臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱 ：不完美的完美-探討遞迴數列的圖形分割方法

學校 / 作者 ：國立高雄師範大學附屬高級中學　黃俊晏

自我介紹

我的名字叫黃俊晏。小時候懵懵懂懂的我，上國中時因爲受到一位老師的啓發，進而開始喜歡數學，每當年紀增長，我對數學的感受就越深，直到現在，我視數學爲世界的真理，不會有人能推翻它。我曾上過兩年半的數理資優班（三下時並未開班），參加過 AMC、高雄市科展、數學競試等。得什麼名次不重要，只希望在未來我能更拓展數學世界的視野。

中文摘要

在 Fibonacci Sequence 中，我將 Cassini’s identity 轉換成圖形時發現：邊長為 Fibonacci number 的正方形，分割後重新拼成長寬分別為 Fibonacci number 前後兩項的矩形，會得到矩形內有縫隙（或重疊）。接著我將 Cassini’s identity 的圖形推廣到 Catalan’s identity 的圖形，我發現邊長一樣的正方形，拼成的矩形長會變大，寬會變小，矩形內的縫隙（或重疊）面積會以 Fibonacci number 平方增長。接下來我再將圖形推廣，邊長為非 Fibonacci number 的正方形分割拼成矩形時，我發現若將整數遞迴數列代入 Cassini’s identity，圖形將會有規律的方式呈現，且每一種數列的縫隙（或重疊）面積會有所不同；若遞迴數列代入 Catalan’s identity，縫隙（或重疊）面積還會再以 Fibonacci number 平方增長。所以最後我得到一個通式：只要是遞迴數列$\left[a_n\right]$的圖形，都會滿足於：$a_n{}^2 - a_{n+m} \cdot a_{n-m} = k(-1)^{n+m+1} F_m{}^2$。

Abstract

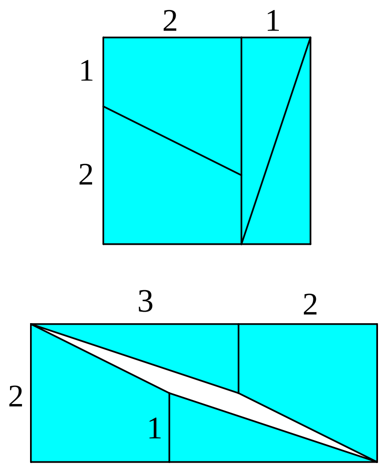
In Fibonacci Sequence, I illustrated Cassini's identity and Catalan's identity in geometry. Firstly, in terms of Cassini's identity, there is a square whose length of side is Fibonacci number F_n. I cut this square and recombined its pieces to form a rectangle whose length and width would conform to two adjacent terms of F_n, F_{n+1} and F_{n-1}, respectively. Then there would be a gap or overlap in this rectangle. Similarly, in Catalan's identity, I would get another rectangle whose length would increase (F_{n+2}, F_{n+3},..., F_{n+r}) and width would decrease (F_{n-2}, F_{n-3},..., F_{n-r}). The area of the gap or overlap left in the rectangle would become F_r^2, the square of Fibonacci number. Secondly, in terms of Cassini's identity, there are squares whose lengths of side belong to recurrence sequences except for Fibonacci sequence. I recombined these squares to form rectangles respectively. These rectangles would be formed regularly and the area of the gap or overlap left in these rectangles would be different with each other. However, in Catalan's identity, the area of the gap or overlap would still increase in terms of the square of Fibonacci number. Finally, I concluded a general formula: the recurrence sequence $[a_n]$ would always satisfy the following identity: $a_n^2 - a_{n+m} \cdot a_{n-m} = k(-1)^{n+m+1} F_m^2$

壹、　研究動機

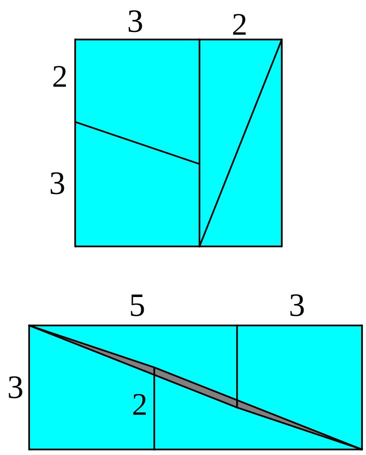
曾經在某一天，我正在閱讀一件高雄市科展的作品，它在講述邊長為 Fibonacci number 的正方形分割有一種規律，它的圖形由 Cassini's identity： $F_{n+1}\cdot F_{n-1}-F_n^{\ 2}=(-1)^n$ 所轉換的：邊長為 F_n 的正方形，經由分割後重新拼成長為 F_{n+1} 、寬為 F_{n-1} 的矩形。

（一）若 $n=4$ 時，邊長 3×3 的正方形分割，拼成長寬 5×2 的矩形（圖一），但因為面積不相同，所以矩形中間有面積為1的平行四邊形縫隙。

（二）若 $n=5$ 時，邊長 5×5 的正方形則拼成長寬 8×3 的矩形（圖二），不過因正方形面積較大，所以矩形中間有重疊面積1。



圖一



圖二

當時我妹妹坐在我旁邊，也好奇的看作品上的分割圖形。當我在向她解釋時，忽然發現上面呈現的正方形除了可以用 Fibonacci number 分割以外，其實還另有規律的分割方法，而上面並未講到。對此抱著一些興趣的我，開始了我的研究之路。

貳、　研究目的

一、討論邊長為 Fibonacci number 的正方形，分割後拼成矩形所產生的縫隙（或重疊）面積規律及其分割方式。

二、討論任意正整數邊長的正方形，分割後拼成矩形所產生的縫隙（或重疊）面積規律及其分割方式，並以一般式表示之。

參、　研究工具

紙、筆、電腦、GSP、FLASH

肆、　研究過程

一、討論邊長爲 Fibonacci number 的正方形

當正方形邊長爲 Fibonacci number 時，由 Cassini's identity 對照實際圖形的切割，我發現在矩形邊長、切割塊數及縫隙（重疊）面積具有以下的特性：

（一）我發現到由 Cassini's identity 轉換出來的圖形，不管是正方形或是矩形，所分割出來的邊長大小，都會是 Fibonacci number（斜線不包含），且隨著正方形邊長增加，每一個 Fibonacci number 也會增加。

（二）我發現正方形其直列分割的塊數與橫列分割的塊數比爲 2:1，其實也是 Fibonacci number。

（三）我發現矩形中央面積的差爲 1，還是 Fibonacci number，不過這點將在後面有不同的解釋。

爲了接下來的討論一致性，當我將正方形分割拼成矩形時，若矩形會包含有縫隙（或重疊），我將這種矩形稱做「縫隙矩形」，內部包含著「縫隙面積」。

透過以上的觀察，我發現 Cassini's identity 所討論的圖形分割皆爲 Fibonacci sequence 的相鄰項，我另外查詢其他相關資料發現 Catalan's identity：$F_n{}^2 - F_{n+m} \cdot F_{n-m} = (-1)^{n+m} F_m{}^2$，此結果可將 Fibonacci sequence 相鄰項擴展至相鄰 m 項。進一步，我想了解 Catalan's identity 是否也能用 Cassini's identity 分割圖形的過程加以分割。

（一）首先討論以 Fibonacci number 爲邊長的正方形分割：

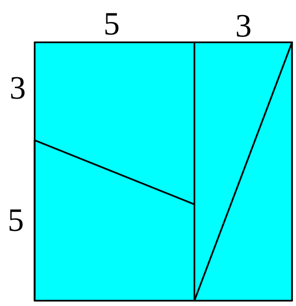
因爲 Cassini's identity 是將 $m=1$ 代入 Catalan's identity 而得到的，所以我從 Catalan's identity 開始討論。

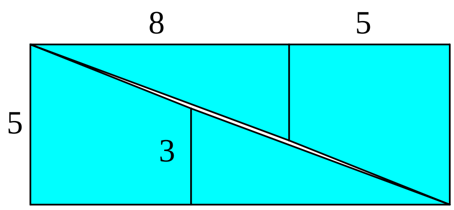
1、$m=1$ 時 $\Rightarrow F_n{}^2 - F_{n+1} \cdot F_{n-1} = (-1)^{n+1}$

我先舉一個圖形例子來觀察。

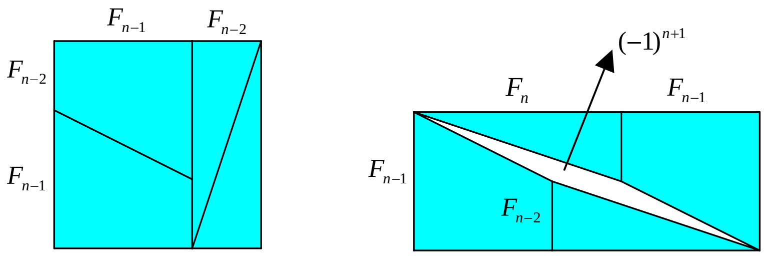
（1）當 $n=6$ 時 $\Rightarrow$ 正方形邊長爲 8，拼出的矩形長寬爲 13、5

我將正方形直列切割出邊長爲 5 和 3 兩塊，然後將較大的那塊切割成兩塊上底爲 3、下底爲 5 的梯形，較小的那塊以對角線切割成兩塊三角形，最後拼成長寬爲 $13,5$ 的矩形（下頁圖），縫隙面積爲 1。爲什麼我要用 5 和 3 來分割 8 呢？因爲 5 和 3 與 8 皆爲 Fibonacci number，且 $8=5+3$（即 5,3 在 8 的後兩項）。





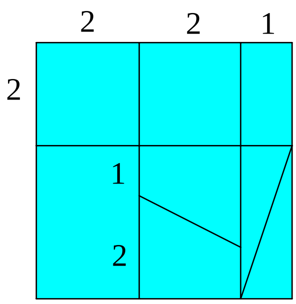
由背景知識可知其結果與 Cassini's identity 一樣，所以我可藉由圖一、圖二歸納出一般圖形的分割：將正方形直列切割出邊長爲 F_{n-1} 和 F_{n-2} 兩塊，然後將較大的那塊切割成兩塊上底爲 F_{n-2}、下底爲 F_{n-1} 的梯形，較小的那塊以對角線切割成兩塊三角形，最後拼成長寬爲 F_{n+1}, F_{n-1} 的矩形（下圖），面積差爲 $(-1)^{n+1}$ 。

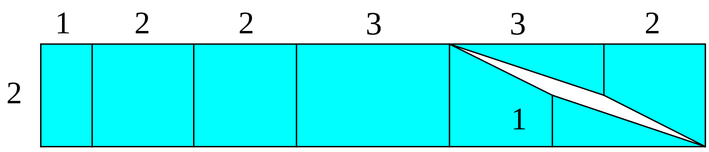


2、 $m = 2$ 時 $\Rightarrow F_n^{\ 2} - F_{n+2} \cdot F_{n-2} = (-1)^n$

（1）當 $n = 5$ 時 $\Rightarrow$ 正方形邊長爲 5 ，拼出的矩形長寬爲 13 、 2

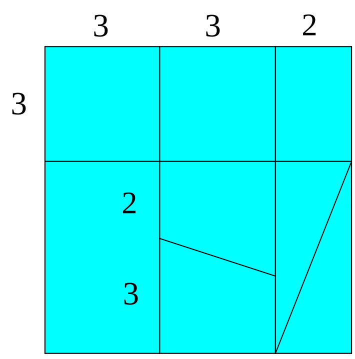
因爲 5=2+3=2+2+1 ，於是我可將正方形直列切割出邊長爲 2 、 2 、 1 三塊，橫列切割出邊長爲 2 、 3 兩塊，並將內部邊長 3 的正方形以 $m = 1$ 的方式分割，最後拼成長寬爲 13, 2 的矩形（下圖），縫隙面積爲 1 。

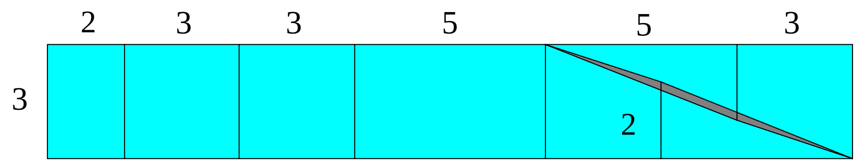




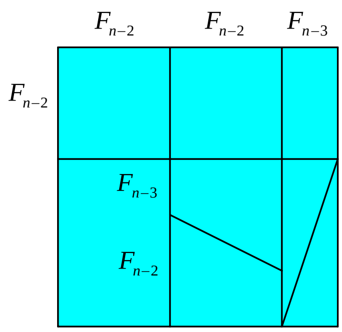
（2） n = 6 時 $\Rightarrow$ 正方形邊長爲 8 ，拼出的矩形長寬爲 21 、 3

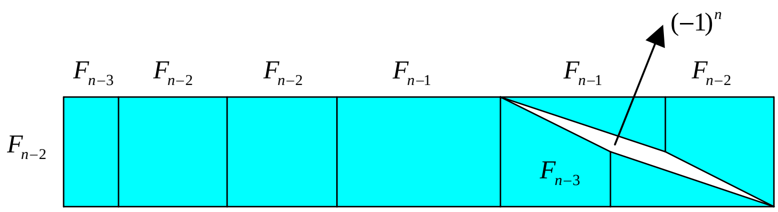
與上圖類似，因爲 8=3+5=3+3+2 ，所以我將圖形分割成下圖，發現到矩形的縫隙是重疊的，面積爲 1 。





當 n 增大時，我們用相同的做法分割出來的圖形，也會是成立的。所以，我們可以歸納出一般圖形：將正方形直列切割出邊長爲 F_{n-2}、F_{n-2}、F_{n-3} 三塊，橫列切割出邊長爲 F_{n-2}、F_{n-1} 兩塊，並將內部邊長 F_{n-1} 的小正方形以 $m=1$ 的方式分割，最後拼成長寬爲 F_{n+2}, F_{n-2} 的矩形，面積差爲 $(-1)^n$。





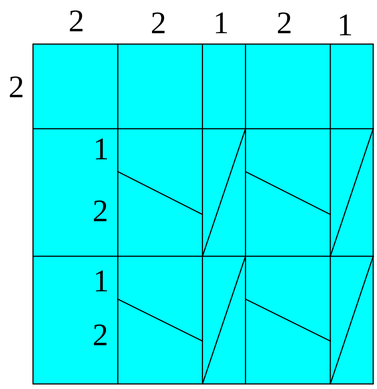
我們觀察到，正方形的右下方有另一個邊長 F_{n-1} 的正方形，且其分割方式與 $m=1$ 的分割是一樣的，所以圖形中只需這一小塊就可造出縫隙來；至於其餘的，雖只是簡單的放在兩旁，不過其功用是增長矩形之長爲 F_{n+2}，所以它們的存在是必要的。

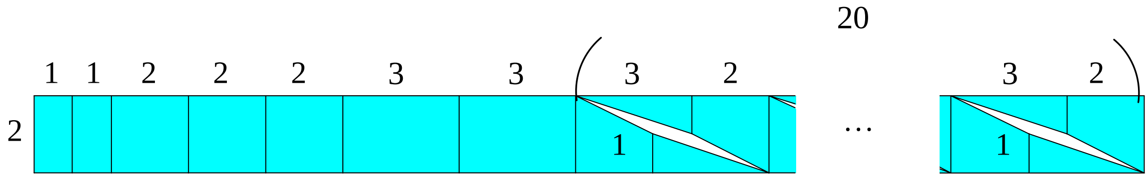
3、$m=3$ 時 $\Rightarrow F_n{}^2 - F_{n+3}\cdot F_{n-3} = 4(-1)^{n+1}$

這個公式的圖形爲：邊長 F_n 的正方形，分割後拼成長寬 F_{n+3}、F_{n-3} 的矩形，則面積差爲 4，也就是會有四個縫隙面積。現在我舉例子來觀察。

（1）$n=6$時$\Rightarrow$正方形邊長爲8，拼出的矩形長寬爲34、2

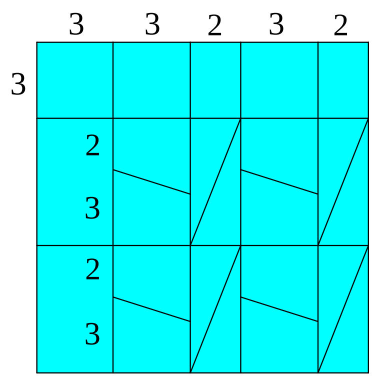
因爲$8=2+3+3=2+2+1+2+1$，於是我將正方形切割，行成下圖：正方形內部會有四個小正方形，各拼成四個縫隙矩形，每個縫隙矩形的縫隙面積爲1，所以形成一個有縫隙面積爲4的矩形。

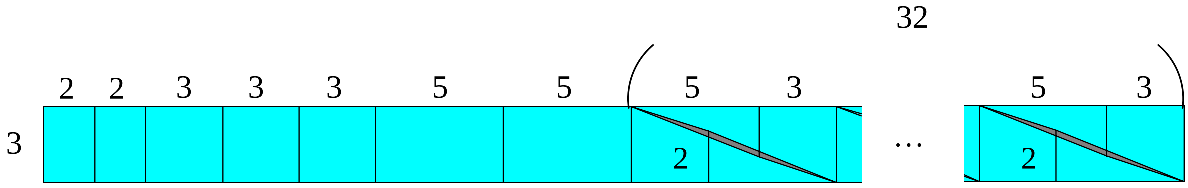




（2）$n=7$時$\Rightarrow$正方形邊長爲13，拼出的矩形長寬爲55、3

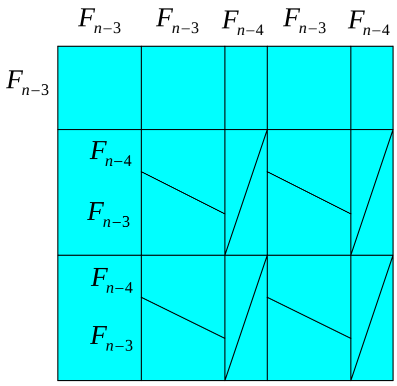
因爲$13=3+5+5=3+3+2+3+2$，類似上圖的做法，我可將正方形分割、拼成長寬爲55,3，縫隙面積爲4的矩形（下圖）。

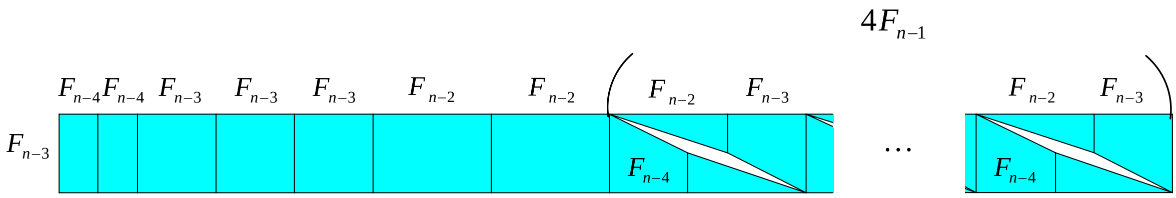




當n漸漸增大時，我用相同的做法分割出來的圖形，也會是成立的。所以，我可以歸納出一般圖形：將正方形直列、橫列切割後，內部邊長爲F_{n-2}的四個小正方形以$m=1$的方式切

割，最後拼成長寬爲F_{n+3}, F_{n-3}的矩形（下圖），面積差爲$4(-1)^{n+1}$。

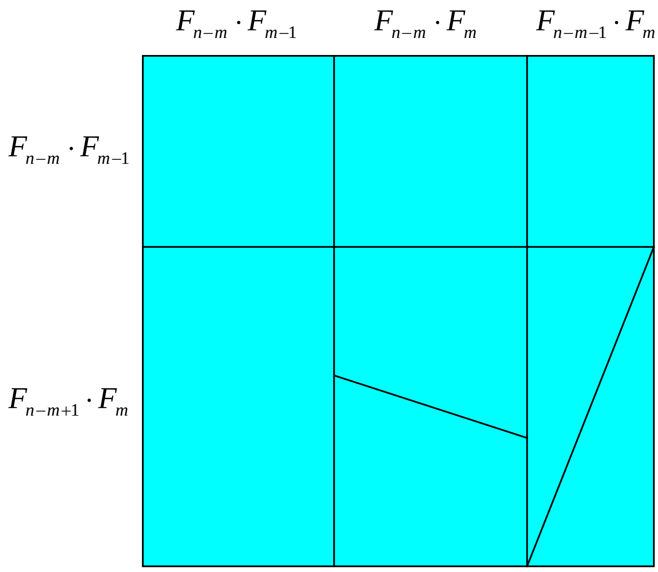


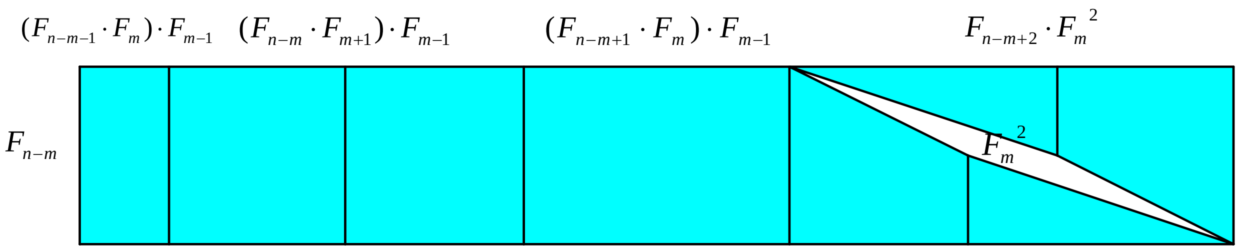


我注意到，$m=1$到$m=3$的圖形，其縫隙面積爲1、1、4，其實就是m值代入 Catalan's identity 的$F_m{}^2$而得來的，所以後面圖形的縫隙面積會依 Fibonacci number 的平方規律的增大，與圖形邊長的規律不太一樣。

4、$m \in \mathrm{N} \Rightarrow F_n{}^2 - F_{n+m} \cdot F_{n-m} = (-1)^{n+m} F_m{}^2$

做到這裡，我可以知道當$n, m \in \mathrm{N}$，$n \geq m+1$時，圖形的樣子如何。通式的圖形爲：邊長F_n的正方形，直列切割爲F_{m+2}塊，橫向切割爲F_{m+1}塊，內部切出邊長F_{n-m+1}的小正方形$F_m{}^2$塊後，重新拼成長寬F_{n+m}、F_{n-m}的矩形（下圖），而縫隙面積則爲$F_m{}^2$。





（註）此圖形並非真實圖形。圖上的數「‧」前面爲邊長，「‧」後面爲數量。

我得到小結：邊長爲 Fibonacci number（ F_n ）的正方形，將直列切割成 F_{m+1} 塊 F_{n-m} 、 F_m 塊 F_{n-m-1} ，橫列切割成 F_{m-1} 塊 F_{n-m} 、 F_m 塊 F_{n-m+1} ，然後把內部 $F_m{}^2$ 塊邊長 F_{n-m+1} 的小正方形以 $m=1$ 的方式切割，最後拼成長爲 F_{n+m} 、寬爲 F_{n-m} 的矩形，面積差爲 $(-1)^{n+m}F_m{}^2$ 。

二、非 Fibonacci number 爲邊長的正方形分割

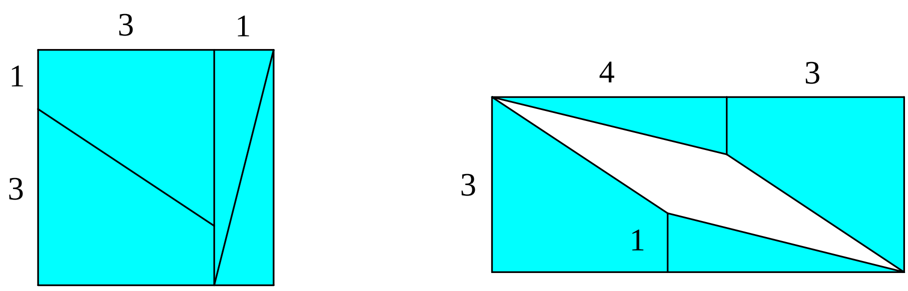
我發現邊長爲 Fibonacci number 的正方形可分割出如此規律的圖形，不過正整數並不只有 Fibonacci number，那麼邊長爲非 Fibonacci number 的正方形是否也具有與以 Fibonacci number 爲邊長之正方形相同的分割方式？還是有另一種規律可以遵循呢？

（一）Lucas number 爲邊長的正方形分割

在 Lucas Sequence 中，我找到與 Cassini’s identity 相似的 identity： $L_n{}^2-L_{n+1}\cdot L_{n-1}=5(-1)^n$ ，那是不是以邊長爲 L_n 的正方形也可拼出類似 Fibonacci Sequence 的圖形呢？我舉些例子來觀察。

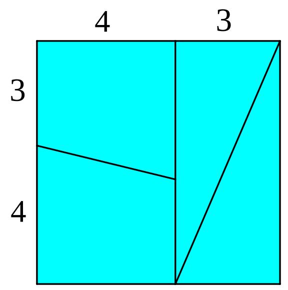
1、 $n=3$ 時 $\Rightarrow$ 正方形邊長爲 4 ，拼出的矩形長寬爲 7 、 3

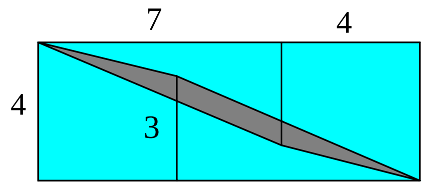
我將正方形直列切割出邊長爲3和1兩塊，然後將較大的那塊切割成兩塊上底爲1、下底爲3的梯形，較小的那塊以對角線切割成兩塊三角形，最後拼成長寬爲7,3的矩形（下圖），縫隙面積爲 5 。



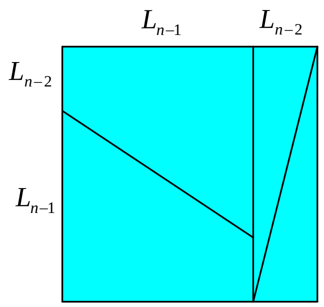
2、$n=4$時$\Rightarrow$正方形邊長爲7，拼出的矩形長寬爲11、4

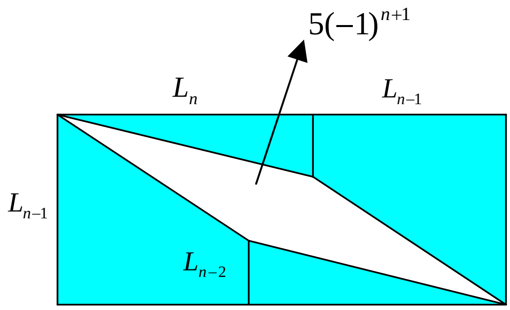
我用上述的分割方法來切割此正方形，得到下圖的矩形，縫隙面積爲5。





當n增大時，我用相同的做法分割出來的圖形，也會是成立的。所以，我可以歸納出一般圖形：邊長L_n的正方形，經由規律的切割後，重新拼成長寬L_{n+1},L_{n-1}的矩形（下圖），面積差爲$5(-1)^{n+1}$。





我得知邊長爲 Lucas number 的正方形分割方法與邊長爲 Fibonacci number 的正方形分割方法是一樣的，不過圖形呈現的縫隙面積爲 5，和 Fibonacci Sequence 不同。至於$L_n{}^2-L_{n+m}\cdot L_{n-m}=5(-1)^{n+m+1}F_m{}^2$，我推測圖形也是可以轉換的，至於證明的部分我會在接下來的研究中提及。

（二）任意整數邊長的正方形分割

我注意到：

Fibonacci Sequence：1,1,2,3,5,8,13,21,…

Lucas Sequence：1,3,4,7,11,18,29,…

Fibonacci Sequence 和 Lucas Sequence 的第一項都爲1，第二項則爲$1,3$。此二數列皆爲遞迴數列，只是因第二項不同而不同，所以我固定第一項爲1，改變第二項來找出其關係，結果得下表：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\cdots$	${a_n}^2 - a_{n+1} \cdot a_{n-1}$
1	1	2	3	5	8	13	$\cdots$	$(-1)^{n+1}$
1	2	3	5	8	13	21	$\cdots$	$(-1)^{n}$
1	3	4	7	11	18	29	$\cdots$	$5(-1)^{n}$
1	4	5	9	14	23	37	$\cdots$	$11(-1)^{n}$
1	5	6	11	17	28	45	$\cdots$	$19(-1)^{n}$
1	6	7	13	20	33	53	$\cdots$	$29(-1)^{n}$
1	7	8	15	23	38	61	$\cdots$	$41(-1)^{n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$

每一數列的圖形分割，都與 Fibonacci Sequence 一樣，只不過縫隙面積有所不同，若將它設爲k，則$k = {a_2}^2 - a_1 \cdot a_3 = {a_2}^2 - a_1(a_1 + a_2)$。從式子之中我知道 k 與第一項及第二項有關，若第一項或第二項數字改變，則k也會隨之改變。

既然$a_1 = 1$的數列可做出規律的圖形，於是我就也改變第一項來觀察其變化：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	$\cdots$	${a_n}^2 - a_{n+1} \cdot a_{n-1}$
1	y	$y+1$	$2y+1$	$3y+2$	$5y+3$	$8y+5$	$\cdots$	$(y^2 - y - 1)(-1)^n$
2	y	$y+2$	$2y+2$	$3y+4$	$5y+6$	$8y+10$	$\cdots$	$(y^2 - 2y - 4)(-1)^n$
3	y	$y+3$	$2y+3$	$3y+6$	$5y+9$	$8y+15$	$\cdots$	$(y^2 - 3y - 9)(-1)^n$
4	y	$y+4$	$2y+4$	$3y+8$	$5y+12$	$8y+20$	$\cdots$	$(y^2 - 4y - 16)(-1)^n$
5	y	$y+5$	$2y+5$	$3y+10$	$5y+15$	$8y+25$	$\cdots$	$(y^2 - 5y - 25)(-1)^n$
6	y	$y+6$	$2y+6$	$3y+12$	$5y+18$	$8y+30$	$\cdots$	$(y^2 - 6y - 36)(-1)^n$
7	y	$y+7$	$2y+7$	$3y+14$	$5y+21$	$8y+35$	$\cdots$	$(y^2 - 7y - 49)(-1)^n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$

我發現每一條數列皆可做出規律的圖形，且縫隙面積k會隨著第一項和第二項的改變而改變。所以我歸納出：只要是遞迴數列，皆能做出與 Cassini’s identity 相同的規律的圖形。

既然$m = 1$的所有遞迴數列皆可做出規律圖形，我便也推測$m \in \mathrm{N}$時，也可做出與 Catalan’s identity 相同的規律的圖形。所以我得到總結：邊長爲a_n的正方形，將直列切割成F_{m+1}塊a_{n-m}、F_m塊a_{n-m-1}，橫列切割成F_{m-1}塊a_{n-m}、F_m塊a_{n-m+1}，然後把內部${F_m}^2$塊邊長a_{n-m+1}的小正方形以$m = 1$的方式切割，最後拼成長爲a_{n+m}、寬爲a_{n-m}的矩形，面積差爲$k(-1)^{n+m}{F_m}^2$。

爲了不失一般性，我假設： $x, y, n, m \in \mathrm{N}$

$$\boxed{\begin{aligned} &a_1 = x \\ &a_2 = y \\ &a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \\ &k = y^2 - x(x+y) \end{aligned}}$$

則我得出 $a_n{}^2 - a_{n+m} \cdot a_{n-m} = k(-1)^{n+m+1} F_m{}^2$。我用數學歸納法來證明此式子：

pf ：

$\because a_1 = x \quad a_2 = y$

$\therefore a_n = a_{n-2} + a_{n-1} = F_{n-2}x + F_{n-1}y$

當 $m = 1$ 時

$$原式 = a_n{}^2 - a_{n+1} \cdot a_{n-1} = (F_{n-2}x + F_{n-1}y)^2 - (F_{n-1}x + F_n y)(F_{n-3}x + F_{n-2}y)$$

$$= F_{n-2}{}^2x^2 + 2F_{n-2}F_{n-1}xy + F_{n-1}{}^2y^2 - F_{n-1}F_{n-3}x^2 - F_{n-1}F_{n-2}xy - F_nF_{n-3}xy - F_nF_{n-2}y^2$$

$$= x^2(F_{n-2}{}^2 - F_{n-1}F_{n-3}) + y^2(F_{n-1}{}^2 - F_nF_{n-2}) + xy(F_{n-2}F_{n-1} - F_nF_{n-3})$$

$$= x^2(-1)^{n-1} + y^2(-1)^n + xy(F_{n-2}{}^2 - F_{n-1}F_{n-3}) = -x^2(-1)^n + y^2(-1)^n + xy(-1)^{n-1}$$

$$= (-1)^n(y^2 - x^2 - xy) = k(-1)^{n+2}F_1{}^2$$

$\therefore$ 成立

設 $m = 1,2,3,\ldots,t$ 時皆成立，即

$$a_n{}^2 - a_{n+1} \cdot a_{n-1} = k(-1)^{n+2}F_1{}^2$$
$$a_n{}^2 - a_{n+2} \cdot a_{n-2} = k(-1)^{n+3}F_2{}^2$$
$$a_n{}^2 - a_{n+3} \cdot a_{n-3} = k(-1)^{n+4}F_3{}^2$$
$$\vdots$$
$$a_n{}^2 - a_{n+t} \cdot a_{n-t} = k(-1)^{n+t+1}F_t{}^2$$

則當 $m = t+1$ 時

$$原式 = a_n{}^2 - a_{n+t+1} \cdot a_{n-t-1} = a_n{}^2 - \left(a_{n+t} + a_{n+t-1}\right)\left(a_{n-t+1} - a_{n-t}\right)$$

$$= a_n{}^2 - a_{n+t}a_{n-t+1} + a_{n+t}a_{n-t} - a_{n+t-1}a_{n-t+1} + a_{n+t-1}a_{n-t} + a_n{}^2 - a_n{}^2$$

$$= -\left(a_n{}^2 - a_{n+t}a_{n-t}\right) + \left(a_n{}^2 - a_{n+t-1}a_{n-t+1}\right) + a_n{}^2 - a_{n+t}a_{n-t+1} + a_{n+t-1}a_{n-t}$$

$$= -k\left(-1\right)^{n+t+1}F_t^2 + k\left(-1\right)^{n+t}F_{t-1}{}^2 + a_n{}^2 - a_{n+t}a_{n-t+1} + a_{n+t-1}a_{n-t}$$

$$= \underline{k\left(-1\right)^{n+t}\left[F_t^2 + F_{t-1}{}^2\right] + a_n{}^2 - a_{n+t}a_{n-t+1} + a_{n+t-1}a_{n-t}}$$

$$= k\left(-1\right)^{n+t}\left[F_t^2 + F_{t-1}{}^2\right] + a_n{}^2 - \left(a_{n+t-1} + a_{n+t-2}\right)a_{n-t+1} + a_{n+t-1}\left(a_{n-t+2} - a_{n-t+1}\right)$$

$$= k\left(-1\right)^{n+t}\left[F_t^2 + F_{t-1}{}^2\right] + a_n{}^2 - a_{n+t-1}a_{n-t+1} - a_{n+t-2}a_{n-t+1} + a_{n+t-1}a_{n-t+2} - a_{n+t-1}a_{n-t+1} + a_n{}^2 - a_n{}^2$$

$$= k\left(-1\right)^{n+t}\left[F_t^2 + F_{t-1}{}^2\right] + 2\left(a_n{}^2 - a_{n+t-1}a_{n-t+1}\right) - a_n{}^2 - a_{n+t-2}a_{n-t+1} + a_{n+t-1}a_{n-t+2}$$

$$=k(-1)^{n+t}\left[F_t^2+3F_{t-1}^2\right]-a_n^2-a_{n+t-2}a_{n-t+1}+a_{n+t-1}a_{n-t+2}$$

$$=k(-1)^{n+t}\left[F_t^2+3F_{t-1}^2\right]+2\left(a_n^2-a_{n+t-2}a_{n-t+2}\right)+a_n^2-a_{n+t-2}a_{n-t+3}+a_{n+t-3}a_{n-t+2}$$

$$=k(-1)^{n+t}\left[F_t^2+3F_{t-1}^2+2F_{t-2}^2\right]+a_n^2-a_{n+t-2}a_{n-t+3}+a_{n+t-3}a_{n-t+2}$$

$$=k(-1)^{n+t}\left[F_t^2+3F_{t-1}^2+2F_{t-2}^2\right]+2\left(a_n^2-a_{n+t-3}a_{n-t+3}\right)-a_n^2-a_{n+t-4}a_{n-t+3}+a_{n+t-3}a_{n-t+4}$$

$$=k(-1)^{n+t}\left[F_t^2+3F_{t-1}^2+2F_{t-2}^2+2F_{t-3}^2\right]-a_n^2-a_{n+t-4}a_{n-t+3}+a_{n+t-3}a_{n-t+4}$$

$=\cdots\cdots$

若 t 爲奇數時

$$原式=k(-1)^{n+t}\left[F_t^2+3F_{t-1}^2+2F_{t-2}^2+2F_{t-3}^2+\cdots+2F_1^2\right]+a_n^2-a_{n+1}a_n+a_na_{n-1}$$

$$=k(-1)^{n+t}\left[2F_tF_{t+1}-F_t^2+F_{t-1}^2\right]+a_n^2-a_n^2=k(-1)^{n+t}\left[2F_tF_{t+1}-F_{t+1}F_{t-2}\right]$$

$$=k(-1)^{n+t+2}F_{t+1}^2$$

$\therefore$ 成立

若 t 爲偶數時

$$原式=k(-1)^{n+t}\left[F_t^2+3F_{t-1}^2+2F_{t-2}^2+2F_{t-3}^2+\cdots+2F_1^2\right]-a_n^2-a_na_{n-1}+a_{n+1}a_n$$

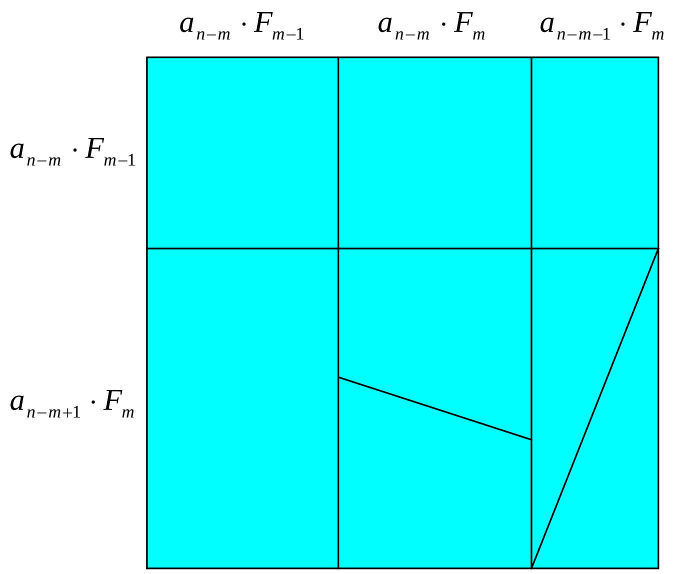
$$=k(-1)^{n+t}\left[2F_tF_{t+1}-F_t^2+F_{t-1}^2\right]-a_n^2+a_n^2=k(-1)^{n+t+2}F_{t+1}^2$$

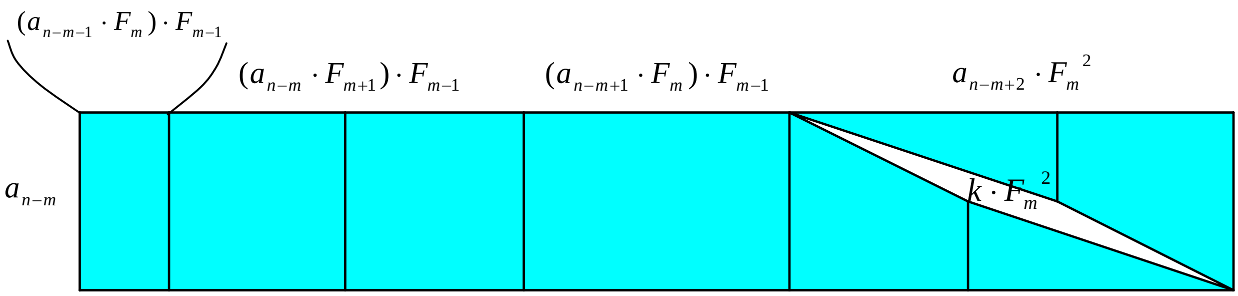
$\therefore$ 亦成立

由數學歸納法得知　$m\in\mathrm{N}$　原式成立

若我設 $a_1=1$，$a_2=1$，則我會得到 $F_n^2-F_{n+m}\cdot F_{n-m}=-1(-1)^{n+m+1}F_m^2$，其實也就是 Catalan's identity；若再代入 $m=1$，則爲 Cassini's identity；若 $a_1=1$，$a_2=3$，則爲 $L_n^2-L_{n+m}\cdot L_{n-m}=5(-1)^{n+m+1}F_m^2$，所以我間接證明了 Lucas Sequence 的式子。

回歸第十三頁的開頭，其實每個代數各有它的角色：x,y決定何種數列$[a_n]$及縫隙常數k；n控制正方形邊長a_n；m主掌圖形分割的方式。如此一來，我便可給 x,y,n,m 任意一個數，最後得到我想要的圖形。通式圖形的分割方法爲：在 $a_1=x$、$a_2=y$ 所成的遞迴數列中，邊長爲 a_n 的正方形，將直列切割成 F_{m+1} 塊 a_{n-m}、F_m 塊 a_{n-m-1}，橫列切割成 F_{m-1} 塊 a_{n-m}、F_m 塊 a_{n-m+1}，然後把內部 F_m^2 塊邊長 a_{n-m+1} 的小正方形以 $m=1$的方式切割，最後拼成長爲 a_{n+m}、寬爲 a_{n-m} 的矩形(下頁圖)，縫隙面積爲 kF_m^2。



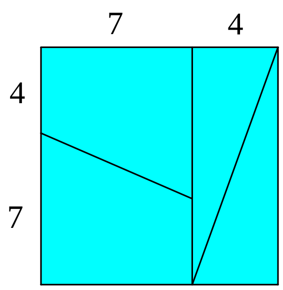


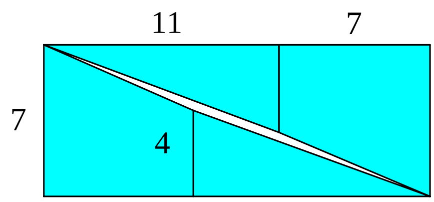
（註）此圖形並非真實圖形。圖上的數「‧」前面爲邊長，「‧」後面爲數量。

接下來我們來看看許多例子。

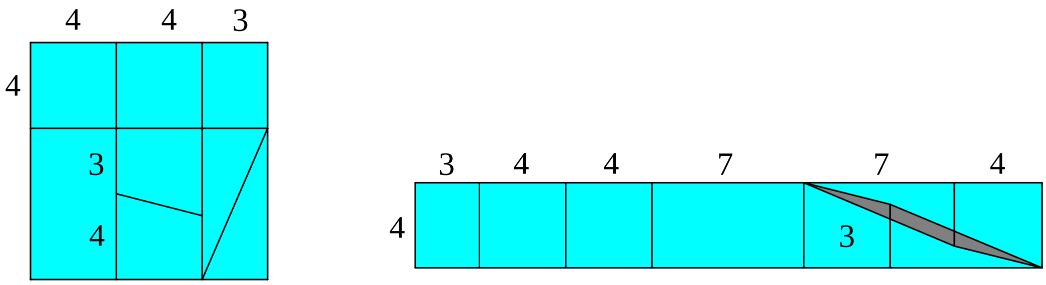
1、$a_1=1$，$a_2=3$而成的數列

（1）$n=5$，$m=1$的圖形：邊長爲11的正方形，分割後拼成長寬爲18,7的矩形，縫隙面積爲5。

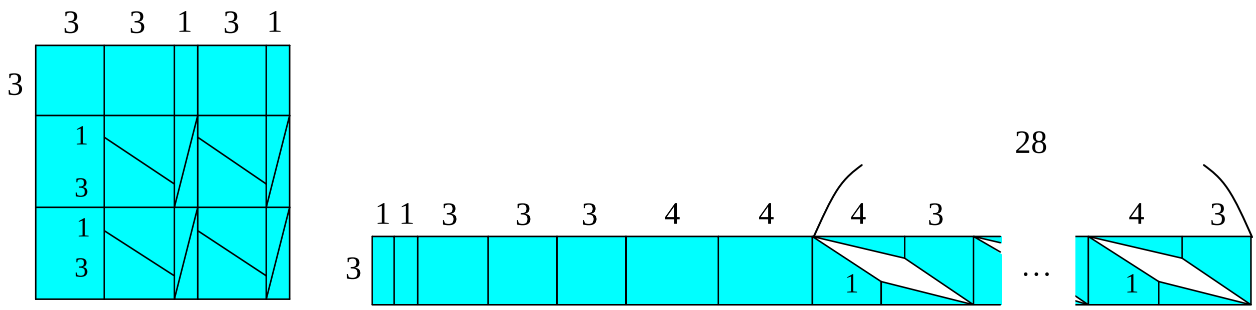




（2）$n=5$，$m=2$的圖形：邊長爲11的正方形，分割後拼成長寬爲29,4的矩形，縫隙面積爲5。

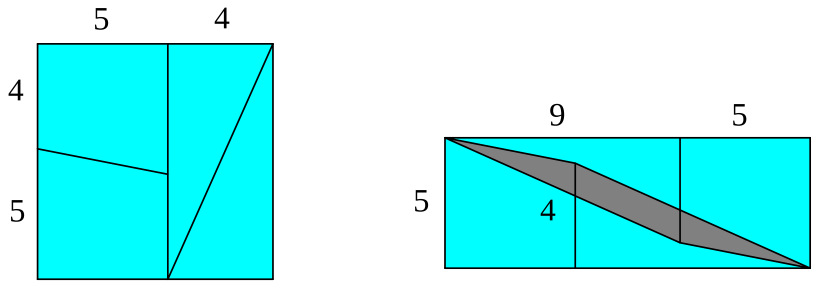


（3）$n=5$，$m=3$的圖形：邊長爲11的正方形，分割後拼成長寬爲47,3的矩形，縫隙面積爲20。

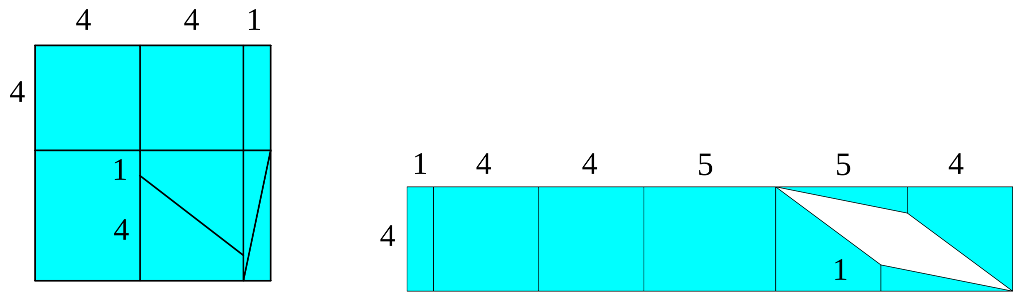


2、$a_1=1$，$a_2=4$而成的數列

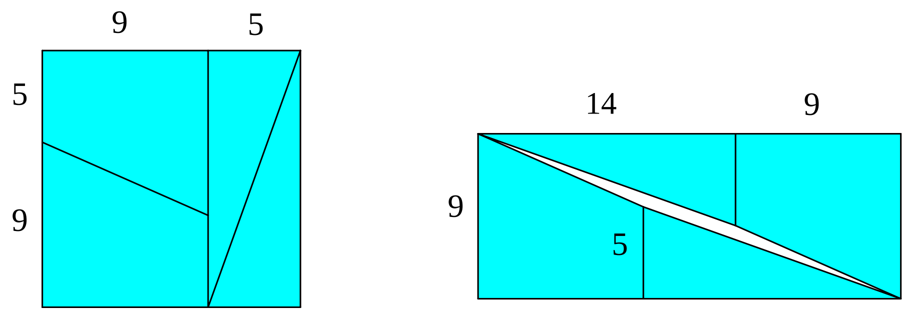
（1）$n=4$，$m=1$的圖形：邊長爲9的正方形，分割後拼成長寬爲14,5的矩形，縫隙面積爲11。



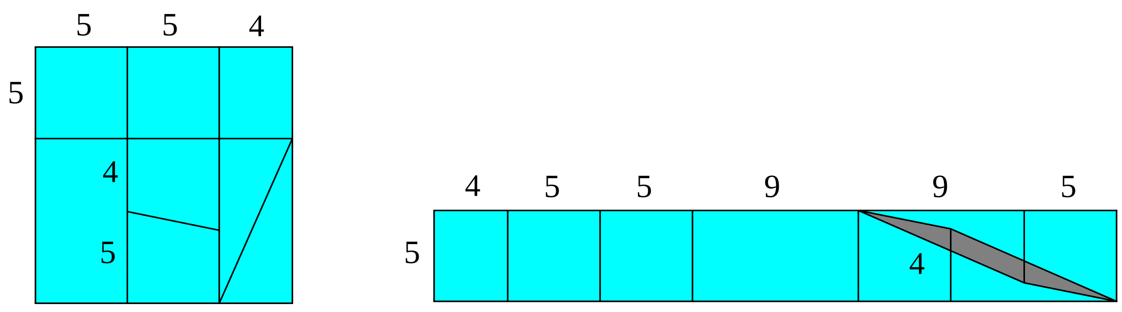
（2）$n=4$，$m=2$的圖形：邊長爲9的正方形，分割後拼成長寬爲23,4的矩形，縫隙面積爲11。



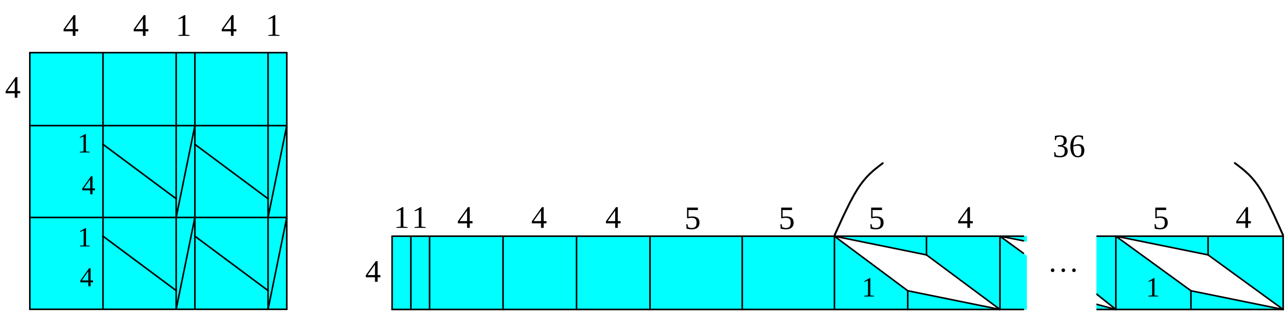
（3）$n=5$ ， $m=1$的圖形：邊長爲14的正方形，分割後拼成長寬爲23,9的矩形，縫隙面積爲11 。



（4）$n=5$ ， $m=2$的圖形：邊長爲14的正方形，分割後拼成長寬爲37,5的矩形，縫隙面積爲11 。

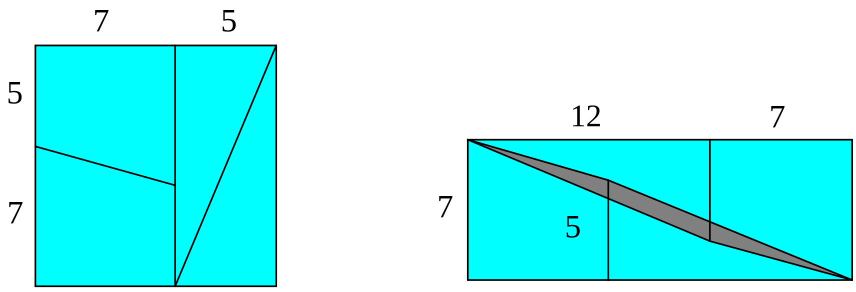


（5）$n=5$ ， $m=3$的圖形：邊長爲14的正方形，分割後拼成長寬爲60,4的矩形，縫隙面積爲44 。

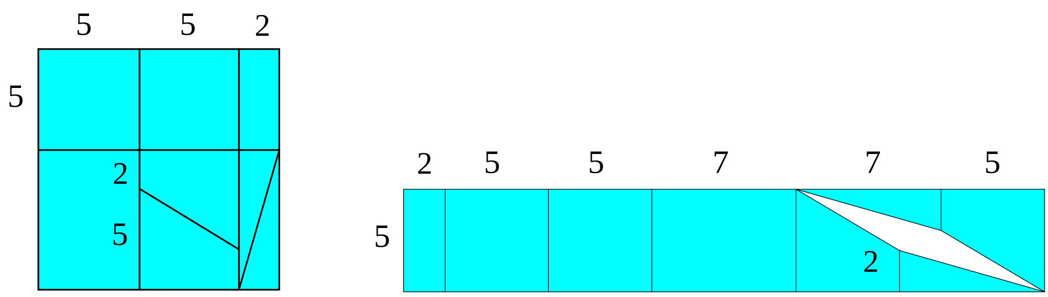


3、 $a_1=2$ ， $a_2=4$而成的數列

（1）$n=4$ ， $m=1$的圖形：邊長爲12的正方形，分割後拼成長寬爲19,7的矩形，縫隙面積爲19 。



（2）$n=4$，$m=2$的圖形：邊長爲12的正方形，分割後拼成長寬爲31,5的矩形，縫隙面積爲19。



伍、　研究結果

一、邊長爲F_n的正方形，將直列切割成F_{m+1}塊F_{n-m}、F_m塊F_{n-m-1}，橫列切割成F_{m-1}塊F_{n-m}、F_m塊F_{n-m+1}，然後把內部$F_m{}^2$塊邊長F_{n-m+1}的小正方形以$m=1$的方式切割，最後拼成長爲F_{n+m}、寬爲F_{n-m}的矩形，面積差爲$(-1)^{n+m}F_m{}^2$。

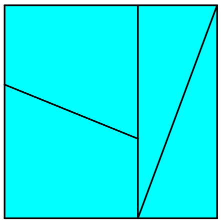
二、邊長爲a_n的正方形，將直列切割成F_{m+1}塊a_{n-m}、F_m塊a_{n-m-1}，橫列切割成F_{m-1}塊a_{n-m}、F_m塊a_{n-m+1}，然後把內部$F_m{}^2$塊邊長a_{n-m+1}的小正方形以$m=1$的方式切割，最後拼成長爲a_{n+m}、寬爲a_{n-m}的矩形，面積差爲$k(-1)^{n+m}F_m{}^2$。而圖形的一般式爲

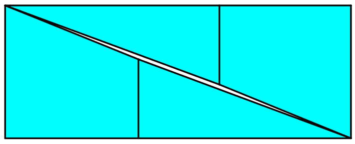
$$a_n{}^2-a_{n+m}\cdot a_{n-m}=k(-1)^{n+m+1}F_m{}^2$$ 。

陸、　討論

同樣的圖形，爲什麼正方形一定要分割成前面所呈現的樣子？

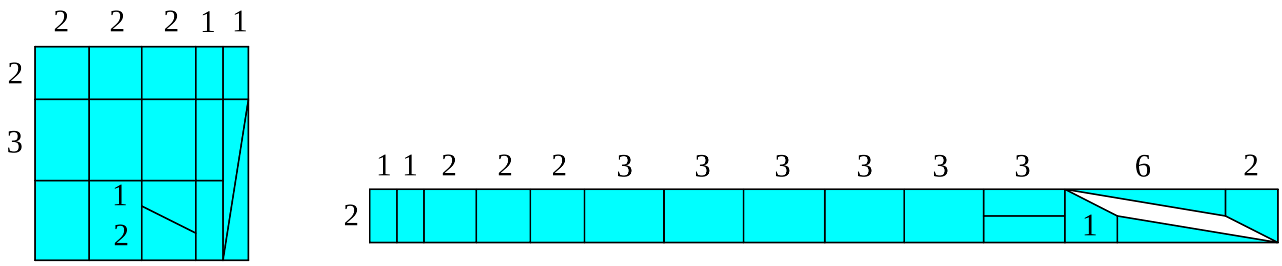
在一般書籍或網站上，我只會看到下頁圖的分割方法，並無其他的敘述。我仔細觀察到，除了斜線以外，每一個邊長皆爲 Fibonacci number。因 Fibonacci sequence 爲遞迴數列，我發現遞迴數列的相鄰數在加減上仍然也是數列中的數，及$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，若以第一項和第二項





來表示，則形成 $a_n = F_{n-2}a_{n-1} + F_{n-1}a_{n-2}$。所以當 m 不再是1時，我會在直列與橫列中以遞迴數列的特性來分割出它的數量，而至於有縫隙的矩形，我便將以分割好的正方形內部的小正方形，以原本的方式來分割即可得到。不過當 m 為3以上時，從 Catalan’s identity：

$F_n{}^2 - F_{n+m} \cdot F_{n-m} = (-1)^{n+m} F_m{}^2$ 來看，我發現縫隙面積會擴大，但其實這種問題只要在分割圖形時便可解決，因為縫隙面積為多少，正方形內部的小正方形就有多少個。但我想過：可不可以只要拼出一個縫隙面積就好了呢？答案是不行。因為我所做的縫隙矩形是由兩個梯形和兩個三角形組成，若要一次分割，拼出很長的矩形，正方形是無法供應如此長的長度來分割出三角形的，而且會沒有分割的規律。如圖一，$(x, y, n, m) = (1,1,6,3)$，圖形為邊長8的正方形分割拼成長寬為34,2的矩形，此圖形雖符合矩形的長寬、縫隙面積，但當 n 變大時皆做不出來，毫無規律可言。



圖一

柒、 參考文獻

一、吳振奎。斐波那契數列。一版。九章出版社。244 頁。民國八十二年。

二、Fibonacci Number。http://mathworld.wolfram.com/FibonacciNumber.html

三、Catalan’s Identity 。http://mathworld.wolfram.com/CatalansIdentity.html

四、Cassini’s Identity。 http://mathworld.wolfram.com/CassinisIdentity.html

評語

「創意」乃是公認的科展作品首要的價值標準。因此曝光率很自然的形成了判斷創意的負面指標。在策劃科展內容時請先上網作功課，似乎該迴避每一年的科展中都有出現類似的題材。