臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　　別：數學

作 品 名 稱 ：8x8 棋盤路徑解之一般化推廣

學校 / 作者 ：臺北縣立福和國民中學　　　　李建慈

［目錄］

作者簡介

我是李建慈(右 2)。我沒有任何兄弟姊妹，加上父母又忙於工作，所以小時候幾乎都是在都市由爺爺、奶奶百般呵護下長大的。

小學因爲是讀私立的，所以課業繁重；但每逢假日，父母總會與我共同閱讀一本又一本的好書，圖書館更成爲我常拜訪的地方。當我感到壓力很大時，會盡量抽空，藉著游泳、慢跑來抒發自己，讓壓力及煩惱隨著汗水的淋漓，拋至九霄雲外；加上我有氣喘和過敏，藉由長期規律的運動，現在也改善了不少。

那時候的我，對於數學，並不感興趣。直到上了國中，遇到一位很棒的數學老師，才開啓我對數學的熱愛。在做科展的過程中，不僅解決了研究的問題，也豐富了我的生命，讓我覺得受益匪淺！生活的每一天都是如此值得感恩；如此的幸運！

Generalization of solvable directed path in 8×8 chess

[摘要]：

一、英文摘要

Abstract

(一)、In our study, we discuss a $m \times n$ chess and any beginning square p finding a directed path of chessman from p moving to an end square in which the chessman moves to adjacent squares including only three directions which are right move, up move and diagonal left down move. A $m \times n$ chess is ruled into m columns and n rows creating the number of $(m \times n)$ squares

(二)、A chess directed path moves from any beginning square to end square in a $m \times n$ chess and every other square is visited just once. In the view of the beginning squares, the chess paths are solvable paths in a mxn chess and the corresponding squares are solutions.

(三)、First, we find out that some beginning squares are located in a special area with no any solvable directed paths. We define the special area be no-solution area.

(四)、According the 3-color theorem, we determine more than two thirds of no-solution area.

(五)、Then, we derive properties of reversibility and symmetry in solvable paths. i.e. A solvable path exist another solvable path by reversibility and symmetry respectively.

(六)、Utilizing the generalization of no-solution area which is extended from the concept of no-solution area provides judgment for the next moves effectively. The judgment is defined as effective move principle.

(七)、Furthermore, using the other theorem called rules of shift Hamiltonian path gets augment solutions.

(八)、According to the effective move principle finding a number of solvable directed paths, use the reversibility and rules of shift Hamiltonian paths to get augment solutions. Finally, utilize symmetry to find out all solvable paths in the $m \times n$ chess.

二、中文摘要

(一)、研究規則：在 $m \times n$ 的格子中，任取一格 A 當作「起點格」，在起點格上放一顆棋子，只能往「上」、往「右」、往「左下」的方向移動。

(二)、定義：若棋子從「起點格」，按照上述規則能不重複的通過所有 m×n 格子到達某一「終點格」，則對於「起點格」而言，此移動路徑稱爲 m×n 的「有解路徑」，其任

一「終點格」稱爲「起點格」的「路徑解」。

(三)、我們先研究出「基本無解區」。

(四)、根據遊戲規則我們利用三種顏色將 $n \times n$ 方格塗滿，並判斷出大部分的「無解起點格」。

(五)、利用遊戲規則得到兩重要性質：

(1)[可逆性性質]　(2) [對稱性性質]

(六)、利用「廣義基本無解區」，當作我們[有效移動]的判斷，讓「有解路徑」快速的找出。

(七)、利用本研究所稱的「平移哈式鏈」，得到[擴充解]。

(八)、根據[有效移動]求出部分「路徑解」，再利用[可逆性性質]、 [擴充解] ，最後利用[對稱性性質]完成所有「路徑解」的尋找。

一、前言

(一)、研究動機

在上課的動動腦時間，老師在黑板上，問我們一個題目：「假如在一個 *8*×*8* 的棋盤，選定任意 2 格爲起點 *P* 和終點 *Q*，從 *P* 出發，按照「往上」、「往右」、「往左下」的規則前進，是否能夠走到 *Q*，並且每格都要走過，但不能重複。(如圖 2)」結果是隨著 *P*、*Q* 的位置之不同，有時可以成功；有時不能成功。爲什麼隨著「起點格」與「終點格」的改變，會有不同的結果？而當棋盤的格數改變又會產生什麼樣的結果？種種的疑問，帶給我們強烈的好奇心，促使我們反覆的探討、研究此問題。接下來，是我們的研究之旅。

(二)、研究目的

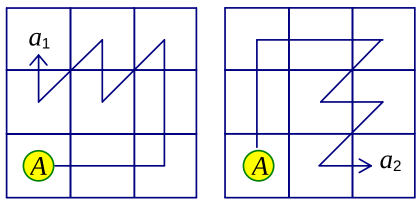
1. 尋找遊戲規則的相關性質。
2. 尋找 8×8 棋盤的路徑解。
3. 利用 8×8 棋盤的研究推廣到 $n \times n$ 路徑解之探討。

(三)、研究器材：電腦、*GSP*

二、研究過程：

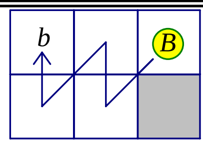
(一) 規則：在 $m \times n$ 的格子中，任取一格 A 當作「起點格」，在起點格上放一顆棋子，只能往「上」、往「右」、往「左下」的方向移動。

(二) 定義：若棋子從「起點格」，按照上述規則能<u>不重複</u>的通過所有 $m \times n$ 格子到達某一「終點格」，則對於「起點格」而言，此移動路徑稱爲 $m \times n$ 的「有解路徑」，其任一「終點格」稱爲「起點格」的「路徑解」；反之，此移動路徑稱爲「起點格」的「無解路徑」及「終點格」不爲「起點格」的「路徑解」。如圖(1-1)、(1-2)。



a_1 與 a_2 兩「終點格」為「起點格」A 的解。以下簡稱 a_1 與 a_2 為 A 的解。

圖(1-1)



「終點格」b 不為「起點格」B 的解。

圖(1-2)

(三) 文獻記載

> 在一塊 $n \times n$ 的西洋棋盤上，令 P 與 Q 為相鄰的兩個格子，P 在 Q 的左邊。在 P 放一顆棋子，可以向上、向右或向左下方移動到鄰旁的格子裡，證明不管 n 是多少，都無法使棋子走遍每一格之後(正好一次)最後到達 Q。

第一種解法(數論的)

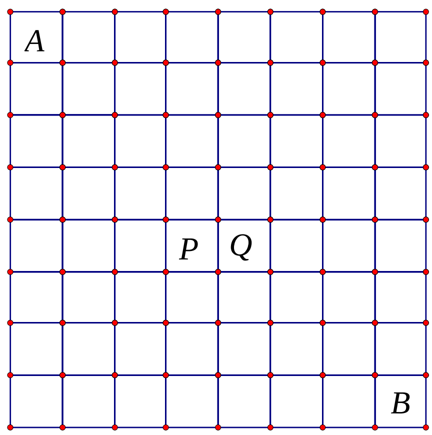
假設我們從 P 走到 Q 用了 x 步向上，y 步向右以及 z 步向左下，每一格都正好走一次。則

1. $x=z$
2. $y=z+1$
3. $x+y+z=n^2-1$

消去 3. 中的 x、y 我們得

4. $n^2=3z+2$

方程式 4. 沒有整數解，因為平方數除以 3 的餘數不是 0 就是 1：



圖(2)

$n=3k \to n^2=3(3k)^2+0=3z+0$

$n=3k+1 \to n^2=3(3k^2+2k)+1=3z+1$

$n=3k+2 \to n^2=3(3k^2+4k+1)+1=3z+1$

第二種解法(拓撲的)

考慮解法的一條路徑看圖(2)。方格 A 及方格 B 各只有一種方式進出。$P=A$ 或 $Q=B$ 顯然無解。$P=B$ 不可能。現在我們考慮兩種情況。

第一種情況：

考慮解法的一條路徑從 P 經 A 到 B。現在每格只能進出一次，而且不能沿另一條對角線(左上、右下)的方向走。路線 AB 必須走 PQ 之上方及右方。但是走到 B 之後，到 Q 的路被路徑 AB 切斷了。

第二種情況：

從 P 經 B 到 A。路線 BA 必經由 PQ 之上及其右。但是離開 A 的方向使得到 Q 的路徑被 AB 切斷了。

(四) 問題研究

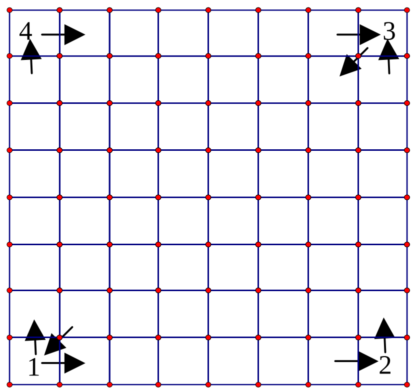
本研究試著先探討：「8×8 的西洋棋盤，到底哪些可當作「有解起點格」？其「終點格」又在哪裡？」進而做出一些 $n \times n$ 的一般化推廣。

「基本無解區」的探討：

首先，我們參考前述「文獻」的記載解法：

1. 若採用〈解法一〉，則當設定某一格爲起點格，其終點格的考慮位置有 8×8-1=63 (個)。顯然要如法炮製，工程浩大。最重要的是，當依「起點格」與「終點格」的位置而假設出的聯立方程式即使有解，也未必確定存在有解路徑。因此，〈解法一〉對我們的幫助極爲有限。
2. 若採用＜解法二＞，我們發現可利用此方式，幫忙找出某些格子確定不能當作「有解起點格」。分析如下：

(1) 從本研究的移動規則，若想要不重複的走完所有格子，則四個角落格（以下，本研究稱爲「角格」)，顯然要特別考慮。我們先做出角格的進出方向，並予以編號，如(圖 3)。(以下本研究對於 $m \times n$ ，角格位置的編號皆同圖(3)之順序)



(圖 3)

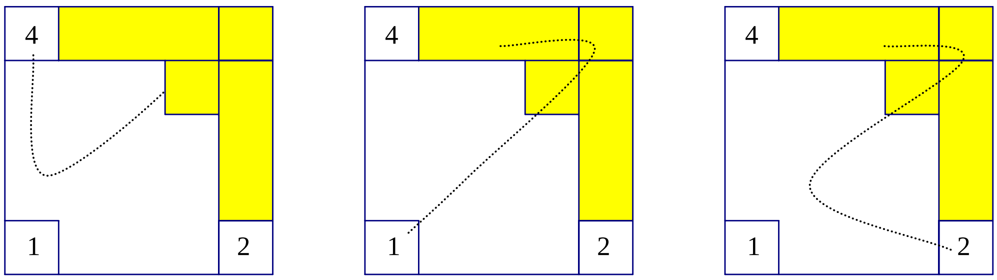
由圖中得知「2 號角格」、「4 號角格」進出路線唯一。

(2) 將 8x8 西洋棋盤座標化：

1 號角格：(1，1)； 3 號角格：(8，8)

(3) 利用文獻的＜解法 2＞，我們配合 4 個角格，做出猜測路線。

① 「起點格位置」:(2，8) ~ (8，8)、(8，2) ~ (8，7)、(7，7)



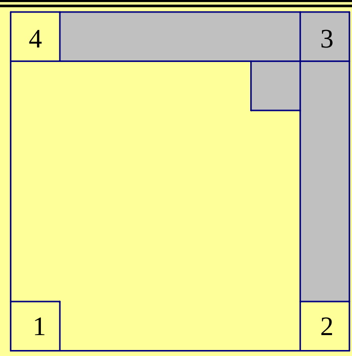
不管選擇任何路徑，期間必然會產生一段路徑將 8x8 分隔成兩區塊，最終形成「無解路徑」。

② 「起點格」位置不同於 (2，8) ~ (8，8)、(8，2) ~ (8，7)、(7，7)：

在此情形下，皆不存在一條足以判斷爲「無解路徑」的可能路線。

上面的模式，實際上已是一般化。因此，我們可得

[推廣 1]：對於 $m \times n$ 棋盤，(2，m) ~ (n，m)、(n-1，m-1)、(n，2) ~ (n，m-1) 所在的格子必為「無解起點格」。為了方便說明，我們把這些「無解起點格」所形成的灰色區，稱為「基本無解區」。



至於以上述分析(3)之②的格子當「起點格」是否一定有「路徑解」？若有「路徑解」，

其「路徑解」又在哪裡?

塗色論的研究：

首先，我們從本遊戲的規則出發，任取無界線的棋盤上一格 A_0 當作「起點格」，將棋子放在 A_0 上，按照規則的移動，每一次皆有 3 個格子的選擇(當然，最後只能移動到某一方格)。當允許可以重複通過相同格子的情況下，經過多次的操作後，我們發現[性質一]：

> [性質一]：對於 $n\times n$ 棋盤，在允許棋子可重複通過相同格子的條件下，當起點格相同、終點格也相同時，不管選擇哪一條路徑，任 2 條路徑移動的步數差距永遠是 3 的倍數。

證明：將 $n\times n$ 棋盤座標化如下：

左下 1 號角格：(1，1)

右上 3 號角格：(n ，n)

若 $A_0(x_0\ ,y_0)$ 為起點格， $A_1(x_1\ ,y_1)$ 為終點格

l_1 ：表示棋子分別向右、向上、左下各移動 a_1 、b_1 、c_1 步之路徑。

l_2 ：表示棋子分別向右、向上、左下各移動 a_2 、b_2 、c_2 步之路徑。

則必 $\begin{cases} x_0+a_1-c_1=x_1=x_0+a_2-c_2 \\ y_0+b_1-c_1=y_1=y_0+b_2-c_2 \end{cases}$

推得 $\begin{cases} a_1-a_2=c_1-c_2 \\ b_1-b_2=c_1-c_2 \end{cases}$

所以 $\left|(a_1+b_1+c_1)-(a_2+b_2+c_2)\right|=\left|(a_1-a_2)+(b_1-b_2)+(c_1-c_2)\right|=3\left|c_1-c_2\right|$

即對於起點格 $A_0(x_0\ ,y_0)$ 、終點格 $A_1(x_1\ ,y_1)$ 的任意兩條路徑 l_1 、l_2，其移動步數差距永遠是 3 的倍數。

討論：對於 $n\times n$ 的棋盤，若 $A_0(x_0\ ,y_0)$ 爲起點格、$A_k(x_k\ ,y_k)$ 爲終點格，且棋子從 A_0 經過 m 步移動到 A_k (可重複通過相同格子)，則

(1) 棋子到達 A_k ，往前倒數的第一步 A_{k-1} 與第二步 A_{k-2} 所在可能的方格，對於

棋子從 A_0 經過 m 步的移動，一定不能終止於 A_{k-1} 與 A_{k-2} 。

理由：若棋子從 A_0 經過 m 步的移動可終止於 A_{k-1}，則存在從 A_0 經過 $m+1$ 步之移動而終止於 A_k 之路徑。又已知棋子從 A_0 經過 m 步的移動，可終止於 A_k ，顯然與[性質一]不合。即棋子自 A_0 經過 m 步的移動，永遠不能終止於 A_{k-1} 。

同理，棋子自 A_0 經過 m 步的移動，也一定不能終止於 A_{k-2} 。

(2) 棋子到達 A_k ，往前倒數的第三步 A_{k-3} 所在可能的方格，對於棋子從 A_0 經過 m 步的移動，一定可終止於 A_{k-3} 。

理由：令棋子經過 $m-3$ 步到達 A_{k-3} ，則棋子可做一次的「回覆操作」。

所謂的「回覆操作」表示：棋子向右、向上、向左下各移動一次，則棋子仍會回到原來的方格。

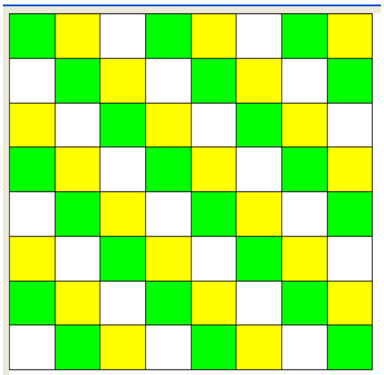
所以，棋子經過 $(m-3)+3=m$ 次的移動一定可終止於 A_{k-3} 。

回到 8×8 的棋盤研究，由於要找出有解路徑，所以棋子需從「起點格」開始，不重複的通過相同格子，移動 63 步走完 8×8 的方格，到達某一「終點格」。若在允許可重複通過相同格子的情況下，利用上述的討論結果，對於棋子自某一起點格 A_0 開始，移動 63 步到達終點格 A_{63} ，我們可得知

① $A_{63-(1+3t)}$ 、 $A_{63-(2+3t)}$ 所在的可能格子一定不能當作「終點格」。

② A_{63-3t} 所在的可能格子一定可當作「終點格」。

換言之，經過 63 步的移動，在允許可重複通過相同格子的情況下，8×8 的棋盤可分成三類格子，且「起點格」與「終點格」必為同類。我們想到一個簡便方式：將此三類格子分別予以塗色形成(圖 4)。可得白色格 21 個、綠色格 22 個、黃色格 21 個。



(圖 4)

在塗色的棋盤上，我們可輕鬆的得到「不管棋子將哪一格當作起點格，棋子的移動順序必三色一循環。」

因此，要找出有解路徑其「起點格」顏色必為綠色，且「終點格」也必為綠色。而

白色格與黃色格必爲「無解起點格」。爲了方便說明，本研究把上述利用塗色的棋盤得出的結果，稱爲「塗色論」。

==

利用「塗色論」，對於$n \times n$的棋盤，由左下角格塗上白色，接著依序塗上綠色、黃色、白色、…，直到將整個棋盤方格塗滿，我們可得出

[推廣 2]：

(1) 當$n = 3r$，可得白色格有$3r^2$、綠色格有$3r^2$、黃色格有$3r^2$個。

所以，起點格$\rightarrow$終點格之對應關係必為：

白色格$\rightarrow$黃色格；綠色格$\rightarrow$白色格；黃色格$\rightarrow$綠色格。

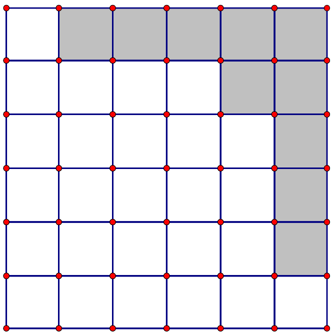
利用「塗色論」與「基本無解區」，可得到圖(5-1)(以6×6 為例)的灰色格必為「無解起點格」。

(2) 當$n = 3r + 1$，可得白色格有$3r^2 + 2r + 1$、綠色格有$3r^2 + 2r$、黃色格有$3r^2 + 2r$個。

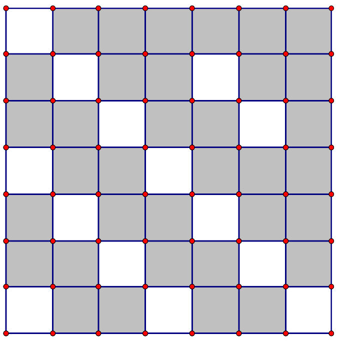
所以，起點格$\rightarrow$終點格之對應關係必為：

白色格$\rightarrow$白色格；綠色格與黃色格皆為「無解起點格」。

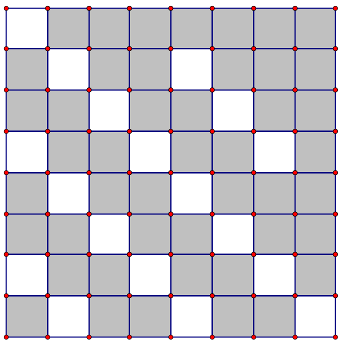
利用「塗色論」與「基本無解區」，可得到圖(5-2)(以7×7 為例)的灰色格必為「無解起點格」。



圖(5-1)



圖(5-2)



圖(5-3)

(3) 當$n = 3r + 2$，可得白色格有$3r^2 + 4r + 1$、綠色格有$3r^2 + 4r + 2$、黃色格有$3r^2 + 4r + 1$個。

所以，起點格$\rightarrow$終點格之對應關係必為：

綠色格$\rightarrow$綠色格；白色格與黃色格皆為「無解起點格」。

利用「塗色論」與「基本無解區」，可得到圖(5-3)(以8×8 為例)的灰色格為

「無解起點格」。

==

路徑解的尋找：

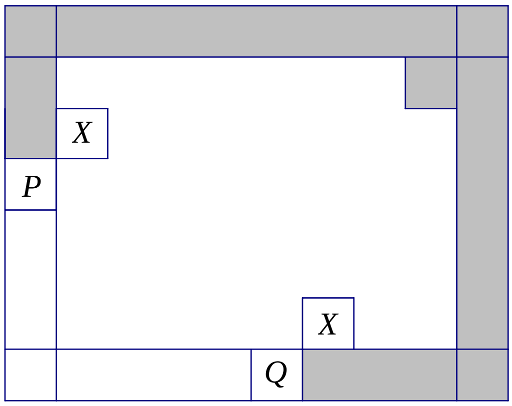
從圖(5-3)中，我們已經把可能的「有解起點格」減少到只有 18 個方格。接下來，針對這些起點格做「路徑解」的探討。由於要完成一次有解路徑，棋子需不重複的移動 63 步，且每一次的移動，根據規則最多有三個選擇，以此窮舉的方式要找出「路徑解」，顯然困難重重。因此，我們有必要找出一個方法，讓「路徑解」的尋找不要走太多冤枉路。以下是我們的探討：

1. [定義]：對於$m\times l$若產生圖中之條件，則灰色區稱之為[廣義基本無解區]。

X：已走過的格子。

P：一種特殊的空格，位於$m\times l$矩形左邊界且只能由下方進入的空格。

例如：$n\times n$起始狀態的左上角格。



Q：一種特殊的空格，位於$m\times l$矩形下邊界且只能由左方進入的空格。

例如：$n\times n$起始狀態的右下角格。

由定義可得：

(1) 起點格在[廣義基本無解區]，必產生無解路徑。

(2) 路徑在通過 P 或 Q 所在的格子之前，進入[廣義基本無解區]，必產生無解路徑。

其證明方式，同8×8之「基本無解區」研究(見第 5 頁)。

顯然，$m\times n$之「基本無解區」(見第 8 頁)，只是[廣義基本無解區]的特例而已。

2. 由棋子所在的位置與棋子尚未通過的方格區域，我們可劃分出一些$m\times l$區塊，並由這些區塊得出的「廣義基本無解區」，來判斷棋子的下一步。而隨著棋子的移動，「廣義基本無解區」可能隨之而改變，當足以判斷棋子必通過某一區塊的「廣

義基本無解區」，則此移動路線必是無解路徑。

3. ［有效移動］定義：對於不進入「廣義基本無解區」的移動，稱之。

4. 不符合[有效移動]，必產生無解路徑，如下面圖例。

（1）起點格 *A* 在第一行：

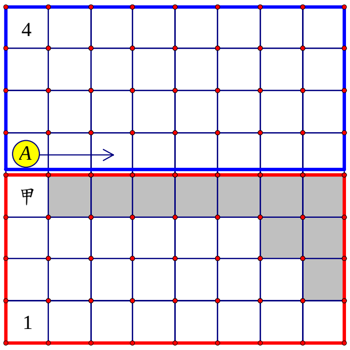


圖 6-1

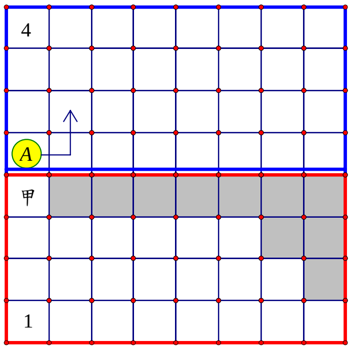


圖 6-2

說明：① 將8×8分成上下兩個4×8的矩形，棋子一開始在上層4×8的「基本無解區」外面，但從上層4×8要到下層4×8只有往甲方格移動，才能符合[有效移動]。因此，圖(6-1、6-2)之路線移動必產生無解路徑。

② 由①可得棋子從起點格 *A* 出發只能選擇下面兩條：

ⓘ 棋子從起點格 *A* 一直往上直到 4 號角格，接著做符合[有效移動]的前進到達甲方格(實際上，此段移動過程只能到第三行之方格)，再繼續前進。

ⓘⓘ 棋子從起點格 *A* 做向右、左下到達甲方格，接著做符合[有效移動]的前進(實際上，棋子從甲方格之後的移動，未達 1 號角格之前，不能到第三行之方格)。。

③ 由②可得起點格在第一行，若為有解路徑，依照棋子的推進過程，可推得其「路徑解」只能產生於最右兩行或最上兩列。

(2)起點格 *A* 在第一列：

說明：① 將8×8分成左右兩個8×4的矩形，棋子一開始在右層8×4的「基本無解 區」外面，但從右層8×4要到左層8×4只有往甲方格移動，才能符合[有效移動]。

因此，圖(6-3、6-4)之路線移動必產生無解路徑。

② 由①可得棋子從起點格 *A* 出發只能選擇下面兩條：

ⓘ 棋子從起點格 *A* 一直往右直到 2 號角格，接著做符合[有效移動]的前進到達甲方格，再繼續前進。

ⓘⓘ 棋子從起點格 *A* 做向上、左下到達甲方格，接著做符合[有效移動]的前進。

③ 由②可得起點格在第一列，若為有解路徑，依照棋子的推進過程，可推得其「路徑解」只能產生於最右兩行或最上兩列。

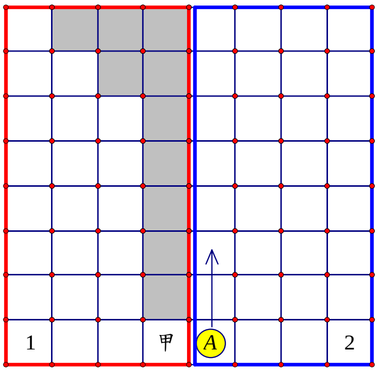


圖 6-3

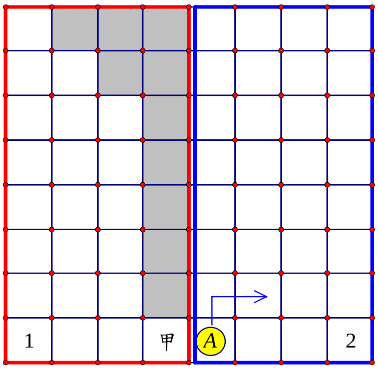


圖 6-4

(3) **起點格 *A* 在內層：**

說明：① 圖(6-5、6-6)之路線移動必產生無解路徑。

② 圖(6-7、6-8)中，從起點格 *A* 出發接著必往甲方格移動，因此我們可從8×8選出$2\times3(3\times2)$藍框與$3\times8(8\times3)$紅框的矩形，得知最終的移動不能符合[有效移動]。因此，圖(6-7、6- 8)之路線移動必產生無解路徑。

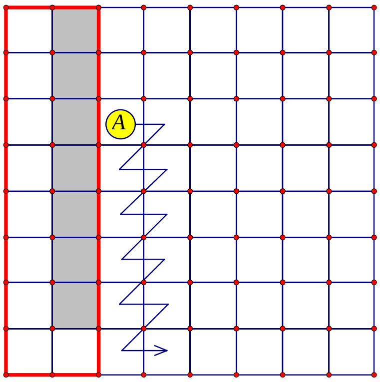


圖 6-5

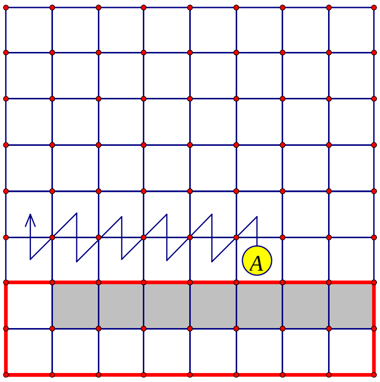


圖 6-6

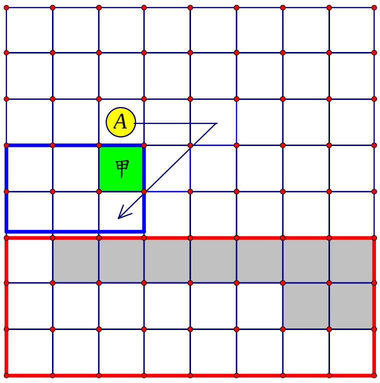


圖 6-7

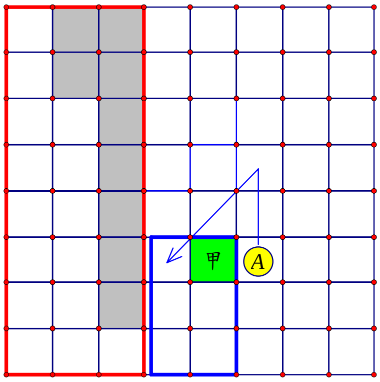


圖 6-8

利用上述的探討結果，我們可推廣到 $n \times n$ 得結論如下：

[推廣 3]：(1) 有解路徑的產生，必須符合

① 起點格為非無解起點格。

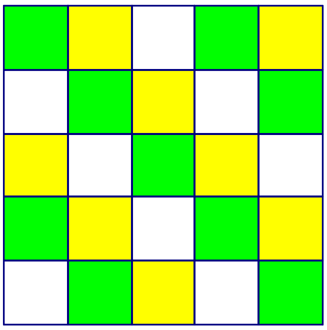
② 路徑的移動每一步須符合[有效移動]。

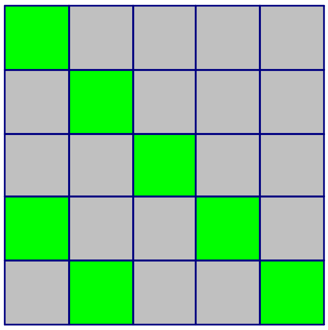
(2) 起點格在第一行(或第一列)：若為有解路徑，其「路徑解」只能產生於最右兩行或最上兩列。

==

從 5×5 的路徑解找尋本研究的相關性質：

接著，由[推廣 2-(3)]得知 5×5 與 8×8 屬於同類(「起點格」→「終點格」之對應關係為：「綠色格」→「綠色格」)。因此，我們以 5×5 替代 8×8 來簡化研究，如圖(7-1-2)可能的「有解起點格」只剩 7 個(綠色格)。以下我們以這 7 個格子當作「起點格」，利用[推廣 3]尋找有解路線，並實際操作：

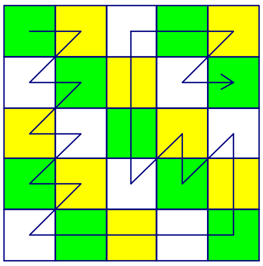

圖(7-1-1)


圖(7-1-2)

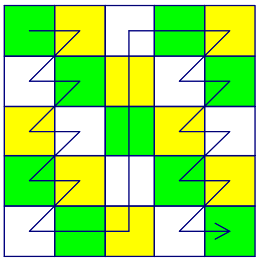
1. 「起點格」(1，5)：

討論：1. 棋子從 4 號角格出發，未達 1 號角格之前，不能經過第三行。否則，會造成進入「基本無解區」，形成無解路徑，如圖(7-2-3)。

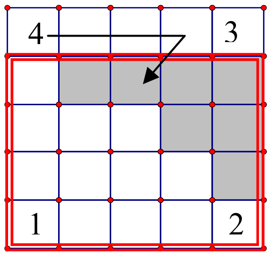
2. 由[討論 1]可証得：對於 5×5 的棋盤，以(1，5)當「起點格」，其「路徑解」只有兩個(5，4)、(5，1) ，如圖(7-2-1)、(7-2-2)。



圖(7-2-1)



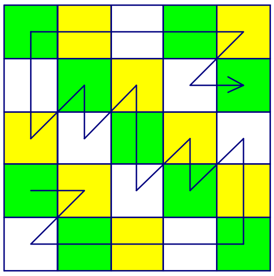
圖(7-2-2)



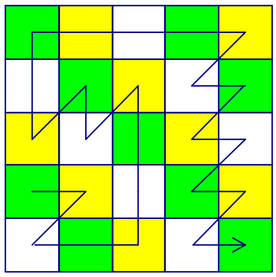
圖(7-2-3) 說明：
灰色區爲 4×5
的「基本無解區」

2.「起點格」(1，2)：

根據[有效移動]可推得以(1，2)當「起點格」，其「路徑解」只有兩個(5，4)、(5，1)，如圖(7-3-1)、(7-3-2)。



圖(7-3-1)

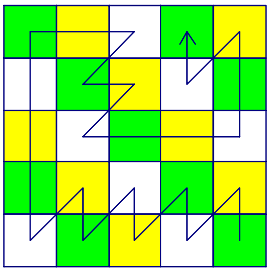


圖(7-3-2)

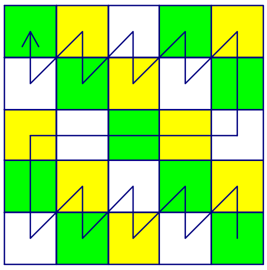
3.「起點格」(5，1)：

討論：1. 棋子從 2 號角格出發，未達 1 號角格之前，不能經過第三列。否則，會造成進入「基本無解區」，形成無解路徑，如圖(7-4-3)。

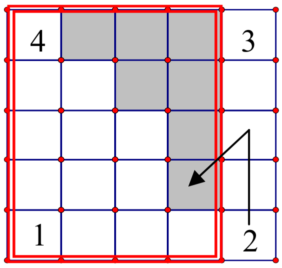
2. 由[討論 1]可証得：對於 5×5 的棋盤，以(5，1)當「起點格」，其「路徑解」只有兩個(1，5)、(4，5) ，如圖(7-4-1)、(7-4-2)。



圖(7-4-1)



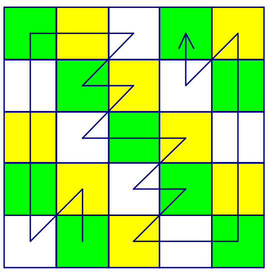
圖(7-4-2)



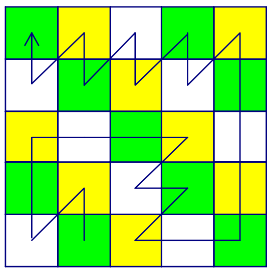
(圖 7-4-3) 說明：
灰色區爲 5×4
的「基本無解區」

4.「起點格」(2，1)：

根據[有效移動]可推得以(2，1)當「起點格」，其「路徑解」只有兩個(4，5)、(1，5) ，如圖(7-5-1)、(7-5-2)。



圖(7-5-1)



圖(7-5-2)

5.「起點格」(2，4)：

根據[有效移動]可推得以(2，4)當「起點格」，其「路徑解」只有 (4，2)，如圖(7-6)。

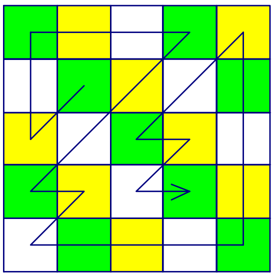
6.「起點格」(4，2)：

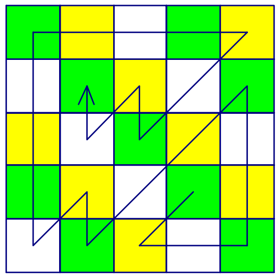
根據[有效移動]可推得以(4，2)

當「起點格」，其「路徑解」只有(2，4)，如圖(7-7)。

7.「起點格」(3，3)：

根據[有效移動]可推得以(3，3)當「起點格」，無「路徑解」。

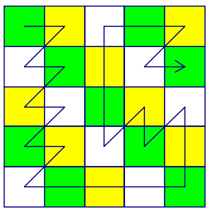

圖(7-6)

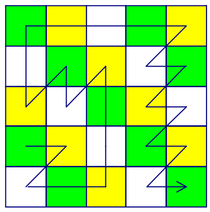

圖(7-7)

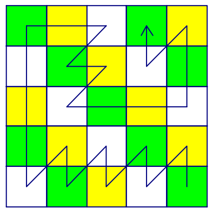
==

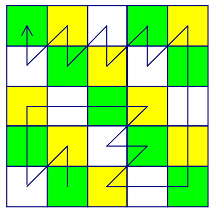
仔細分析上述結果，我們得出以下重要發現：

[發現一] 點對稱 [中心(3，3)] 路徑：如下圖，共兩組形成點對稱，將其中一個圖型旋轉 180^{0} 可得同組中的另一個圖型。


圖(7-2-1)


圖(7-3-2)


圖(7-4-1)


圖(7-5-2)

==

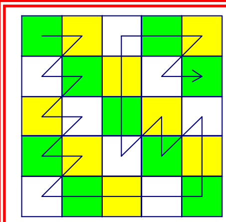
[推廣 4]：由[發現一]顯然可推廣到下面一般化性質：

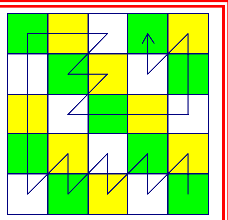
[可逆性性質]：對於 $n\times n$，若存在一條「起點格」為 $A(a,b)$、「終點格」為 $A'(c,d)$ 的有解路徑，則必存在一條「起點格」為 $B(c',d')$、「終點格」為 $B'(a',b')$ 的有解路徑。

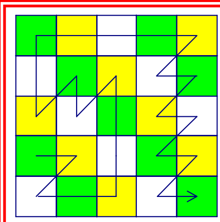
其中： $a+a'=b+b'=c+c'=d+d'=n+1$

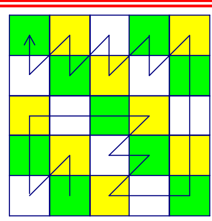
==

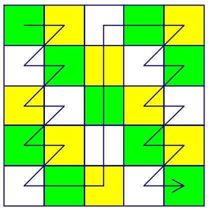
[發現二] 線對稱 [對稱軸 $y=x$] 路徑：如下圖，共五組形成線對稱，將其中一個圖型沿著對稱軸 $y=x$ 翻轉可得同組中的另一個圖型。


圖(7-2-1)

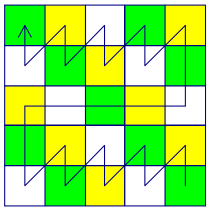

圖(7-4-1)


圖(7-3-2)

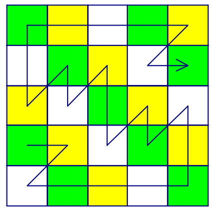

圖(7-5-2)



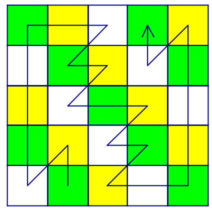
圖(7-2-2)



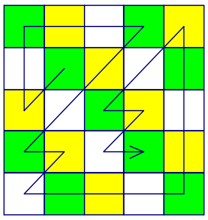
圖(7-4-2)



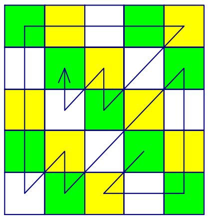
圖(7-3-1)



圖(7-5-1)



圖(7-6)



圖(7-7)

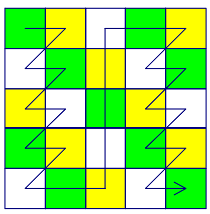
==

[推廣 5]：由[發現二]可推廣得

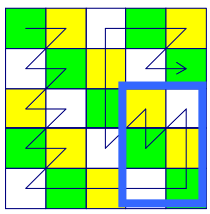
[對稱性性質]：對於 $n \times n$，若存在一條「起點格」為 $A(a, b)$、「終點格」為 $A'(c, d)$的有解路徑，則必存在一條「起點格」為 $C(b, a)$、「終點格」為 $C'(d, c)$的有解路徑。即這兩條有解路徑是以 $y = x$ 為對稱軸的路徑。

==

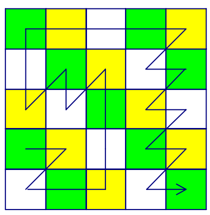
[發現三] 我們觀察到，對於 5×5 第一列可能的「有解起點格」皆有「路徑解」，且其「路徑解」都相同。並且對於相同起點格，其解之不同，只在於圖中 3×2 藍框部分的通過先後順序(圖中 3×2 藍框部分設定爲路徑優先通過)。



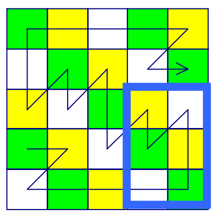
圖(7-2-2)



圖(7-2-1)



圖(7-3-2)



圖(7-3-1)

因此，利用此方式由一「路徑解」可推出另一「路徑解」。我們把此方式所得到的「路徑解」，稱爲「**擴充解**」。

至於 $n \times n$ 是否也有此結果呢？

==

[**推廣 6**]：我們找到一個事實：

「**對於** $n\times 3$ **，起點格(1，** i **)，** i**=1，2，3，…，** n **，必存在一條有解路線，使得終點格為(3，** i **)。**」(我們可用操作來證明，如圖(8-1))

爲了方便說明，我們將圖(8-1) $n\times 3$ 的有解路線圖，稱為「$n\times 3$ **平移哈氏鏈**」。

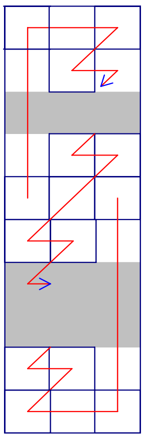
同樣的，「**對於** $3\times n$ **，起點格(** i **，1)，** i**=1，2，3，…，** n **，必存在一條有解路線，使得終點格為(** i **，3)。**」(利用[對稱性]由 $n\times 3$ 平移哈氏鏈可得到證明)。

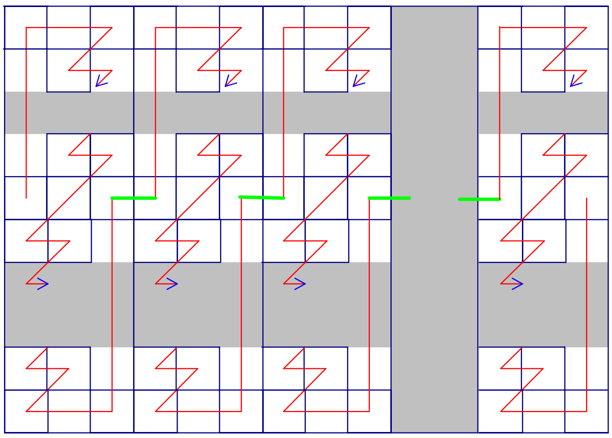
具有此種結果的 $3\times n$ 有解路線圖，稱為「$3\times n$ **平移哈氏鏈**」。

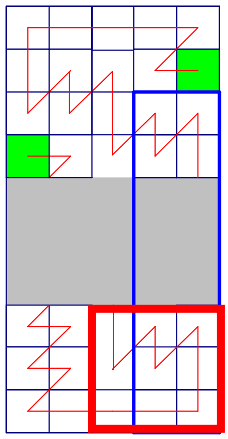
更一般化的名詞定義：

「**對於** $n\times m$ **，起點格(1，** i **)，若存在一條有解路線，使得終點格為(** m **，** i **)。**」則我們稱具有此種結果的 $n\times m$ 有解路線圖，稱為**(1，** i **)**的「$n\times m$ **平移哈氏鏈**」。

當我們取 k 個「$n\times 3$ **平移哈氏鏈**」，由左而右相連接可完成一個起點格爲(1，i)，終點格爲(3k，i)的「$n\times 3k$ **平移哈氏鏈**」，如圖(8-2)。


圖(8-1)


圖(8-2)


圖(8-3)

因此，對於以此方式拼成的 $n\times n$ 其起點格爲(1，i)之「路徑解」，我們僅需考慮右邊部份。又因爲我們先要解決 8×8 的路徑解，所以在此我們只考慮同類型的 $n=3r+2$ 之研究，分析如下：

利用[有效移動]操作，僅需考慮 $n\times 5$ ($\because$ 除了起點格爲(1，n)外，$n\times 2$ 皆會形成無解路徑)，其起點格爲(1，i)(其中 $i=2$，5，…，$3r+2$)之「路徑解」即可。

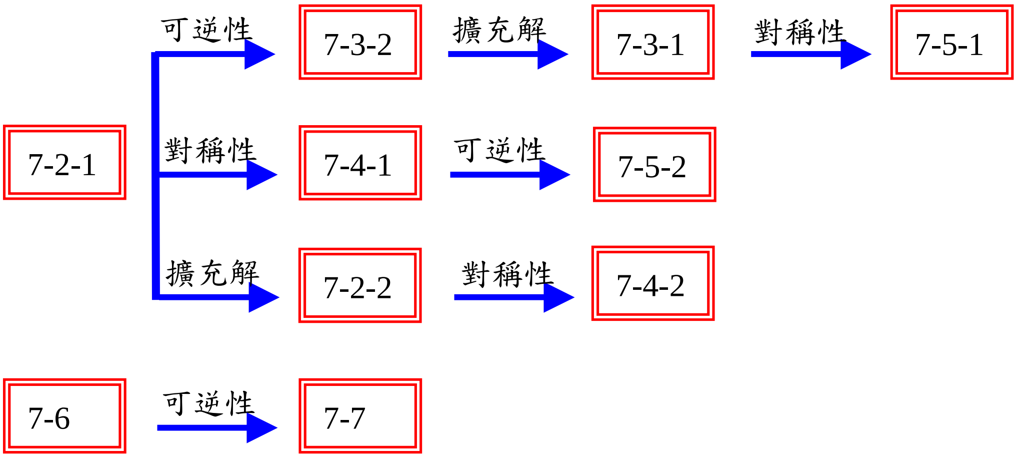
同 5×5 利用 $3t\times 2$ 型之藍框來控制路徑的通過順序，實際上，藍框的使用即是 $3t\times 3$ 平移哈氏鏈(紅框部分)的利用，如圖(8-3)，因此可得其「路徑解」爲(5，

n-1)及「擴充解」：(5，n-4)、…、(5，1)，再根據平移哈式鏈可推得 $n\times n$ 起點格(1，i)之「路徑解」皆爲(n，n-1)、(n，n-4)、…、(n，1)。

⇒ $n\times n$ 起點格(1，i)之「路徑解」爲(n，n-1)、(n，n-4)、…、(n，1)。 ($n=3r+2$)

……………………………………………………………...…………(公式一)

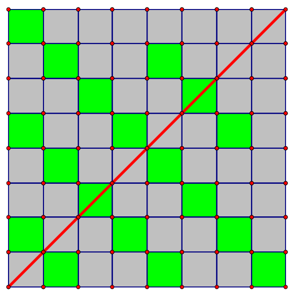
利用上述的發現，我們整理出圖形之間的關連性：



由這些關連性，重新檢視 5×5 的路徑尋找，我們只要找出兩條有解路徑，則其它有解起點格的解皆可由其關連性得出。

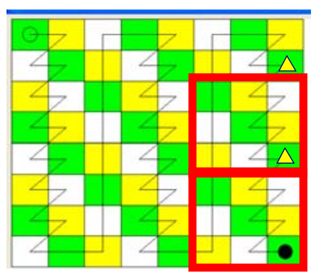
8×8路徑解的研究：

1. 由[對稱性]性質，我們可省略右下半綠色格的路徑解尋找。(如圖 9-1)



圖(9-1)

2. 利用(公式一)，可得當起點格爲(1，8)、(1，5)、(1，2)，其「路徑解」相同，皆爲(8，7)、(8，4)、(8，1)。 (如圖 9-2，利用 3×3 平移哈氏鏈[紅色框]可得[擴充解]---『△』部分)
3. 當起點格爲(2，7)，根據[有效移動]及[擴充解]可推得其「路徑解」爲(7，2)、(7，5)、(4，2)、(4，5)。(如圖 9-3，利用 3×3 平移哈氏鏈[紅色框]可得[擴充解] ---『△』部分)



圖(9-2)

4. 由上述第 3 點根據[可逆性]性質可得出下列

「路徑解」:

(1) 由　　起點格(2，7)→終點格(7，5)

　　可推得　起點格(2，4)→終點格(7，2)。

(2) 由　　起點格(2，7)→終點格(4，2)

　　可推得　起點格(5，7)→終點格(7，2)。

(3) 由　　起點格(2，7)→終點格(4，5)

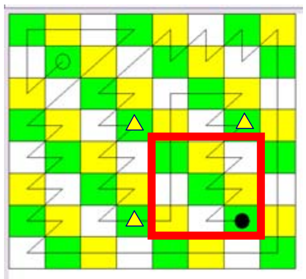
　　可推得　起點格(5，4)→終點格(7，2)。

　　再由[對稱性]

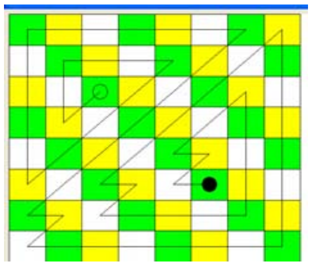
　　可推得　起點格(4，5)→終點格(2，7)。

(4) 由　　起點格(2，7)→終點格(7，2)

　　可推得　起點格(2，7)→終點格(7，2)。　(相同路徑)



圖(9-3)

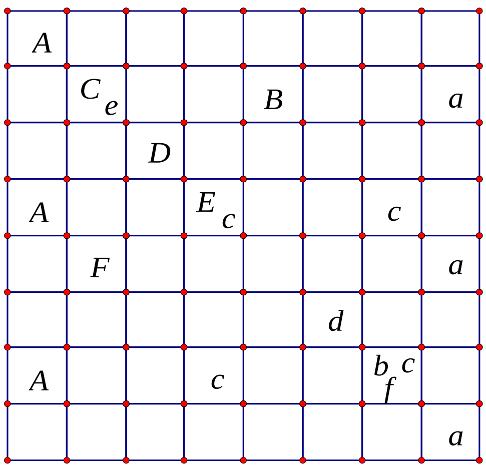


圖(9-4)

5. 當起點格爲(3，6)，根據[有效移動]可推得其「路徑解」爲(6，3)。(無[擴充解])　(如圖 9-4)

6. 當起點格爲(3，3)、(6，6)，根據[有效移動]，可得無「路徑解」。

7. 由第 2 點 ~ 第 6 點再利用[對稱性]可得8×8的所有「路徑解」。我們把第 2 點 ~ 第 5 點所得到的對應「路徑解」(起點格爲大寫英文字母，其對應的「路徑解」爲小寫英文字母)列出得圖(9-5)。(在此，我們只列出以8×8對角線左上半之方格當作起點格的「路徑解」。)



圖(9-5)

$n\times n$路徑解的研究：

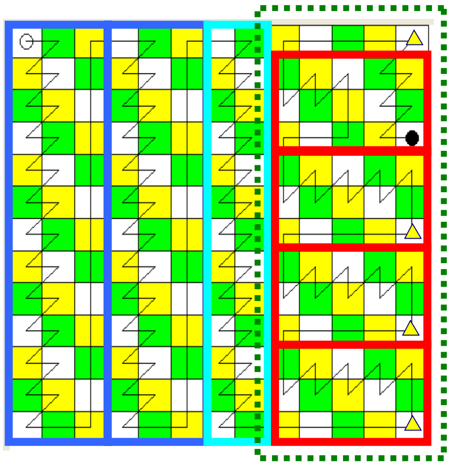
利用8×8求「路徑解」的方法，我們推廣到$n=3r+1$與$n=3r$：

1. 當$n=3r+1$時，起點格爲$(1，i)$

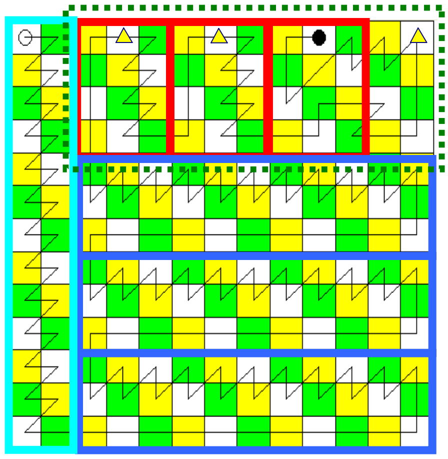
(其中$i=1，4，\cdots，3r+1$)之路徑解，根據[有效移動]操作可得，僅需分別考慮：

(1) 圖(10-1)圖中虛線框$n\times5$部分，起點格爲(1，1)，利用3×5平移哈氏鏈(紅框部分)，即可得其「路徑解」爲(5，n-3)及[擴充解] ---『△』部分：(5，n)、(5，n-6)、(5，n-9)⋯、(5，1)。

(2) 圖(10-2)圖中虛線框 $4\times(n-2)$部分，起點格爲(1，1)，利用4×3平移哈氏鏈(紅框部分)，即可得其「路徑解」爲 ($n-5$，4) 及[擴充解] ---『△』部分：($n-2$，4)、($n-8$，4)、($n-11$，4)⋯、(2，4)。



圖(10-1)



圖(10-2)

還原到$n\times n$，可得其「路徑解」爲(n，n)、(n，n-3)、⋯、(n，1)及($n-3$，n)、($n-6$，n)、⋯、(4，n)。，再根據[可逆性]性質可推得$n\times n$起點格$(1，i)$(其中$i\neq n$)之「路徑解」皆爲(n，n)、(n，n-3)、⋯、(n，1)及($n-3$，n)、($n-6$，n)、⋯、(4，n)、(1，n)。

$\Rightarrow$(1) $n\times n$起點格(1，n)之「路徑解」爲

(n，n)、(n，n-3)、⋯、(n，1)及($n-3$，n)、($n-6$，n)、⋯、(4，n)。 ($n=3r+1$)

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯..⋯⋯⋯⋯.(公式二之 1)

(2) $n\times n$起點格(1，i) (其中$i=1$，4，7，⋯，$3r-2$)之「路徑解」爲

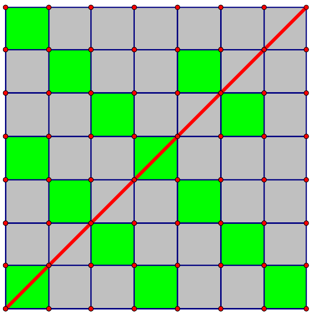
(n，n)、(n，n-3)、⋯、(n，1)及($n-3$，n)、($n-6$，n)、⋯、(1，n)。 ($n=3r+1$)

⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯..⋯⋯⋯⋯.(公式二之 2)

以7×7為例，探討如下：

[7×7路徑解的尋找]：

① 由[對稱性]性質，我們可省略右下半綠色格的「路徑解」尋找。(如圖 10-3)



圖(10-3)

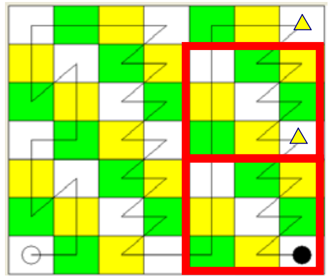
② 利用(公式二)，可得

◇1 當起點格為(1，1)、(1，4)

其「路徑解」相同皆為(7，7)、(7，4)、(7，1)、(4，7) 、(1，7)。

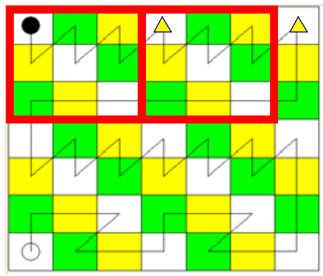
◇2 當起點格為(1，7)

其「路徑解」為(7，7)、(7，4)、(7，1) 、(4，7)。(如圖 10-4、圖 10-5，利用3×3平移哈氏鏈[紅色框]可得[擴充解] ---『△』部分)



圖(10-4)

③ 當起點格為(2，6)，根據[有效移動]可推得其「路徑解」為（6，5)、(3，2)、(3，5)、[擴充解]：（6，2)。(如圖 10-6)及「路徑解」(5，6)。(如圖 10-7)



圖(10-5)

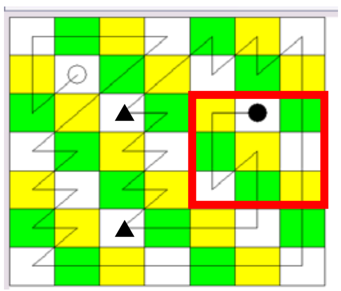
④ 由上述第③點根據[可逆性]性質可得出下列「路徑解」：

◇1 由 起點格(2，6)→終點格(6，5)

可推得 起點格(2，3)→終點格(6，2)。

◇2 由 起點格(2，6)→終點格(3，2)

可推得 起點格(5，6)→終點格(6，2)。



圖(10-6)

◇3 由 起點格(2，6)→終點格(3，5)

可推得 起點格(5，3)→終點格(6，2)。

再由[對稱性]

可推得 起點格(3，5)→終點格(2，6)。(如圖 10-8)

◇4 由 起點格(2，6)→終點格(6，2)

可推得　起點格(2，6)→終點格(6，2)。

(相同路徑)

◇5起點格(2，6)→終點格(5，6)

由[可逆性]

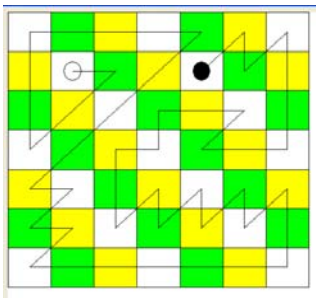
可推得　起點格(3，2)→終點格(6，2)。

再由[對稱性]

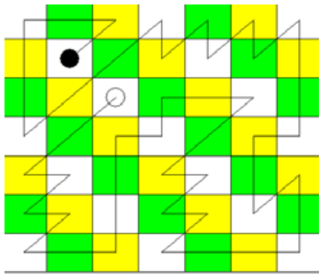
可推得　起點格(2，3)→終點格(2，6)。

⑤當起點格爲(4，4)，根據[有效移動]，可得

無「路徑解」。



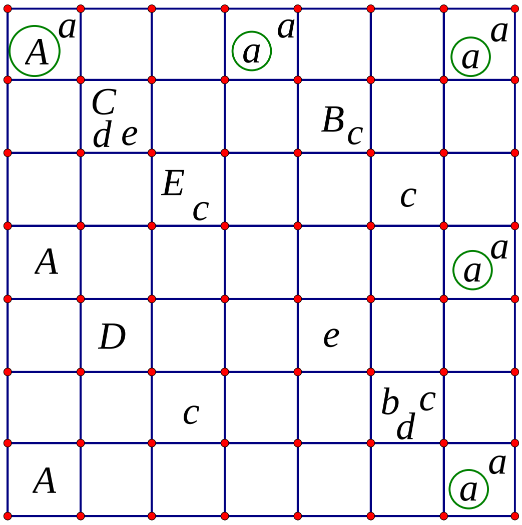
圖(10-7)



圖(10-8)

⑥ 由第 ② 點 ~ 第 ⑤ 點，再利用[對稱性]可得 7×7 的所有解。

我們把第②點 ~ 第④點所得到的對應「路徑解」(起點格爲大寫英文字母，其對應的「路徑解」爲小寫英文字母)列出得圖(10-9)。(在此，我們只列出以 7×7 對角線左上半之方格當作起點格的「路徑解」。)



圖(10-9)

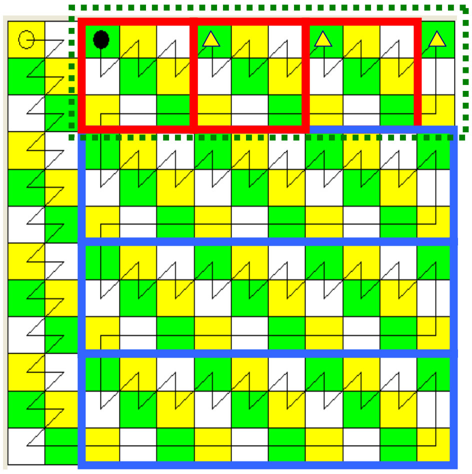
2. 當 $n=3r$ 時，起點格爲(1，i)之路徑解，根據[有效移動]操作可得

(1)　當 $i=3k$ ，如圖(11-1、11-2)

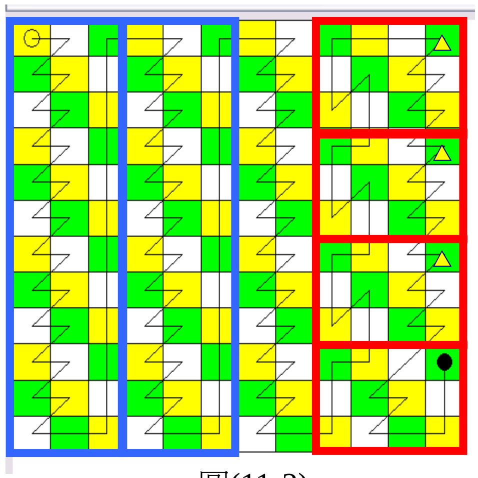
起點格(1，3k)型之「路徑解」爲

(3，n)、(6，n)、⋯、(n，n)、(n， $n-3$)、(n， $n-6$)、⋯、(n，3)。

……………..………….(公式三之 1)



圖(11-1)



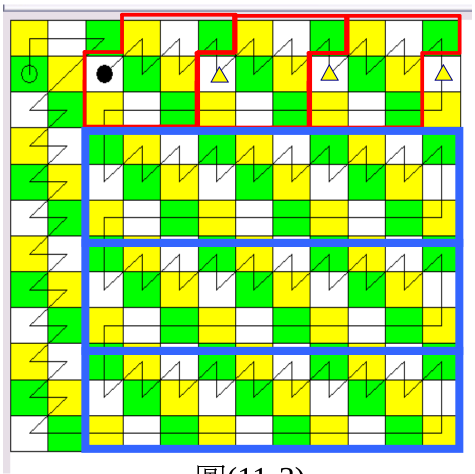
圖(11-2)

(2)　當 $i = 3k - 1$ ，如圖(11-3)(其中圖中紅框部分是另一種平移哈式鏈)、圖 11-4

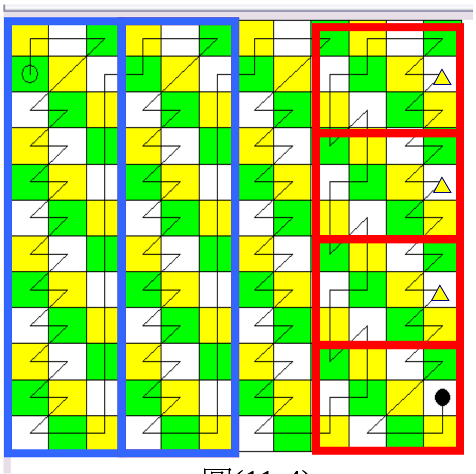
起點格(1， $3k - 1$)型之「路徑解」解爲

(3， $n - 1$)、(6， $n - 1$)、⋯、(n， $n - 1$)、(n， $n - 4$)、⋯、(n，2)。

……………...…………(公式三之 2)



圖(11-3)



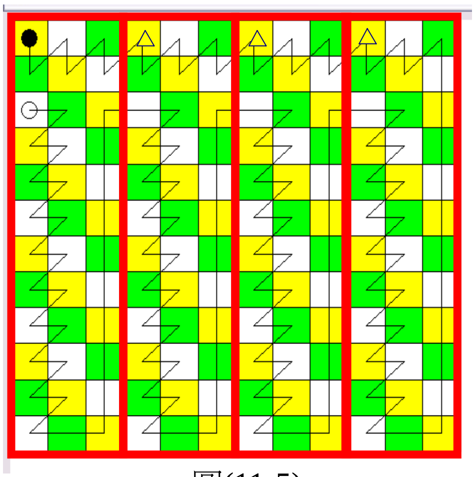
圖(11-4)

(3)　當 $i = 3k - 2$ ，如圖(11-5、11-6)

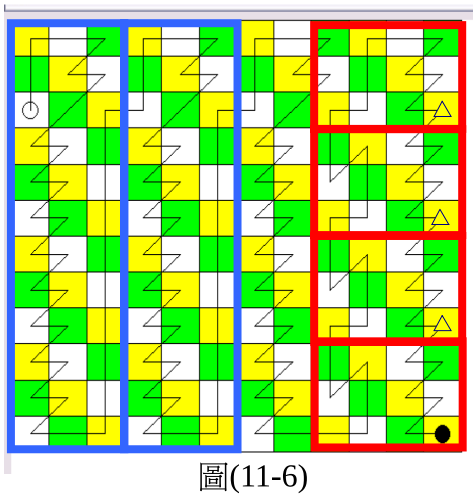
起點格(1， $3k - 2$)型之「路徑解」爲

(1，n)、(4，n)、⋯、($n - 2$ ，n)、(n， $n - 2$)、(n， $n - 5$)、⋯、(n，1)。

……………...…………(公式三之 3)

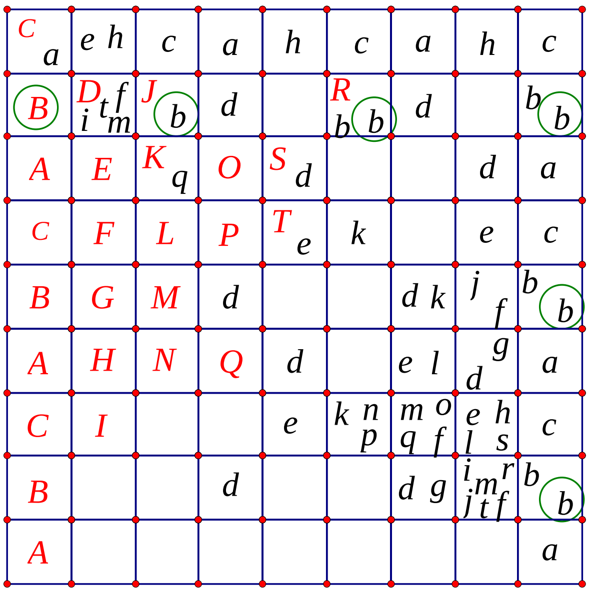


圖(11-5)



圖(11-6)

以9×9爲例，仿照7×7、8×8之分析過程，根據[有效移動]，代入(公式三之 1、2、3)，再利用[擴充解]、[可逆性]性質、[對稱性]性質，可得出所有「路徑解」。在此，我們只列出以9×9對角線左上半之方格當作起點格的「路徑解」，如(圖 11-7)。



圖(11-7)

討論：1.對於有解起點格在第一行(或第一列)，其「路徑解」我們可以給出公式。

2.對於有解起點格在內層方格，由於情況很多，我們想不到較好的方法寫出公式，但是根據[擴充解]，可猜測公式會存在。

三、結論：

(一)、利用「塗色論」與「基本無解區」，可得$n \times n$的大部分「無解起點格」。

(二)、利用[有效移動]，可簡化有解路徑解的尋找。

(三)、從本研究規則可得到

1. [可逆性性質]　2. [對稱性性質]。

(四)、利用[平移哈式鏈]，可得[擴充解]。

(五)、對於$n \times n$所有「路徑解」的尋找，可利用

1. 針對$n \times n$對角線左上半方格之可能「有解起點格」來研究。
2. 起點格在第一行，則可代入(公式)得出「路徑解」。
3. 起點格在內層，則

(1)利用[有效移動]先求出一個「路徑解」，再利用[平移哈式鏈]，得出[擴充解]。

(2)利用[可逆性性質]得出相關「路徑解」。

(3)當尚有可能的「有解起點格」之「路徑解」未求出，則重複上述(1)、(2)之過程。

4.利用[對稱性性質]，完成所有「路徑解」之尋找。

四、參考資料：

(一)、作者：水木耳 譯　數學功力測驗 P.1、P.4、P.5　凡異出版社

(二)、作者：單墫　棋盤上的數學 P.29~P.35　九章出版社

(三)、作者：徐力行　沒有數字的數學 P.38~P.83　天下文化出版

(四)、離散數學第六章　The Hamiltonian Circuit Problem

(http://www.cis.nctu.edu.tw/~is83039/discret/discrete6.html)

(五)、Wolframe Math World

(http://mathworld.wolfram.com/HamiltonianPath.html)

(六)、Wikipedia　Hamiltonian path

(http://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_cycle)

(七)、維基百科　漢彌爾頓路徑問題

評語

1) 這是一件探討棋盤路徑的作品。這一類的探討具有引人入勝、可操作性、要進行策略設計、具有思考性等優點。然而就以數學科展的角度看來，人們會問到：「究竟作者探討了多少份量的數學？」「它有應用到哪些數學方法？」「此探討具有哪些科學內涵？」等問題。作品中看不出以上問題的答案。
2) 作者的口頭報告過份的流利，令人懷疑作者是否經歷過科學探討經常發生的掙扎經驗。