時的例子
3.當障礙爲網格狀時的例子
4.存在障礙情況下兩點間距離的探討
5.包含一條直線障礙與兩平行直線間區域障礙的例子

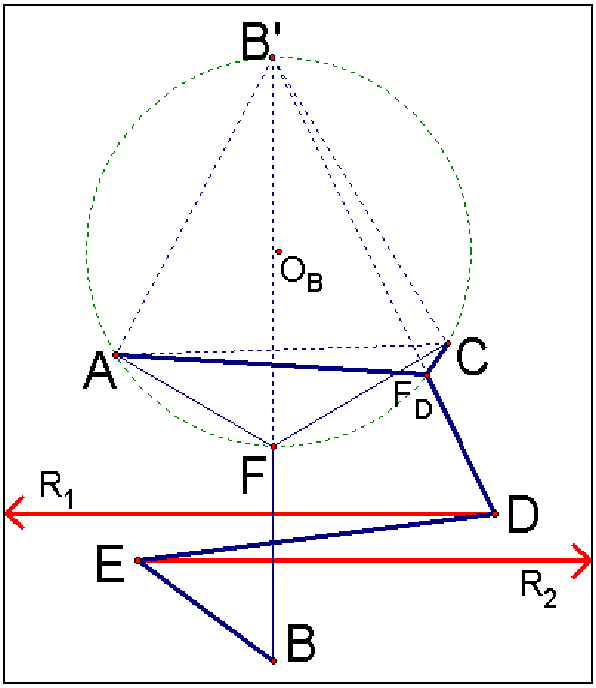
一、當障礙爲兩條彼此平行的射線 R_1,R_2 時的例子

如圖 66，平面上給定 A,B,C 三點與障礙 R_1,R_2，求一連接 A,B,C 三點的最佳網絡。設 D,E 依序分別爲 R_1,R_2 的端點，而費瑪點網絡共穿越障礙 2 次，其中 $\overline{FB}$ 各穿越 R_1,R_2 一次。

同樣的，我們依照 y 的不同，分情況討論：



↑圖 66



↑圖 67

當 $y=2$ 時，x 最小的網絡爲費瑪點網絡，如圖 66。（費瑪點的最短性質）（另外，由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{BB'}$。）

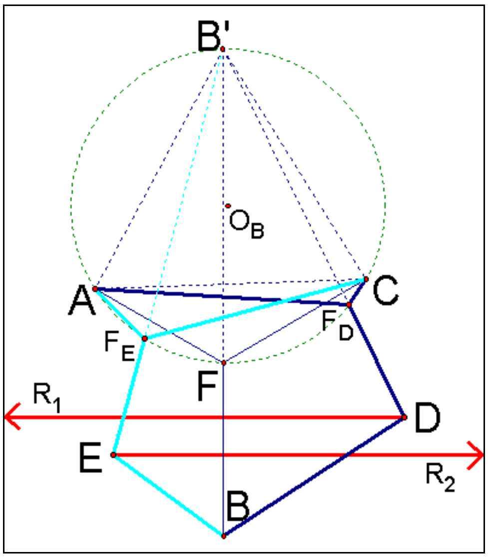
當 $y=0$ 時，設 F_D 爲 $\overline{B'D}$ 與圓 O_B 的交點，x 最小的網絡爲 $\overline{F_DA}\cup\overline{F_DC}\cup\overline{F_DD}\cup\overline{DE}\cup\overline{EB}$，如圖 67。我們可由費瑪點的最短性質、費瑪點的線段替換性質、費瑪點的共圓性質與內部性質得知所有其它連接 A,B,C 三點且 $y=0$ 的網絡總長度皆大於此網絡。（由費瑪點的共圓性質，F_D 即爲 ΔACD 的費瑪點。費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{B'D}+\overline{DE}+\overline{EB}$）

相同的道理，我們可得到：

當 $y=1$ 時，x 最小的網絡爲下頁(a)、(b)兩網絡中 x 較小者：

(a)如圖 68，設 F_D 為 $\overline{B'D}$ 與圓 O_B 的交點，x 最小的網絡為 $\overline{F_DA} \cup \overline{F_DC} \cup \overline{F_DD} \cup \overline{DB}$。（由費瑪點的共圓性質，$F_D$ 即為 ΔACD 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，$x = \overline{B'D} + \overline{DB}$）

(b)如圖 68，設 F_E 為 $\overline{B'E}$ 與圓 O_B 的交點，x 最小的網絡為 $\overline{F_EA} \cup \overline{F_EC} \cup \overline{F_EE} \cup \overline{EB}$。（由費瑪點的共圓性質，$F_E$ 即為 ΔACE 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，$x = \overline{B'E} + \overline{EB}$）



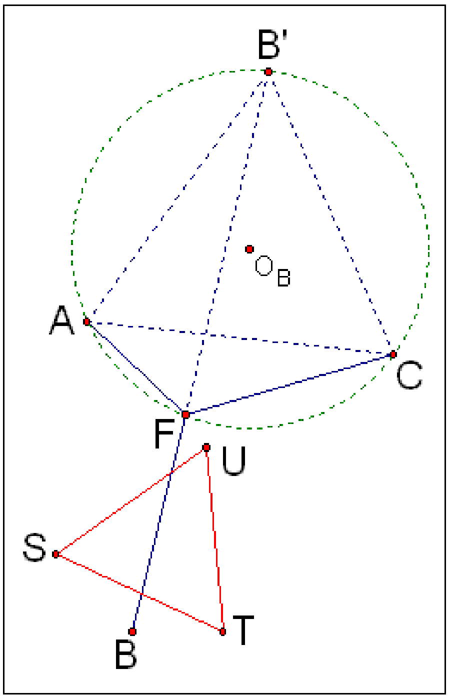
↑ 圖 68

最後，將 $y=2$、$y=1$、$y=0$ 時 x 最小的此三網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

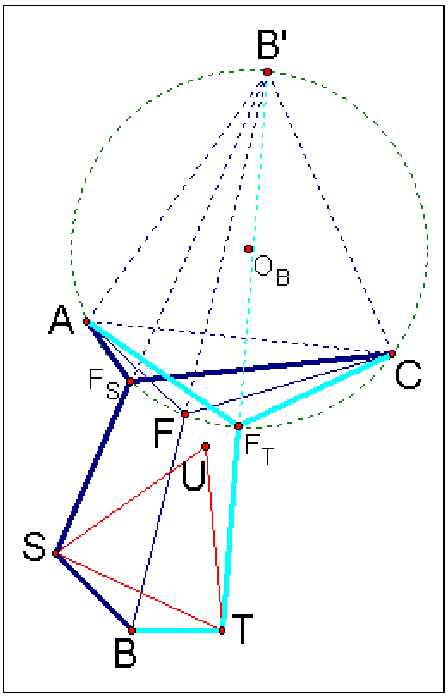
二、當障礙為三角形 STU 時的例子

如圖 69，平面上給定 A,B,C 三點與障礙三角形 STU，求一連接 A,B,C 三點的最佳網絡。同樣的，我們依照 y 的不同，分情況討論：

當 $y=2$ 時，x 最小的網絡為費瑪點網絡，如圖 69。（費瑪點的最短性質）（另外，由費瑪點的線段替換性質，$x = \overline{BB'}$。）



↑ 圖 69



↑ 圖 70（相關說明請見下頁）

當 $y=1$ 時，所有的網絡必非最佳網絡，因為 A,B,C 皆在三角形 STU 外，若 $y=1$ 則表示

此網絡有一部分穿越進入三角形 STU 而沒有再穿越到三角形 STU 外，此部份爲多餘的。當 $y=0$ 時，x 最小的網絡爲下列(a)、(b)兩網絡中 x 較小者：

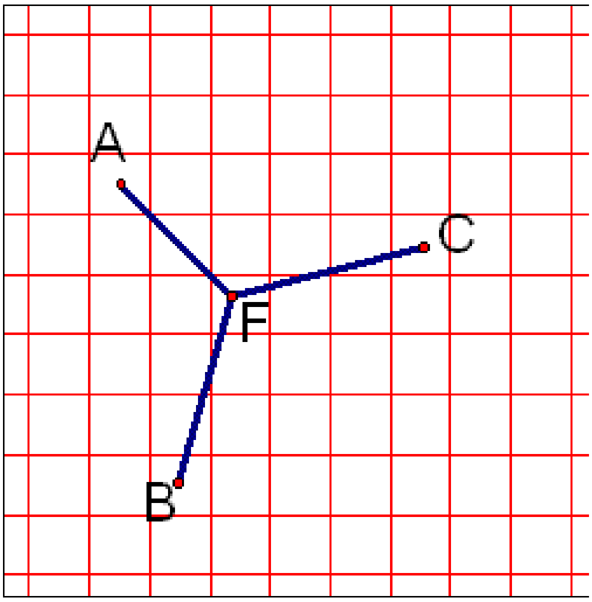
(a)如圖 70，設 F_S 爲 $\overline{B'S}$ 與圓 O_B 的交點，網絡 $\overline{F_SA}\cup\overline{F_SC}\cup\overline{F_SS}\cup\overline{SB}$。（由費瑪點的共圓性質，$F_S$ 即爲 ΔACS 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{B'S}+\overline{DB}$）

(b)如圖 70，設 F_T 爲 $\overline{B'T}$ 與圓 O_B 的交點，網絡 $\overline{F_TA}\cup\overline{F_TC}\cup\overline{F_TT}\cup\overline{TB}$。（由費瑪點的共圓性質，$F_T$ 即爲 ΔACT 的費瑪點。由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{B'T}+\overline{TB}$）

我們可由費瑪點的最短性質、費瑪點的線段替換性質、費瑪點的共圓性質與內部性質得知所有其它連接 A,B,C 三點且 $y=0$ 的網絡總長度皆大於此網絡（此網絡爲(a)、(b)兩網絡中 x 較小者）。
最後，將 $y=2$、$y=0$ 時 x 最小的此二網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

三、當障礙爲網格狀時的例子

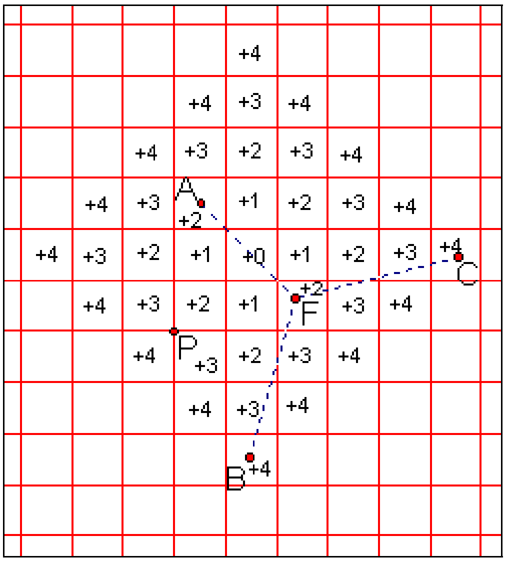
如圖 71，平面上給定 A,B,C 三點與網格狀障礙，求一連接 A,B,C 三點的最佳網絡。此網格狀障礙是由無限多條彼此平行且兩相鄰直線間隔相等的縱向直線與無限多條彼此平行且兩相鄰直線間隔相等的橫向直線所構成。其中，縱向直線與橫向直線互相垂直，也就是說圖中每個由網格狀障礙圍成的最小面積之四邊形皆爲正方形，我們稱此類正方形爲**小方格**。



↑圖 71

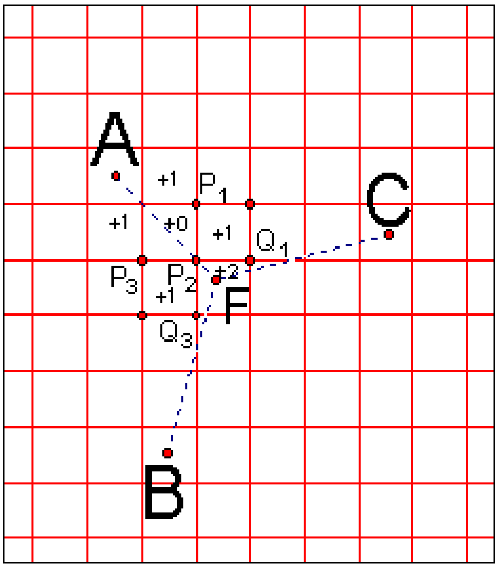
由三線段性質，我們知道，最佳網絡必定是 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 此類由三段線段構成的網絡，因此，我們設最佳網絡爲 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$，依照不同的網絡穿越障礙次數分別探討 P 點位置。
首先，我們要討論 P 點所在的位置與網絡穿越障礙次數 y 的關係。顯然，當 P 在同一個小方格內移動時，y 會保持相同；而當 P 在小方格的邊上時，y 等於與 P 相鄰兩小方格中 y 較小者之 y 值；若 P 爲小方格的頂點，則 y 等於 P 周圍四個小方格中 y 最小者之 y 值。例如，在下頁的圖 72 中，小方格內的數字表示當 P 在諸小方格之中移動時 y 的值，以圖中的 P 點爲例，網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 穿越障礙的次數 y 即爲周圍四個小方格（+2、+3、+4、+3）中 y 最小者之 y 值，即 10+2=12。

如圖 71，費瑪點網絡穿越障礙的次數為 12，而 A,B 兩點間有 5 條縱向直線、5 條橫向直線，因此連接 A,B,C 三點的網絡至少會穿越障礙 10 次。如圖 72，當 P 在標示+0 的小方格中時，$y=10$（10+0）；當 P 在標示+0 小方格周圍標示+1 的小方格時，$y=11$（10+1）；當 P 在標示+1 小方格外側相鄰的標示+2 的小方格時，$y=12$（10+2）……依此類推。（圖 72 中+0 小方格所在的位置可由下列方法判斷：
依照所在的小方格之位置，將 A,B,C 三點由左到右排列，在中間的是 B，將 A,B,C 三點由上到下排列，在中間的是 C，此+0 小方格與 B 所在的小方格在同一個直排、與 C 所在的小方格在同一個橫排。）



↑圖 72（圖中+0 意為 10、+1 為 11，餘類推）

而因為費瑪點網絡符合 $y=12$，所以我們只需分別討論 $y=12$、$y=11$、$y=10$ 時 x 最小的網絡：
當 $y=12$ 時，x 最小的網絡為費瑪點網絡，如上頁的圖 71。（費瑪點的最短性質）
當 $y=10$ 時，P 必在標示+0 的小方格內部或恰在該正方形上。
如圖 73，P_1,P_2,P_3 皆為標示+0 小方格的頂點，由遠處排除方法，我們知道，當 x 為最小時，P 必在折線 $\overline{P_1P_2}\cup\overline{P_2P_3}$ 上，然後分別找出 $\overline{P_1P_2}$ 與 $\overline{P_2P_3}$ 的線上最佳點，再比較由此二點作出的兩個網絡，找出其中 x 較小者，於是我們便得到 $y=10$ 時 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。
（也可先用縮小範圍方法排除掉不可能的部份）
當 $y=11$ 時，P 必在標示+1 的小方格內部或恰在正方形上。如圖 73，設 $Q_2=P_2$，Q_1,Q_2,Q_3 皆為標示+1 小方格的頂點，由遠處排除方法，



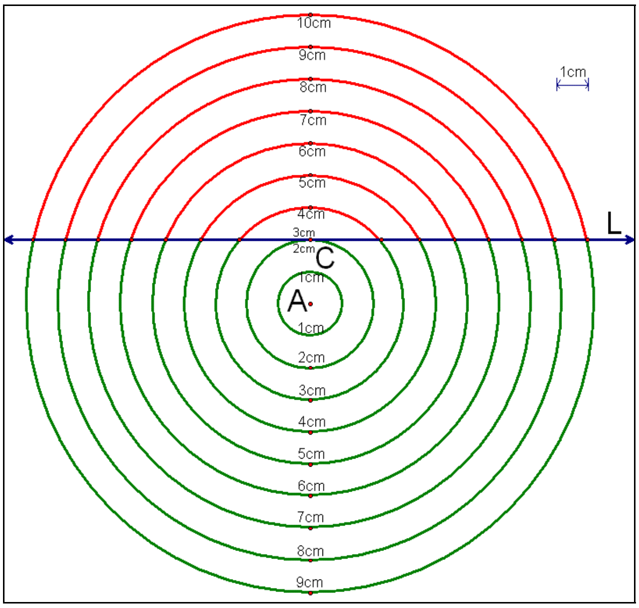
↑圖 73

我們知道，當 x 為最小時，P 必在折線 $\overline{Q_1Q_2}\cup\overline{Q_2Q_3}$ 上，然後分別找出 $\overline{Q_1Q_2}$ 與 $\overline{Q_2Q_3}$ 的線上最佳點，再比較由此二點作出的兩個網絡，找出其中 x 較小者，於是我們便得到 $y=11$ 時 x 最小的網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$。
最後，將 $y=12$、$y=11$、$y=10$ 時 x 最小的此三網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C

三點的最佳網絡 $\overline{PA}\cup\overline{PB}\cup\overline{PC}$ 。

四、存在障礙情況下兩點間距離的探討

如圖 74，平面上給定 A 點與障礙直線 L，每穿越障礙 1 次等同於 1 公分損耗（即額外增加 1 公分的距離），探討各點與 A 的距離。圖中 C 點爲 A 在 L 上的正射影，$\overline{AC}$ 長 2 公分。圖中的圓是以 A 爲圓心，半徑爲 1 到 9 之整數（公分）所作的同心圓。

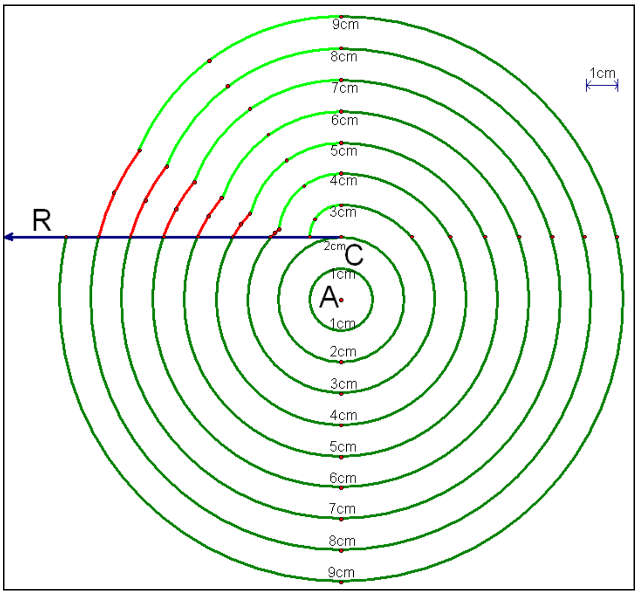


↑ 圖 74

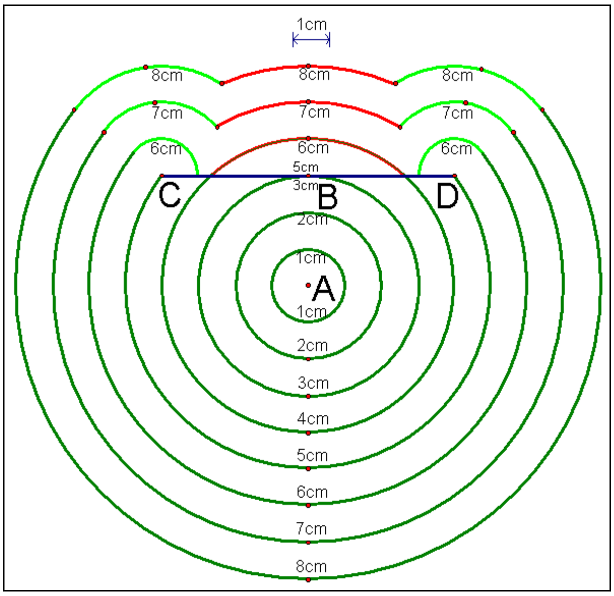
類似於等高線，圖中每個在圓上的點與 A 的距離等於該段弧線旁所標示的長度。以半徑爲 9 的圓爲例，該圓在 L 上方的部份比在 L 下方的部份與 A 的距離增加了 1 公分，這是因爲穿越障礙的緣故。另外，C 點下方極接近 L 處之點與 A 的距離爲 2 公分，而 C 點上方極接近 L 處之點與 A 的距離則爲 3 公分，這也是因爲穿越障礙的緣故。

如圖 75，平面上給定 A 點與障礙射線 R，每穿越障礙 1 次等同於 1 公分損耗（即額外增加 1 公分的距離），探討各點與 A 的距離。圖中 C 點爲 A 在 R 上的正射影且爲 R 的端點，$\overline{AC}$ 長 2 公分。圖中的弧線是以 A 或 C 爲圓心所作圓的一部分。

類似於等高線，圖中每個在弧線上的點與 A 的距離等於該段弧線旁所標示的長度。



↑ 圖 75



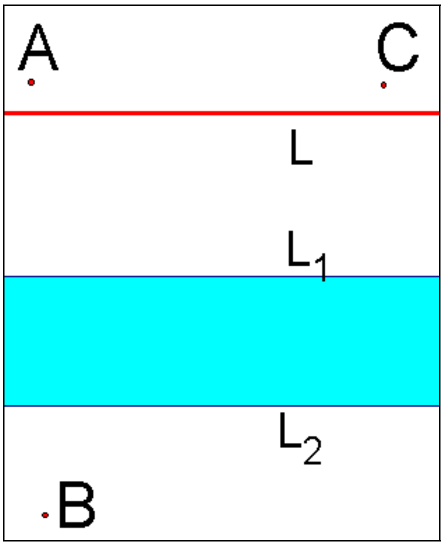
↑圖 76

如圖 76，平面上給定 A 點與障礙 $\overline{CD}$，每穿越障礙 1 次等同於 2 公分損耗（即額外增加 2 公分的距離），探討各點與 A 的距離。圖中 B 點爲 A 在 $\overline{CD}$ 上的正射影，$\overline{AB}$ 長 3 公分，$\overline{AC},\overline{AD}$ 長 5 公分。圖中的弧線是以 A 或 C 或 D 爲圓心所作圓的一部分。類似於等高線，圖中每個在弧線上的點與 A 的距離等於該段弧線旁所標示的長度。

五、包含一條直線障礙與兩平行直線間區域障礙的例子

如圖 77，平面上給定 A,B,C 三點與障礙，求一連接 A,B,C 三點的最佳網絡。

障礙爲直線 L 以及 L_1 、 L_2 兩直線間之區域，$L // L_1 // L_2$。其中，障礙 L 的性質與主題一中相同，而直線 L_1 、 L_2 間區域之障礙（如河流），在這種障礙區域中，網絡的長度要乘以 p 倍來計算（ $p \geq 1$ ）。設網絡總長度爲 x （ x 已包含了網絡中乘以 p 倍的部份），網絡穿越障礙 L 的次數爲 y ，a 爲正的常數，當 $x+ay$ 爲最小時，該網絡即爲最佳網絡。於是，分別就 $y=1$ 、 $y=2$……時（由於 L 爲直線所以 $y \geq 1$ ），找出總長度 x 最小的網絡，再將這些網絡加以比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。



↑圖 77

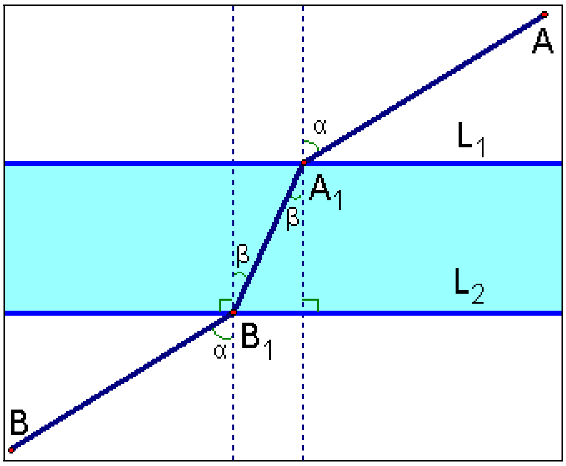
首先，討論連接兩定點 A,B ，通過 L_1 、 L_2 兩直線間之區域障礙的最佳（ x 最小）方法。

正弦條件

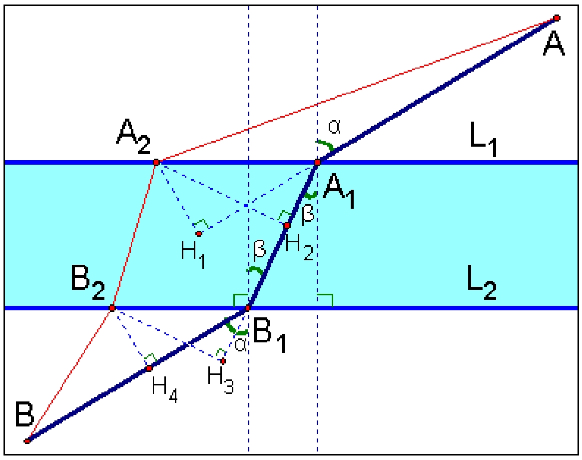
如下頁的圖 78，連接 A,B 兩點，當 $\sin\alpha = p\sin\beta$ 時（網絡 $\overline{AA_1} \cup \overline{A_1B_1} \cup \overline{B_1B}$ ），爲最佳的連接方式。（圖中虛線爲 L_1 、 L_2 之法線， A_1 、 B_1 依序在 L_1 、 L_2 上）

（註：亦可用 cos 的觀點來看正弦條件， $\sin\alpha = p\sin\beta$ 即圖 79 中的

$\cos\angle AA_1A_2 + p\cos\angle A_2A_1B_1 = 0$ ）



↑ 圖 78



↑ 圖 79

※ 證明：

欲證明上述關於正弦條件的性質。如圖 79，依序在 L_1、L_2 上任取一異於 A_1、B_1 的點 A_2、B_2，分別作 A_2 在 $\overleftrightarrow{AA_1}, \overleftrightarrow{A_1B_1}$ 上的正射影 H_1, H_2、作 B_2 在 $\overleftrightarrow{A_1B_1}, \overleftrightarrow{BB_1}$ 上的正射影 H_3, H_4，於是，因爲 $\sin\alpha = p\sin\beta$ 且 $\alpha = \angle A_1A_2H_1 = \angle B_1B_2H_4$、$\beta = \angle A_1A_2H_2 = \angle B_1B_2H_3$，所以

$\overline{A_1H_1} = \overline{A_1A_2} \times \sin\angle A_1A_2H_1 = \overline{A_1A_2} \times \sin\alpha = p \times (\overline{A_1A_2} \times \sin\beta) = p \times (\overline{A_1A_2} \times \sin\angle A_1A_2H_2) = p\overline{A_1H_2}$，

$\overline{B_1H_4} = \overline{B_1B_2} \times \sin\angle B_1B_2H_4 = \overline{B_1B_2} \times \sin\alpha = p \times (\overline{B_1B_2} \times \sin\beta) = p \times (\overline{B_1B_2} \times \sin\angle B_1B_2H_3) = p\overline{B_1H_3}$，

$\overline{A_1H_1} = p\overline{A_1H_2}$ 且 $\overline{B_1H_4} = p\overline{B_1H_3}$，又因爲直角三角形斜邊大於一股，所以 $\overline{AA_2} > \overline{AH_1}$，$\overline{A_2B_2} > \overline{H_2H_3}$，$\overline{BB_2} > \overline{BH_4}$。綜合以上結果：

$$
\begin{aligned}
\overline{AA_2} + p\overline{A_2B_2} + \overline{B_2B} &> \overline{AH_1} + p\overline{H_2H_3} + \overline{BH_4} \\
&= \overline{AH_1} + p\overline{H_2H_3} + \overline{BH_4} + (p\overline{A_1H_2} - \overline{A_1H_1}) + (\overline{B_1H_4} - p\overline{B_1H_3}) \\
&= \overline{AA_1} + p\overline{A_1B_1} + \overline{B_1B}\ ,
\end{aligned}
$$

$\overline{AA_2} + p\overline{A_2B_2} + \overline{B_2B} > \overline{AA_1} + p\overline{A_1B_1} + \overline{B_1B}$，故得證。

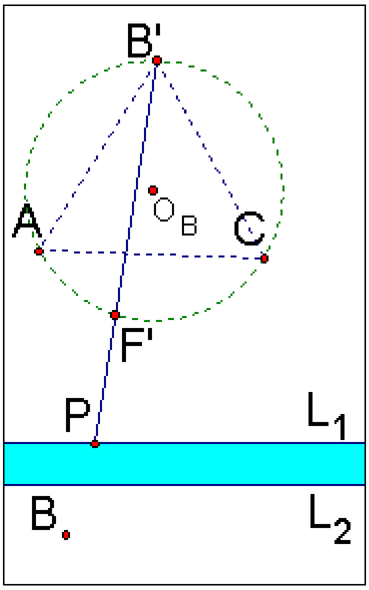
（可由三角形不等式推得：A, A_1、A_1, B_1、B_1, B 兩點間是以直線連接。）

接下來，討論連接三定點 A, B, C 的情況：

正三角形簡化法

如下頁的圖 80，以 $\overline{AC}$ 爲邊長，作正三角形 ACB'，設 P 爲 L_1 上一動點、F' 爲 ΔACP 的費瑪點（由費瑪點的共圓性質，F' 即爲 $\overline{B'P}$ 與圓 O_B 的交點），由費瑪點的性質，當 ΔACP

各內角皆小於$120°$時，$\overline{F'A}+\overline{F'C}+\overline{F'P}=\overline{B'P}$，故可將$A,B,C$三點的問題簡化成$B,B'$兩點來解決，找出動點$P$在何處時，能由$\overline{B'P}$作出符合正弦條件的網絡通過$B$，此時，得到連接三定點$A,B,C$總長最小的網絡$\overline{F'A}\cup\overline{F'C}\cup\overline{F'P}\cup\overline{PP'}\cup\overline{P'B}$，其中$P'$為連接$B,B'$符合正弦條件的網絡與$L_2$之交點。關於如何找出$P$的位置，請參考後方的 GSP 作圖實例（圖 83）。



↑圖 80

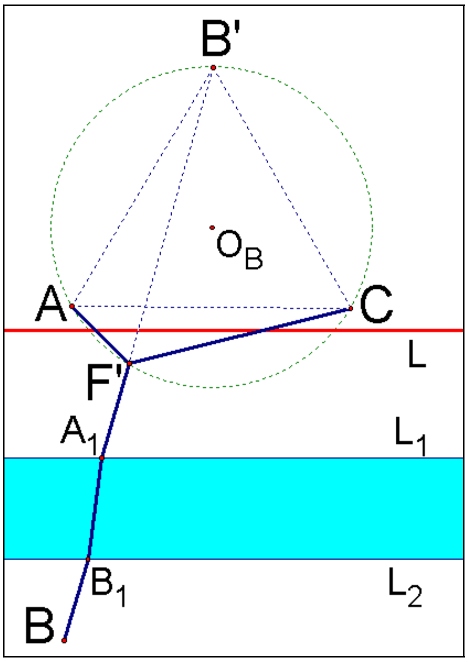
（註：連接三定點A,B,C時，還有許多其它的情況，在此沒有逐一討論，但已有完整的解決方法，如：去除一點簡化法、超正弦關係捷徑、過河分岔捷徑、$p<2/\sqrt{3}$時的河中分岔捷徑……等，請參考[4]。）

最後，回到原來的問題：
當$y=2$時，如圖 81，先用正三角形簡化法將問題簡化成B,B'兩點來討論，再用找出連接B,B'兩點且符合正弦條件的網絡$\overline{B'A_1}\cup\overline{A_1B_1}\cup\overline{B_1B}$，其中，

A_1,B_1依序在L_1,L_2上，設F'為$\overline{B'A_1}$與圓O_B的交點，$y=2$時x最小的網絡即為

網絡$\overline{F'A}\cup\overline{F'C}\cup\overline{F'A_1}\cup\overline{A_1B_1}\cup\overline{B_1B}$。

（由費瑪點的共圓性質，F'即為ΔAA_1C的費瑪點；由費瑪點的線段替換性質，$x=\overline{B'A_1}+p\overline{A_1B_1}+\overline{B_1B}$）



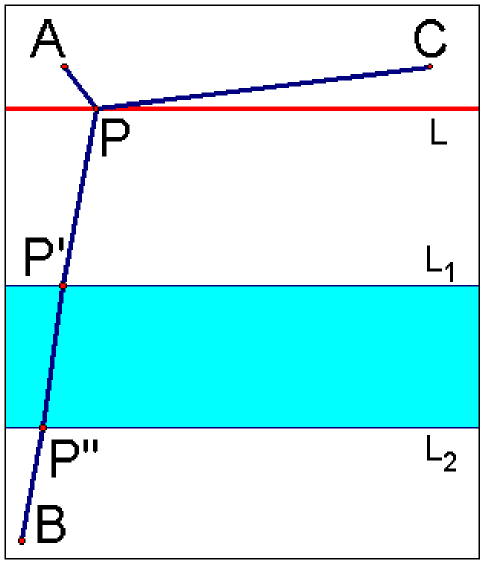
↑圖 81

當$y=1$時，如下頁的圖 82，設P為L上一動點，依照餘弦條件於L_1上作出點P'，使得對A,C,P'三點來說，P為L的線上最佳點，然後移動P使得由$\overline{PP'}$作出符合正弦條件的網絡通過B，此時，得到$y=1$時x最小的網絡$\overline{PA}\cup\overline{PC}\cup\overline{PP'}\cup\overline{P'P''}\cup\overline{P''B}$。

而 y 不可能爲 0，因爲 L 有穿越 ΔABC ，所以所有連接 A,B,C 三點的網絡必有穿越障礙 L ， $y \neq 0$ 。

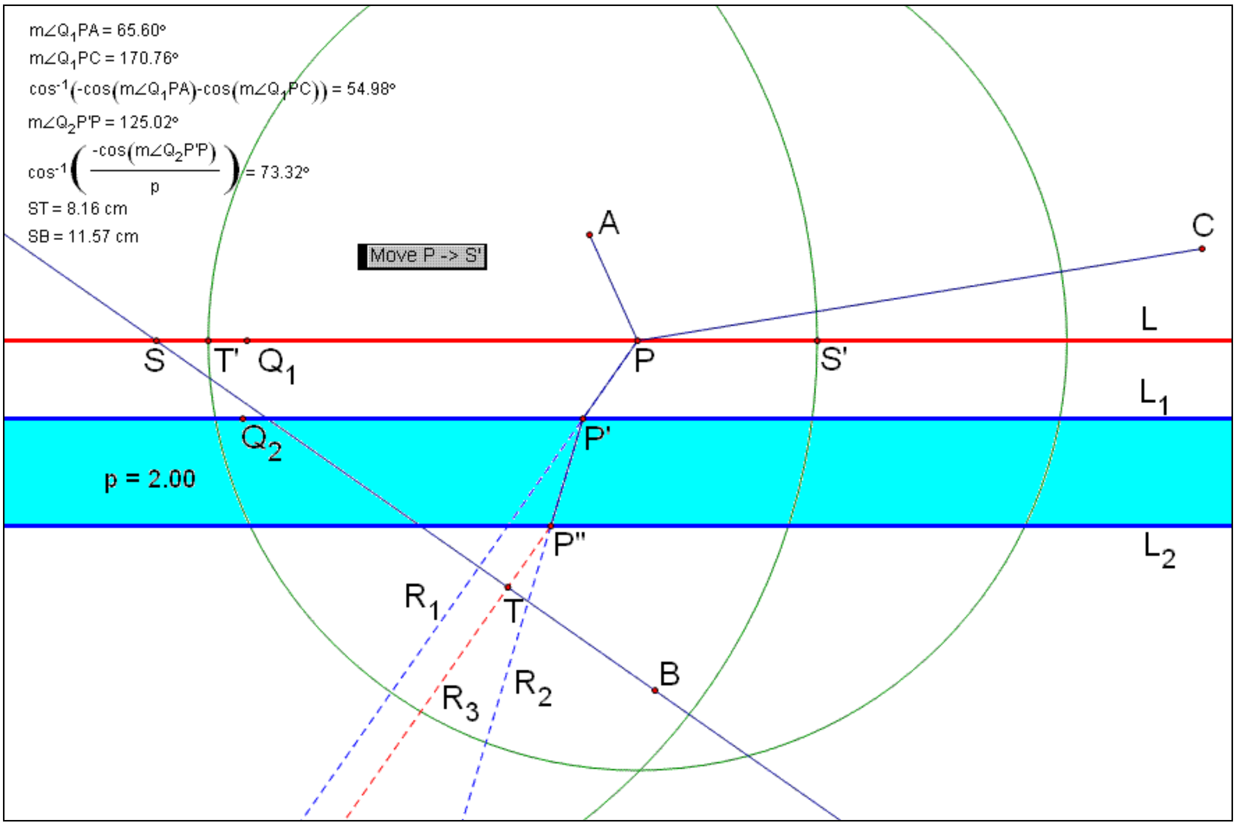
最後，將 $y=2$ 、 $y=1$ 時 x 最小的此二網絡加以綜合比較，即可得到連接 A,B,C 三點的最佳網絡。（ $y=2$ 時 x 最小的網絡之 x 已是所有網絡中 x 最小者。）

關於如何用 GSP 作出 $y=1$ 時 x 最小的網絡，請看以下說明：



↑ 圖 82

GSP 作圖實例



↑ 圖 83

如圖 83，設 P 爲直線 L 上一動點，於 L 的左側任取一異於 P 的點 Q_1 ，用 GSP”measure”的功能得到 $\angle Q_1PA$ 、 $\angle Q_1PC$ ，再用”calculate” 的功能計算出

$\cos^{-1}[-\cos(\angle Q_1PA)-\cos(\angle Q_1PC)]$ ，將 $\overrightarrow{PQ_1}$ 以 P 爲中心逆時針旋轉該角度，得到射線

R_1 ，交 L_1 於 P' 。於 L_1 的左側任取一異於 P' 的點 Q_2 ，用”measure”的功能得到 $\angle Q_2P'P$

，再用”calculate” 的功能計算出$\cos^{-1}[\frac{-\cos(\angle Q_2P'P)}{p}]$，將$\overrightarrow{P'Q_2}$以$P'$爲中心逆時針旋轉該角度，得到射線$R_2$，交$L_2$於$P''$，再過$P''$作射線$R_3$平行射線$R_1$。移動$P$點，當$R_3$通過$B$時，即可得到所求的網絡。過$B$作$R_3$的垂線，依序交$L$、$R_3$於$S$、$T$兩點，以$P$爲圓心、$\overline{ST}$的長度爲半徑，作圓，於$P$的左方交$L$於點$T'$，再以$T'$爲圓心、$\overline{SB}$的長度爲半徑作圓，於$T'$的右方交$L$於$S'$，最後，用 GSP”move”的功能把$P$移向$S'$，使$P=S'$，此時$\overline{SB}=\overline{ST}$，$B=T$，即$R_3$通過$B$，

得到網絡$\overline{PA}\cup\overline{PC}\cup\overline{PP'}\cup\overline{P'P''}\cup\overline{P''B}$。

肆、研究結果

1.當障礙爲一條直線或兩條彼此不平行的直線時，我們可用各種關於費瑪點的性質、三線段性質、餘弦條件以及遠處排除方法，找到連接A,B,C三點的最佳網絡，並且藉由尺規作圖或是 GSP 軟體作出該網絡。
2.當障礙爲多條平行直線時，我們可用三線段性質將問題簡化爲障礙是一條直線情況，運用障礙爲一條直線時的方法，找到連接A,B,C三點的最佳網絡，並且作出該網絡。
3.當障礙爲一條射線或一條線段時，我們可用各種關於費瑪點的性質、內部性質、餘弦條件、遠處排除方法以及縮小範圍方法，找到連接A,B,C三點的最佳網絡，並且藉由尺規作圖或是 GSP 軟體作出該網絡。
4.當障礙爲一個圓時，我們可用各種關於費瑪點的性質、三角形不等式以及圓的餘弦條件，找到連接A,B,C三點的最佳網絡，並且藉由尺規作圖或是 GSP 軟體作出該網絡。

我們亦可將上述方法應用在：
1.障礙爲兩條彼此平行之射線的情況。
2.障礙爲一個三角形的情況。
3.障礙爲網格狀的情況。
4.包含一條直線障礙與兩平行直線間區域障礙的情況。
其中，我們還用到了正弦條件解決區域障礙的問題。

伍、討論、未來展望與應用

在障礙爲一個圓形、兩條彼此平行之射線、一個三角形或網格狀時，我們可以再做更進一步的詳細探討，也可以再探討障礙爲其它凸多邊形或是其它形狀之網格的情況。

另外，目前只討論了僅存在一種類型障礙的情況或是兩平行直線間區域障礙與另一直線障礙

的情況，未來我們希望繼續討論多種類型障礙混合的情況（例如同時有直線、射線、線段障礙的情況）以及討論兩平行直線間區域障礙與其它不同形狀障礙的情況，甚至把兩平行直線間區域障礙改成兩彼此不平行直線間區域障礙的情況。

關於應用，我們可以將這些方法應用在交通問題上，三定點就如同三個城市或三棟建築物（如：車站、地標……等），找最佳的連結網絡，就像道路一般，障礙就像是各種阻礙、損耗，如「一座懸崖，道路穿越需做陸面填平工程 1 億元」、「繳過路費 200 元」、「多耗油 2 加侖」或「拖延 5 分鐘」……等，而兩平行直線間區域障礙就如同「河流」或「泥濘路面」，可當作是造橋需較高的成本；也可視爲行進速度較慢，相當於時間、距離以數倍計算。

陸、結論

在平面上存在下列各類障礙的情況下，我們可以運用各種關於費瑪點的性質、三角形不等式以及與餘弦值相關的特殊性質找到連接 A,B,C 三點的最佳網絡，並且藉由尺規作圖或是 GSP 軟體作出該網絡：

1.障礙爲一條直線的情況（請參考第 21 頁的流程圖，圖 29）。
2.障礙爲多條平行直線的情況。
3.障礙爲兩條彼此不平行之直線的情況（請參考第 26 頁的流程圖，圖 37）。
4.障礙爲一條射線的情況（請參考第 30 頁的流程圖，圖 46）。
5.障礙爲一條線段的情況（請參考第 34 頁的流程圖，圖 54）。
6.障礙爲一個圓的情況。

而上述 6 種情況中障礙會使得平面上點與點之間實際的距離產生變化（請參考第 44、45 頁的圖 74、圖 75、圖 76），尤其在障礙兩側之處會有不連續的變化。
另外，在解決以下問題時，也會用到上述 6 種情況中所使用的方法：
1.障礙爲兩條彼此平行之射線的情況。
2.障礙爲一個三角形的情況。
3.障礙爲網格狀的情況。
4.包含一條直線障礙與兩平行直線間區域障礙的情況（這用到了與正弦值相關的特殊性質）。

柒、參考資料

[1]沈康身，歷史數學名題賞析，上海教育出版社，第 993~995、1022~1023 頁。
[2]世部貞市郎，幾何學辭典，九章出版社，第 607~609 頁。
[3]Sada Narayanappa, Petr Vojtechovsky, Wan D. Bae，
"Exact Solutions for Simple Weighted Region Problems"，
http://www.cs.du.edu/~snarayan/sada/docs/ISAAC-convex.pdf。
[4]2007 思源科學創意大賽決賽手冊，財團法人思源科技教育基金會，第 169~180 頁。

評語

費馬問題既具有實用性亦具有相當的數學的困難程度。當確切的解決方法無法找到之前，尋找近似解是值得進行的工作。在這份作品中我們不難看到作者與問題掙扎的過程。可以不妨強調 Snell 法來說明本問題與 Principle of Least Action 的關係。