# 臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱 ：步步爲營

得 獎 獎 項 ：佳作

學校 / 作者　：臺北市立建國高級中學　　　　于志業

# 作 者 簡 介

我是于志業，目前就讀建國中學數理資優班二年級，我的興趣是看書，偏好科學和小說，科學的書籍使我了解許多邏輯或一些現象的解釋，有趣的地方就在於如何用現有的東西來解釋新發現的事物；我喜歡小說則是愛上了他的鋪陳和人物描寫。我曾經參加過第三屆國際國中生科學奧林匹亞得到金牌，而競賽和科展不一樣就在於科展是需要耐心，而且從中能學到的東西不比競賽書上少。

# 英 文 摘 要


## Consolidate at Every Step

Two soldiers walk on a checkerboard. They can only walk one step once a time and two directions, front and left, are decided randomly. The gunshot is the column and row where a soldier is located, and one will die if he enters the gunshot area of the other. To treat the probability of winning, we first study the cases of 1×n, 2×n, 3×n, and 4×n rectangles iterately. Then we establish a general form of the probability of winning in a general n×k rectangle by using recurrence technique and generating function, respectively. Finally, we extend to the general n×m×k cuboid case to obtain the first soldier’s probability of winning.


# 中 文 摘 要


在一個長方形的棋盤中，兩士兵行走，每一次只走一步，而且上和左兩個方向是隨機的，射程範圍是所在的此行和此列，而進入他人射程範圍則死亡。探討其獲勝機率，從 1×n 、2×n、3×n、4×n 矩形的情形逐步研究，並分別運用遞迴式的技巧及生成函數，導出 n×k 矩形中先走士兵獲勝機率的一般式。更進一步地，我們也獲得了 n×m×k 立體空間先走士兵的獲勝機率。

# 一、研究動機

在戰爭片中，經常看到兩國士兵在戰場打殺的畫面，不僅要在槍林彈雨中求生存，而且見到敵人時第一個想法即爲開槍射殺，那麼我們在士兵的行進過程中會觀察到哪些情況呢？(以德國、英國爲例子)

# 二、研究目的

(一)、探討士兵存活下來的機率(即射殺對方的機率)。

(二)、先走和後走是否有差別。

(三) 從簡單的 n×2 的矩形方格尋找先走士兵獲勝機率的遞迴關係。進而推導至 n×k 方格中尋找先走士兵獲勝機率爲 $P_{n\times k}(a,b)$ 與遞迴關係的一般式。

(四)、推廣到到三度空間立方體中，n×m×k 立體空間先走士兵的獲勝機率與遞迴關係。

# 三、研究方法與過程

**(一)、規則**

1、位置：一開始德國士兵和英國士兵分別在矩形對角線的兩格內。

2、走法：兩人行走時皆用公正的硬幣來決定路線，正面向上走一格，反面向左走一格(相對於此士兵)。

3、順序：德、英士兵交替移動，且德國士兵先走。

4、射程範圍：士兵所在位置的該行與該列皆爲該士兵的射程範圍。

5、獲勝：後來走到射程範圍內的士兵將遭到射殺。

**(二)、範例**

以 4×4 的其中一種情況爲例，G 代表德國士兵，E 代表英國士兵，-號和+號分別爲德國及英國士兵的射程範圍。

1、這是一開始的設定位置，依照規則 1 在圖中標明出士兵的位置，且尚未走出一步(在射程範圍交錯處並不會有影響)，配合規則 4 表示出射程範圍。

| | | | |
|---|---|---|---|
| E | + | + | +- |
| + | | | - |
| + | | | - |
| +- | - | - | G |

2、配合規則 3 中德國士兵先擲出硬幣，在規則 2 下，結果正面於是便向前走一步，射程範圍也隨之改變。

| | | | |
|---|---|---|---|
| E | + | + | +- |
| + | | | - |
| +- | - | - | G |
| | | | |

3、輪到英國士兵擲硬幣，亦爲正面，而向以英國士兵的觀點的前方走一步。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| E | + | + | +- |
| +- | - | - | G |
| | | | |

4、此時德國士兵擲出一個反面，向左走一格逃過被射殺的機會。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| E | + | +- | |
| +- | - | G | |
| | | | |

5、英國士兵擲到正面，走進了德國士兵的射程範圍，根據規則 5 變判定英國士兵遭射殺。

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| E- | +- | G+ | |
| | | | |

**(三)、研究步驟**

1、先從 2×2、2×3、2×4 觀察起，再逐步推廣至 n×k 的情形。

2、推論出其遞迴關係式後，並尋找先走士兵獲勝機率的一般式。

3、再觀察先走的機率和後走的機率是否有差。

4、平面已解決，就將其推廣成三度空間立方體。

5、推論出三度空間中，n×m×k 立體空間先走士兵的獲勝遞迴關係。

6、推論出三度空間中，n×m×k 立體空間先走士兵的獲勝機率的一般式。

**(四)、研究方法**

我們將分別對平面上 n×k 矩形及空間中 n×m×k 長方體，探討先走士兵獲勝的機率。

平 面 中 的 探 討：

1、在 n=1、k=2 時，兩個士兵都已在射程範圍，而一開始是德國士兵先走， 我們可以想成是英國士兵在上一步進來德國士兵的射程範圍，所以德國士兵勝利機率爲 1。

在 n=2、k=2 時，德國士兵不論怎麼走都是被射殺，故德國士兵勝利機率爲 0。

在 n=3、k=2 時，德國士兵在一開始便有的機率被射殺，但只要他逃過射殺，接下來勝利就非他莫屬！所以德國士兵勝利機率爲 $\frac{1}{2}$ 。

2、設 $P(n, k)$ 表示先走士兵獲勝機率，我們將尋找的一般式 $P_{n\times k}(a,b)$ ，a、b 代表兩士兵目前位置爲一對角線所構成的矩形。從前面三個例子來看，從 1 跳到 0 再跳到 $\frac{1}{2}$ ，無法直接看出規律及一般式，在苦思及教授指點後，我們設先走士兵獲勝機率爲 $P_{n\times k}(a,b)$ ，而他走一步後，士兵構成矩形會變成 a×(b-1)或 b×(a-1)，且換另一名士兵移動，便可列出以下遞迴式：

$$P_{n\times k}(a,b)=\frac{1}{2}[1-P_{n\times k}(a-1,b)]+\frac{1}{2}[1-P_{n\times k}(a,b-1)]\text{ 。}$$

圖示說明如下，我們以 a=9，b=8 爲例：此爲 n×k(n＞9，k＞8)的矩形，先走(德國)士兵獲勝機率便是上述式子的 $P_{n\times k}(a,b)$ 。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | + | + | + | + | + | + | + | +- |
| + | | | | | | | | - |
| + | | | | | | | | - |
| + | | | | | | | | - |
| + | | | | | | | | - |
| + | | | | | | | | - |
| + | | | | | | | | - |
| +- | - | - | - | - | - | - | - | G |

先走(德國)士兵走出一步後，有$\frac{1}{2}$的機會向上走，使圖形變成 9×7 的情況，但此時換另一名(英國)士兵移動，另一名(英國)士兵獲勝機率$P_{n\times k}(a,b-1)$，且他們一定有一方勝利，代表先走(德國)和後走(英國)士兵獲勝機率和=1，所以德國士兵獲勝機率爲$1-P_{n\times k}(a,b-1)$。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | + | + | + | + | + | + | + | +- |
| + | | | | | | | | - |
| + | | | | | | | | - |
| + | | | | | | | | - |
| + | | | | | | | | - |
| e | | | | | | | | - |
| +- | - | - | - | - | - | - | - | G |

有$\frac{1}{2}$的機會變成 8×8 的情形，同上一種情況，另一名(英國)士兵獲勝機率$P_{n\times k}(a-1,b)$，先走(德國)士兵獲勝機率爲$1-P_{n\times k}(a-1,b)$。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| E | + | + | + | + | + | + | +- |
| + | | | | | | | - |
| + | | | | | | | - |
| + | | | | | | | - |
| + | | | | | | | - |
| + | | | | | | | - |
| + | | | | | | | - |
| +- | - | - | - | - | - | - | G |

而先走(德國)士兵走一步的情況只有兩種，故兩個圖形合起來爲$P_{n\times k}(a,b)$，即

$$P_{n\times k}(a,b)=\frac{1}{2}[1-P_{n\times k}(a-1,b)]+\frac{1}{2}[1-P_{n\times k}(a,b-1)]\text{。}$$

我們先從 b=2 看起，$P_{n\times k}(a,2)=\frac{1}{2}[1-P_{n\times k}(a,1)]+\frac{1}{2}[1-P_{n\times k}(a-1,2)]$，又一開始我們知道，在有一行爲 1 時，先走士兵獲勝機率爲 1，即$P_{n\times k}(a,2)=1$。

(1)、設$P_{n\times k}(a,2)=c_a$，$P_{n\times k}(a-1,2)=c_{a-1}$，所以其關係式子可寫成

$c_a+\frac{1}{2}c_{a-1}=\frac{1}{2}$，由此式不難得到$c_a$的一般式爲：

$$P_{n\times k}(a,2)=c_a=-\frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^a+\frac{1}{3}\text{。}$$

(2)、設 $P_{n\times k}(a,3)=d_a$，$P_{n\times k}(a-1,3)=d_{a-1}$，同之前方式，我們可以列出

$d_a+\frac{1}{2}d_{a-1}=1-\frac{1}{2}c_a$，但多了 $c_a$，所以不能用一般的遞迴解法，只好將 $d_a$ 假設有一組特殊解，$d_a$ 的式子應有 $x(-\frac{1}{2})^a$，x 為常數，我們不妨設 b 為常數，而 $d_a=x(-\frac{1}{2})^a+b$，把 $d_a=x(-\frac{1}{2})^a+b$ 代入 $d_a+\frac{1}{2}d_{a-1}=1-\frac{1}{2}c_a$，式子結果卻發生嚴重問題，右邊 $x(-\frac{1}{2})^a+\frac{1}{2}\times x(-\frac{1}{2})^{a-1}+\frac{3}{2}b=\frac{3}{2}b$，而左邊為 $\frac{3}{2}(-\frac{1}{2})^a+\frac{5}{6}$。可見假設有誤，和 $(-\frac{1}{2})^a$ 的係數也許有關，可能為線性遞增，所以，$d_a$ 再假設為 $x(-\frac{1}{2})^a+ya(-\frac{1}{2})^a+b$，x、y 為常數。再度把 $d_a+\frac{1}{2}d_{a-1}=1-\frac{1}{2}c_a$ 化簡，發現到 $-\frac{y}{2}(-\frac{1}{2})^{a-1}+\frac{3}{2}b=\frac{2}{3}(-\frac{1}{2})^a+\frac{5}{6}$，故可知 y=$\frac{2}{3}$，b=$\frac{5}{9}$，至於剩下的 x 可用 $d_1=1$ 可得 x=$-\frac{14}{9}$，所以，

$$P_{n\times k}(a,3)=b_n=-\frac{14}{9}(-\frac{1}{2})^a+\frac{2}{3}a(-\frac{1}{2})^a+\frac{5}{9}\text{。}$$

(3)、設 $P_{n\times k}(a,4)=e_a$，則 $e_a+\frac{1}{2}e_{a-1}=1-\frac{1}{2}d_a$，我們再假設

$e_a=p(-\frac{1}{2})^a+wa(-\frac{1}{2})^a+z$，w、z 為常數，結果左邊

$e_a+\frac{1}{2}e_{a-1}=wa(-\frac{1}{2})^a+z-w(a-1)(-\frac{1}{2})^a+\frac{1}{2}z=w(-\frac{1}{2})^a+\frac{3}{2}z$，而右邊為

$1-\frac{1}{2}d_a=(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}a)(-\frac{1}{2})^a+\frac{13}{18}$，易知 w$\neq\frac{7}{9}-\frac{1}{3}a$，不合。因此，我們將 $e_a$ 改為

$e_a=p(-\frac{1}{2})^a+wa(-\frac{1}{2})^a+za^2(-\frac{1}{2})^a+v$。有了 $e_a$，則

$e_a+\frac{1}{2}e_{a-1}=(-\frac{1}{2})^a\{(wa+za^2)-[w(a-1)+z(a-1)^2]\}+\frac{3}{2}v$

$=(-\frac{1}{2})^a(2za+w+z)+\frac{3}{2}v=(\frac{7}{9}-\frac{1}{3}a)(-\frac{1}{2})^a+\frac{13}{18}$，又 $2za+w+z=\frac{7}{9}-\frac{1}{3}a$，$\frac{3}{2}e=\frac{13}{18}$，

所以 $z=-\frac{1}{6}$，$w=\frac{1}{18}$，$v=\frac{13}{27}$，求 p 則用 $e_1=1$，得 $p=-\frac{40}{27}$，故

$$P_{n\times k}(a,4)=e_a=-\frac{40}{27}(-\frac{1}{2})^a+\frac{11}{18}a(-\frac{1}{2})^a-\frac{1}{6}a^2(-\frac{1}{2})^a+\frac{13}{27}\text{。}$$

我們用上述的方法，理論上是可以一步步求出 $P_{n\times k}(a,b)$，但前提必須要先知道 $P_{n\times k}(a-1,b)$ 或 $P_{n\times k}(a,b-1)$，而造成不容易簡單的求出 $P_{n\times k}(a,b)$，故我們以下引進生成函數的概念來尋找規律。

(4)、我們令 $P_{n\times k}(a,b)=\alpha_a$，$P_{n\times k}(a,b-1)=\beta_a$，而 $A_b(x)=\sum_{a=0}^{\infty}\alpha_a x^a$，

$A_{b-1}(x)=\sum_{a=0}^{\infty}\beta_a x^a$，由 $P_{n\times k}(a,b)=\frac{1}{2}[1-P_{n\times k}(a-1,b)]+\frac{1}{2}[1-P_{n\times k}(a,b-1)]$

變成

$$\sum_{a=1}^{\infty}\alpha_a x^a=\sum_{a=1}^{\infty}x^a-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\infty}\alpha_{a-1}x^a-\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{\infty}\beta_a x^a$$

即 $$2A_b(x)-2\alpha_0=\frac{2x}{1-x}-xA_b(x)-A_{b-1}(x)+\beta_0\text{。}$$

其中 $\alpha_0$ 可由 $\alpha_1=1$ 的前一步，利用平面遞迴式，$P_{n\times k}(1,b)$ 而寫出

$P_{n\times k}(1,b)=\frac{1}{2}[1\text{-}P_{n\times k}(0,b)]+\frac{1}{2}[1\text{-}P_{n\times k}(1,b\text{-}1)]$，所以，$\alpha_0=\beta_0=-1$，可得

$A_b(x)=\frac{-3+5x}{(1-x)(2+x)}-\frac{1}{2+x}A_{b-1}(x)$ ，逐步代換便知

$$A_b(x)=\frac{-3+5x}{(1-x)(2+x)}\cdot\frac{1-(-\frac{1}{2+x})^{b-1}}{1+\frac{1}{2+x}}\cdot[1-(\frac{-1}{2+x})^{b-1}]+(\frac{-1}{2+x})^{b-1}\cdot(\frac{2x-1}{1-x})$$

$$=\frac{-3+5x}{(1-x)(2+x)}\cdot\frac{1}{\frac{3+x}{2+x}}\cdot[1-(\frac{-1}{2+x})^{b-1}]+(\frac{-1}{2+x})^{b-1}\cdot(\frac{2x-1}{1-x})$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{1-x}-\frac{\frac{9}{2}}{3+x}+(-1-\frac{-\frac{9}{2}}{3+x}+\frac{x}{1-x}-\frac{\frac{1}{2}}{1-x})(\frac{-1}{2+x})^{b-1}$$

$$=\sum_{a=0}^{\infty}[\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^{a}]x^{a}+(-2+\frac{\frac{9}{2}}{3+x}+\frac{\frac{1}{2}}{1-x})(\frac{-1}{2+x})^{b-1}$$

$$=\sum_{a=0}^{\infty}[\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^{a}]x^{a}+\{-2+\sum_{a=0}^{\infty}[\frac{1}{2}x^{a}+\frac{3}{2}(\frac{-x}{3})^{a}]\}(-1)^{b-1}\sum_{a=0}^{\infty}C_{a}^{1-b}2^{1-b-a}x^{a}$$

$$=\sum_{a=0}^{\infty}\{\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^{a}-2(-1)^{b-1}C_{a}^{1-b}2^{1-b-a}+(-1)^{b-1}\sum_{m=0}^{a}[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{-1}{3})^{a-m}]C_{m}^{1-b}2^{1-b-m}\}x^{a}$$

於是，可以得出平面上 $P_{n\times k}(a,b)$ 的計算式→

$$P_{n\times k}(a,b)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^{a}-2(-1)^{b-1}C_{a}^{1-b}2^{1-a-b}+(-1)^{b-1}\sum_{m=0}^{a}[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{-1}{3})^{a-m}]C_{m}^{1-b}2^{1-b-m}$$

又已知德國士兵在一開始先移動，故德國士兵在 n×k 矩形獲勝機率→

$$P_{G}(n,k)=\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^{n}-2(-1)^{k-1}C_{n}^{1-k}2^{1-k-n}+(-1)^{k-1}\sum_{m=0}^{n}[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{-1}{3})^{n-m}]C_{m}^{1-k}2^{1-k-m}$$

## 立 體 空 間 的 探 討：

一開始和平面相同，但爲了避免打不到人的情況，於是射程範圍也擴大到平面(爲 xy、yz、xz 平面)，同樣的設先走士兵在一 n×m×k 立體空間中可以獲勝的機率爲 $P_{n\times m\times k}(a,b,c)$，由於士兵可依三個方向移動，機率各爲 $\frac{1}{3}$，則可得到以下遞迴式：

$$P_{n\times m\times k}(a,b,c)=\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(a-1,b,c)]+\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(a,b-1,c)]+\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(a,b,c-1)]$$

其中不難得知 $P_{n\times m\times k}(a,b,1)=1$。

(5)、c=2 時，得 $P_{n\times m\times k}(a,b,2)=1-\frac{1}{3}[P_{n\times m\times k}(a-1,b,2)+P_{n\times m\times k}(a,b-1,2)+1]$，設

$P_{n\times m\times k}(a,b,2)=\gamma_{a}$，$P_{n\times m\times k}(a,b-1,2)=\delta_{a}$，$B_{b}(x)=\sum_{a=0}^{\infty}\gamma_{a}x^{a}$，

$B_{b-1}(x)=\sum_{a=0}^{\infty}\delta_{a}x^{a}$。

由上面式子不難得到 $\sum\limits_{a=1}^{\infty} 3\gamma_a x^a + \sum\limits_{a=1}^{\infty} \gamma_{a-1} x^a = \sum\limits_{a=1}^{\infty} (2-\delta_a) x^a$ ，像平面的化簡一樣，

$$B_b(x)=\frac{-8+10x}{(1-x)(3+x)}-\frac{1}{3+x}B_{b-1}(x)$$

$$=\frac{-8+10x}{(1-x)(3+x)}\frac{1-(\frac{-1}{3+x})^{b-1}}{\frac{4+x}{3+x}}+(-\frac{1}{3+x})^{b-1}(\frac{3x-2}{1-x})$$

$$=\frac{\frac{2}{5}}{1-x}+\frac{-\frac{48}{5}}{4+x}+(\frac{-\frac{2}{5}}{1-x}+\frac{\frac{48}{5}}{4+x}+\frac{1}{1-x}-3)(\frac{-1}{3+x})^{b-1}$$

$$=\sum_{a=0}^{\infty}[\frac{2}{5}-\frac{12}{5}(\frac{-1}{4})^a]x^a+[-3+\sum_{a=0}^{\infty}[\frac{3}{5}+\frac{12}{5}(\frac{-1}{4})^a]x^a](\frac{-1}{3+x})^{b-1}$$

$$=\sum_{a=0}^{\infty}\{\frac{2}{5}-\frac{12}{5}(-\frac{1}{4})^a-3(-1)^{b-1}C_a^{1-b}3^{1-b-a}+(-1)^{b-1}\sum_{q=0}^{a}[\frac{3}{5}+\frac{12}{5}(\frac{-1}{4})^{a-q}]C_q^{1-b}3^{1-b-q}\}x^a$$

因此，

$$P_{n\times m\times k}(a,b,2)=\frac{2}{5}-\frac{12}{5}(-\frac{1}{4})^a-3(-1)^{b-1}C_a^{1-b}3^{1-b-a}+(-1)^{b-1}\sum_{q=0}^{a}[\frac{3}{5}+\frac{12}{5}(\frac{-1}{4})^{a-q}]C_q^{1-b}3^{1-b-q}$$

知道 $P_{n\times m\times k}(a,b,2)$ 時，可再由遞迴式

$$P_{n\times m\times k}(a,b,3)=1-\frac{1}{3}[P_{n\times m\times k}(a-1,b,3)+P_{n\times m\times k}(a,b-1,3)+P_{n\times m\times k}(a,b,2)]$$ ，

仿 k=2 時的作法，一樣可以得到 $P_{n\times m\times k}(a,b,3)$ 的計算式，但上面的過程需要建立在前一式的完成下，才能得到的計算式，在使用上顯然不易，故我們再改良成以下的方式，便可求得 $P_{n\times m\times k}(a,b,c)$ 的一般式。

(6)、爲了求 $P_{n\times m\times k}(a,b,c)$ ，我們將 $P_{n\times m\times k}(a,b,c)$ 和 $P_{n\times m\times k}(a+1,b,c)$ 的遞迴式列出來

$$P_{n\times m\times k}(a,b,c)=\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(a-1,b,c)]+\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(a,b-1,c)]+\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(a,b,c-1)]$$

$$P_{n\times m\times k}(a+1,b,c)=\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(a,b,c)]+\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(a+1,b-1,c)]+\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(a+1,b,c-1)]$$

我們令 $d_{a,b,c}=P_{n\times m\times k}(a+1,b,c)-P_{n\times m\times k}(a,b,c)$，而將上面兩式相減可得到

$$d_{a,b,c}=-\frac{1}{3}d_{a-1,b,c}-\frac{1}{3}d_{a,b-1,c}-\frac{1}{3}d_{a,b,c-1}\text{。}$$

我們再令 $e_{a,b,c}=3d_{a,b,c}+d_{a-1,b,c}$，進一步代入上式，並引入生成函數，得

$$\sum_{c=1}^{\infty}e_{a,b,c}x^{c}=-\sum_{c=1}^{\infty}(d_{a,b-1,c}+d_{a,b,c-1})x^{c}\text{，}$$

再對 b 作生成函數，得

$$\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{c=1}^{\infty}e_{a,b,c}x^{b+c}=-\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{c=1}^{\infty}(d_{a,b-1,c}+xd_{a,b,c})x^{c+b}\text{。}$$

化簡得

$$\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{c=1}^{\infty}e_{a,b,c}x^{b+c}=-\sum_{b=1}^{\infty}\sum_{c=1}^{\infty}2d_{a,b,c}x^{b+c+1}\text{。}$$

比較係數可知：$e_{a,b,c}=-2d_{a,b-1,c}$。

將 $e_{a,b,c}=3d_{a,b,c}+d_{a-1,b,c}$ 代回，得

$$3d_{a,b,c}+2d_{a,b-1,c}=-d_{a-1,b,c}\text{。}$$

再次使用生成函數，得

$$\sum_{b=1}^{\infty}(3d_{a,b,c}+2d_{a,b-1,c})x^{b}=-\sum_{b=1}^{\infty}d_{a-1,b,c}x^{b}\text{。}$$

這次令 $\sum_{b=0}^{\infty}d_{a,b,c}x^{b}=A_{a,c}(x)$，上式變爲

$$(3+2x)A_{a,c}(x)=-A_{a-1,c}(x)\text{。}$$

不斷遞迴可知

$$A_{a,c}(x)=\left(-\frac{1}{3+2x}\right)^{a-1}A_{1,c}(x)\text{，}$$

我們知道

$$A_{1,c}(x)=\sum_{b=0}^{\infty} d_{1,b,k} x^{b}=\sum_{b=0}^{\infty}[P_{n\times m\times k}(2,b,c)-P_{n\times m\times k}(1,b,c)]x^{b}$$ ，

代入化簡

$$A_{a,c}(x)=(-1)^{a-1}(3+2x)^{1-a}\sum_{b=0}^{\infty}[P_{n\times m\times k}(2,b,c)-P_{n\times m\times k}(1,b,c)]x^{b}$$

$$=(-1)^{a-1}\sum_{g=0}^{\infty} C_{g}^{1-a}3^{1-g-a}2^{g}x^{g}\sum_{b=0}^{\infty}[P(2,b,c)-1]x^{b}$$

$$=(-1)^{a-1}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{b} C_{j}^{1-a}3^{1-j-a}2^{j}[P(2,b-j,k)-1]x^{b}$$ 。

故

$$P_{n\times m\times k}(a+1,b,c)-P_{n\times m\times k}(a,b,c)=d_{a,b,c}=\sum_{j=0}^{b}(-1)^{a-1}C_{j}^{1-a}3^{1-j-a}2^{j}[P(2,b-j,c)-1]$$

因此，

$$\sum_{i=1}^{a-1}P_{n\times m\times k}(i+1,m,k)-P_{n\times m\times k}(i,m,k)=\sum_{i=1}^{a-1}d_{a,b,c}=\sum_{i=1}^{a-1}\sum_{j=0}^{b}(-1)^{i-1}C_{j}^{1-i}3^{1-j}2^{j}[P(2,b-j,c)-1]$$

即 $P_{n\times m\times k}(a,b,c)=1+\sum_{j=0}^{b}(\frac{2}{3})^{j}\sum_{i=1}^{a-1}C_{j}^{1-i}(-3)^{1-i}[P(2,b-j,c)-1]$ 。

因此，只要知道所有 $P_{n\times m\times k}(2,b-j,2)$ ，j=0,1⋯,b，就可得 $P_{n\times m\times k}(a,b,c)$ ，爲此，

我們可以先由

$P_{n\times m\times k}(2,b-j,2)=\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(1,b-j,2)]+\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(2,b-j-1,2)]+\frac{1}{3}[1-P_{n\times m\times k}(2,b-j,1)]$

，算出 $P_{n\times m\times k}(2,b-j,2)=-\frac{9}{4}(-\frac{1}{3})^{b-j}+\frac{1}{4}$ 。再令 c=2，得到

$$P_{n\times m\times k}(a,b,2)=1+\sum_{j=0}^{b}(\frac{2}{3})^{j}\sum_{i=1}^{a-1}C_{j}^{1-i}(-3)^{1-i}[P_{n\times m\times k}(2,b-j,2)-1]$$ 。

於是，

$$P_{n\times m\times k}(a,b,c)=1+\sum_{j=0}^{b}\sum_{i=1}^{a-1}\sum_{q=0}^{c}\sum_{r=1}^{b-j-1}\binom{1-i}{j}\binom{1-r}{q}(-3)^{2-i-r}(\frac{2}{3})^{j+q}[-\frac{9}{4}(-\frac{1}{3})^{b-q}-\frac{3}{4}]$$

同理得到德國士兵在 n×m×k 長方體中獲勝機率→

$$P_G(n,m,k)=1+\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{q=0}^{k}\sum_{r=1}^{m-j-1}\binom{1-i}{j}\binom{1-r}{q}(-3)^{2-i-r}(\frac{2}{3})^{j+q}[-\frac{9}{4}(-\frac{1}{3})^{m-q}-\frac{3}{4}]$$

# 四、研究結果

(一)、由遞迴推導出的 $P_{n\times k}(a,2)$、$P_{n\times k}(a,3)$、$P_{n\times k}(a,4)$：

$$P_{n\times k}(a,2)=-\frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^{a}+\frac{1}{3}$$

$$P_{n\times k}(a,3)=(-\frac{14}{9}+\frac{2}{3}a)(-\frac{1}{2})^{a}+\frac{5}{9}$$

$$P_{n\times k}(a,4)=(-\frac{40}{27}+\frac{11}{18}a-\frac{1}{6}a^{2})(-\frac{1}{2})^{a}+\frac{13}{27}$$

(二)、由生成函數推得先走士兵在相距 a×b 矩形上獲勝的機率 $P_{n\times k}(a,b)$：

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^{a}-2(-1)^{b-1}C_{a}^{1-b}2^{1-a-b}+(-1)^{b-1}\sum_{m=0}^{a}[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{-1}{3})^{a-m}]C_{m}^{1-b}2^{1-b-m}$$

德國士兵在平面 n×k 上獲勝的機率 $P_G(n,k)$：

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^{n}-2(-1)^{k-1}C_{n}^{1-k}2^{1-k-n}+(-1)^{k-1}\sum_{m=0}^{n}[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{-1}{3})^{n-m}]C_{m}^{1-k}2^{1-k-m}$$

(三)、由生成函數推得立體空間先走士兵在相距 a×b×c 中獲勝的機率 $P_{n\times m\times k}(a,b,c)$：

$$1+\sum_{j=0}^{b}\sum_{i=1}^{a-1}\sum_{q=0}^{c}\sum_{r=1}^{b-j-1}\binom{1-i}{j}\binom{1-r}{q}(-3)^{2-i-r}(\frac{2}{3})^{j+q}[-\frac{9}{4}(-\frac{1}{3})^{b-q}-\frac{3}{4}]$$

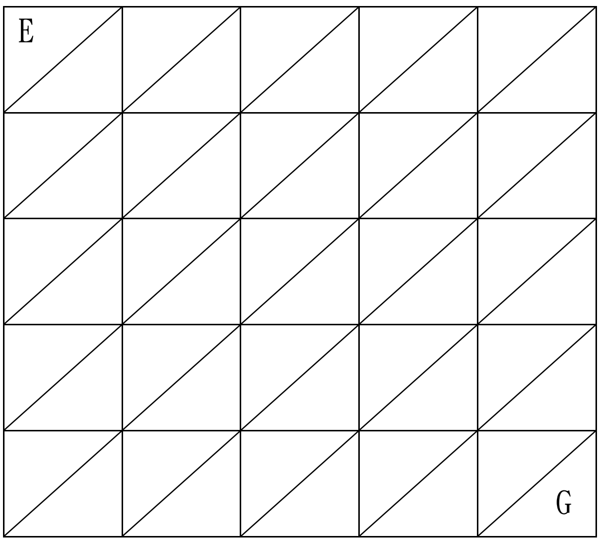
德國士兵在立體 n×m×k 上獲勝的機率$P_G(n,m,k)$：

$$1+\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{q=0}^{k}\sum_{r=1}^{m-j-1}\binom{1-i}{j}\binom{1-r}{q}(-3)^{2-i-r}\left(\frac{2}{3}\right)^{j+q}\left[-\frac{9}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{m-q}-\frac{3}{4}\right]$$

# 五、討論

平面中，英國和德國士兵獲勝機率和爲 1，這是個重要的關鍵，每個算式的基礎都是以此爲出發點，一步步衍生出士兵獲勝的機率。在求$P_{n\times k}(a,b)$時，由已知$P_{n\times k}(a,1)$、$P_{n\times k}(a,2)$推$P_{n\times k}(a,3)$、$P_{n\times k}(a,4)$時，得到$P_{n\times k}(a,b)=g(a)(-\frac{1}{2})^a+c_b$，$g(a)$爲 a 的 b-2 次多項式，$c_b$爲常數。由於碰到的遞迴式較爲複雜，故我們捨棄剛開始使用的方法，使用生成函數而求出平面$P_{n\times k}(a,b)$的式子，比較直接明瞭。空間中也是類似方法，$P_{n\times m\times k}(a,b,c)$在 c=1,2 已知時，可以逐步推出$P_{n\times m\times k}(a,b,3)$、$P_{n\times m\times k}(a,b,4)$、⋯，但 c 變大時，必須仰賴$P_{n\times m\times k}(a,b,c-1)$的已知式來推導，其計算式頗爲複雜，於是，我們採用重複生成函數的技巧而最終能導出$P_{n\times m\times k}(a,b,c)$的一般式。而我們也有其他圖形的探討。

一、

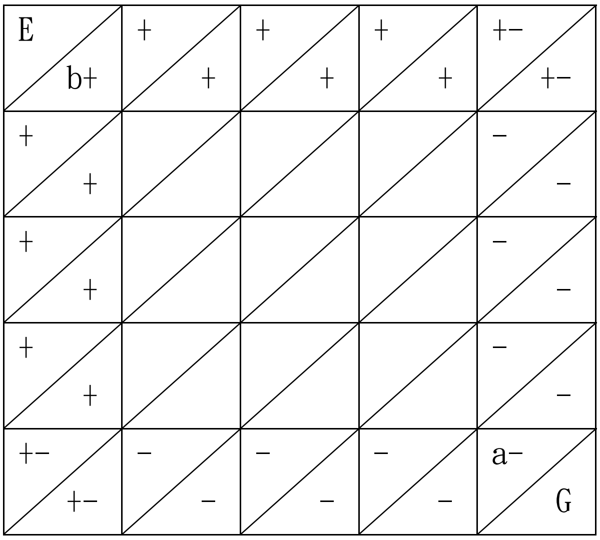



E，G 分別爲英國士兵和德國士兵

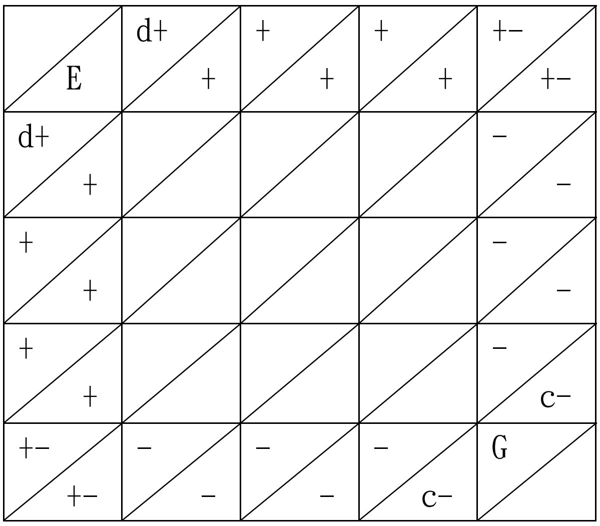
1.圖形改變：以右上到左下的對角線分割任一個 1×1 的正方形爲兩個三角形。
2.位置：在對角線矩形的兩格三角形中(如上圖示)。
3.行走方式：對士兵而言，其能走的格子爲所在三角形任一邊相鄰的三角形。
4.射程範圍：依然爲所在的此行和此列的兩個三角形。
5.獲勝：後來進到射程範圍的士兵被射殺。

我們把上圖定義爲 10×10 的圖形，德國士兵的獲勝機率爲 $P_a(10,10)$

以上圖 10×10 爲例：



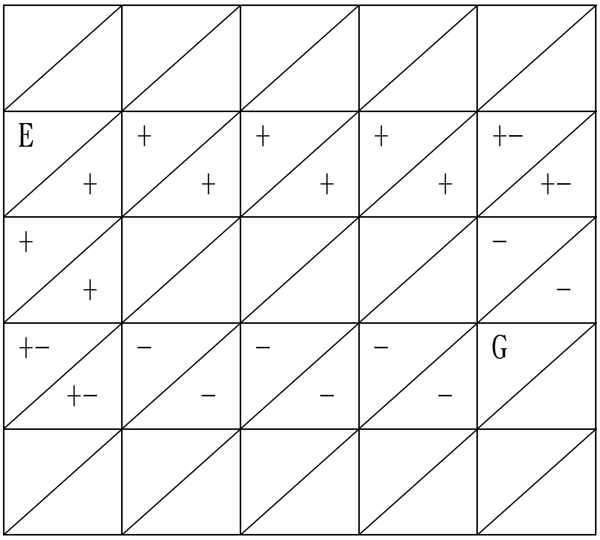

德國士兵所能走的格子只能爲三角形 a，同樣的英國士兵所能走的格子也只能爲三角形 b。+、-分別代表英國和德國士兵的射程範圍。

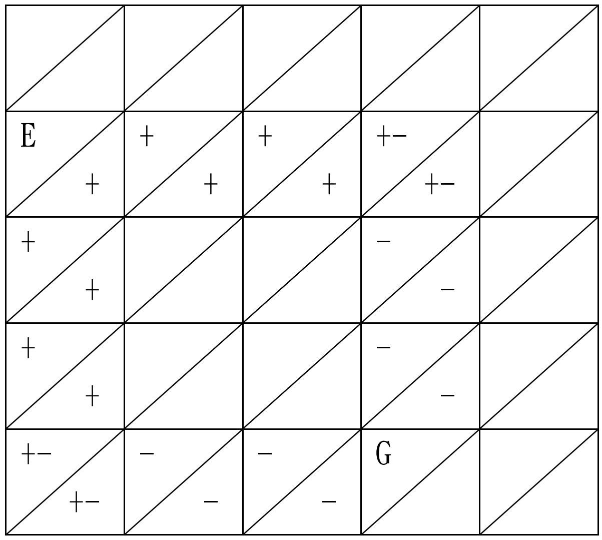



當德國士兵和英國士兵都各走一步後，德國士兵有兩個三角形 c 可選擇走，英國士兵則是兩個三角形 d 可選擇走(走任一格的機率都是$\frac{1}{2}$)。

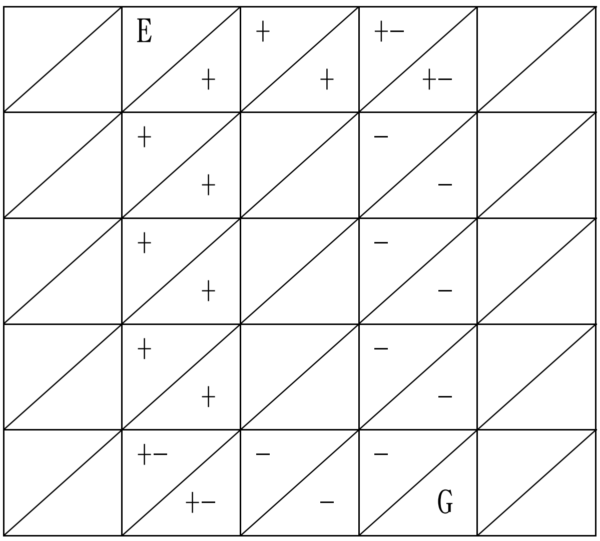
接下來有四種情況：1. $P_a(10,6)$ ，2. $P_a(8,8)$ ，3. $P_a(6,10)$ ，4. $P_a(8,8)$

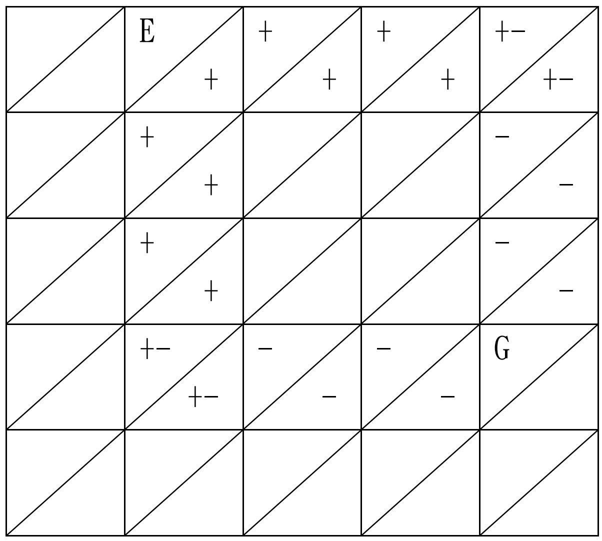
1. $P_a(10,6)$　　2. $P_a(8,8)$




3. $P_a(6,10)$　　4. $P_a(8,8)$




而我們在探討一般 n×k 的矩形時，發現矩形亦可以分成類似上述的四種情況(以 $P_{5\times5}(5,5)$ 爲例)

1. $P_{5\times5}(5,3)$ ，2. $P_{5\times5}(4,4)$ ，3. $P_{5\times5}(3,5)$ ，4. $P_{5\times5}(4,4)$

1. $P_{5\times5}(5,3)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | E | + | +− | |
| | + | | − | |
| | + | | − | |
| | + | | − | |
| | +− | − | G | |

2. $P_{5\times5}(4,4)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| E | + | + | +− | |
| + | | | − | |
| + | | | − | |
| +− | − | − | G | |

3. $P_{5\times5}(3,5)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | E | + | +− | |
| | + | | − | |
| | + | | − | |
| | + | | − | |
| | +− | − | G | |

4. $P_{5\times5}(4,4)$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | E | + | + | +− |
| | + | | | − |
| | + | | | − |
| | +− | − | − | G |
| | | | | |

上述得一般矩形

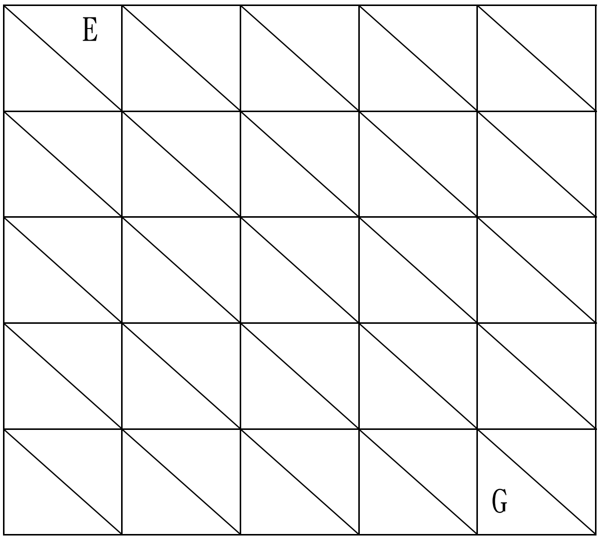
$P_{n\times k}(a,b)=P_{n\times k}(a,b-2)+P_{n\times k}(a-1,b-1)+P_{n\times k}(a-2,b)+P_{n\times k}(a-1,b-1)$，

特殊矩形 $P_a(n,k)=P_a(n,k-4)+P_a(n-2,k-2)+P_a(n-4,k)+P_a(n-2,k-2)$，而一般矩形對應到的遞迴式：$P_{n\times k}(a,b)=\frac{1}{2}[1\text{-}P_{n\times k}(a-1,b)]+\frac{1}{2}[1\text{-}P_{n\times k}(a,b-1)]$。於是猜想也

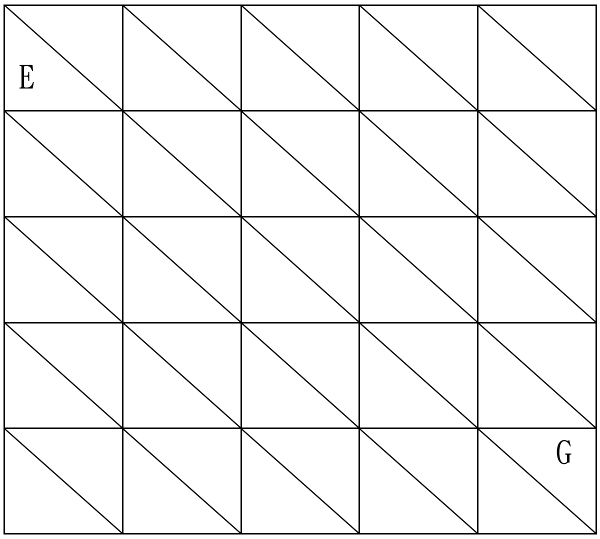
有一個遞迴式可以對應到特殊矩形：$P_a(n,k)=\frac{1}{2}[1-P_a(n-2,k)]+\frac{1}{2}[1-P_a(n,k-2)]$。

二、當斜線改為左上到右

1. $P_b(8,10)$




2. $P_b(10,8)$




和上述討論相同，兩種情況皆有 $P_b(8,10)=P_b(6,10)+P_b(7,9)+P_b(10,6)+P_b(7,9)$，

$P_b(10,8)=P_b(10,6)+P_b(9,7)+P_b(6,10)+P_b(7,9)$，剛好和一般矩形的情況完全符合，應該

有遞迴式：$P_b(n,k)=\frac{1}{2}[1-P_b(n-1,k)]+\frac{1}{2}[1-P_b(n,k-1)]$

我們也可用 EXCEL 軟體和 $P_G(n,k)=\frac{1}{2}[1-P_G(n-1,k)]+\frac{1}{2}[1-P_G(n,k-1)]$ 遞迴式，列出下表，第一直行為 k 值，第一橫列為 n 值，分別對應的值為德國士兵獲勝機率。

| n / k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0.0000 | 0.5000 | 0.2500 | 0.3750 | 0.3125 | 0.3438 | 0.3281 |
| 3 | 1 | 0.5000 | 0.5000 | 0.6250 | 0.5000 | 0.5938 | 0.5313 | 0.5703 |
| 4 | 1 | 0.2500 | 0.6250 | 0.3750 | 0.5625 | 0.4219 | 0.5234 | 0.4531 |
| 5 | 1 | 0.3750 | 0.5000 | 0.5625 | 0.4375 | 0.5703 | 0.4531 | 0.5469 |
| 6 | 1 | 0.3125 | 0.5938 | 0.4219 | 0.5703 | 0.4297 | 0.5586 | 0.4473 |
| 7 | 1 | 0.3438 | 0.5313 | 0.5234 | 0.4531 | 0.5586 | 0.4414 | 0.5557 |
| 8 | 1 | 0.3281 | 0.5703 | 0.4531 | 0.5469 | 0.4473 | 0.5557 | 0.4443 |

# 六、結論

(一)、德國士兵和英國士兵機率和為 1。

(二)、由生成函數推得先走士兵在相距 a×b 矩形上獲勝的機率 $P_{n\times k}(a,b)$：

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^{a}-2(-1)^{b-1}C_{a}^{1-b}2^{1-a-b}+(-1)^{b-1}\sum_{m=0}^{a}[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{-1}{3})^{a-m}]C_{m}^{1-b}2^{1-b-m}$$

德國士兵在平面 n×k 上獲勝的機率 $P_{G}(n,k)$：

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(-\frac{1}{3})^{n}-2(-1)^{k-1}C_{n}^{1-k}2^{1-k-n}+(-1)^{k-1}\sum_{m=0}^{n}[\frac{1}{2}+\frac{3}{2}(\frac{-1}{3})^{n-m}]C_{m}^{1-k}2^{1-k-m}$$

(三)、由生成函數推得立體空間先走士兵在相距 a×b×c 中獲勝的機率 $P_{n\times m\times k}(a,b,c)$：

$$1+\sum_{j=0}^{b}\sum_{i=1}^{a-1}\sum_{q=0}^{c}\sum_{r=1}^{b-j-1}\binom{1-i}{j}\binom{1-r}{q}(-3)^{2-i-r}(\frac{2}{3})^{j+q}[-\frac{9}{4}(-\frac{1}{3})^{b-q}-\frac{3}{4}]$$

德國士兵在立體 n×m×k 上獲勝的機率 $P_G(n,m,k)$：

$$1+\sum_{j=0}^{m}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{q=0}^{k}\sum_{r=1}^{m-j-1}\binom{1-i}{j}\binom{1-r}{q}(-3)^{2-i-r}(\frac{2}{3})^{j+q}[-\frac{9}{4}(-\frac{1}{3})^{m-q}-\frac{3}{4}]$$

## 七、參考文獻


(一)、夏宗匯,**組合數學中的生成函數,**數學傳播,第 1 卷第 3 期,P.51-58

(二)、許介彥,**跌跌撞撞的機率** ,科學教育,255 期, P.42-46

# 評語

本作品的研究方法有用到解遞迴關係的技巧，作者因此可以學習到一整系列的解題方法。至於問題推廣到三維空間時，所訂下的條件似乎過份人工化。