臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作品名稱：梯型的分割與調和數列

得獎獎項：佳作

學校／作者：臺北市立中山女子高級中學　張雯雯

作者簡介

我是一個文靜的女生，做事細心善解人意，貼心的個性使我能與不同個性的朋友融洽相處，看書聽音樂及唱歌是我的興趣，在成長的過程中他們陪伴著我，豐富了心靈世界。平日喜歡閱讀課外書籍欣賞文字，享受意境充實知識。在無助壓力時，會聽音樂或唱歌來釋放情緒，透過音樂的美，消減壓力舒暢身心。看似柔和的外表下，內心蘊藏著一顆堅定的心，面對既定的目標與理想，從不隨風轉舵亦或輕言放棄。因爲我堅信做任何事，只要事先規劃好方向與策略，並貫徹執行就會有成功的機會。

作品名稱：梯型的分割與調和數列

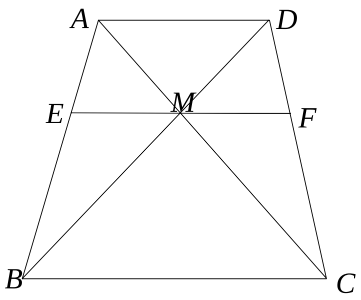
The division of Trapezoids and Harmonic Sequences

Abstract

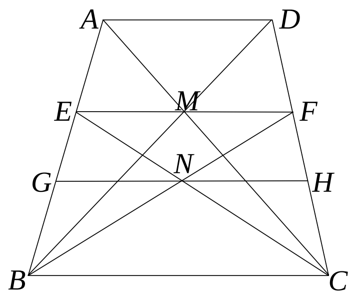
Refer to Figure 1. Suppose $ABCD$ is a trapezoid and $\overline{AD} // \overline{BC}$. Passing the intersection M of $\overline{AC}$ and $\overline{BD}$ we construct a parallel line intersecting $\overline{AB}$ and $\overline{CD}$ at E and F, respectively. We obtain that $\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{1}{\overline{BC}}=\frac{2}{\overline{EF}}$, and then we can generalize the result.

I. Refer to Figure 2. Consider trapezoid $EBCF$ and repeat the construction, that is, construct a line parallel to the two bases and passing the intersection of the two diagonals $\overline{EC}$ and $\overline{BF}$. We find that $\frac{1}{\overline{AD}}+\frac{2}{\overline{BC}}=\frac{1}{\overline{EF}}+\frac{2}{\overline{GH}}$. If we repeat this construction we may reach similar conclusions.

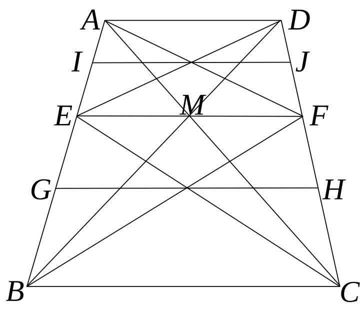
II. Refer to Figure 3. Consider trapezoids $AEFD$ and $EBCF$. We construct lines parallel to the bases and passing the intersection of the diagonals, then we have a harmonic sequences of $\overline{AD}, \overline{IJ}, \overline{EF}$ and $\overline{EF}, \overline{GH}, \overline{BC}$. Thus line segments $\overline{AD}$, $\overline{IJ}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, $\overline{BC}$ form a five-item harmonic sequence.



(Figure 1)



(Figure 2)



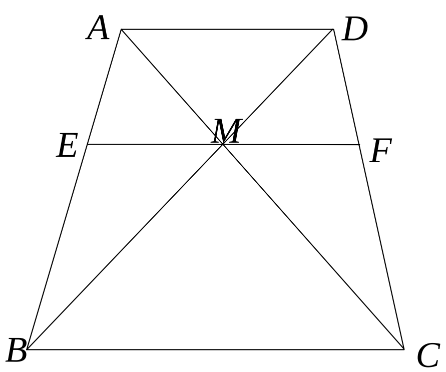
(Figure 3)

摘要

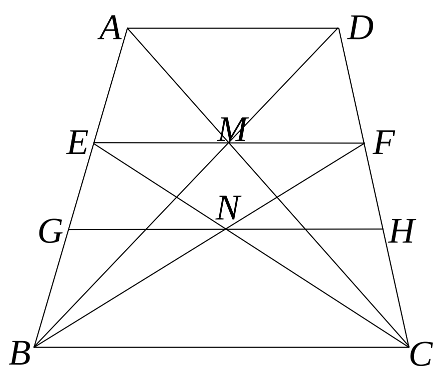
如(圖一)，若 $ABCD$ 爲梯形且 $\overline{AD}//\overline{BC}$，過 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 交點 M 分別作平行線交 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 於 E、F，可得 $\dfrac{1}{\overline{AD}}+\dfrac{1}{\overline{BC}}=\dfrac{2}{\overline{EF}}$ 的關係，再加以推廣。

一、如(圖二)，考慮梯形 $EBCF$，再重複以上步驟，做過對角線 $\overline{EC},\overline{BF}$ 交點 N，且平行上底、下底的直線，發現 $\dfrac{1}{\overline{AD}}+\dfrac{2}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{\overline{EF}}+\dfrac{2}{\overline{GH}}$，不斷重覆此步驟，可得類似結論。

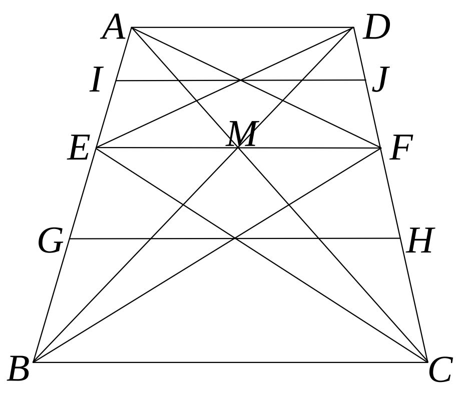
二、如(圖三)，考慮梯形 $AEFD$ 和梯形 $EBCF$，同時做過對角線交點，且平行上底、下底的直線，可得成 $\overline{AD},\overline{IJ},\overline{EF}$ 調和數列，且 $\overline{EF},\overline{GH},\overline{BC}$ 也成調和數列，則線段 $\overline{AD}$, $\overline{IJ}$, $\overline{EF}$, $\overline{GH}$, $\overline{BC}$ 爲一個 5 項調和數列。



(圖一)



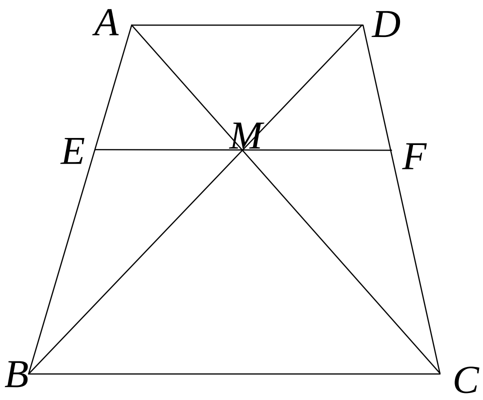
(圖二)



(圖三)

壹、前言

在參考資料[2]中，有一題目敘述如下：



如圖，已知梯形 $ABCD$ 中 $\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$ 且 $\overline{AD}<\overline{BC}$，對角線 $\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 交於 M 點，$\overline{EF}$ 爲過 M 點且平行上、下底的線段，證明：$\dfrac{1}{\overline{AD}}+\dfrac{1}{\overline{BC}}=\dfrac{2}{\overline{EF}}$ 。

證明：$\because\ \overline{EF}\,//\,\overline{AD}$ 且 $\overline{EF}\,//\,\overline{BC}$	$\therefore\ \dfrac{\overline{EM}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$ 且 $\dfrac{\overline{EM}}{\overline{BC}}=\dfrac{\overline{AE}}{\overline{AB}}$
兩式相加得 $\dfrac{\overline{EM}}{\overline{AD}}+\dfrac{\overline{EM}}{\overline{BC}}=1\quad\Rightarrow$	$\dfrac{1}{\overline{AD}}+\dfrac{1}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{\overline{EM}}$ -------------------------(1)
同理可證	$\dfrac{1}{\overline{AD}}+\dfrac{1}{\overline{BC}}=\dfrac{1}{\overline{FM}}$ -------------------------(2)
由(1)(2)二式可得	$\overline{EM}=\overline{FM}=\dfrac{1}{2}\overline{EF}$
故	$\dfrac{1}{\overline{AD}}+\dfrac{1}{\overline{BC}}=\dfrac{2}{\overline{EF}}$

這個算式正好說明 $\dfrac{1}{\overline{AD}},\dfrac{1}{\overline{EF}},\dfrac{1}{\overline{BC}}$ 成等差數列，也就是 $\overline{AD},\overline{EF},\overline{BC}$ 成調和數列。

高一的基礎數學(一)有介紹數列與級數，提到了常見的等差數列、實用的等比數列、還有陌生的調和數列，只知道其定義爲“各項倒數成等差”，但沒有生活化的例子可供說明，直到高二學到物理學的質心，才又接觸到調和數列。希望能夠藉由這個研究主題，在梯形上找到具體的調和數列模型。而不斷做平行線之後，原圖形上會產生新梯形，引發進一步的探討。

在物理的力學單元有介紹質心問題，是有關於組合體的複合質心，其代表的問題爲『架橋過河』。

在一河面上使用長度相同(且密度相同)的木板，只能以堆疊的方式架橋，

假設木板取之不盡，則在不同河寬時需幾塊木板？

設每塊木板長度爲 a，則 n 塊木版的最大伸長量爲 $\frac{a}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right), n\in N$ ，因爲 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 爲調和級數，且當 n 趨向無限大時，其和亦趨向無限大，爲一發散級數。若木板數不限則無論河多寬必能架橋過河。但這些數值都必須經過代數運算才能得到答案。而藉由本主題，可在梯形上找到長度成調和數列的線段。

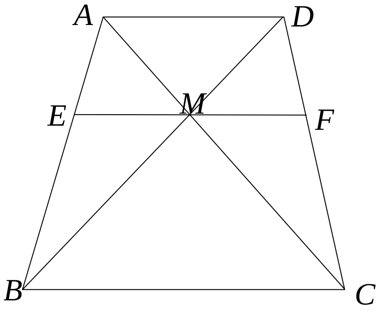
在高一時介紹數列與級數時有提及調和數列，只知道其各項倒數成等差，但比較不像等差、等比數列那樣的有趣和生活化，研究本主題是希望能對它有更進一步的了解，找到成調和數列的線段長度，希望將此題目利用遞迴的方式做延伸，希望能對調和數列有更深的認識。

貳、研究過程或方法

根據原題目的敘述，發現如果只向一邊作梯形，與向上底、下底分別作梯形，會得到不同的結論，因此分成兩個方向重複我們的步驟。

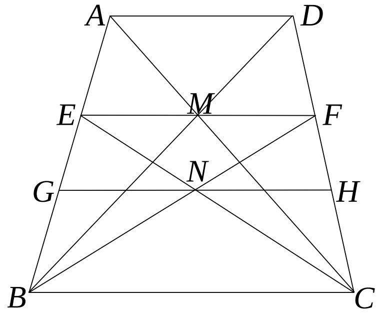
一、只做單側的研究步驟：(向梯形的下底作梯形分割)

(一)先討論邊長之間的關係

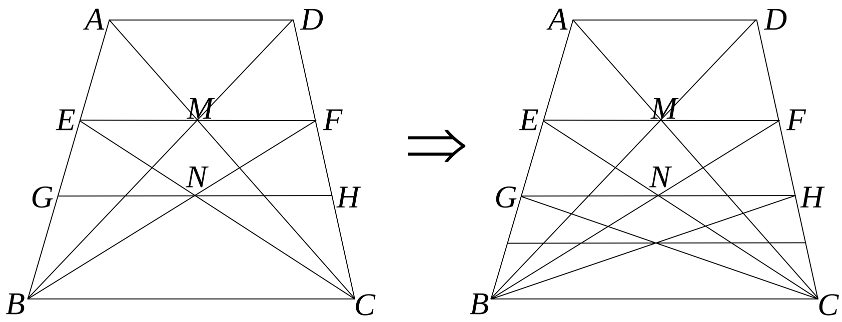


作過對角線交點且
平行上下底的線段

$\Rightarrow$

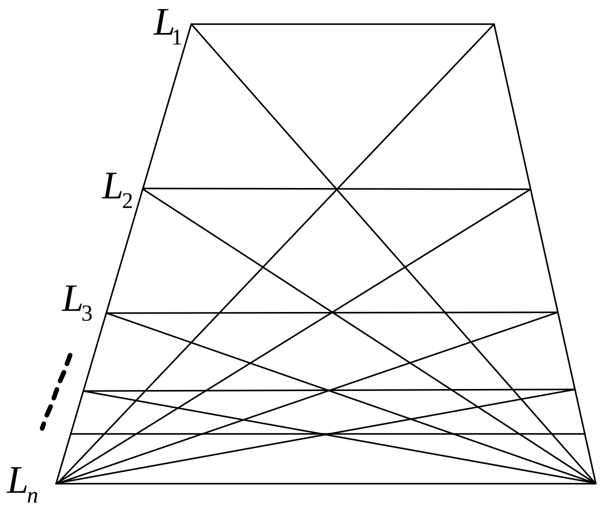


下半部的新梯形
也重複做此步驟



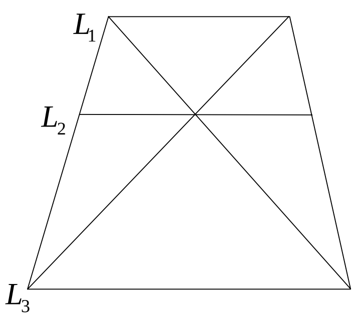
不斷重覆此步驟⋯

若繼續以上的步驟，向下延伸分割梯形，可得平行線段，如下圖所示，並依次以 $L_1, L_2, L_3, \cdots, L_n$ 表示各線段長。



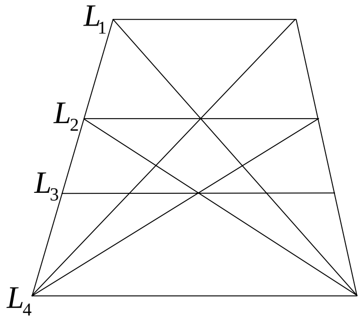
← 將會得到這樣的圖形

1. 當 $n=3$ 時



則 $\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_3}=\dfrac{2}{L_2}$

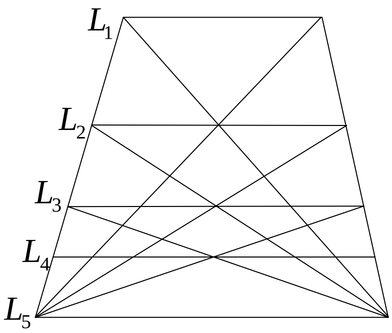
2. 當$n=4$時



則 $\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_4}=\dfrac{1}{L_2}+\left(\dfrac{2}{L_3}-\dfrac{1}{L_4}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{L_1}+\dfrac{2}{L_4}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{2}{L_3}$

3. 當$n=5$時



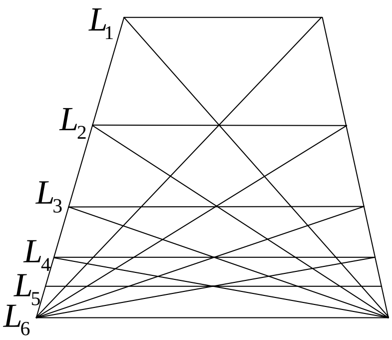
則 $\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{2}{L_5}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{2}{L_3}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{1}{L_3}+\left(\dfrac{2}{L_4}-\dfrac{1}{L_5}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{L_1}+\dfrac{3}{L_5}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{1}{L_3}+\dfrac{2}{L_4}$

又 $\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{2}{L_5}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{2}{L_3}=\dfrac{1}{L_1}+2\left(\dfrac{2}{L_4}-\dfrac{1}{L_5}\right)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{L_1}+\dfrac{4}{L_5}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{4}{L_4}$

4. 當$n=6$時



則

$\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{3}{L_6}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{1}{L_3}+\dfrac{2}{L_4}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{1}{L_3}+\dfrac{1}{L_4}+\left(\dfrac{2}{L_5}-\dfrac{1}{L_6}\right)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{L_1}+\dfrac{4}{L_6}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{1}{L_3}+\dfrac{1}{L_4}+\dfrac{2}{L_5} \\ \dfrac{1}{L_1}+\dfrac{8}{L_6}=\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{8}{L_5} \\ \dfrac{1}{L_1}+\dfrac{6}{L_6}=\dfrac{1}{L_3}+\dfrac{6}{L_4} \end{cases}$$

5. 探討 $n=6$ 時，由 $\frac{1}{L_1}+\frac{6}{L_6}=\frac{1}{L_3}+\frac{6}{L_4}$ 發現，當 n 為偶數時，第一條線段最後一條線段會和中間兩條線段有關係，於是進一步探討 $n=8$ 及 $n=10$ 的情形。

6. 當 $n=8$ 時 $\Rightarrow \frac{1}{L_1}+\frac{14}{L_8}=\frac{1}{L_4}+\frac{14}{L_5}$ ；當 $n=10$ 時 $\Rightarrow \frac{1}{L_1}+\frac{30}{L_{10}}=\frac{1}{L_5}+\frac{30}{L_6}$

綜合以上結果，將其整理出三個相關性質：

性質一： $\frac{1}{L_1}+\frac{n-2}{L_n}=\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}+\cdots+\frac{1}{L_{n-2}}+\frac{2}{L_{n-1}}$,$n\ge 3, n\in N$

證明： $\because \frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_n}=\frac{2}{L_2}$ 同理可得 $\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_n}=\frac{2}{L_3}$

$$\frac{1}{L_3}+\frac{1}{L_n}=\frac{2}{L_4}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{L_{n-2}}+\frac{1}{L_n}=\frac{2}{L_{n-1}}$$

上式全部相加，可得 $\frac{1}{L_1}+\frac{n-2}{L_n}=\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}+\cdots+\frac{1}{L_{n-2}}+\frac{2}{L_{n-1}}$

性質二： $\frac{1}{L_1}+\frac{2^{n-3}}{L_n}=\frac{1}{L_2}+\frac{2^{n-3}}{L_{n-1}}$,$n\ge 3, n\in N$

證明： $\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_n}=\frac{2}{L_2}$，$\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_n}=\frac{2}{L_3}$ 二式合併為 $\frac{1}{L_1}+\frac{2}{L_n}=\frac{1}{L_2}+\frac{2}{L_3}$

又 $2(\frac{1}{L_3}+\frac{1}{L_n})=2(\frac{2}{L_4})$

$$2^2(\frac{1}{L_4}+\frac{1}{L_n})=2^2(\frac{2}{L_5})$$

$$\cdots$$

$$2^{n-4}(\frac{1}{L_{n-2}}+\frac{1}{L_n})=2^{n-4}(\frac{2}{L_{n-1}})$$

上式全部相加，可得 $\frac{1}{L_1}+\frac{2}{L_n}+\frac{2+2^2+\cdots+2^{n-4}}{L_n}=\frac{1}{L_2}+\frac{2^{n-3}}{L_{n-1}}$

$$\frac{1}{L_1}+\frac{2}{L_n}+\frac{2^{n-3}-2}{L_n}=\frac{1}{L_2}+\frac{2^{n-3}}{L_{n-1}}$$

$$\frac{1}{L_1}+\frac{2^{n-3}}{L_n}=\frac{1}{L_2}+\frac{2^{n-3}}{L_{n-1}}$$

性質三：當 n 為正偶數時，則 $\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{2^{\frac{n}{2}}-2}{L_n}=\dfrac{1}{L_{\frac{n}{2}}}+\dfrac{2^{\frac{n}{2}}-2}{L_{\frac{n}{2}+1}}$

證明：由 $\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_n}=\dfrac{2}{L_2}$

$$2\left(\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_n}\right)=2\left(\frac{2}{L_3}\right)$$

$$\cdots$$

$$2^{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{1}{L_{\frac{n}{2}-1}}+\frac{1}{L_n}\right)=2^{\frac{n}{2}-2}\left(\frac{2}{L_{\frac{n}{2}}}\right)$$

$$2^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{1}{L_{\frac{n}{2}}}+\frac{1}{L_n}\right)=2^{\frac{n}{2}-1}\left(\frac{2}{L_{\frac{n}{2}+1}}\right)$$

再將上式全部相加，可得知 $\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1+2+2^2+\cdots+2^{\frac{n}{2}-1}}{L_n}=\dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{L_{\frac{n}{2}+1}}$

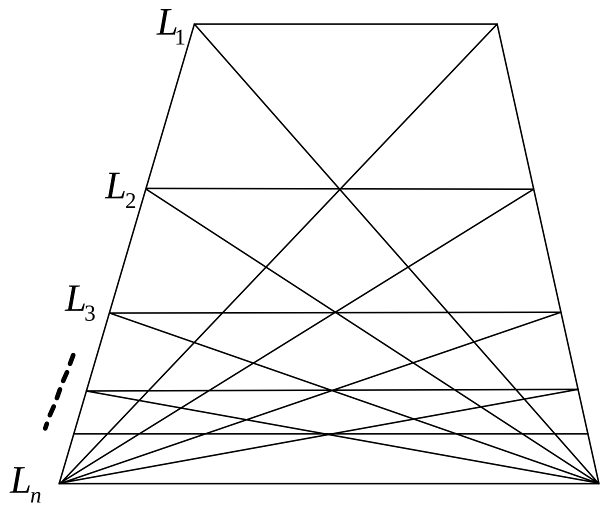
$$\frac{1}{L_1}+\frac{2^{\frac{n}{2}}-1}{L_n}=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{L_{\frac{n}{2}+1}}$$

$$\frac{1}{L_1}+\frac{2^{\frac{n}{2}}}{L_n}-\frac{2}{L_n}+\frac{1}{L_n}=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{L_{\frac{n}{2}+1}}$$

$$\frac{1}{L_1}+\frac{2^{\frac{n}{2}}}{L_n}-\frac{2}{L_n}=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{L_{\frac{n}{2}+1}}-\frac{1}{L_n} \quad \frac{1}{L_1}+\frac{2^{\frac{n}{2}}}{L_n}-\frac{2}{L_n}=\frac{2^{\frac{n}{2}}}{L_{\frac{n}{2}+1}}-\left(\frac{2}{L_{\frac{n}{2}+1}}-\frac{1}{L_{\frac{n}{2}}}\right)$$

$$\frac{1}{L_1}+\frac{2^{\frac{n}{2}}-2}{L_n}=\frac{1}{L_{\frac{n}{2}}}+\frac{2^{\frac{n}{2}}-2}{L_{\frac{n}{2}+1}}$$

7.根據以上的討論，我們又找到這些線段長$L_1, L_2, L_3, \cdots, L_{n-1}$的倒數之兩兩差值，爲一等比數列。



如左圖：假設$\dfrac{1}{L_1}=a$ ，$\dfrac{1}{L_n}=a+r$ 可由$\dfrac{1}{L_1}+\dfrac{1}{L_n}=\dfrac{2}{L_2}$的關係得知

$\dfrac{1}{L_2}=a+\dfrac{1}{2}r$ ，又$\dfrac{1}{L_2}+\dfrac{1}{L_n}=\dfrac{2}{L_3}$ ，所以$\dfrac{1}{L_3}=a+\dfrac{3}{4}r$

同理可知，第k條線段長L_k的倒數爲 $\dfrac{1}{L_k}=a+\dfrac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}r$

$\dfrac{1}{L_1}=a$ 、$\dfrac{1}{L_2}=a+\dfrac{1}{2}r$ 、$\dfrac{1}{L_3}=a+\dfrac{3}{4}r$ 、$\dfrac{1}{L_4}=a+\dfrac{7}{8}r$ 、…、$\dfrac{1}{L_k}=a+\dfrac{2^{k-1}-1}{2^{k-1}}r$ 、

…、$\dfrac{1}{L_{n-1}}=a+\dfrac{2^{n-2}-1}{2^{n-2}}r$ 、…、$\dfrac{1}{L_n}=a+r$

由此可知，這些差值$X_1, X_2, \cdots, X_{n-2}$分別是：

$$X_1=\frac{1}{L_2}-\frac{1}{L_1}=\frac{1}{2}r$$

$$X_2=\frac{1}{L_3}-\frac{1}{L_2}=\frac{1}{4}r$$

$$X_3=\frac{1}{L_4}-\frac{1}{L_3}=\frac{1}{8}r$$

…

$$X_{n-2}=\frac{1}{L_{n-1}}-\frac{1}{L_{n-2}}=\frac{1}{2^{n-2}}r$$

因此可推得：

$\dfrac{X_3}{X_2}=\dfrac{1}{2}$ 、$\dfrac{X_2}{X_1}=\dfrac{1}{2}$ 、$\dfrac{X_4}{X_3}=\dfrac{1}{2}$ 、…、$\dfrac{X_{n-2}}{X_{n-3}}=\dfrac{1}{2}$

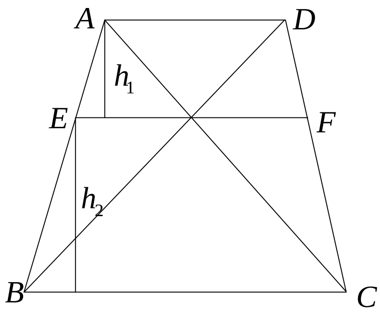
所以$L_1, L_2, L_3 \cdots L_{n-1}$爲一倒數之差值呈等比的數列。

(二) 接著我們進一步延伸至這些梯形之間面積的比例關係。

已知梯形面積爲$\frac{1}{2}$(上底+下底)×高，而梯形的高可由相似形求出比例，藉此可得到面積比。

1.如下圖，證明：梯形 $AEFD$、梯形 $EBCF$、梯形 $ABCD$ 的面積比爲

$$\overline{AD}\cdot\overline{EF}\cdot\left(\overline{AD}+\overline{EF}\right):\overline{BC}\cdot\overline{EF}\cdot\left(\overline{BC}+\overline{EF}\right):2\overline{AD}\cdot\overline{BC}\cdot\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)$$



<*pf*>

$$AEFD:EBCF:ABCD=\frac{\left(\overline{AD}+\overline{EF}\right)h_1}{2}:\frac{\left(\overline{BC}+\overline{EF}\right)h_2}{2}:\frac{\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)\left(h_1+h_2\right)}{2}$$

$$\because\quad h_1:h_2:\left(h_1+h_2\right)=\overline{AE}:\overline{BE}:\overline{AB}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AB}}:\frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}:1=\frac{\overline{EF}}{2\overline{BC}}:\frac{\overline{EF}}{2\overline{AD}}:1=\frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}:\frac{\overline{EF}}{\overline{AD}}:2$$

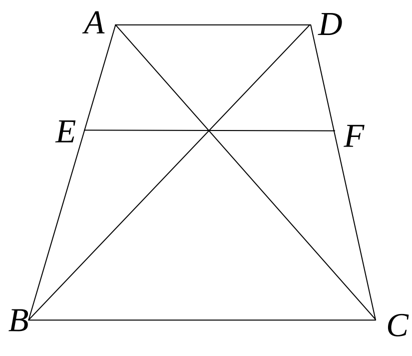
$$\therefore\quad AEFD:EBCF:ABCD=\frac{\left(\overline{AD}+\overline{EF}\right)\overline{EF}}{\overline{BC}}:\frac{\left(\overline{BC}+\overline{EF}\right)\overline{EF}}{\overline{AD}}:2\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)$$

$$=\left(\overline{AD}+\overline{EF}\right)\overline{AD}\cdot\overline{EF}:\left(\overline{BC}+\overline{EF}\right)\overline{BC}\cdot\overline{EF}:2\left(\overline{AD}+\overline{BC}\right)\overline{AD}\cdot\overline{BC}$$

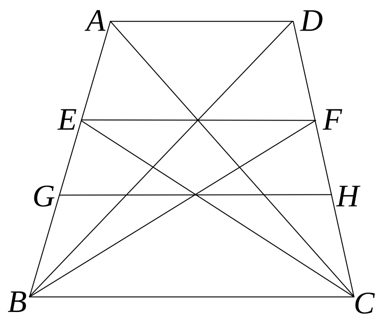
2 依上式作法，求當 $n=3$時右圖的梯形面積比

設 $\overline{AD}=a_1,\overline{EF}=a_2,\overline{BC}=a_3$

則 $AEFD:EBCF=\left(a_1+a_2\right)a_1\cdot a_2:\left(a_2+a_3\right)a_2\cdot a_3$



3.當 $n=4$ 時，求右圖梯形面積比

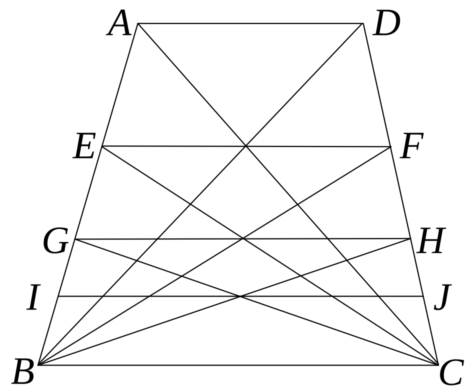


設 $\overline{AD}=a_1,\overline{EF}=a_2,\overline{GH}=a_3,\overline{BC}=a_4$

則

$$AEFD:EGHF:GBCH=2(a_1+a_2)a_1\cdot a_2:(a_2+a_3)a_2\cdot a_3:(a_3+a_4)a_3\cdot a_4$$

4.當 $n=5$ 時，求右圖梯形面積比



設 $\overline{AD}=a_1,\overline{EF}=a_2,\overline{GH}=a_3,\overline{IJ}=a_4,\overline{BC}=a_5$

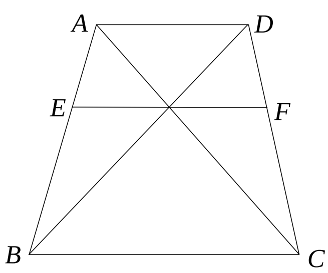
則

$$\begin{aligned}&AEFD:EGHF:GIJH:IBCJ\\&=2^2(a_1+a_2)a_1\cdot a_2:2(a_2+a_3)a_2\cdot a_3:(a_3+a_4)a_3\cdot a_4:(a_4+a_5)a_4\cdot a_5\end{aligned}$$

5.結論：當分割成 n 個梯形時，梯形的面積比

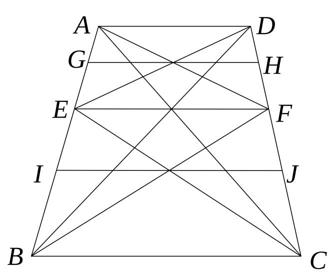
$$\begin{aligned}&A_1:A_2:A_3:\ \cdots\ :A_n\\&=2^{n-3}(a_1+a_2)a_1\cdot a_2:2^{n-4}(a_2+a_3)a_2\cdot a_3:\cdots:(a_{n-2}+a_{n-1})a_{n-2}\cdot a_{n-1}:(a_{n-1}+a_n)a_{n-1}\cdot a_n\end{aligned}$$

二、同時做雙側時的研究步驟：



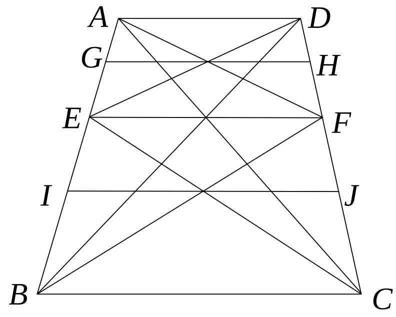
做過對角線交點且
平行上下底的線

$\Rightarrow$



上下兩側同時重覆此步驟

(一) 由前面所提之關係式『$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{EF}$』說明了$\frac{1}{EF}$為$\frac{1}{AD}$、$\frac{1}{BC}$之等差中項，可知$\overline{AD}$、$\overline{EF}$、$\overline{BC}$成調和數列。由此結果可推得上、下兩側同時做過對角線交點且平行上下底的線段時，各線段長成調和數列。



(二) 如圖，若設$\frac{1}{AD}=a$、$\frac{1}{BC}=b$，

則由$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{EF}$可推知$\frac{1}{EF}=\frac{a+b}{2}$

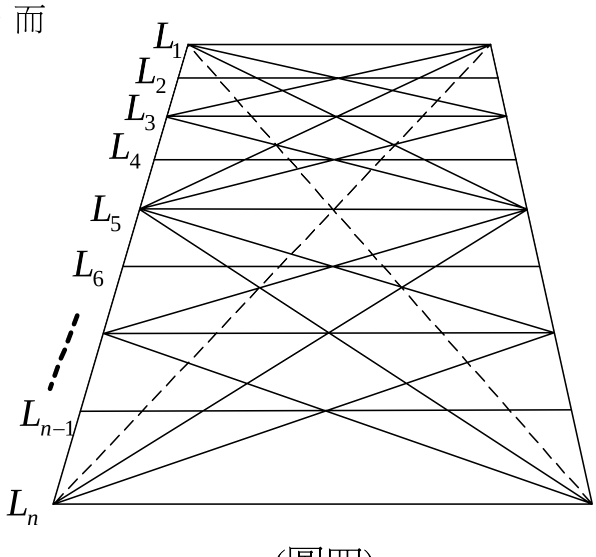
同理，又$\because \frac{1}{AD}+\frac{1}{EF}=\frac{2}{GH}$ $\therefore \frac{1}{GH}=\frac{3a+b}{4}$，

$\because \frac{1}{EF}+\frac{1}{BC}=\frac{2}{IJ}$ $\therefore \frac{1}{IJ}=\frac{a+3b}{4}$

可以很容易看出 $a,\frac{3a+b}{4},\frac{a+b}{2},\frac{a+3b}{4},b$ 是等差數列，

也就是$\overline{AD}$、$\overline{GH}$、$\overline{EF}$、$\overline{IJ}$、$\overline{BC}$成調和數列。

(三) 這樣做下去會不斷的分割梯形，每分割一次梯形，梯形的個數就會變成原來的 2 倍。假設總共做了 k 次分割，就會有2^k個梯形，以及$L_1,L_2,L_3,\cdots,L_{2^k+1}$共$2^k+1$個線段長。(圖四)就是將梯形分割了 k 次，而 $n=2^k+1$。



(圖四)

如(圖四)，若設$\frac{1}{L_1}=a$、$\frac{1}{L_n}=b$，$n=2^k+1$ 且 $k\in N$

證明：公差$d=\frac{b-a}{n-1}=\frac{b-a}{2^k}$

〈pf〉

當$k=1$時$n=3$，$\dfrac{1}{L_2}=\dfrac{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_3}}{2}=\dfrac{a+b}{2}$得知$\dfrac{1}{L_1},\dfrac{1}{L_2},\dfrac{1}{L_3}$成等差數列；公差$r=\dfrac{b-a}{2}$；

當$k=2$時$n=5$，$\dfrac{1}{L_3}=\dfrac{\frac{1}{L_1}+\frac{1}{L_5}}{2}=\dfrac{a+b}{2}$ 與 $\dfrac{1}{L_2}=\dfrac{3a+b}{4}$，$\dfrac{1}{L_4}=\dfrac{a+3b}{4}$

$\dfrac{1}{L_1},\dfrac{1}{L_2},\dfrac{1}{L_3},\dfrac{1}{L_4},\dfrac{1}{L_5}$成等差數列，公差$d=\dfrac{3a+b}{4}-a=\dfrac{b-a}{4}$

假設$k=s$時，原式成立。(即$n=2^s+1$，公差$d=\dfrac{1}{L_{t+1}}-\dfrac{1}{L_t}=\dfrac{b-a}{2^s}$)

所分割的線段長分別爲$L_1,L_2,L_3,\cdots,L_t,L_{t+1},\cdots,L_{2^s+1}$

則當$k=s+1$時

$$\text{公差}\ d'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_{2t+1}}-\frac{1}{L_{2t-1}}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{L_{t+1}}-\frac{1}{L_t}\right)=\frac{1}{2}\cdot d=\frac{b-a}{2^{s+1}}$$

(四) 仿照只做單側分割梯形時，尋找梯形面積的作法，同樣可得到做雙側時，各梯形面積之間的比例關係：

$$A_1:A_2:A_3:\cdots:A_n$$
$$=(a_1+a_2)a_1\cdot a_2:(a_2+a_3)a_2\cdot a_3:\cdots:(a_{n-2}+a_{n-1})a_{n-2}\cdot a_{n-1}:(a_{n-1}+a_n)a_{n-1}\cdot a_n$$

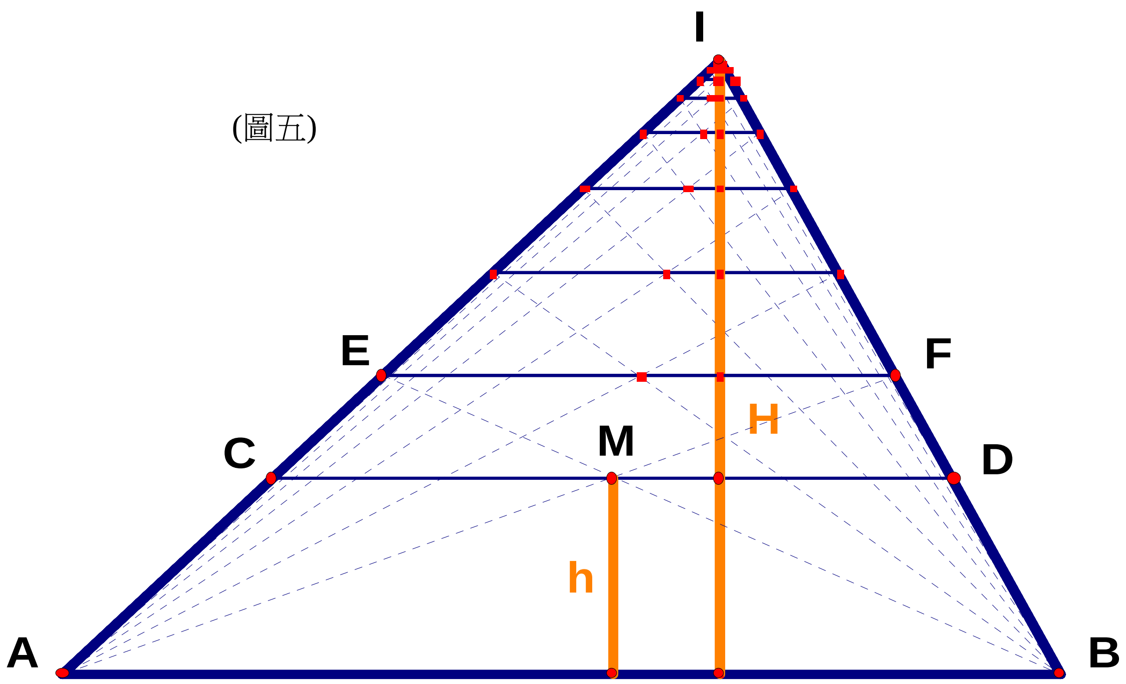
三、同樣作單邊的延伸(向梯形的上底作分割時)：

(一) 如(圖五)，已知線段$\overline{AB}$、$\overline{CD}$和h的長度，做$\overline{CD}$的中點M，同時做直線$\overleftrightarrow{AM}$、$\overleftrightarrow{BM}$、$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BD}$，假設$\overleftrightarrow{AC}$交$\overleftrightarrow{BM}$於E，$\overleftrightarrow{BD}$交$\overleftrightarrow{AM}$於F，再連接$\overline{EF}$，如此可得$\overline{AB}$、$\overline{CD}$、$\overline{EF}$的長度成調和數列。繼續重複上述步驟可得到一些線段長。而這些梯形最後會趨似一個三角形，由相似形可求出，已知梯形的高h和三角形的高H之比例。

(二) 如(圖六)，類似於上述的方法，但是卻可以求得一系列的調和數列，

$$\overline{AB},\ \overline{CD},\overline{EF},\overline{GH},\overline{JK},\cdots$$

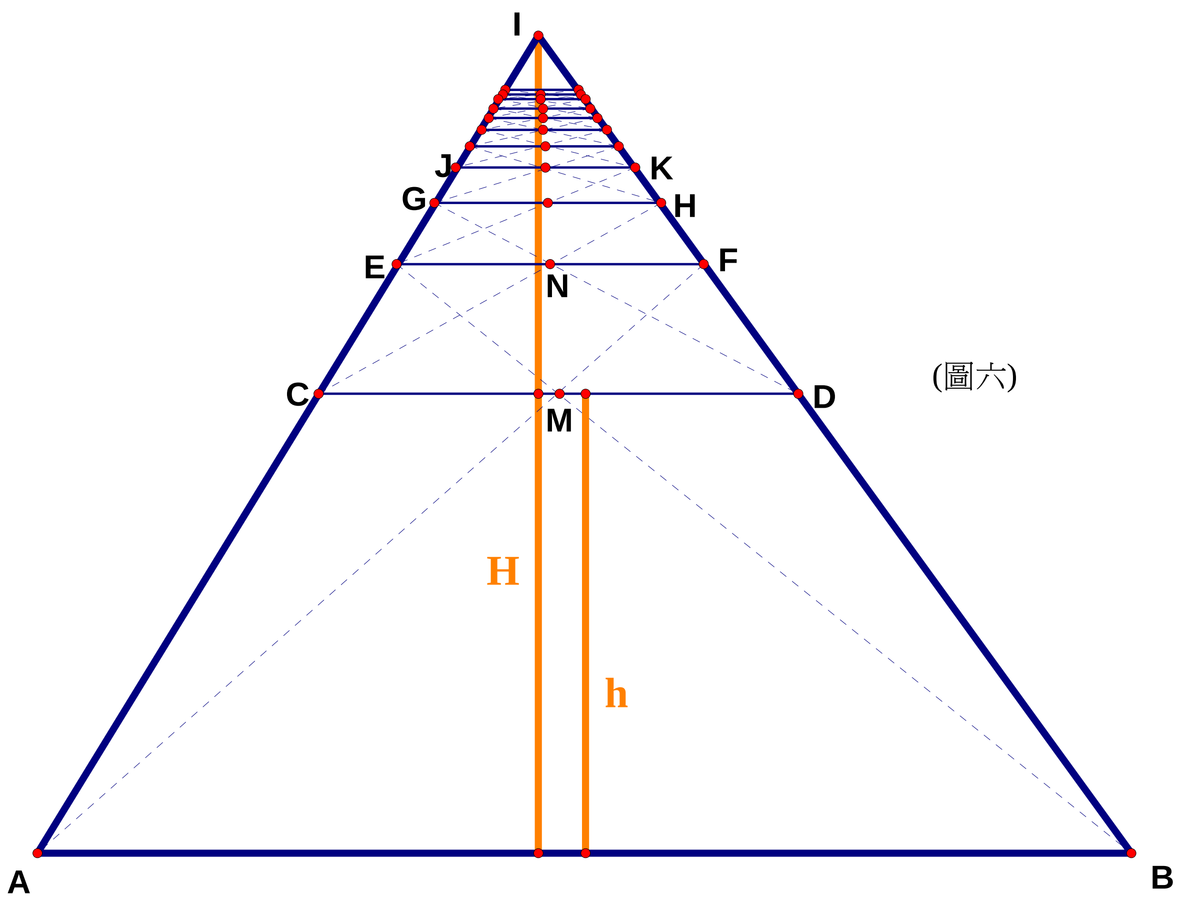
(圖五)



pf：

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\frac{H}{H-h} \Rightarrow (H-h)\cdot\overline{AB}=\overline{CD}\cdot H \Rightarrow \left(\overline{AB}-\overline{CD}\right)\cdot H=\overline{CD}\cdot h$$

$$\Rightarrow \frac{h}{H}=\frac{\left(\overline{AB}-\overline{CD}\right)}{\overline{CD}}$$



(圖六)

參、研究結果與討論

一、向梯形的下底作梯形分割時

(一) 線段長的關係：

1. $\frac{1}{L_1}+\frac{n-2}{L_n}=\frac{1}{L_2}+\frac{1}{L_3}+\cdots+\frac{1}{L_{n-2}}+\frac{2}{L_{n-1}}\quad ,n\geq 3,n\in N$ ；

2. $\frac{1}{L_1}+\frac{2^{n-3}}{L_n}=\frac{1}{L_2}+\frac{2^{n-3}}{L_{n-1}}\quad ,n\geq 3,n\in N$ ；

3. 當 n 為正偶數時，則 $\frac{1}{L_1}+\frac{2^{\frac{n}{2}}-2}{L_n}=\frac{1}{L_{\frac{n}{2}}}+\frac{2^{\frac{n}{2}}-2}{L_{\frac{n}{2}+1}}$ 。

4. 作 n–2 次 $(n\geq 3)$ 分割梯形後，可得 $L_1,L_2,L_3,\cdots,L_{n-1},L_n$ 個線段長，其中 $L_1,L_2,L_3,\cdots,L_{n-1}$ 倒數的兩兩差值是一個公比為 2 的等比數列。

(二) 梯形面積的關係：

$$\begin{aligned}&A_1:A_2:A_3:\ \cdots\ :A_n\\&=2^{n-3}\left(a_1+a_2\right)a_1\cdot a_2:2^{n-4}\left(a_2+a_3\right)a_2\cdot a_3:\cdots:\left(a_{n-2}+a_{n-1}\right)a_{n-2}\cdot a_{n-1}:\left(a_{n-1}+a_n\right)a_{n-1}\cdot a_n\end{aligned}$$

二、向梯形的上、下底同時作梯形分割時

(一) 線段長的關係：

經過 k 次分割後，共有 $L_1,L_2,L_3,\cdots,L_{2^k+1}$ 個線段長，而其倒數是一個公差為 $\dfrac{\frac{1}{L_{2^k+1}}-\frac{1}{L_1}}{2^k}$ 的等差數列。

(二) 梯形面積的關係：

$$\begin{aligned}&A_1:A_2:A_3:\cdots:A_n\\&=\left(a_1+a_2\right)a_1\cdot a_2:\left(a_2+a_3\right)a_2\cdot a_3:\cdots:\left(a_{n-2}+a_{n-1}\right)a_{n-2}\cdot a_{n-1}:\left(a_{n-1}+a_n\right)a_{n-1}\cdot a_n\end{aligned}$$

三、同樣作單邊的延伸(向梯形的上底作分割時)

可得梯形高 h 和三角形高 H，與上、下底的關係為 $\frac{h}{H}=\frac{\left(\overline{AB}-\overline{CD}\right)}{\overline{CD}}$

肆、參考資料

一、高級中學數學第一冊,翰林版（中華民國 94 年 8 月）

二、單墫（2003 年 10 月）,數學奧林匹克,北京大學出版社

評語

1) 優點：能夠將幾何、代數、遞迴關係等融合於如此小巧玲瓏的作品中，實在難能可貴。

2) 繼續努力的方向：多多尋找其他相關的例子。尋找一些與面積相關的例子。尋找一些與立體幾何物件相關的例子。推廣到三度空