臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

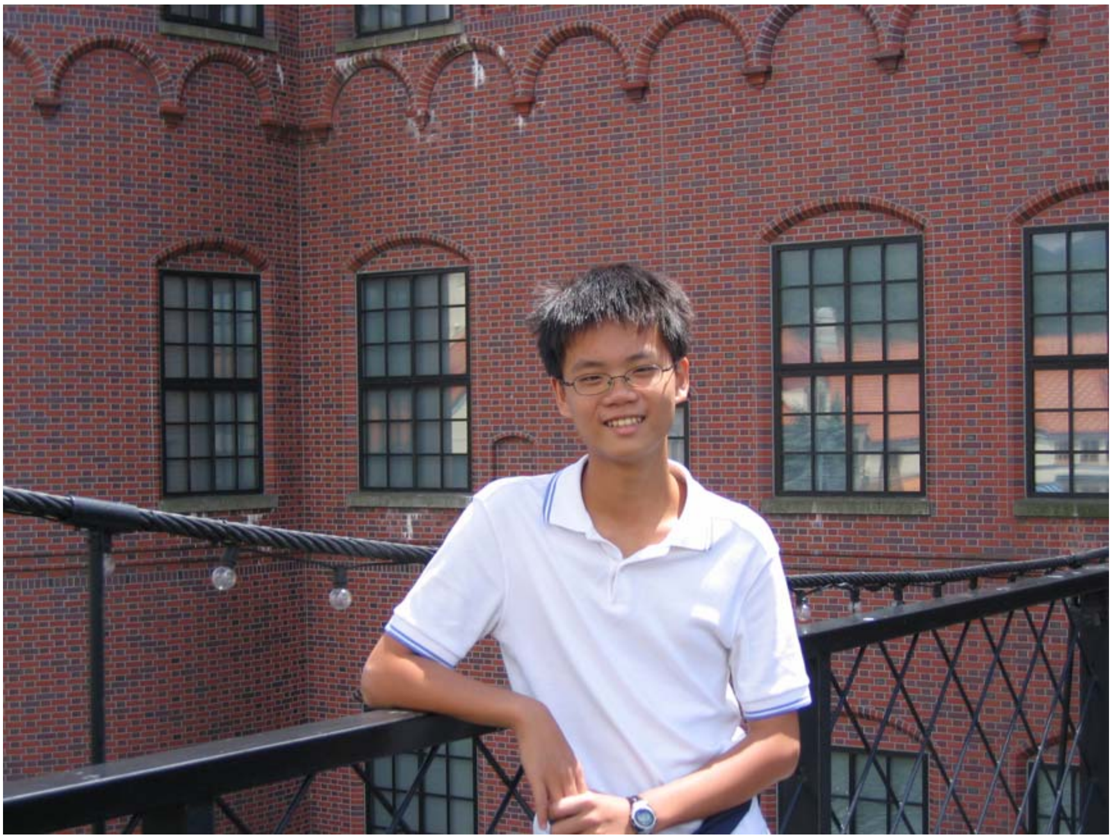
科　　　別：數學

作 品 名 稱　：殊途同歸-格子點平面最短路徑和之探討

得 獎 獎 項　：第三名

學校 / 作者　：國立高雄師範大學附屬高級中學　　吳翊瑋

作者簡介



我是吳翊瑋，目前就讀國立高雄師範大學附屬高級中學一年級。
從國中以來，就非常的喜歡數學，愛好探索一些有關數學奇特的地方，也在這個時候開始研究起數學。升上高中以後，在老師的帶領之下，有了更多的時間、更好的資源研究數學，在數學的世界挖掘數學本身的奧妙之處，也使我的思路更加清楚，更有邏輯性。
除此之外，也喜歡游泳、與同學聊天、逛逛書店，充實自我。

中文摘要

本研究從理想城鎮(Ideal City)街道開始，討論平面上相異 n 點到某一點的最短距離和。經研究後發現：當 n 為偶數時，則到相異 n 點的最短距離和所形成的區域可能是一個點、一個線段或是一個矩形；當 n 為奇數時，則相異 n 點的最短距離和所形成的區域將會退化成一個點。

此外，本研究將理想城鎮的街道換成正三角形的街道幾何平面，同樣是討論平面上相異 n 點到某一點的最短距離和。經研究後發現：當 n 為偶數時，則相異 n 點的最短距離和所形成的區域可能為一個點、一個線段、一個四邊形、一個五邊形及一個六邊形；當 n 為奇數時，相異 n 點的最短距離和所形成的區域則可能為點、三角形的情況。

假使考量各點重要性的比重，分別加權後再求最小點。研究發現無論在理想城鎮或正三角形幾何平面上，皆可將各點視為多個權數相同之點重疊於此點上，便可利用先前的方式求得最小點區域。

透過這次的研究，可以利用 n 個相異點到某一點的最短距離和實際應用在貨物運送的問題或是消防設施配置等問題。

Abstract

The present study was intended to start with the Ideal City and proceed to discuss the sum of the shortest distance between a point and *n* different points on a plane. After the discussion, it was found that if *n* is even, the formed region could be a point, a line segment, or a rectangle. If *n* is odd, then the formed region must be a mere point.

Further, the current study transformed the Ideal City into the geometric plane of an equilateral triangle. Similar to the previous discussion, if n is even, the formed region could be a point, a line segment, a quadrangle, a pentagon, or a hexagon. On the other hand, if n is odd, then the formed region could be a point, or a triangle.

The result of this study, which investigated the sum of the shortest distance of a certain point to n different points can be applied to the real life situation, such as transporting goods or distributing fire control facilities.

一、前言

(一) 研究動機

幾年前，隨著家人一起出國旅行，回程途中，全家一同搭輛計程車返家。由於飛機飛抵台灣後恰逢交通尖峰時刻，因此我們只能塞在車陣中。好心的司機嘗試著走其他小路，試著以較快的速度、較短的時間讓我們早點返回家裡。但是不幸的是司機走錯了方向，反而繞了遠路。其實，在真實生活中，受制於縱橫交錯的街道，兩地之間鮮少能以直線行進方式到達，多數是以「前後左右」的方式前進。然而，就在最近造訪了誠品書店，無意間發現了「一條線有多長」這本書。在書裡面的其中一頁提到了「計程車幾何學」這一個新奇的名詞，讓我想起了之前的慘痛經驗，並激發了我的好奇心，因此決定要好好探究一下這個特殊的街道幾何學。

(二) 研究目的

1.探討在計程車幾何中，理想城鎮(Ideal City)街道上相異 n 點$\left(n \geq 2\right)$之最小點的位置。

2.探討在正三角形幾何的街道平面上，相異 n 點$\left(n \geq 2\right)$之最小點的位置。

3.探討在計程車幾何中，理想城鎮街道上考量相異 n 點$\left(n \geq 2\right)$不同的權數時，最小點的位置。

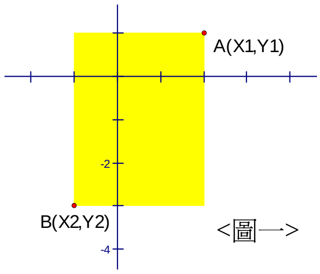
4.探討在正三角形幾何的街道平面上，若考量相異 n 點$\left(n \geq 2\right)$不同的權數時，最小點的位置。

二、研究方法與過程

(一) 相關名詞與符號之定義

1. 兩點距離和公式

在歐幾里得幾何中，給定兩點 A(X_A,Y_A)、B(X_B,Y_B)，則A、B兩點的距離為 $\sqrt{(X_A-X_B)^2+(Y_A-Y_B)^2}$，記作 $D_E(A,B)=\sqrt{(X_A-X_B)^2+(Y_A-Y_B)^2}$。而本研究則是在「計程車幾何」(Taxicab Geometry) 中，其典型的街道就是理想城鎮(Ideal City)。在這種棋盤格的街道中，任兩點的距離並不再是將兩點連成線的線段了，而是僅能以「水平」或「鉛直」方向移動，因此給定兩點 A(X_A,Y_A)、B(X_B,Y_B)，則A、B兩點的距離定義為$|X_1-X_2|+|Y_1-Y_2|$(參見圖一)，記作 $D_T(A,B)=|X_A-X_B|+|Y_A-Y_B|$。



<圖一>

2. 費馬點與最小點

費馬點(Fermat Point)是由法國的數學家費馬(Pierre de Fermat,1601-1665)所提出的，他定義費馬點為「在平面上找一個點，使此點到已知三角形三個頂點的距離和為最小」。由於費馬所定義的費馬點，只限於在歐幾里得幾何學才可以使用，而本研究並非建立在歐幾里得幾何上，而是在計程車幾何學裡。因為兩點距離無法直接地穿越一個個街區，因此費馬所定義的費馬點無法在呈現出來。為了能與歐幾里得幾何的費馬點區別，因此本研究定義「在計程車幾何平面上，若存在某點到已知 n 個點(n≧2)的距離和為最小值」，此點稱為「最小點」 (minimum)。

3. 理想城鎮街道上，某點到相異兩點距離和的最小值所成的集合

在歐幾里得幾何中，若P、A、B為平面上相異三點，則$\overline{PA}+\overline{PB}\geq\overline{AB}$。當P點在$\overline{AB}$上，則$\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{AB}$（即$D_E(P,A)+D_E(P,B)=D_E(A,B)$）。因此，在歐幾里得平面上，到A、B兩點距離和的最小值恰為A、B兩點距離，且所成之點集合為$\overline{AB}$線段。

在計程車幾何平面上，為了定義相異兩點之最小點，先證明下面性質。

性質 1：設 A$\left(X_A,Y_A\right)$、B$\left(X_B,Y_B\right)$、C$\left(X_C,Y_C\right)$爲平面上相異三點，試證

$D_T\left(A,B\right)+D_T\left(B,C\right)\geq D_T\left(A,C\right)$。

（利用三角不等式$|A|+|B|\geq|A+B|$，等號成立時$AB\geq 0$）

證明：

$$\begin{aligned}&D_T\left(A,B\right)+D_T\left(B,C\right)\\&=\left|X_A-X_B\right|+\left|Y_A-Y_B\right|+\left|X_B-X_C\right|+\left|Y_B-Y_C\right|\\&\geq\left|\left(X_A-X_B\right)+\left(X_B-X_C\right)\right|+\left|\left(Y_A-Y_B\right)+\left(Y_B-Y_C\right)\right|\\&=\left|X_A-X_C\right|+\left|Y_A-Y_C\right|\\&=D_T\left(A,C\right)\end{aligned}$$

所以$D_T\left(A,B\right)+D_T\left(B,C\right)\geq D_T\left(A,C\right)$

由性質一知，若 A、B、P 爲計程車幾何平面上相異三點，則$D_T\left(P,A\right)+D_T\left(P,B\right)\geq D_T\left(A,B\right)$。因此，到 A 、 B 兩點距離和的最小值恰爲 A 、 B 兩點距離。若$D_T\left(P,A\right)+D_T\left(P,B\right)=D_T\left(A,B\right)$，則稱 P 點爲 A、B 的最小點；反之，若 P 點不爲 A、B 的最小點，則$D_T\left(P,A\right)+D_T\left(P,B\right)>D_T\left(A,B\right)$。下面我們將討論 P 點爲相異兩點的最小點所成集合的範圍。

性質 2：A$\left(X_A,Y_A\right)$、B$\left(X_B,Y_B\right)$爲相異兩點，不失一般性，假設$X_A\geq X_B$，$Y_A\geq Y_B$，若點 P$\left(X,Y\right)$爲 A、B 的最小點，則$X_B\leq X\leq X_A$，$Y_B\leq Y\leq Y_A$。

證明：若點 P$\left(X,Y\right)$爲 A、B 的最小點，則

$$\begin{aligned}&D_T\left(P,A\right)+D_T\left(P,B\right)=D_T\left(A,B\right)\\&\Rightarrow\left|X_A-X\right|+\left|Y_A-Y\right|+\left|X_B-X\right|+\left|Y_B-Y\right|=\left|X_A-X_B\right|+\left|Y_A-Y_B\right|\\&\Rightarrow\left|X_A-X\right|+\left|X_B-X\right|=\left|X_A-X_B\right|=X_A-X_B\end{aligned}$$

且$\left|Y_A-Y\right|+\left|Y_B-Y\right|=\left|Y_A-Y_B\right|=Y_A-Y_B$

由三角不等式$\left|X_A-X\right|+\left|X-X_B\right|\geq\left|X_A-X_B\right|$等號成立時

$$\left(X_A-X\right)\left(X-X_B\right)\geq 0$$
$$\left(X-X_A\right)\left(X-X_B\right)\leq 0$$
$$X_B\leq X\leq X_A$$

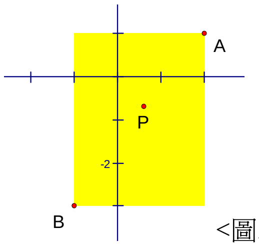
同理$Y_B\leq Y\leq Y_A$

因此，若點 P 爲 A、B 的最小點，則 P 點所成的集合爲

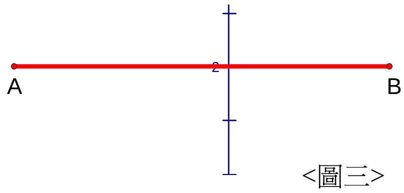
$\left\{\left(X,Y\right)\mid X_B\leq X\leq X_A,Y_B\leq Y\leq Y_A\right\}$。

在計程車幾何平面上，任取相異兩點 A、B，找出最小點所成集合的範圍，其所圍成的圖形可能爲一個矩形（如圖二）或一線段（如圖三），記爲 $R(A,B)$。

因此，$R(A,B)$ 表示此矩形或線段上的格子點皆爲 A、B 兩點的最小點。



<圖二>



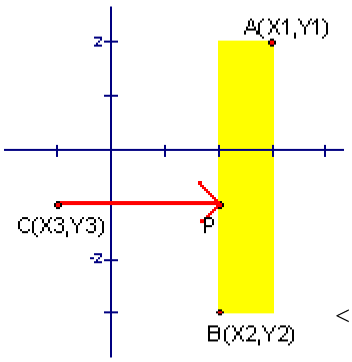
<圖三>

此區域的格子點都是最小點　　　　此線段的格子點都是最小點

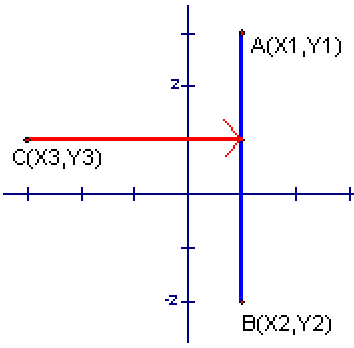
在計程車幾何平面上，給定相異 n 點 $A_1, A_2, ..., A_n$，若點 P 使得 $D_T(P,A_1)+D_T(P,A_2)+...+D_T(P,A_n)$ 爲最小值，則 P 點稱爲 $A_1, A_2, ..., A_n$ 的最小點，而 P 點所成的集合稱爲最小點區域。

(二) 理想城鎮街道上，探討三點的最小點

在計程車幾何平面上任取相異三點，分別爲 A、B、C，先將其中一點 C 遮去，使平面上只剩下二點 A、B，利用 A、B 兩點圍成一矩形或一線段 $R(A,B)$，則再從 $R(A,B)$ 中找出其中一點 P，使 P 點到原先遮去的 C 點的距離爲最短（如圖），則 P 點即爲所求。



<圖四>



<圖五>

證明：

設相異三點爲 A、B、C，

由相異兩點之最小點的作法，可先利用 A、B 兩點作出 $R(A,B)$ 爲 A、B 的最小點區域。

此時，$\forall P \in R(A,B)$，則 $D_T(P,A)+D_T(P,B) \le D_T(Q,A)+D_T(Q,B)$，其中 Q 爲任意點，

若使得 $D_T(P,C)$ 的距離最短，則

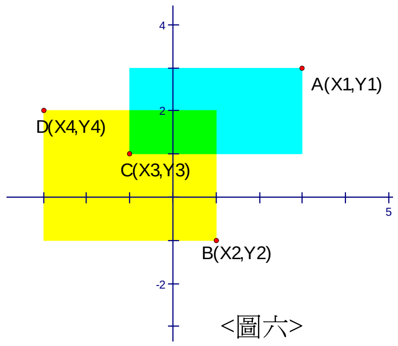
$$D_T(P,A)+D_T(P,B)+D_T(P,C)\le D_T(Q,A)+D_T(Q,B)+D_T(P,C)$$

$\le D_T(Q,A)+D_T(Q,B)+D_T(Q,C)$，其中 Q 爲任意點，

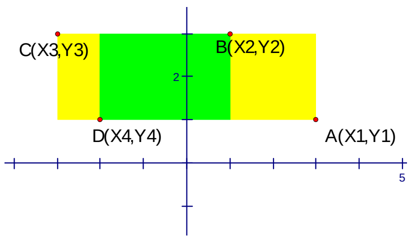
則 P 點即爲三點之最小點。

(三) 理想城鎮街道上，探討四點的最小點

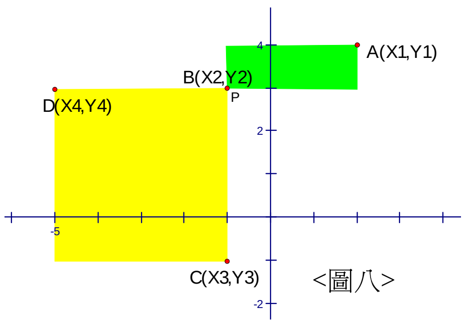
在計程車幾何平面上任取相異四點，先利用其中兩點 A,C 繪出 $R(A,C)$，再利用剩餘兩點 B,D 繪出另一個 $R(B,D)$。由於每個圖形（矩形或線段）分別是其中兩點之最小點區域，因此，兩圖形之重疊區域應是這四點之最小點區域。由於四點中任取兩點所圍成之二個圖形至多有三種情況，必須經由適當之選取，使得兩圖形之交集不爲 ϕ 時，兩圖形重疊區域才爲此四點之最小點區域。



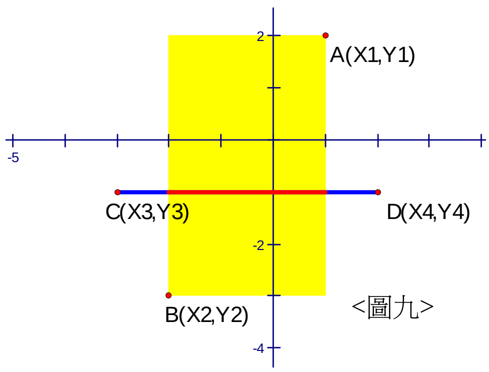
<圖六>



<圖七>



<圖八>



<圖九>

圖六、圖七、圖八、圖九中的綠色區域及圖八中的 P 點與圖九中的紅色線段皆爲最小點區域

證明：

設四點為 $A(X_1,Y_1)$、$B(X_2,Y_2)$、$C(X_3,Y_3)$、$D(X_4,Y_4)$，且 $R(A,C)\cap R(B,D)\neq\phi$

令 $P\in R(A,C)\cap R(B,D)$， $Q\notin R(A,C)\cap R(B,D)$

$$
\begin{aligned}
&\therefore P\in R(A,C)\cap R(B,D)\\
&\Leftrightarrow P\in R(A,C)\text{且}P\in R(B,D)\\
&\Leftrightarrow D_T(A,C)=D_T(P,A)+D_T(P,C)\text{且}D_T(B,D)=D_T(P,B)+D_T(P,D)
\end{aligned}
$$

$$\therefore D_T(P,A)+D_T(P,B)+D_T(P,C)+D_T(P,D)=D_T(A,C)+D_T(B,D)——(1)$$

$$
\begin{aligned}
&\text{又}Q\notin R(A,C)\cap R(B,D)\\
&\Leftrightarrow Q\notin\in R(A,C)\text{或}Q\notin R(B,D)\\
&\Leftrightarrow D_T(Q,A)+D_T(Q,C)>D_T(A,C)\text{或}D_T(Q,B)+D_T(Q,D)>D_T(B,D)\\
&\therefore D_T(Q,A)+D_T(Q,B)+D_T(Q,C)+D_T(Q,D)>D_T(A,C)+D_T(B,D)\\
&\text{由}(1)=D_T(P,A)+D_T(P,B)+D_T(P,C)+D_T(P,D)
\end{aligned}
$$

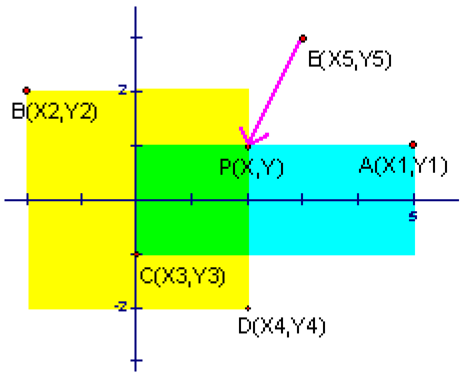
因此，

$$
\begin{aligned}
&D_T(Q,A)+D_T(Q,B)+D_T(Q,C)+D_T(Q,D)\\
&>D_T(P,A)+D_T(P,B)+D_T(P,C)+D_T(P,D)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ P 點為 A、B、C、D 的最小點。

(四)理想城鎮街道上，探討五點的最小點

在計程車幾何平面上任取相異五點，先將其中一點 E 遮去，使平面上只剩下四個點。利用四點之最小點的作法先找出 A、B、C、D 的最小點區域，再從此區域中找出其中一點 P，使 P 點到原先遮去的 E 點的距離為最短，則 P 點即為五點之最小點。



<圖十>

證明：
設相異五點爲 A、B、C、D、E，
由(三)四點之最小點的作法，可先利用 A、B、C、D 四點作出

$R(A,C)\cap R(B,D)\neq\phi$ 爲 A、B、C、D 的最小點區域。

此時，$\forall P\in R(A,C)\cap R(B,D)$，則 $D_T(P,A)+D_T(P,B)+D_T(P,C)+D_T(P,D)\leq$

$D_T(Q,A)+D_T(Q,B)+D_T(Q,C)+D_T(Q,D)$，其中 Q 爲任意點，

若使得 $D_T(P,E)$ 的距離最短，則

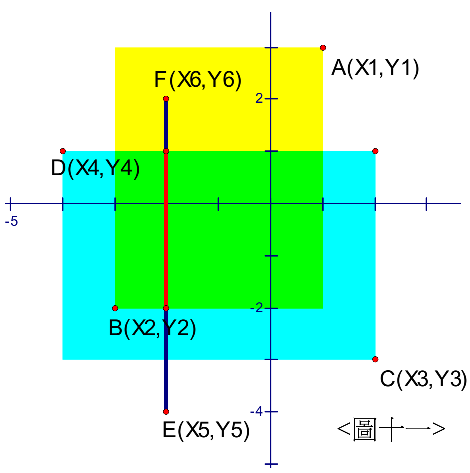
$$D_T(P,A)+D_T(P,B)+D_T(P,C)+D_T(P,D)+D_T(P,E)$$

$$\leq D_T(Q,A)+D_T(Q,B)+D_T(Q,C)+D_T(Q,D)+D_T(P,E)$$

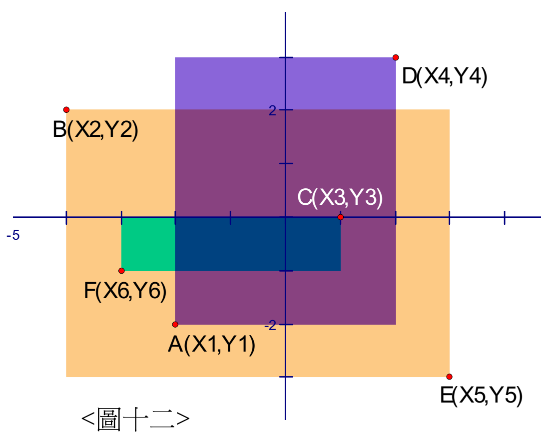
$$\leq D_T(Q,A)+D_T(Q,B)+D_T(Q,C)+D_T(Q,D)+D_T(Q,E)$$，其中 Q 爲任意點，

則 P 點即爲五點之最小點。

(五)理想城鎮街道上，探討六點的最小點
在計程車幾何平面上，任取相異六點，仿四點之最小點之作法，分別利用其中兩點圍出三個圖形（可能爲矩形或線段）。由於每個圖形分別是其中兩點之最小點區域，因此，三圖形之重疊區域應是這六點之最小點區域。由於六點中任取兩點所圍成之三個圖形至多有十五種，因此必須經由適當之選取，使得三圖形之交集不爲 ϕ 時，此三圖形重疊區域才爲此六點之最小點區域。



<圖十一>



<圖十二>

圖十一的紅線及圖十二的深藍色區域皆爲六點的最小點

證明：

設六點爲 $A(X_1,Y_1)$、$B(X_2,Y_2)$、$C(X_3,Y_3)$、$D(X_4,Y_4)$、$E(X_5,Y_5)$、$F(X_6,Y_6)$，

且 $R(A,D)\cap R(B,E)\cap R(C,F)\neq\phi$

令 $P\in R(A,D)\cap R(B,E)\cap R(C,F)$，$Q\notin R(A,D)\cap R(B,E)\cap R(C,F)$

$\therefore P\in R(A,D)\cap R(B,E)\cap R(C,F)$

$\Leftrightarrow P\in R(A,D)$且$P\in R(B,E)$且$P\in(C,F)$

$\Leftrightarrow D_T(A,D)=D_T(P,A)+D_T(P,D)$且$D_T(B,E)=D_T(P,B)+D_T(P,E)$

且$D_T(C,F)=D_T(P,C)+D_T(P,F)$

$\therefore D_T(P,A)+D_T(P,B)+D_T(P,C)+D_T(P,D)+D_T(P,E)+D_T(P,F)$

$=D_T(A,D)+D_T(B,E)+D_T(C,F)$——(1)

又$Q\notin R(A,D)\cap R(B,E)\cap R(C,F)$

$\Leftrightarrow Q\notin\in R(A,D)$或$Q\notin R(B,E)$或$Q\notin R(C,F)$

$\Leftrightarrow D_T(Q,A)+D_T(Q,D)>D_T(A,D)$或

$D_T(Q,B)+D_T(Q,E)>D_T(B,E)$或

$D_T(Q,C)+D_T(Q,F)>D_T(C,F)$

$\therefore D_T(Q,A)+D_T(Q,B)+D_T(Q,C)+D_T(Q,D)+D_T(Q,E)+D_T(Q,F)$

$>D_T(A,D)+D_T(B,E)+D_T(C,F)$

由$(1)=D_T(P,A)+D_T(P,B)+D_T(P,C)+D_T(P,D)+D_T(P,E)+D_T(P,F)$

因此，$D_T(Q,A)+D_T(Q,B)+D_T(Q,C)+D_T(Q,D)+D_T(Q,E)+D_T(Q,F)$

$>D_T(P,A)+D_T(P,B)+D_T(P,C)+D_T(P,D)+D_T(P,E)+D_T(P,F)$

得知 P 點爲 A、B、C、D、E、F 的最小點。

(六)理想城鎮街道上，探討上 n 個點的最小點

在計程車幾何平面，理想城鎮街道上任取 n 個相異點，由於未知數 n 爲偶數或奇數的最小點找法不同，所以以下爲分成兩個方向來進行討論：

1. 若 n 爲偶數

(1) 先將平面上 n 個點由左到右依序標記爲$(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)\cdots(X_{n-1},Y_{n-1}),(X_n,Y_n)$ 則 $X_1\le X_2\le\cdots\le X_n$。先取最左邊及最右邊的兩點，令其圍成的圖形（可能爲矩形或線段）爲 $R_1=\{(X,Y)|X_1\le X\le X_n,Y_1\le Y\le Y_n\}$，再取第二左及第二右的兩點令其圍成的圖形爲 $R_2=\{(X,Y)|X_2\le X\le X_{n-1},Y_2\le Y\le Y_{n-1}\}$，⋯，則最

中間兩點圍成的圖形爲 $R_{\frac{n}{2}}=\left\{(X,Y)\middle|\ X_{\frac{n}{2}}\le X\le X_{\frac{n}{2}+1},Y_{\frac{n}{2}}\le Y\le Y_{\frac{n}{2}+1}\right\}$，由此推得

共有 $\frac{n}{2}$ 個圖形，即 $R_i=\left\{(X,Y)|X_i\le X\le X_{n+1-i},Y_i\le Y\le Y_{n+1-i}\right\}$，其中

$i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$。

取 $S_1=R_1\cap R_2\cap R_3\cap\cdots\cap R_{\frac{n}{2}}$，則 S_1 即爲 n 點橫向的最小點區域。

(2) 再將點由上到下重新標記爲 $(X_1',Y_1'),(X_2',Y_2')\cdots(X_{n-1}',Y_{n-1}'),(X_n',Y_n')$ 其中

$Y_1'\ge Y_2'\ge\cdots\ge Y_n'$，取最上及最下的兩點爲成矩形，令所圍成之圖形（可能爲矩形或線段）爲 $R_1'=\left\{(X,Y)|X_n'\le X\le X_1',Y_n'\le Y\le Y_1'\right\}$，再取第二上左及第二下的兩點令其圍成的圖形爲 $R_2'=\left\{(X,Y)|X_{n-1}'\le X\le X_2',Y_{n-1}'\le Y\le Y_2'\right\}$，…，則最中間兩點圍成的圖形爲 $R_{\frac{n}{2}}'=\left\{(X,Y)\middle|\ X_{\frac{n}{2}+1}'\le X\le X_{\frac{n}{2}}',Y_{\frac{n}{2}+1}'\le Y\le Y_{\frac{n}{2}}'\right\}$，由此推得共有 $\frac{n}{2}$ 個圖形，即 $R_i=\left\{(X,Y)|X_{n+1-i}\le X\le X_i,Y_{n+1-i}\le Y\le Y_i\right\}$，其中 $i=1,2,\cdots,\frac{n}{2}$。

取 $S_2=R_1'\cap R_2'\cap R_3'\cap\cdots\cap R_{\frac{n}{2}}'$，則 S_2 即爲 n 點縱向的最小點區域。

由(1)(2)得 S_1、S_2 兩方向取得的最小點區域，將 $S_1\cap S_2$ 得新區域 R，則 R 就是 n 個偶數點的最小點區域。

2. 若 n 爲奇數點

若 n 爲奇數，則先遮去其中的任意一點 A，使理想城鎮街道平面僅存 $(n-1)$ 個偶數點，利用 1.的方法找出最小點區域爲 R，R 內取一點 P 使 $D_T(P,A)$ 的距離最短，則 P 即爲 n 個奇數點的最小點。

其實，在研究過程中不難發現，最小點之區域位置似乎與「中位數」有關。因此，本研究除了上述以若干區域交集的方式找出最小點外，另外試圖找出更直觀之方式來判斷 n 個點的最小點區域。

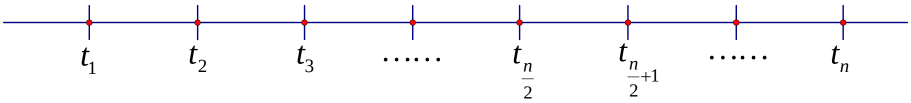
定理 1：設 $f(t)=|t-t_1|+|t-t_2|+|t-t_3|+\cdots+|t-t_n|$，其中 $t_1\le t_2\le\cdots\le t_n$，

則(1)當 n 為偶數時，$t\in\left[t_{\frac{n}{2}},t_{\frac{n}{2}+1}\right]$時，$f(t)$有最小值。

(2)當 n 為奇數時，$t=t_{\frac{n+1}{2}}$時，$f(t)$有最小值。

證明：

(1)當 n 為偶數



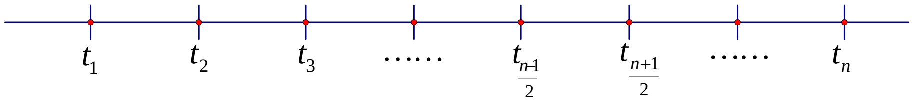
$$\begin{aligned}
f(t)&=|t-t_1|+|t-t_2|+\cdots+\left|t-t_{\frac{n}{2}}\right|+\left|t-t_{\frac{n}{2}+1}\right|+\cdots+|t-t_{n-1}|+|t-t_n|\\
&=|t-t_1|+|t-t_2|+\cdots+\left|t-t_{\frac{n}{2}}\right|+\left|t_{\frac{n}{2}+1}-t\right|+\cdots+|t_{n-1}-t|+|t_n-t|\\
&\ge(t_n-t_1)+(t_{n-1}-t_2)+\cdots+\left(t_{\frac{n}{2}+1}-t_{\frac{n}{2}}\right)
\end{aligned}$$

取$t^*\in\left[t_{\frac{n}{2}},t_{\frac{n}{2}+1}\right]$

$$\begin{aligned}
&=(t_n-t^*)+(t^*-t_1)+(t_{n-1}-t^*)+(t^*-t_2)+\cdots+\left(t_{\frac{n}{2}+1}-t^*\right)+\left(t^*-t_{\frac{n}{2}}\right)\\
&=(t^*-t_1)+(t^*-t_2)+\cdots+\left(t^*-t_{\frac{n}{2}}\right)+\left(t_{\frac{n}{2}+1}-t^*\right)+\cdots+(t_{n-1}-t^*)+(t_n-t^*)\\
&=|t^*-t_1|+|t^*-t_2|+\cdots+\left|t^*-t_{\frac{n}{2}}\right|+\left|t^*-t_{\frac{n}{2}+1}\right|+\cdots+|t^*-t_{n-1}|+|t^*-t_n|\\
&=f(t^*)
\end{aligned}$$

故當$t^*\in\left[t_{\frac{n}{2}},t_{\frac{n}{2}+1}\right]$時，$f(t)$有最小值$f(t^*)$。

(2)當 n 爲奇數



$$
\begin{aligned}
f(t) &= |t-t_1| + |t-t_2| + \cdots + \left|t-t_{\frac{n-1}{2}}\right| + \left|t-t_{\frac{n+1}{2}}\right| + \left|t-t_{\frac{n+3}{2}}\right| + \cdots + |t-t_{n-1}| + |t-t_n| \\
&= |t-t_1| + |t-t_2| + \cdots + \left|t-t_{\frac{n-1}{2}}\right| + \left|t-t_{\frac{n+1}{2}}\right| + \left|t_{\frac{n+3}{2}}-t\right| + \cdots + |t_{n-1}-t| + |t_n-t| \\
&\geq (t_n-t_1) + (t_{n-1}-t_2) + \cdots + \left(t_{\frac{n+3}{2}} - t_{\frac{n-1}{2}}\right) + \left|t-t_{\frac{n+1}{2}}\right|
\end{aligned}
$$

若$t = t_{\frac{n+1}{2}}$時，則$\left|t-t_{\frac{n+1}{2}}\right| = 0$

此時

$$
\begin{aligned}
f(t)\text{有}\min &= (t_n-t_1) + (t_{n-1}-t_2) + \cdots + \left(t_{\frac{n+3}{2}} - t_{\frac{n-1}{2}}\right) \\
&= \left(t_n - t_{\frac{n+1}{2}}\right) + \left(t_{\frac{n+1}{2}} - t_1\right) + \left(t_{\frac{n+1}{2}} - t_2\right) + \cdots + \left(t_{\frac{n+3}{2}} - t_{\frac{n+1}{2}}\right) + \left(t_{\frac{n+1}{2}} - t_{\frac{n-1}{2}}\right) \\
&= \left(t_{\frac{n+1}{2}} - t_1\right) + \left(t_{\frac{n+1}{2}} - t_2\right) + \cdots + \left(t_{\frac{n+1}{2}} - t_{\frac{n-1}{2}}\right) + \left(t_{\frac{n+1}{2}} - t_{\frac{n+1}{2}}\right) + \\
&\quad \left(t_{\frac{n+3}{2}} - t_{\frac{n+1}{2}}\right) + \cdots + \left(t_n - t_{\frac{n+1}{2}}\right) \\
&= \left|t_{\frac{n+1}{2}} - t_1\right| + \left|t_{\frac{n+1}{2}} - t_2\right| + \cdots + \left|t_{\frac{n+1}{2}} - t_{\frac{n-1}{2}}\right| + \left|t_{\frac{n+1}{2}} - t_{\frac{n+1}{2}}\right| + \left|t_{\frac{n+1}{2}} - t_{\frac{n+3}{2}}\right| + \cdots + \left|t_{\frac{n+1}{2}} - t_n\right| \\
&= f\left(t_{\frac{n+1}{2}}\right)
\end{aligned}
$$

故當$t = t_{\frac{n+1}{2}}$時，$f(t)$有最小值$f\left(t_{\frac{n+1}{2}}\right)$。

因此，設$f(t) = |t-t_1| + |t-t_2| + |t-t_3| + \cdots + |t-t_n|$，則當$t$爲$t_1, t_2, \cdots, t_n$之中位數時，

$f(t)$有最小值。

定理 2：在計程車幾何平面之理想城鎮街道上，任取相異 n 個點 $A_1\left(X_1,Y_1\right)$、$A_2\left(X_2,Y_2\right)$、….、$A_n\left(X_n,Y_n\right)$，則當分別取 $X_1,X_2,...,X_n$ 之中位數 X_0 及 $Y_1,Y_2,...,Y_n$ 之中位數 Y_0，$P\left(X_0,Y_0\right)$ 為此相異 n 個點的最小點，$P\left(X_0,Y_0\right)$ 所成的集合即為此相異 n 個點的最小點區域。

證明：

設平面上相異 n 個點為 $A_1\left(X_1,Y_1\right)$、$A_2\left(X_2,Y_2\right)$、⋯、$A_n\left(X_n,Y_n\right)$，

並取 $P\left(X,Y\right)$ 為任意點，則

$$
\begin{aligned}
&D_T\left(A_1,P\right)+D_T\left(A_2,P\right)+...+D_T\left(A_n,P\right)\\
&=\left(\left|X-X_1\right|+\left|Y-Y_1\right|\right)+\left(\left|X-X_2\right|+\left|Y-Y_2\right|\right)+...+\left(\left|X-X_n\right|+\left|Y-Y_n\right|\right)\\
&=\left(\left|X-X_1\right|+\left|X-X_2\right|+...+\left|X-X_n\right|\right)+\left(\left|Y-Y_1\right|+\left|Y-Y_2\right|+...+\left|Y-Y_n\right|\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\left|X-X_i\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|Y-Y_i\right|
\end{aligned}
$$

設 $f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\left|X-X_i\right|,\ g\left(y\right)=\sum_{k=1}^{n}\left|Y-Y_i\right|$，則

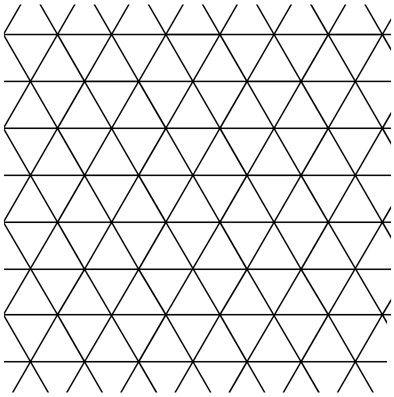
$$D_T\left(A_1,P\right)+D_T\left(A_2,P\right)+...+D_T\left(A_n,P\right)=f\left(x\right)+g\left(y\right)$$

分別探討 $f\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}\left|X-X_i\right|$ 與 $g\left(y\right)=\sum_{k=1}^{n}\left|Y-Y_i\right|$ 之最小值，此時 $P\left(X,Y\right)$ 即為相異 n 個點之最小點。

由定理 1，分別取 $X_1,X_2,...,X_n$ 之中位數 X_0 及 $Y_1,Y_2,...,Y_n$ 之中位數 Y_0，則 $P\left(X_0,Y_0\right)$ 即為所求。

(七)正三角形幾何平面中相關名詞的定義

將計程車幾何平面上，理想城鎮街道改變為正三角形街道(如圖十三)，為了本研究之需要，因此必須將此種正三角形街道定義出新的平面座標。



<圖十三>

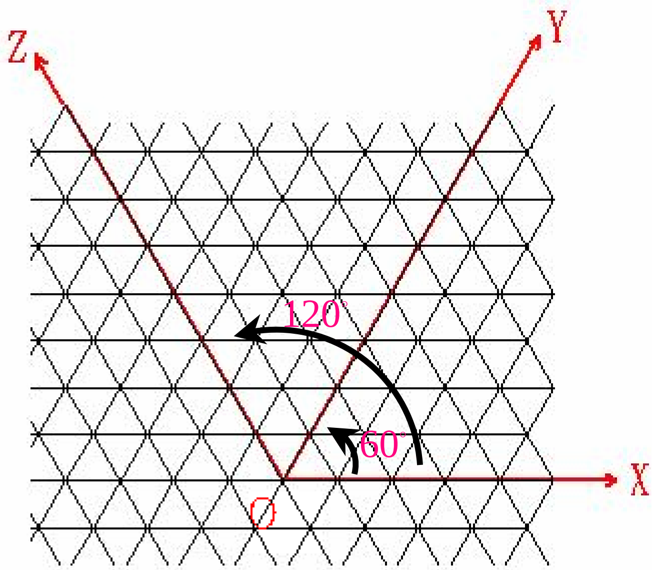
1.正三角形幾何平面：

(1) 由於正三角形街道(如圖十四)有三個不同方向，因此，在平面上取一街道交點為 O。以 O 為原點，令水平方向為 X 軸（右為正向），與 X 軸正向逆時針方向夾60°的為 Y 軸，與 X 軸正向逆時針方向夾120°的為 Z 軸；

(2) 正三角形街道上，每一正三角形的邊長為一個單位；

(3) 正三角形街道上，每一個街道交點座標表示法為(X,Y,Z)，其中 $X,Y,Z\in Z$ 。

本研究定義此種街道為「正三角形幾何平面」。



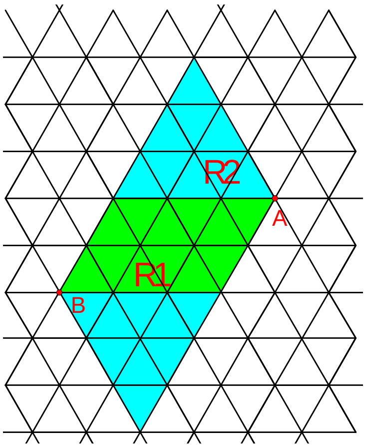
<圖十四>

2.中心點區域：

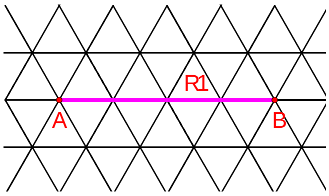
在正三角形幾何平面上，街道有 X,Y,Z 軸等三個不同方向。若只針對”某一個特定方向”，探討平面上任取相異 n 點之最小點區域，由於此區域內的交點僅是此特定方向之最小點，並非所有交點皆是此相異 n 點之最小點。因此，為了與最小點區域區別，將只針對”某一個特定方向” 之最小點區域稱為「中心點區域」。故中心點區域內的交點僅表示為最小點可能發生之處。

(八)正三角形幾何平面上兩點的最小點

在正三角形幾何平面上，任取相異兩點 A、B，探討找出最小點的位置。研究發現，最小點區域的找法可以利用 A、B 兩點圍成一個平行四邊形（如圖十五）或恰爲一線段（如圖十六）。

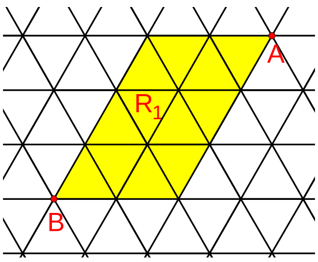


<圖十五>

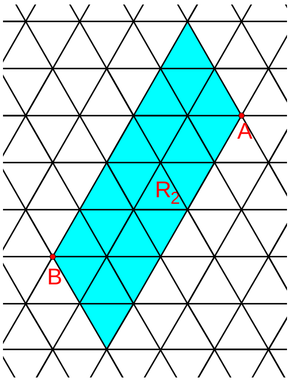


<圖十六>

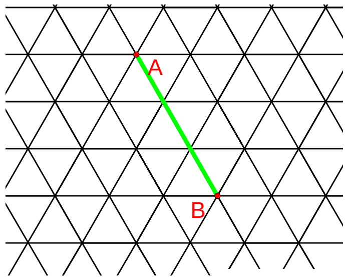
1. 當所圍成圖形爲平行四邊形時，則以 A、B 爲對角線頂點所圍成的平行四邊形可能有兩種分別爲 R_1及R_2 (如圖十七、十八)，若 $R=\min\{R_1\text{面積}, R_2\text{面積}\}$ ，則 R 內所有的交點皆爲最小點；因此， R 爲 A、B 的最小點區域。
   如圖十七、十八： R_1面積<R_2面積 $\therefore$ R_1爲A、B 最小點區域。
2. 當所圍成圖形爲一線段(如圖十九)，則線段 $\overline{AB}$ 上所有的交點皆爲最小點區域。



<圖十七>



<圖十八>

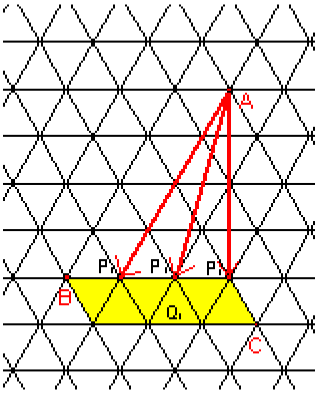


<圖十九>

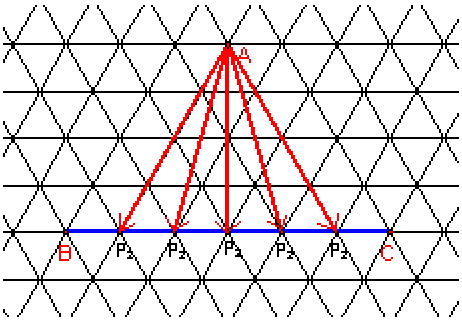
(九)正三角形幾何平面上三點的最小點

1．在正三角形幾何平面上，已知相異三點 A、B、C。先遮去 A 點，使平面上只剩下 B、C 兩點，利用兩點的最小點的找法，圍出一平行四邊形（或線段）之最小點區域 Q_1 ，在 Q_1 中找出所有的點 P_1 (可能不只一個)(如圖二十、二十

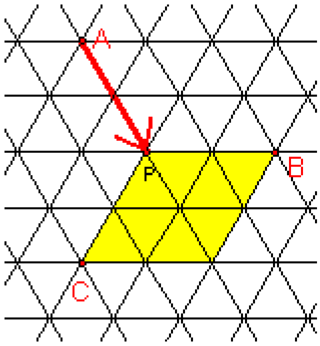
一、二十二)，使得P_1到 A 點的距離最短，則滿足上述性質的點P_1所成集合設爲R_1，則R_1爲 A、B、C 的最小點區域。



<圖二十>



<圖二十一>

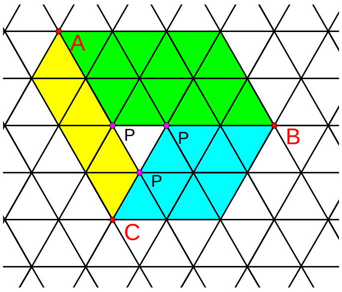


<圖二十二>

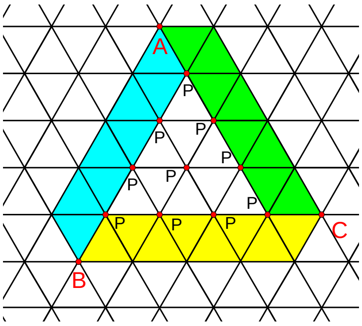
2. 同理，遮去 B 點，使平面上只剩 A、C 兩點，利用 A、C 兩點圍出另一平行四邊形（或線段）之最小點區域Q_2，再從Q_2中找出所有點P_2(可能不只一個)，使得P_2到 B 點的距離最短，滿足上述性質的點P_2所成集合設爲R_2，則R_2亦爲 A、B、C 的最小點區域。
3. 同理，遮去 C 點，使平面上只剩 A、B 兩點，利用 A、B 兩點圍出另一平行四邊形（或線段）之最小點區域Q_3，並從Q_3中找出所有的點P_3(可能不只有一個)， 使得P_3到 C 點的距離最短，滿足上述性質的點P_3所成集合設爲R_3，則R_3亦是 A、B、C 的最小點區域。

設由R_1,R_2,R_3所”圍成”區域R（如圖二十三、二十四、二十五、二十六），則區域R內的所有交點 P 皆爲 A、B、C 三點的最小點。

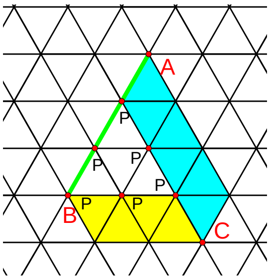
註：圖二十四，除了R_1, R_2, R_3外，中間所圍的區域亦爲最小點。



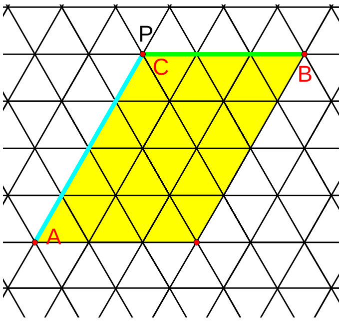
<圖二十三>



<圖二十四>



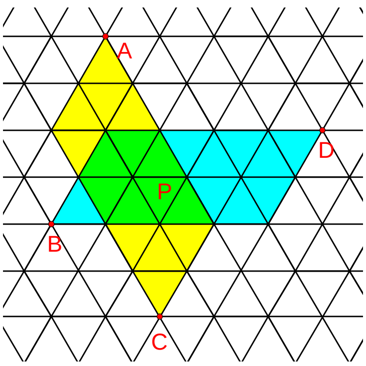
<圖二十五>



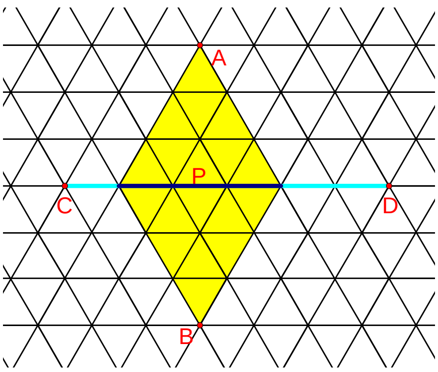
<圖二十六>

(十)正三角形幾何平面上四點的最小點

在正三角形平面上任取相異四點 A、B、C、D，兩兩一組各自圍成一平行四邊形或退化爲一線段，分別可得 R_1及R_2 兩個最小點區域。由於兩兩分組共有三種取法，但爲了找出最小點，因此必須$R_1 \cap R_2 \neq \phi$，故有效取法唯一；則設$R =$ $R_1 \cap R_2$，R區域內的所有交點 P 皆爲 A、B、C、D 的最小點。因此，區域R爲 A、B、C、D 的最小點區域。



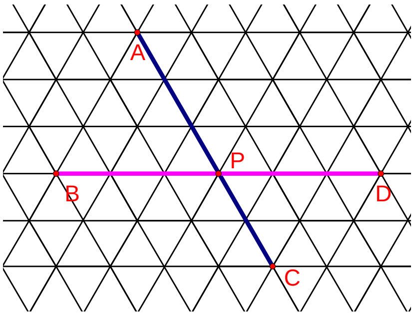
<圖二十七>



<圖二十八>

綠色部分爲最小點區域
最小點區域爲一多邊形

深綠色線段部分爲最小點區域
最小點區域爲一線段



<圖二十九>

兩線段之交點部分為最小點區域
最小點區域為一點

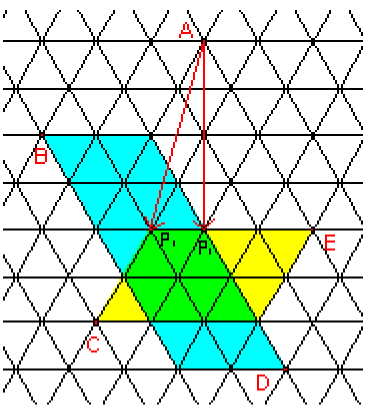
(十一)　正三角形幾何平面上五點的最小點

在正三角形幾何平面上，任取相異五點 A、B、C、D、E。模仿三點的最小點的找法，依序遮去 A、B、C、D、E 五點。每遮去其中一點，則將剩餘四點。利用四點之最小點找法，找出此四點的最小點區域 R_i，再從最小點區域 R_i 中，找出與原先遮去的點之所有最短距離的點 P_i（其中 $1 \le i \le 5, \forall i \in N$）。取 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 的所”圍成”區域 R，則 R 中所有的交點 P 皆為 A、B、C、D、E 的最小點。

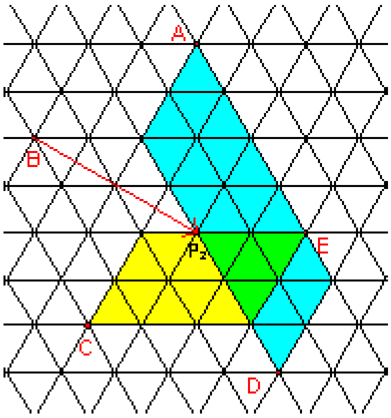
例如：

圖三十：先遮去 A，找出 B、C、D、E 之最小點區域 R_1（綠色部分），再由此最小點區域中，找出與 A 之所有最短距離的點 P_1。

圖三十一：遮去 B，找出 A、C、D、E 之最小點區域 R_2（綠色部分），再由此最小點區域中，找出與 B 之所有最短距離的點 P_2。

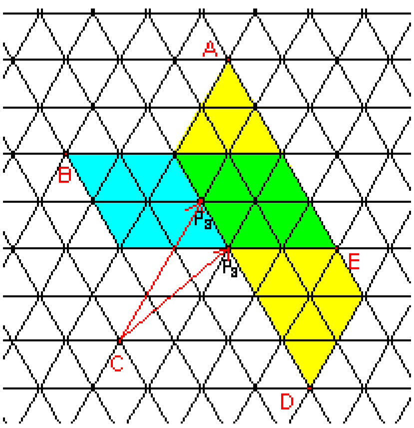


<圖三十>

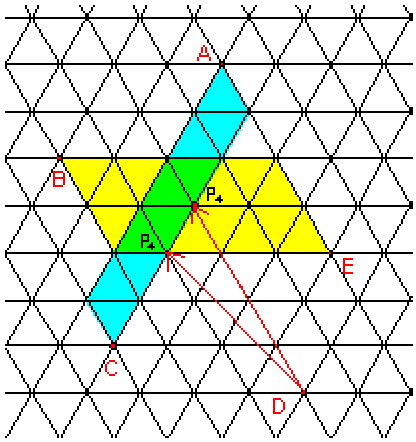


<圖三十一>

圖三十二：遮去 C，找出 A、B、D、E 之最小點區域 R_3（綠色部分），再由此最小點區域中，找出與 C 之所有最短距離的點 P_3。
圖三十三：遮去 D，找出 A、B、C、E 之最小點區域 R_4（綠色部分），再由此最小點區域中，找出與 D 之所有最短距離的點 P_4。

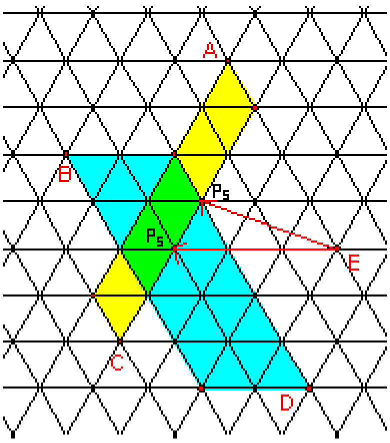


<圖三十二>

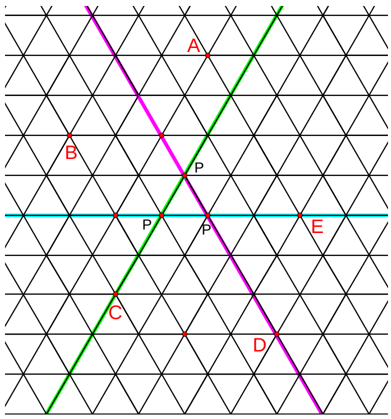


<圖三十三>

圖三十四：遮去 E，找出 A、B、C、D 之最小點區域 R_5（綠色部分），再由此最小點區域中，找出與 E 之所有最短距離的點 P_5。
圖三十五：取 P_1,P_2,P_3,P_4,P_5 的所”圍成”的區域 R，則 R 中所有的交點 P 皆為 A、B、C、D、E 的最小點。



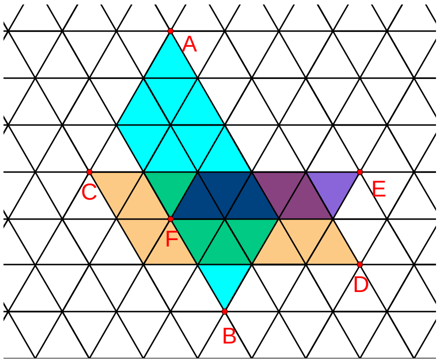
<圖三十四>



<圖三十五>

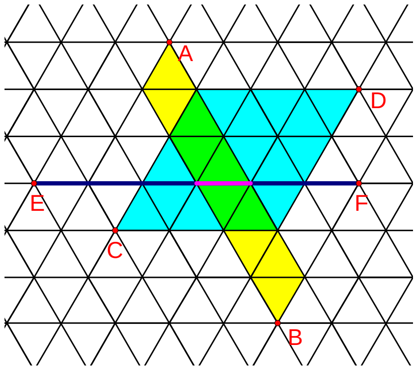
(十二)　正三角形幾何平面的六點的最小點

在正三角形幾何平面上，任取相異六點 A、B、C、D、E、F，兩兩一組各自為成一平行四邊形或退化為一線段，分別可得 R_1,R_2及R_3 三個最小點區域，由於兩兩分組共有十五種取法，但為了找出最小點，因此必須滿足 $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \neq \phi$，故有效取法唯一；則設 $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3$，$R$ 區域內的所有交點 P 皆為 A、B、C、D、E、F 的最小點。因此，區域 R 為 A、B、C、D、E、F 的最小點區域。



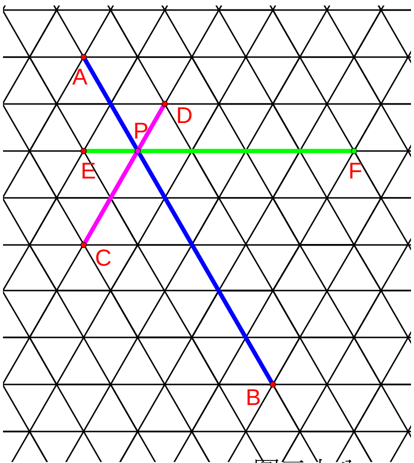
<圖三十六>

深藍色部分爲最小點區域
最小點區域爲一梯形



<圖三十七>

粉紅色線段部分爲最小點區域
最小點區域爲一線段



<圖三十八>

三線段之交點部分爲最小點區域
最小點區域爲一點

由上述討論二、三、四、五、六點的最小點位置觀察發現：最小點的位置其實大致位於這些相異點所圍圖形的中央區域。但由於正三角形幾何平面的街道有 X，Y，Z 軸等三種不同方向，因此要先分別找出各軸方向的「中心點區域」得 R_1, R_2, R_3 ，利用 R_1, R_2, R_3 三區域，找出交集區域 R（當 n 爲偶數）或取其所圍成的區域 R（當 n 爲奇數），則 R 內的所有交點 P 皆爲最小點。因此，區域 R 爲最小點區域。

(十三)　正三角形平面相異 n 點之最小點找法

在正三角形幾何平面中，任取相異 n 點

1.當 n 爲偶數

(1) 以 X 軸方向，由左到右分別標記爲 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其中 $X_1 \le X_2 \le \cdots \le X_n$，則取中間的兩點分別爲 $X_{\frac{n}{2}}$ 及 $X_{\frac{n}{2}+1}$，作二條水平線 $L_1 : X = X_{\frac{n}{2}}$ 及 $L_2 : X = X_{\frac{n}{2}+1}$，則介於 L_1 及 L_2 內的交點 $\left\{(X,Y,Z) \middle| X_{\frac{n}{2}} \le X \le X_{\frac{n}{2}+1}, X \in Z, Y \in Z, Z \in Z \right\}$ 皆爲 X 軸的中心點區域 R_1。

(2) 以 Y 軸方向，由左下往右上分別標記爲 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$，其中 $Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n$，則取中間的兩點即爲 $Y_{\frac{n}{2}}$ 及 $Y_{\frac{n}{2}+1}$，作二條左下往右上的直線 $L_3 : Y = Y_{\frac{n}{2}}$ 及 $L_4 : Y = Y_{\frac{n}{2}+1}$，則介於 L_3 及 L_4 內的交點 $\left\{(X,Y,Z) \middle| Y_{\frac{n}{2}} \le Y \le Y_{\frac{n}{2}+1}, X \in Z, Y \in Z, Z \in Z \right\}$ 皆爲 Y 軸的中心點區域 R_2。

(3) 以 Z 軸方向，由右下往左上分別標記爲 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$，其中 $Z_1 \le Z_2 \le \cdots \le Z_n$，同理可得中間二點爲 $Z_{\frac{n}{2}}$ 及 $Z_{\frac{n}{2}+1}$，作二條右下往左上的直線 $L_5 : Z = Z_{\frac{n}{2}}$ 及 $L_6 : Z = Z_{\frac{n}{2}+1}$，則介於 L_5 及 L_6 內的交點 $\left\{(X,Y,Z) \middle| Z_{\frac{n}{2}} \le Z \le Z_{\frac{n}{2}+1}, X \in Z, Y \in Z, Z \in Z \right\}$ 皆爲 Z 軸的中心點區域 R_3。

利用(1)(2)(3)，n 個相異偶數點的最小點爲 $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ 區域內的所有交點 P。

因此，n 個相異偶數點的最小點區域爲

$$\left\{(X,Y,Z) \middle| X_{\frac{n}{2}} \le X \le X_{\frac{n}{2}+1}, Y_{\frac{n}{2}} \le Y \le Y_{\frac{n}{2}+1}, Z_{\frac{n}{2}} \le Z \le Z_{\frac{n}{2}+1}, X \in Z, Y \in Z, Z \in Z \right\}。$$

2.當 n 爲奇數

(1) 依 X 軸方向，由左到右標記爲 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，其中 $X_1 \le X_2 \le \cdots \le X_n$，則取中點爲 $X_{\frac{n+1}{2}}$，做一水平線 $L_1 : X = X_{\frac{n+1}{2}}$，則直線 L_1 即爲 X 軸的中心點區域 R_1。

(2) 依 Y 軸方向，由左下往右上標記爲 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$，其中 $Y_1 \le Y_2 \le \cdots \le Y_n$，則取

中點爲$Y_{\frac{n+1}{2}}$，做一左下往右上的直線$L_2: Y = Y_{\frac{n+1}{2}}$，則$L_2$即爲 Y 軸的中心點區域$R_2$。

(3) 依 Z 軸方向，由右下往左上標記爲$Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$，其中$Z_1 \le Z_2 \le \cdots \le Z_n$，同理可得中點爲$Z_{\frac{n+1}{2}}$，作一右上往左下的直線$L_3: Z = Z_{\frac{n+1}{2}}$，則$L_3$爲 Z 軸的中心點區域$R_3$。

利用(1)(2)(3)，取R_1及R_2及R_3所圍成的三角形區域（也許是一點）R，則 R 內所有交點 P 即爲此 n 個相異奇數點的最小點。

例如：

1.當 n 爲偶數：

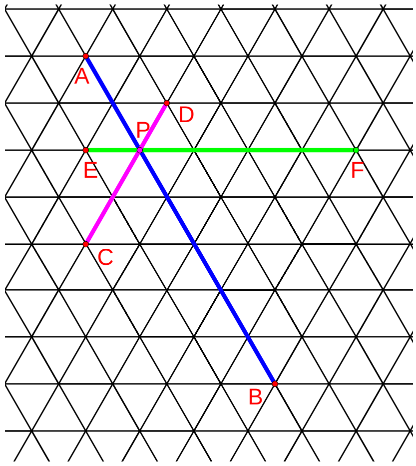
(1) 如圖三十九

X 軸的中心點區域R_1爲綠色線段，

Y 軸的中心點區域R_2爲粉紅色線段，

Z 軸的中心點區域R_3爲藍色線段，

則此 6 個相異點的最小點爲$R_1 \cap R_2 \cap R_3$區域內的所有交點 P。



<圖三十九>

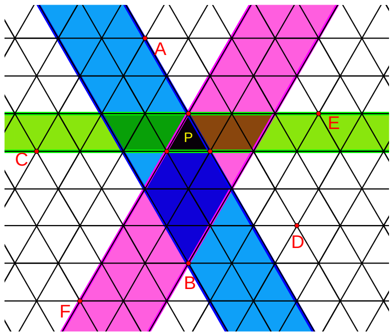
(2) 如圖四十

X 軸的中心點區域R_1爲綠色線段，

Y 軸的中心點區域R_2爲粉紅色線段，

Z 軸的中心點區域R_3爲藍色線段，

則此 6 個相異點的最小點爲$R_1 \cap R_2 \cap R_3$區域內的所有交點 P。



<圖四十>

2.當 n 爲奇數

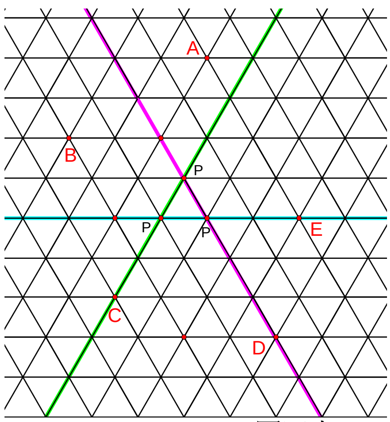
(1) 如圖四十一

X 軸的中心點區域R_1爲青色線段，

Y 軸的中心點區域R_2爲綠色線段，

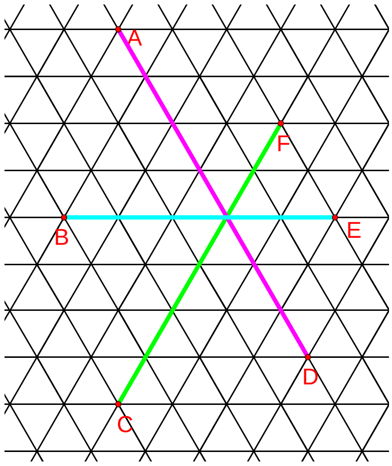
Z 軸的中心點區域R_3爲粉紅色線段，

則此 5 個相異點的最小點爲R_1及R_2及R_3所圍成的三角形區域 R 內的所有交點 P。



<圖四十一>

(2) 如圖四十二
X 軸的中心點區域 R_1 爲青色線段，
Y 軸的中心點區域 R_2 爲綠色線段，
Z 軸的中心點區域 R_3 爲粉紅色線段，
則此 5 個相異點的最小點爲 R_1及R_2及R_3所圍成的三角形區域 R 內的交點 P。



<圖四十二>

(十四) 權數中相關名詞的定義

權數(weight)：假使依照各點重要性的比重，分別”加權”後再求最小點，則各點所對應之數值稱爲此點之「權數」。

(十五) 在理想城鎮街道上，權數不同的兩點之最小點：

在計程車幾何學平面中，理想城鎮街道上有相異兩點 $A(X_1,Y_1)$、$b(X_2,Y_2)$，若 A、B 兩點之權數比爲 $W_A:W_B$ $(其中W_A,W_B \in N)$，則在考量權數之因素下，討論最小點的位置。

(1) 當 $W_A = W_B$ 時，即 $W_A:W_B = 1:1$ 時，則 A、B 兩點之最小點區域爲 $R(A,B)$。

(2) 當 $W_A \neq W_B$ 時，將 A 點視爲 $A_1,A_2,\cdots,A_{W_A}$ 個點，其中

$A_1 = A_2 = \cdots = A_{W_A} = (X_1,Y_1)$，同理將 B 點視爲 $B_1,B_2,\cdots,B_{W_B}$ 個點，其中

$B_1 = B_2 = \cdots = B_{W_B} = (X_2,Y_2)$，則 $A_1,A_2,\cdots,A_{W_A}$ 及 $B_1,B_2,\cdots,B_{W_B}$ 之權數相同。

即將 A、B 兩點視爲多個權數相同之點重疊於此點上。此時，原先不同權數之 A、B 兩點便可轉換爲共有”W_A+W_B”個點且所有之點權數均相同。

取 $P(X,Y)$ 爲任意點，

則 P 到不同權數的 A、B 兩點之距離和

$$=D_T(A_1,P)+D_T(A_2,P)+\cdots+D_T(A_{W_A},P)+D_T(B_1,P)+D_T(B_2,P)+\cdots+D_T(B_{W_B},P)$$
$$=\underbrace{(|X-X_1|+|Y-Y_1|)+(|X-X_1|+|Y-Y_1|)+\cdots(|X-X_1|+|Y-Y_1|)}_{共W_A個}+$$
$$\underbrace{(|X-X_2|+|Y-Y_2|)+(|X-X_2|+|Y-Y_2|)+\cdots(|X-X_2|+|Y-Y_2|)}_{共W_B個}$$
$$=\left[W_A|X-X_1|+W_B|X-X_2|\right]+\left[W_A|Y-Y_1|+W_B|Y-Y_2|\right]......(*)$$

設 $f(x)=W_A|X-X_1|+W_B|X-X_2|$, $g(y)=W_A|Y-Y_1|+W_B|Y-Y_2|$

則 P 到 A、B 兩點(不同權數)之距離和$=f(x)+g(y)$

分別探討 $f(x)=W_A|X-X_1|+W_B|X-X_2|$ 與 $g(y)=W_A|Y-Y_1|+W_B|Y-Y_2|$ 之最小值，此時 $P(X,Y)$ 即爲最小點。

由定理 1 與定理 2 知，分別取 $\underbrace{X_1,X_1,\cdots,X_1}_{W_A個}$ ， $\underbrace{X_2,X_2,\cdots,X_2}_{W_B個}$ 之中位數 X_0 與 $\underbrace{Y_1,Y_1,\cdots,Y_1}_{W_A個}$ ， $\underbrace{Y_2,Y_2,\cdots,Y_2}_{W_B個}$ 之中位數 Y_0 ，則 $P(X_0,Y_0)$ 即爲最小點區域。

討論最小點區域如下：

①若 $W_A>W_B$ ，則最小點 $P(X_0,Y_0)=A(X_1,Y_1)$ ；

②若 $W_A<W_B$ 時，則 $P(X_0,Y_0)=B(X_2,Y_2)$ 。

此外，由上述證明中(*)式得知，平面上任一點 $P(X,Y)$ 到 $A(X_1,Y_1)$ 、$b(X_2,Y_2)$ 兩點(權數比爲 $W_A:W_B$)之距離和

$$=(W_A|X-X_1|+W_B|X-X_2|)+(W_A|Y-Y_1|+W_B|Y-Y_2|)$$
$$=W_A\left[|X-X_1|+|Y-Y_1|\right]+W_B\left[|X-X_2|+|Y-Y_2|\right]$$
$$=W_AD_T(P,A)+W_BD_T(P,B)$$

(十六) 在理想城鎮街道上，權數不同的三點之最小點：

在計程車幾何學平面中，理想城鎮街道上有相異三點 $A(X_1,Y_1)$ 、 $B(X_2,Y_2)$ 、 $C(X_3,Y_3)$ 。若 A、B、C 三點之權數比爲 $W_A:W_B:W_C$ (其中 $W_A,W_B,W_C\in N$)，則在考量權數之因素下，討論最小點的位置。

(1) 當 A、B、C 三點的權數值相同時$\left(即 W_A : W_B : W_C = 1:1:1\right)$，則利用(二)的証明得知其最小點只有一點。

(2) 當 A、B、C 三點的權數比不相同時，則將 A 點視爲 $A_1, A_2, \cdots, A_{W_A}$ 個點，且 $A_1 = A_2 = \cdots = A_{W_A} = \left(X_1, Y_1\right)$，同理將 B 點視爲 $B_1, B_2, \cdots, B_{W_B}$ 個點，且 $B_1 = B_2 = \cdots = B_{W_B} = \left(X_2, Y_2\right)$，同理將 C 點轉換成 $C_1, C_2, \cdots, C_{W_C}$ 個點，且 $C_1 = C_2 = \cdots = C_{W_C} = \left(X_3, Y_3\right)$，則 $A_1, A_2, \cdots, A_{W_A}$，$B_1, B_2, \cdots, B_{W_B}$，$C_1, C_2, \cdots, C_{W_C}$ 各點之權數均相同。

取 $P\left(X, Y\right)$ 爲任意點，則 P 到不同權數的 A、B、C 三點之距離和

$$
\begin{aligned}
&= D_T\left(A_1, P\right) + D_T\left(A_2, P\right) + \cdots + D_T\left(A_{W_A}, P\right) + D_T\left(B_1, P\right) + D_T\left(B_2, P\right) + \cdots + D_T\left(B_{W_B}, P\right) \\
&\quad + D_T\left(C_1, P\right) + D_T\left(C_2, P\right) + \cdots + D_T\left(C_{W_C}, P\right) \\
&= \underbrace{\left(\left|X - X_1\right| + \left|Y - Y_1\right|\right) + \left(\left|X - X_1\right| + \left|Y - Y_1\right|\right) + \cdots \left(\left|X - X_1\right| + \left|Y - Y_1\right|\right)}_{\text{共}W_A\text{個}} + \\
&\quad \underbrace{\left(\left|X - X_2\right| + \left|Y - Y_2\right|\right) + \left(\left|X - X_2\right| + \left|Y - Y_2\right|\right) + \cdots \left(\left|X - X_2\right| + \left|Y - Y_2\right|\right)}_{\text{共}W_B\text{個}} + \\
&\quad \underbrace{\left(\left|X - X_3\right| + \left|Y - Y_3\right|\right) + \left(\left|X - X_3\right| + \left|Y - Y_3\right|\right) + \cdots \left(\left|X - X_3\right| + \left|Y - Y_3\right|\right)}_{\text{共}W_C\text{個}} \\
&= \left[W_A\left|X - X_1\right| + W_B\left|X - X_2\right| + W_C\left|X - X_3\right|\right] + \left[W_A\left|Y - Y_1\right| + W_B\left|Y - Y_2\right| + W_C\left|Y - Y_3\right|\right] \ldots\ldots(*)
\end{aligned}
$$

設 $\begin{aligned} f\left(x\right) &= W_A\left|X - X_1\right| + W_B\left|X - X_2\right| + W_C\left|X - X_3\right|, \\ g\left(y\right) &= W_A\left|Y - Y_1\right| + W_B\left|Y - Y_2\right| + W_C\left|Y - Y_3\right| \end{aligned}$

則 P 到 A、B、C 三點(不同權數)之距離和$= f\left(x\right) + g\left(y\right)$

分別探討 $\begin{aligned} & f\left(x\right) = W_A\left|X - X_1\right| + W_B\left|X - X_2\right| + W_C\left|X - X_3\right| \\ 與\quad & g\left(y\right) = W_A\left|Y - Y_1\right| + W_B\left|Y - Y_2\right| + W_C\left|Y - Y_3\right| \end{aligned}$ 之最小値，此時 $P\left(X, Y\right)$ 即爲最小點。

由定理 1 與定理 2 知，分別取 $\underbrace{X_1, X_1, \cdots, X_1}_{\text{共}W_A\text{個}}$，$\underbrace{X_2, X_2, \cdots, X_2}_{\text{共}W_B\text{個}}$，$\underbrace{X_3, X_3, \cdots, X_3}_{\text{共}W_C\text{個}}$ 之中位數 X_0 與 $\underbrace{Y_1, Y_1, \cdots, Y_1}_{\text{共}W_A\text{個}}$，$\underbrace{Y_2, Y_2, \cdots, Y_2}_{\text{共}W_B\text{個}}$，$\underbrace{Y_3, Y_3, \cdots, Y_3}_{\text{共}W_C\text{個}}$ 之中位數 Y_0，則 $P\left(X_0, Y_0\right)$ 即爲最小點。

此外，由上述證明中(*)知平面上任一點$P(X,Y)$到$A(X_1,Y_1)$、$B(X_2,Y_2)$、

$C(X_3,Y_3)$三點(權數比爲$W_A:W_B:W_C$)之距離和

$$
\begin{aligned}
&=\left(W_A\left|X-X_1\right|+W_B\left|X-X_2\right|+W_C\left|X-X_3\right|\right)+\left(W_A\left|Y-Y_1\right|+W_B\left|Y-Y_2\right|+W_C\left|Y-Y_3\right|\right)\\
&=W_A\left[\left|X-X_1\right|+\left|Y-Y_1\right|\right]+W_B\left[\left|X-X_2\right|+\left|Y-Y_2\right|\right]+W_C\left[\left|X-X_3\right|+\left|Y-Y_3\right|\right]\\
&=W_AD_T(P,A)+W_BD_T(P,B)+W_CD_T(P,C)
\end{aligned}
$$

討論最小點區域之圖形如下：

①若權數總和爲奇數時，則圖形爲一個點；

②若權數總和爲偶數時，則圖形爲一個矩形、一個線段或一個點。

(十七) 在理想城鎮裡，權數不同的相異 n 點之最小點之探討

在計程車幾何平面中，理想城鎮上相異 n 點$(n\geq 2)$，分別爲

$A_1(X_1,Y_1),A_2(X_2,Y_2),\cdots,A_n(X_n,Y_n)$，若其權數比爲

$W_1:W_2:\cdots:W_n$(其中$W_1,W_2,\cdots,W_n\in N$)，則在考量權數之因素下，欲求最小點之位置。

證明：取$P(X,Y)$爲任意點，則 P 到不同權數之$A_1,A_2,\cdots,A_n$各點之距離和

$$
\begin{aligned}
&=W_1D_T(A_1,P)+W_2D_T(A_2,P)+\cdots+W_nD_T(A_n,P)\\
&=W_1\left(\left|X-X_1\right|+\left|Y-Y_1\right|\right)+W_2\left(\left|X-X_2\right|+\left|Y-Y_2\right|\right)+\cdots+W_n\left(\left|X-X_n\right|+\left|Y-Y_n\right|\right)\\
&=\sum_{K=1}^{n}W_K\left|X-X_K\right|+\sum_{K=1}^{n}W_K\left|Y-Y_K\right|
\end{aligned}
$$

設$f(x)=\sum_{K=1}^{n}W_K\left|X-X_K\right|$與 $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\sum_{K=1}^{n}W_K\left|Y-Y_K\right|$，

分別探討$f(x)=\sum_{K=1}^{n}W_K\left|X-X_K\right|$ 與 $\mathrm{g}(\mathrm{x})=\sum_{K=1}^{n}W_K\left|Y-Y_K\right|$之最小值，此時$P(X,Y)$即爲相異 n 個點(不同權數)之最小點。

由定理 1 與定理 2

分別取$\underbrace{X_1,X_1,\cdots,X_1}_{\text{共}W_1\text{個}}$，$\underbrace{X_2,X_2,\cdots,X_2}_{\text{共}W_2\text{個}},\cdots,\underbrace{X_n,X_n,\cdots,X_n}_{\text{共}W_n\text{個}}$之中位數$X_0$及

$\underbrace{Y_1,Y_1,\cdots,Y_1}_{\text{共}W_1\text{個}}$，$\underbrace{Y_2,Y_2,\cdots,Y_2}_{\text{共}W_2\text{個}},\cdots,\underbrace{Y_n,Y_n,\cdots,Y_n}_{\text{共}W_n\text{個}}$之中位數$Y_0$，則點$P(X_0,Y_0)$即爲所求。

討論最小點區域之圖形如下：
①若權數總和爲奇數時，則圖形爲一個點；
②若權數總和爲偶數時，則圖形爲一個矩形、一個線段或一個點。

(十八) 在正三角形街道的幾何平面上，權數不同的相異 n 點之最小點探討：

如同在理想城鎮的街道上，討論權數不同的相異 n 點$(n \geq 2)$之最小點之方式，在正三角形街道亦可依 X、Y、Z 軸三方向討論。先可將各點視爲多個權數相同之點重疊於此點上。此時，原先不同權數之相異 n 點便可轉換爲共有"權數總和"個點且所有之點權數均相同。再分別依其座標軸之不同方向討論，分別取出中心點區域，並取所有中心點區域之交集部分(若出現交集爲空集合情況，則取所"圍成"之區域)，則此區域即爲最小點區域。

三、研究結果與討論

在現實生活中，兩地之間受限「只能走街道」的規範，所以其距離計算方式和歐幾里得平面上的距離計算方式有所差別。本研究將分別探討在計程車幾何平面之理想城鎮與正三角形幾何平面等兩種不同街道平面上，相異 n 點$(n \geq 2)$之最小點區域。此外，並分別考量相異 n 點$(n \geq 2)$在不同權數的條件下，探討最小點區域。

1.在計程車幾何平面之理想城鎮上，相異 n 點$(n \geq 2)$的最小點找法有兩種：

(1) 圖解法：可用圖形交集方式來尋找。如果點數 n 爲偶數時，則採取有效取法，兩兩一組分別找出其最小點區域（圖形爲矩形或線段），再取所有最小點區域的交集 R（R 不爲空集合），則 R 內所有的交點皆爲此 n 個偶數點的最小點。若爲奇數點，則先行遮去任一點 A，使平面上只剩下的偶數點，利用上述偶數點的找法，可先在偶數情形下找出的最小點區域R，再從R中找出所有點 P，使 P 點到原先遮去的 A 點有最短的距離，則滿足此情況的所有 P 點皆爲此 n 個奇數點的最小點。
(2) 座標軸方向分析法：以 x、y 兩軸方向討論，分別找出 x、y 軸的中心點區域R_1及R_2，取$R = R_1 \cap R_2$，則 R 中之格子點皆爲此相異 n 點在理想城鎮的最小點。研究發現在計程車幾何平面上若相異 n 點爲偶數，則最小點區域可能爲點、線段或是矩形，若相異 n 點爲奇數點，則最小點區域必爲一點。在計程車幾何平面上，若相異 n 點爲偶數，則最小點區域可能爲點、線段或是矩形，若相異 n 點爲奇數點，則最小點區域必爲一點之情況。

2.在正三角形幾何平面上，相異 n 點$(n \geq 2)$的最小點找法有兩種：

(1) 圖解法：本研究只討論兩點到六點的範圍。當 n 為偶數，則採取有效取法，兩兩一組分別找出最小點區域（圖形為平行四邊形或線段），再取所有最小點區域的交集得 R（R 不為空集合），便可得最小點必在 R 中的所有交點上。但當 n 為奇數，則需”依序”遮去其一點，利用上述偶數之方法分別取得剩餘 $n-1$ 個點的最小點區域 R_i，最後在 R_i 內找出所有的點 P_i，使 P_i 點到原先遮去的點距離最短，則所有 P_i 點所”圍成”的區域 R 上的所有交點 P 皆為此 n 個奇數點的最小點。

(2) 座標軸方向分析法：在正三角形幾何平面上，街道有三個不同方向，分別為 x 軸（水平方向），y 軸（左下往右上）及 z 軸（右下往左上），分別取各軸的中心點區域 R_1, R_2, R_3。當 n 為偶數，則最小點為 $R_1 \cap R_2 \cap R_3$ 區域內的所有交點 P。當 n 為奇數，取 R_1, R_2, R_3 所”圍成”的區域 R，則從 R 中的所有交點皆為此 n 點的最小點。

研究發現若在正三角形幾何平面上，當 n 為偶數時，此點所成區域可能為點、線段、四邊形、五邊形及六邊形；若 n 為奇數時，則可能為點、三角形這兩種情況。在正三角形幾何平面上，當 n 為偶數時，最小點區域可能為點、線段、四邊形、五邊形及六邊形；若 n 為奇數時，則最小點區域為點、三角形這兩種情況。

因此，無論在理想城鎮或在正三角形幾何平面中，平面上相異 n 點$(n \geq 2)$之最小點區域均可由其座標軸之不同方向考慮，先各自取出中心點區域，再將各方向的中心點區域取交集之重疊部分 R（假使重疊部分為空集合時，則取所圍成的區域 R），則區域 R 即為此相異 n 點的最小點區域。

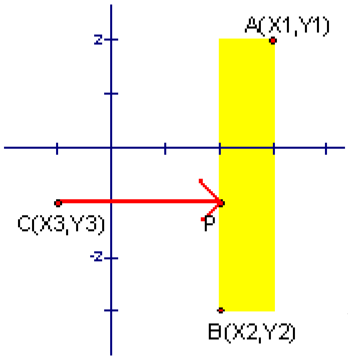
3.至於考量相異 n 點$(n \geq 2)$在不同權數之條件下，探討最小點之區域，無論在理想城鎮或正三角形幾何平面上，皆可將各點視為多個權數相同之點重疊於此點上。此時，原先不同權數之相異 n 點便可轉換為共有”權數總和”個點且所有之點權數均相同。再分別依其座標軸之不同方向討論，分別取出中心點區域，並取所有中心點區域之交集部分(但在正三角形幾何平面，可能出現交集為空集合情況，則取所”圍成”之區域)，則此區域即為最小點區域。

四、結論與應用

(一) 理想城鎮

1. 鑿井問題

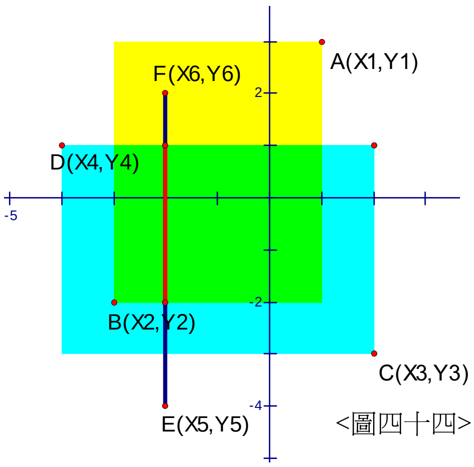
在某一理想城鎮上住著三戶人家，這三戶人家皆過著未有飲用水可用的生活。他們每天都必須提著水桶到鄰近的城鎮提水回家飲用，十分不方便。因此，他們決定在自己的城鎮中鑿一水井，但希望三戶人家走到此水井的路途總和是最短的，那麼這一井應鑿在何處？



<圖四十三>

2. 宅配公司

在理想城鎮裡，欲設立一間宅配公司。這間公司有六位忠實客戶。今這六位客戶同時請宅配公司到府送貨，這間宅配公司希望每一輛車前往不同客戶所花的時間總和能最少，那麼這間宅配公司應設在何處最爲恰當？



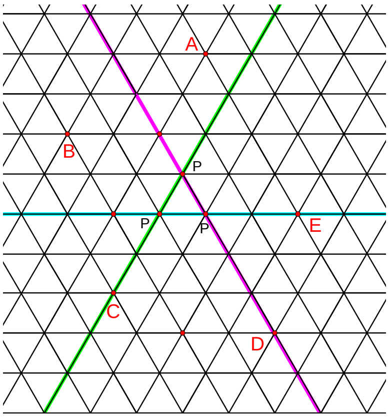
<圖四十四>

(二) 正三角形幾何平面

1.客運站

在一個道路爲正三角形的城市裡有一間客運公司。每個周末客運公司都要載上班族的人返鄉，而這個城市有 5 個主要的聯外道路出口，每個出口皆通往不同的地區，爲了使這些急著返家的乘客能快速回到家，則此客運站應設在城市的何處方

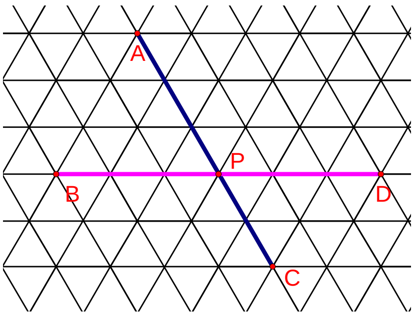
能使客運站至此 5 個主要的聯外道路出口的路途總和爲最短？



<圖四十五>

2.安全問題

一個新規劃的城鎮，道路皆爲正三角形。今有一間國外的化學公司看上了這個城市，於是決定在此城鎮設立分公司。但是此公司生產的是危險性極高的化學藥劑，爲了避免發生危險，則應讓這間化學工廠設立於何處，好讓城鎮中的四間消防局能在工廠發生危害時，以第一時間最快的抵達工廠的所在地，好讓傷害降至最低。



<圖四十六>

五、展望

(一)研究完平面的理想城鎮，是否可以推向空間上的點進行探討，例如：在一間大樓裡，有數名客戶訂了貨；假使今天有一名送貨員，則他應先搭電梯到哪一個樓層，才可以以最短的步數，將所有的貨物送達到每一戶客戶的手中。像類似這種考慮到空間的題目，是我下一個希望推展的地方。

(二) 本研究不論是在理想城鎮還是正三角形幾何平面，都是在研究某一點到所有點的距離和最小値的找法與位置。若將研究方向改爲從某一點出發，一路通過所有點的走法，那麼若依照這種走法，則這種走法的最短距離應該爲多少。以上這兩大方向爲本研究未來要繼續努力的地方，期盼將理想城鎮街道問題推廣到更符合實際生活的情形下進行探討，以解決生活週遭的問題。

六、參考文獻：

(一) Eugene F. Krause。TAXICAB GEOMETRY。Dover Publications, Inc., New York。P 2~19。1986。

(二) Rob Eastaway/Jeremy Wyndham。蔡承志 譯。一條線有多長？。一版。台灣。三言社。P 209。2005。

(三) 伊凡．莫斯科維奇。李琳 譯。生命的遊戲－出人意料的幾何趣題-網格城市。一版。中國。新星出版社。P 12~23、P 99~104。2006/1。

(四) 伊凡．莫斯科維奇。謬靜芬、黃柏瑄 譯。計乘車怎麼走比較快？玩具發明家的生活數學遊戲。一版。台灣。究竟出版社。P 24~36。2007/9/26。

(五) http://jwilson.coe.uga.edu/EMT668/EMAT6680.F99/DDavis/Taxicab/taxicab.html。

(六) http://www.cs.mcgill.ca/~ptesso/cs644/644project.html。

(七) http://en.wikipedia.org/wiki/Taxicab_geometry#Formal_description。

(八) http://www.cut-the-knot.org/Generalization/fermat_point.shtml。

(九) http://www.htjh.tpc.edu.tw/math/%B6O%B0%A8%C2I.htm。

(十) http://www.hgsh.hc.edu.tw/math/scienceweb/index.htm。

評語

1) 「最小點」在數學出現的十分頻繁，可是都有嚴格的定義。本作品所指的「最小點」並不符合這些定義。

2) 作品除了抽象論証以外，也應該添舉一些具體的實例。