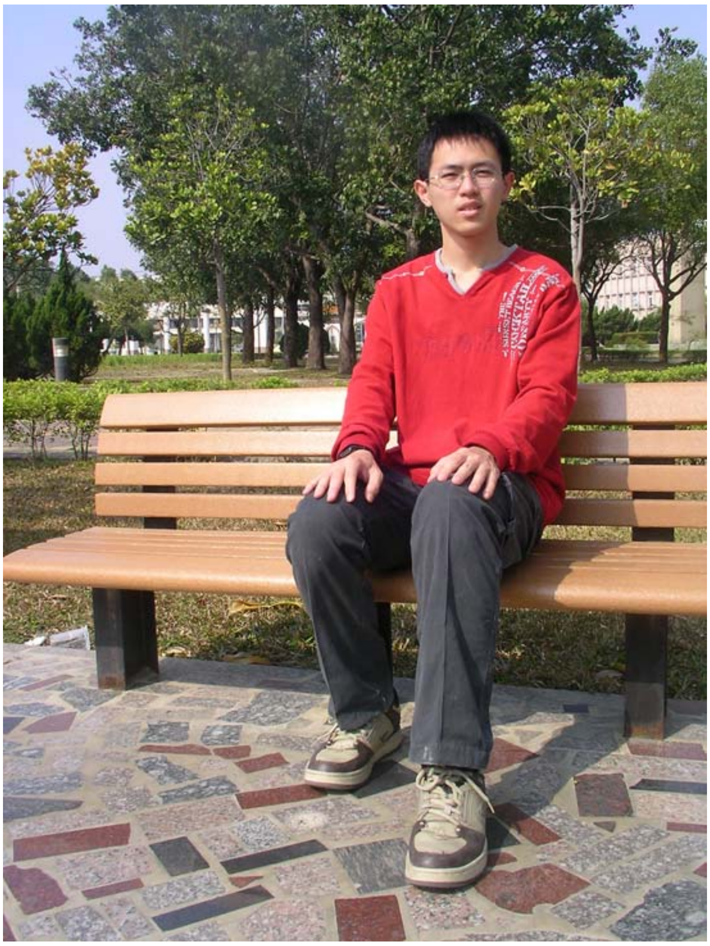
臺灣二ＯＯ八年國際科學展覽會

科　　　　別：數學

作 品 名 稱：格子點上的三角形

學校 / 作者　：國立臺南第一高級中學　　　　杜冠慧

壹、作者簡介



我是杜冠慧，從小生長在路竹。興趣是看書、跑步、跳繩、打電腦，也喜歡下棋。平常總是會天馬行空地想一些奇怪的數學、物理問題，雖然因此而占據了不少空閒時間，但我還是樂在其中。這次參加科展也花了不少時間，但是研究過程中學到的東西讓我感到這一切都是值得的。以下便是我個人研究的成果，希望大家多多指教。

貳、摘要

格子點上的三角形表示這個三角形三頂點的座標皆是整數。本研究先探討用平面格子點可以連出哪些三角形的相似形，再推廣到可以連出哪些多邊形的相似形；接著再研究空間中的格子點可以連出哪些三角形及多邊形的相似形，並用研究的結果討論空間中的格子點可以連出哪些正多面體。推廣到四次空間的格子點時，運用一條數論中的恆等式，發現可以做出來的三角形種類(所有相似形為同一種)居然與空間中的格子點一樣，這是個非常神奇的結果。另外，運用四平方和定理可導出，在五維空間中就能夠將所有可能用格子點連出的三角形種類連出來，這也是另一項收穫。

Abstract

When a triangle is formed with grid points, this means the coordinates of the vertices are all integers. This research aims to find out what type of triangles can develop into symmetries with vertices that fall right on 3 grid points on a plane. The same process is further applied to polygons. Based on the results obtained, the researcher moves on to explore what type of triangles can develop into symmetries that can be formed with spatial grid points. By using an equation in number theory to expand the study to a 4-dimension space, it is formed that the kinds of triangles—their symmetries included—which can be formed with 4-dimension grid points can also be formed in a 3-dimension space. In addition, all the possible kinds of triangles which can be formed in a 6-dimension space or up can also be formed in a 5-dimension space.

大綱

參、研究動機

平常看著磁磚上的地板時，我總是會嘗試著想像用磁磚的頂點(即格子點)連出三角形，我想：格子點是否可以連出正三角形呢？又平面上的格子點到底可以連出哪些三角形呢？因此引發了我對這個題目的興趣。其實仔細一想，格子點要連成正三角形根本是不可能的，因為格子點所連出的三角形面積總是有理數(研究內容中會有詳細說明)；但是我們知道，在空間中(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)這三個點所連成的圖形即是正三角形，因此我就聯想到了可以把平面格子點推廣到立體格子點，甚至到更高次的空間中，並開始了這次研究。

肆、研究目的

一、了解可以用平面格子點連出相似形的三角形有哪些。

二、了解可以用平面格子點連出相似形的多邊形有哪些。

三、了解可以用空間格子點連出相似形的三角形有哪些。

四、了解可以用空間格子點連出相似形的多邊形有哪些。

五、了解可以用空間格子點連出相似形的多邊形有哪些。

六、了解可以用平面格子點連出相似形的正多面體有哪些。

七、了解可以用更高次空間格子點連出相似形的三角形有哪些。

伍、研究工具

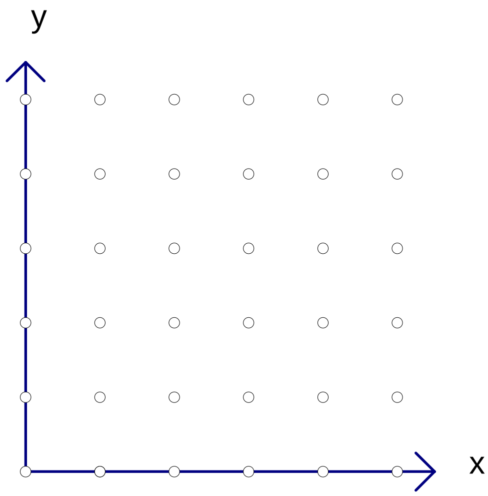
紙、筆、腦袋瓜。

電腦軟體：GSP，VB，DEV C++。

陸、研究內容

一、本研究中的特殊定義

N^n：本文中將所有平面整數格子點的集合表示為N^2、立體整數格子點的集合表示為N^3......以此類推，指的是座標皆為整數之點集合，若無特別表明，座標系採用基底向量皆為1的直角座標系。

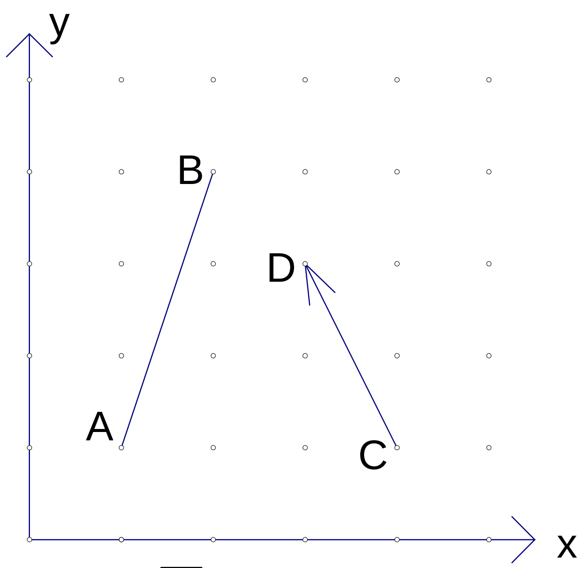


圖一

Q^n：我訂定所有平面有理數格子點集合為Q^2、立體有理數格子點集合為Q^3......以此類推，即是座標皆為有理數之點集合。

LN^n：$N^n, n \in N-\{1\}$中任兩點的連線所組成的集合稱為LN^n；同理，Q^n中任兩點的連線所組成的集合稱為LQ^n。

VN^n：$N^n, n \in N-\{1\}$中任兩點的連線向量所組成的集合稱為VN^n；同理，$Q^n, n \in N-\{1\}$中任兩點的連線所組成的集合稱為VQ^n。



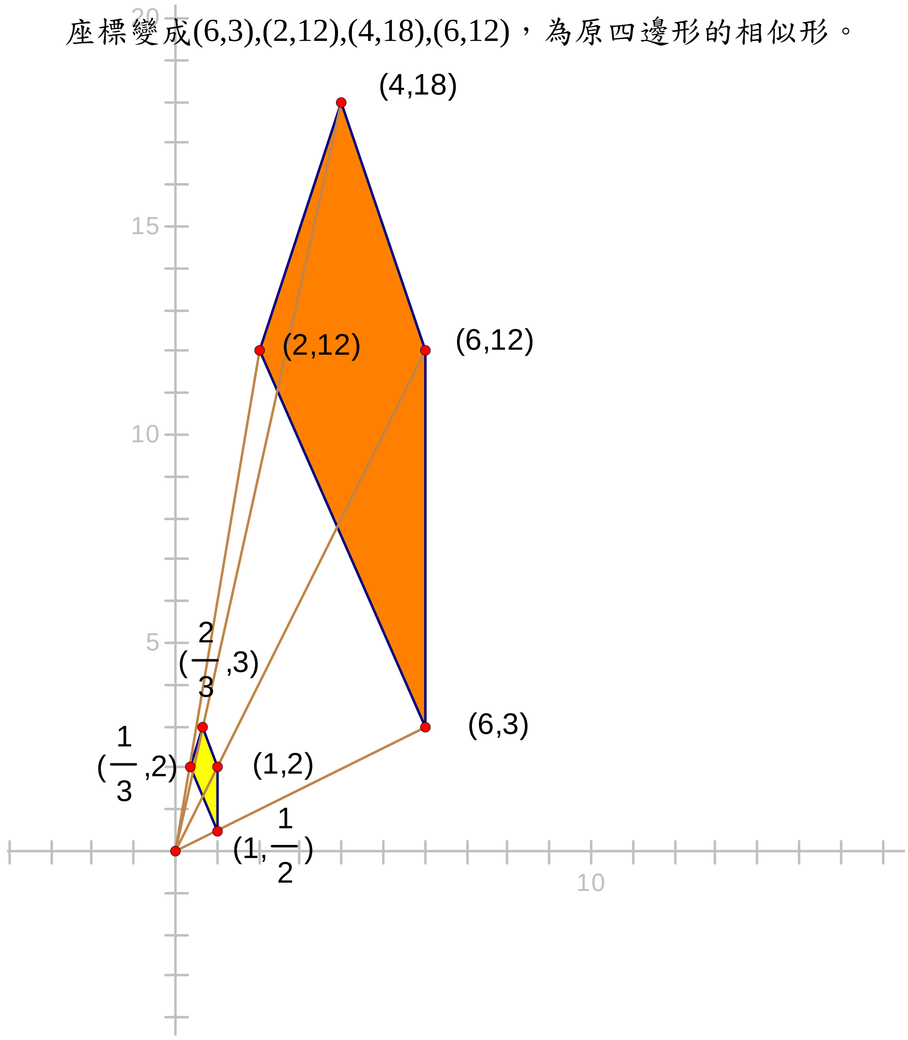
圖二：$\overline{AB} \in LN^2, \overline{CD} \in VN^2$

座標整數化：由 Q^n 所連成的幾何圖形，必可將各頂點座標同乘一整數，使其座標皆變成整數，我們稱此步驟為座標整數化。在幾何意義上代表在 Q^n 上可連出的多邊形，必可以 N^n 連出其相似形。

例如：

一四邊形頂點座標分別為 $(1,\frac{1}{2}),(\frac{1}{3},2),(\frac{2}{3},3),(1,2)$，則將所有座標同乘 6 後，

座標變成 $(6,3),(2,12),(4,18),(6,12)$，為原四邊形的相似形。



圖三：座標整數化

在以下的文章中會常常使用此方法，因為整數不具有除法封閉性，這會造成運算上的困擾，而有理數則不會。

三角形的邊長與面積：本篇研究所探討的三角形及多邊形皆必須符合所有頂點連線長度之平方屬於有理數的性質，若本來不符合此條件，則必須尋找一相似形來滿足條件，才能進入討論。因為所有 Q^n 格子點連線向量 $\overline{V}(a_1,a_2,......,a_n)(a_1,a_2,......,a_n \in Q)$ 之長度的平方 $a_1^2+a_2^2+......+a_n^2$ 皆為有理數，故若無相似形能符合此條件，一切就甭談了。

而符合此條件的三角形，令三邊長為 a,b,c($a^2,b^2,c^2 \in Q$)，則根據海龍公式，面積是

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \ \ (s=(a+b+c)/2 \ ) \\
&=\frac{\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{4} \\
&=\frac{\sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)][(-a+b+c)(a-b+c)]}}{4} \\
&=\frac{\sqrt{[(a+b)^2-c^2][c^2-(a-b)^2]}}{4} \\
&=\frac{\sqrt{-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2}}{4}
\end{aligned}
$$

又 $a^2,b^2,c^2 \in Q$，故可令三角形面積為 $k\sqrt{m}, k \in Q, m \in N$ (經過根號的有理化)。

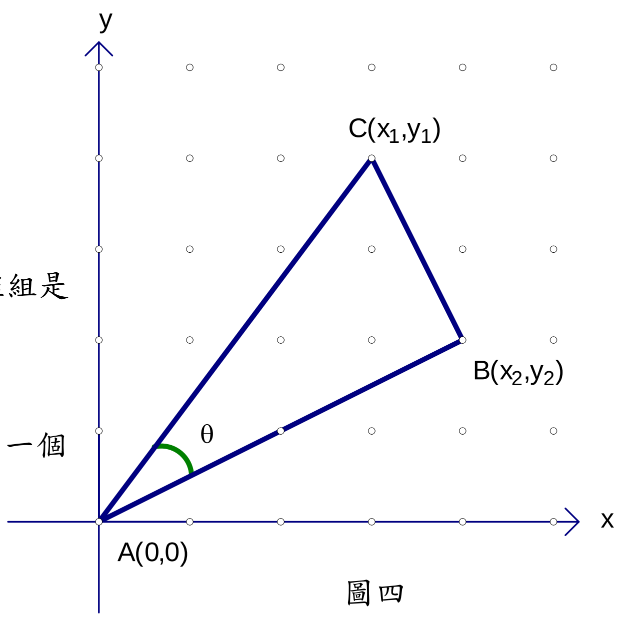
二、平面格子點上的多邊形

(一)、平面上給定邊長比的三角形

如果給定 a、b、c($a^2,b^2,c^2 \in N$)，要怎麼得知可否用 N^2 連出邊長比為 a:b:c 的三角形呢？

如圖四，不失一般性，設此三角形三頂點座標分別為 (0,0)、(x_1,y_1)、(x_2,y_2)，則

$$
\begin{cases}
(x_1-x_1)^2+(y_1-y_1)^2=a^2r^2 \\
x_1{}^2+y_1{}^2=b^2r^2 \\
x_2{}^2+y_2{}^2=c^2r^2
\end{cases}
$$



圖四

因此這個問題即等價於給定 a,b,c，求上述方程組是否有 $x_1,x_2,y_1,y_2 \in Z, r^2 \in Q$ 的解了。

上述方程組的求解看似很繁雜，因此可以從另一個角度思考，如圖四，設 AC 向量為 (x_1,y_1) 長度為 b，AB 向量為 (x_2,y_2) 長度為 c，$\angle BAC=\theta$，則由高斯平面向量旋轉，得 $\overline{AC}$ 旋轉至 $\overline{AB}$ 表示為：

$$\frac{c}{b}(x_1 + y_1 i)(\cos\theta + i\sin\theta) = x_2 + y_2 i$$

由虛部、實部各相等，得

$$\begin{cases} \frac{c}{b}(x_1 \cos\theta - y_1 \sin\theta) = x_2 \text{ ....(i)} \\ \frac{c}{b}(x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta) = y_2 \text{..........(ii)} \end{cases}$$

由〈一、本研究的特殊定義〉的討論知道，透過座標整數化，當要求出 x_1, x_2, y_1, y_2 是否有整數解時，即等價於求 x_1, x_2, y_1, y_2 是否有有理數解，在幾何意義上即是求 Q^2 上是否可以連出 (a^2, b^2, c^2) 的相似形。

(1)

首先，當△ABC 可以用 Q^2 格子點 $(0,0),(x_1, y_1),(y_2, y_2)$ 連出時(即 $x_1, y_1, x_2, y_2 \in Q$)，它的面積是

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

為一有理數，但是否任何面積為有理數的三角形皆可用 Q^2 連出其相似形呢？

(2)

現在有四個未知數 x_1, x_2, y_1, y_2，先「假定」x_1, y_1 皆是已知的有理數，即 A,C 兩點皆為已知點。

由餘弦定理，知道

$$\cos\theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{b}\cos\theta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b^2} \in Q \text{..............(iii)}$$

當面積 $\frac{1}{2}bc\sin\theta \in Q$ 時，將 $b^2 \in Q$ 代入

$\Rightarrow \frac{c}{b}\sin\theta \in Q$,再將 $x_1, y_1 \in Q$,(iii)代入

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1\dfrac{c}{b}\cos\theta-\dfrac{c}{b}y_1\sin\theta\ \in Q \\ x_1\dfrac{c}{b}\sin\theta+\dfrac{c}{b}y_1\cos\theta\ \in Q \end{cases},\text{再由(i),(ii)}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_2=\dfrac{c}{b}(x_1\cos\theta-y_1\sin\theta)\ \in Q \\ y_2=\ x_1\dfrac{c}{b}\sin\theta+\dfrac{c}{b}y_1\cos\theta\ \in Q \end{cases}$$

這表示對任意點 A(0,0),$C(x_1,y_1)$，皆能找到一點 $B(x_2,y_2)$，使其符合邊長比為 a:b:c。

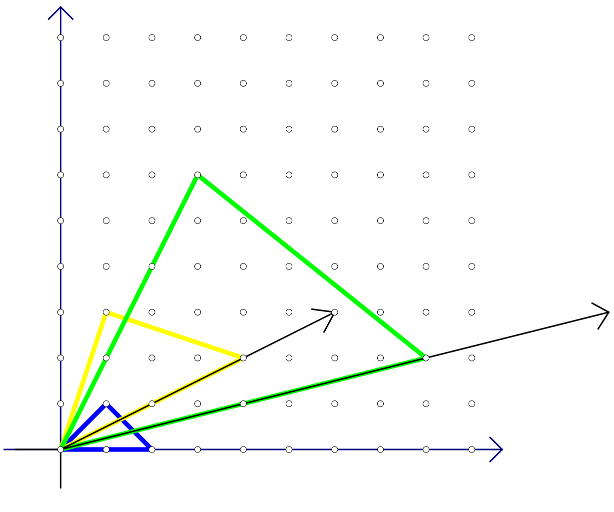
由(1),(2)導出定理一：

> 定理一：△ABC 面積∈Q 為△ABC 可以用 N^2 連出其相似形的充要條件(△ABC 的三邊長之平方皆為有理數)。

現在還有一個疑問，就是一開始假定 x_1,y_1 皆是任意已知的有理數，卻都可以找到 x_2,y_2 的有理數解，這有什麼幾何上的意義呢？

其實它代表了在 Q^2 上，若可以連成某一三角形之相似形，則若以任意有理數格子點連線作為某一邊，亦可做出一相似三角形。

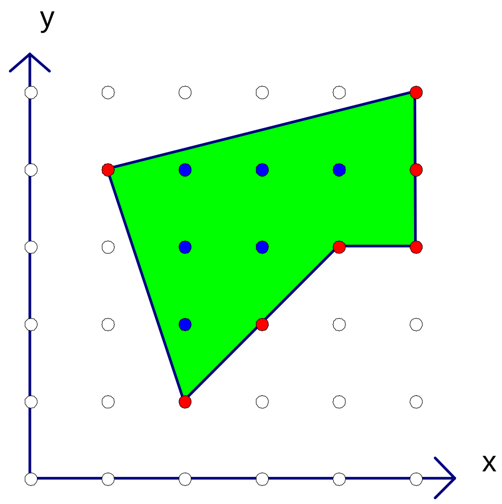
在 N^2 上亦有此性質，但是必須經過座標有理化，所以並非每一 LN^2 都可當作三角形的邊，而是任一 VN^2 的方向都可當作三角形某一邊之方向，再做出一個新的相似三角形。我們稱此性質為 N^2 上的三角形是「方向可旋轉」的。在附錄會證明為何會有此種性質。



圖五：以不同方向向量為其中一邊做出相似三角形。

從另一個角度看，這個結果亦可與皮克(Pick)定理做連結。

皮克定理：平面上一個由 N^2 連成的多邊形，面積是 b/2+i-1，其中 b 為邊上所經過的格子點數，i 為多邊形內(不包括邊上)所覆蓋的格子數。



圖六：紅點表邊上所經過的格子點，b=7；
藍點表多邊形內之格子點，i=6。
故多邊形面積= $\frac{b}{2}+i-1=\frac{17}{7}$ 。

因為 b,i 皆為整數，所以 N^2 連成的多邊形面積必為有理數(更嚴格的講，兩倍的面積必為整數)，這即是定理一的充分條件。

(二)、平面上給定角度、邊長比的多邊形

當給定一多邊形所有邊長的比和所有角度時，此多邊形即不能隨意變形，只能伸縮(當然，所有頂點連線之平方皆為有理數的條件依然存在)。

這時候可以令以任三個多邊形頂點連成的三角形集合為 S，我們知道 S 中的每一個元素都必須能用 N^2 連成其相似形。

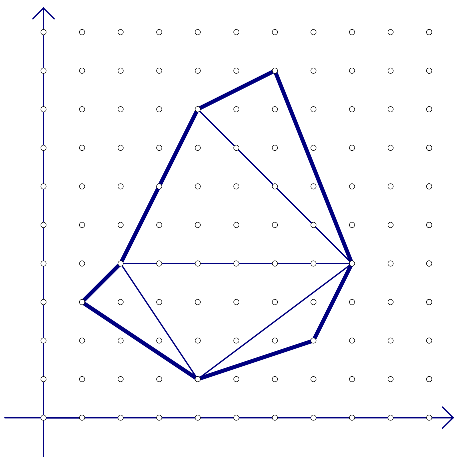
但是只要這樣就可以使此種多邊形用 N^2 連成其相似形嗎？答案是肯定的。

先在 Q^2 上做出此多邊形的相似形。

由於集合 S 中必定有某子集合恰好可組成此多邊形，且Q^2上的三角形具有「方向可旋轉」的性質，故可以先定出一三角形後，其他三角形再以相鄰邊方向相等為原則分別做出相似形。

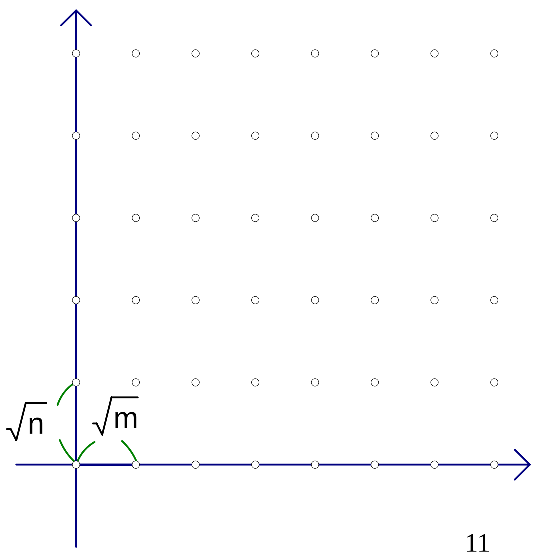
接著再進行座標整數化，將每一三角形乘上一適當的比例常數，使其可以用N^2連出，即可建構出此多邊形了。易了解N^2上的多邊形亦具有「方向可旋轉」的性質。

定理二：對多邊形 A 所有任三個頂點連成的三角形 T，T 的面積皆為有理數為此多邊形可用N^2連出相似形的充要條件(多邊形 A 所有頂點連線之平方皆為有理數)。



圖七：集合 S 中必定有某子集合恰好可組成此多邊形。

(三)、格子點基底向量伸縮後的情形



圖八

考慮經過伸縮的 N^2 (即基底向量垂直但不等長)，若只討論兩基底向量為 $(\sqrt{m},0),(0,\sqrt{n})$ 的情形($m,n\in Q$)，此時各邊長格子點連線平方

$$(a\sqrt{m})^2+(b\sqrt{n})^2=a^2m+b^2n(\ a,b\in \mathrm{N})$$

仍是有理數。

故

$$\cos\ \theta=\frac{b^2+c^2\text{-}a^2}{2bc}$$
$$\Rightarrow \frac{c}{b}\cos\ \theta=\frac{b^2+c^2\text{-}a^2}{2b^2}\ \ \in Q$$

依然成立

> 定理三：△ABC 面積 $\in\{k\sqrt{mn}\mid k\in Q\}$ 為△ABC 可以用基底向量為△ $(\sqrt{m},0)$ 與 $(0,\sqrt{n})$ ($m,n\in Q$)的 N^2 連出相似形的充要條件。(△ABC 的三邊長之平方皆為有理數)

證明：

同樣的，將 N^2 上的證明轉化成 Q^2 上的證明。

(1)

設三角形△ABC 可用基底向量為 $(\sqrt{m},0)$ 與 $(0,\sqrt{n})$ 的 Q^2 連出，令三點座標分別為(0,0)、$(x_1\sqrt{m},y_1\sqrt{n})$ 與 $(x_2\sqrt{m},y_2\sqrt{n})$ (其中 $x_1,x_2,y_1,y_2\in Q$)，則面積是

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1\sqrt{m} & x_2\sqrt{m} \\ y_1\sqrt{n} & y_2\sqrt{n} \end{vmatrix}=\frac{\sqrt{mn}}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

行列式部分是有理數，故

$$\triangle ABC\text{ 的面積}\in\{k\sqrt{mn}\mid k\in Q\}$$

(2)

前文已說明基底等長的直角座標系上 Q^2 連出的三角形可以用任何 VQ^2 方向當作其中一邊的方向。在基底向量為 $(\sqrt{m},0)$ 與 $(0,\sqrt{n})$ 的 Q^2 上之三角形是否亦有此性質呢？

三點座標分別為 A(0,0)、$B(x_1\sqrt{m}, y_1\sqrt{n})$ 與 $C(x_2\sqrt{m}, y_2\sqrt{n})$，嘗試令 x_1, y_1 皆為已知的有理數，即 A,B 點皆為已知，由向量旋轉

$$x_2\sqrt{m}=\frac{c}{b}(x_1\sqrt{m}\cos\theta\text{-}y_1\sqrt{n}\sin\theta)\text{.........(i)}$$

$$y_2\sqrt{n}=\frac{c}{b}(x_1\sqrt{m}\sin\theta+y_1\sqrt{n}\cos\theta)\text{.........(ii)}$$

又面積$\frac{1}{2}bc\sin\theta=k\sqrt{mn}, k\in Q$

$$\Rightarrow\frac{c}{b}\sin\theta=\frac{2k}{b^2}\sqrt{mn}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{n}\frac{c}{b}\sin\theta=\frac{2kn}{b^2}\sqrt{m}\\ \sqrt{m}\frac{c}{b}\sin\theta=\frac{2km}{b^2}\sqrt{n}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1\sqrt{m}\frac{c}{b}\cos\theta\text{-}y_1\sqrt{n}\frac{c}{b}\sin\theta=x_1\sqrt{m}\frac{c}{b}\cos\theta\text{-}y_1\frac{2kn}{b^2}\sqrt{m}\\ x_1\sqrt{m}\frac{c}{b}\sin\theta+y_1\sqrt{n}\frac{c}{b}\cos\theta=x_1\frac{2km}{b^2}\sqrt{n}+y_1\sqrt{n}\frac{c}{b}\cos\theta\end{cases}$$，再由(i),(ii)

$$\Rightarrow\begin{cases}x_2=\frac{x_2\sqrt{m}}{\sqrt{m}}=\frac{\frac{c}{b}(x_1\sqrt{m}\cos\theta\text{-}y_1\sqrt{n}\sin\theta)}{\sqrt{m}}=x_1\frac{c}{b}\cos\theta\text{-}y_1\frac{2kn}{b^2}\\ y_2=\frac{y_2\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=\frac{\frac{c}{b}(x_1\sqrt{m}\sin\theta+y_1\sqrt{n}\cos\theta)}{\sqrt{n}}=x_1\frac{2km}{b^2}+y_1\frac{c}{b}\cos\theta\end{cases}$$

由$k, b^2, x_1, y_1, \frac{c}{b}\cos\theta, n, m\in Q$，得$x_2, y_2\in Q$

這表示對任意點 $A(0,0), B(x_1\sqrt{m}, y_1\sqrt{n})$，皆能找到一點 $C(x_2\sqrt{m}, y_2\sqrt{n})$，使其符合邊長比為 a:b:c。

由(1),(2)得證定理三。

在證明過程中我們也知道，在基底向量為 $(\sqrt{m},0)$ 與 $(0,\sqrt{n})$ 的 N^2 上，三角形亦具有「方向可旋轉」的性質。

格子點的變形將是討論更高維空間中情況的重要跳板。以下是一個涉及到的定理。

定理四：在一基底向量為 $(\sqrt{m},0)$ 與 $(0,\sqrt{n})$ $(m,n\in Q)$的直角座標系上，取任兩垂直向量 $\vec{i},\vec{j}\in VN^2$，則

$$|\vec{i}||\vec{j}|=k\sqrt{mn}, k\in Q$$

證明：

令 $\vec{i}(a\sqrt{m},b\sqrt{n}),\vec{j}(c\sqrt{m},d\sqrt{n}),a,b,c,d\in N$ ，由 $\vec{i}\perp\vec{j}$ ，得

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=acm+bdn=0.........(i)$$

又 $|\vec{i}||\vec{j}|=\sqrt{(a^2m+b^2n)(c^2m+d^2n)}$

$=\sqrt{(acm)^2+(ad)^2mn+(bc)^2mn+(bdn)^2}$

$=\sqrt{(acm+bdn)^2-2abcdmn+(ad)^2mn+(bc)^2mn}$,將(i)代入

得 $|\vec{i}||\vec{j}|=\sqrt{(ad)^2mn-2abcdmn+(bc)^2mn}$

$=\sqrt{(ad+bc)^2mn}$

$=(ad+bc)\sqrt{mn}$

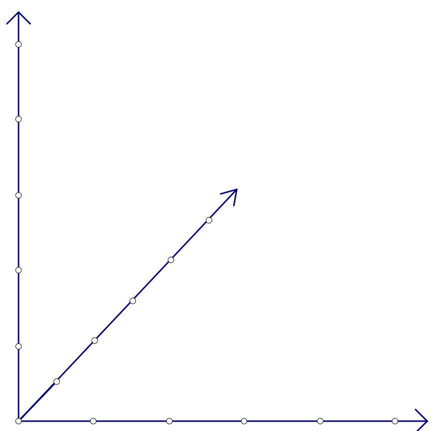
$\because a,b,c,d\in N$

所以 $|\vec{i}||\vec{j}|=(ad+bc)\sqrt{mn}=k\sqrt{mn},k\in Q$

得證。

三、空間格子點上的情形

在三維或更高維的空間，我們以「正交」代替名詞「垂直」，以避免誤會。另外，一多面體經過縮放後所形成之新多面體稱為原多面體之「相似體」，對應於平面上的相似形。



圖九：為避免格子點太多引起錯亂，空間座標系只標明需要的格子點。

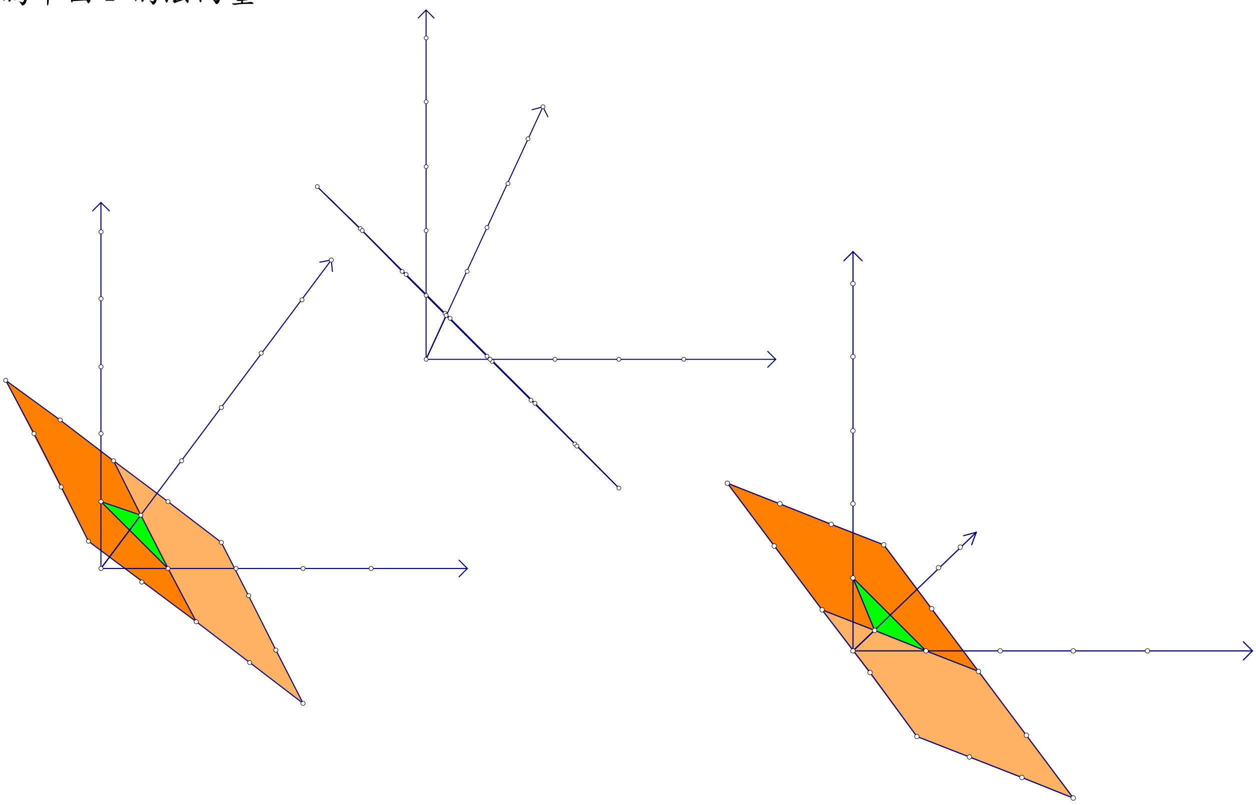
(一)、空間中給定邊長比的三角形

首先，我們知道若在空間中的某一平面 P 上之格子點若可連成一三角形，則 P 至少具有三個格子點 A、B、C。

不失一般性，設 A(0,0,0)、$B(x_1,y_1,z_1)$、$C(x_2,y_2,z_2)$ 當對 AB 向量與 AC 向量取外積時，會得一亦$\in VN^3$的向量

$$\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

此為平面 P 的法向量。



圖十：一平面從不同角度的觀點觀察。

由另一方面，當我們取$\bar{n}(a,b,c)\in VN^3$定為法向量，並將向量起點拉至座標原點時，由於$\bar{n}$所決定的平面方程式為 ax+by+cz=0，由不定方程研究上的結果，因$(a,b,c)|0$，故此平面方程式有無窮多整數解，即此平面上有無窮多個點$\in N^3$。

接著將N^3轉化成Q^3，討論Q^3在空間中平面 P 上的分布。

在平面 P 上任取兩正交向量$\bar{i},\bar{j}\in VN^3$，且令$\bar{i}\times\bar{j}=\bar{n}$，則$\bar{n}$確為平面之法向量。

令 $\vec{i}=(x_1,y_1,z_1)$ ， $\vec{j}=(x_2,y_2,z_2)$ (其中 $x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2\in Q$)，則由 $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 為基底所形成的新直角座標系 O' 中之每一 $\in VQ^2$ 的向量

$m\vec{i}+n\vec{j}=(mx_1+nx_2,my_1+ny_2,mz_1+nz_2)$(其中 $m,n\in Q$) 皆是原空間座標系 O 的 VQ^3 。

但是 O 中位於此平面上的 Q^3 是否都 $\in O'$ 中的 Q^2 呢？

令平面 P 上的點 $(p,q,r)\in O$ 中的 Q^3 ，而此點在 O' 中的座標為 (u,v)，則

$$\begin{cases} p=ux_1+vx_2 & \in Q \\ q=uy_1+vy_2 & \in Q \\ r=uz_1+vz_2 & \in Q \end{cases}$$

$\because (x_1,y_1,z_1)$ 正交於 (x_2,y_2,z_2) 且皆不爲零向量

$\therefore$ 法向量 $\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$ 不爲零向量，

即三座標不同爲零。

不失一般性，令 $x_1y_2\text{-}x_2y_1\neq 0$, 則

$$\begin{cases} u=\dfrac{y_2p\text{-}x_2q}{x_1y_2\text{-}x_2y_1}\in Q \\ v=\dfrac{x_1q\text{-}y_1p}{x_1y_2\text{-}x_2y_1}\in Q \end{cases}$$

由以上討論知道，在法向量 $\in VQ^3$ 且通過(0,0,0)的平面上，對空間座標系而言有理數格子點集合為 S，對平面上任取兩垂直且 $\in VQ^3$ 的向量為基底所形成的座標系而言，有理數格子點集合為 S' ，則 S= S' 。

故此平面上的 Q^3 可視為一平面直角座標系上的 Q^2 ，且由定理三及定理四，因

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{n} \text{ ，且} \vec{i}\perp\vec{j}$$
$$\therefore |\vec{i}||\vec{j}|=|\vec{n}|$$

故若△ABC 可以平面 P(令其基底向量為 $\vec{a},\vec{b}$)上的格子點連出，則

$$\begin{cases} \text{三角形}ABC\text{面積}=k|\vec{a}||\vec{b}| \text{ , } k\in Q(\text{定理三})\text{.........(i)} \\ |\vec{a}||\vec{b}|=r|\vec{n}|=r|\vec{i}||\vec{j}| \text{ , } r\in Q(\text{定理四})\text{.........(ii)} \end{cases}$$
$$(ii)\text{代入}(i)\Rightarrow \text{三角形}ABC\text{面積}=kr|\vec{n}|=a|\vec{n}| \text{ ,} a\in Q$$

由於每找到一個向量 $\bar{n} \in VN^3$ 作為平面法向量即可造出一平面，而 $\bar{n}$ 的長度 ℓ 可表示為 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,(x,y,z \in Z)$，故只要求出 ℓ 有哪些可能值，即知道可以做出哪些伸縮後的平面直角座標系。

由數論上的結果(參考資料一)，若有正整數 a，且 $4^n \mid a, 4^{n+1} \nmid a$，令 $a' = a/4^n$，則 a 可用三整數平方和表示出的充要條件是 $a' \not\equiv 7 \pmod 8$。

為了簡化運算，我們令一函數 q(a)，使得 q(a)= a'。

又我們知道當 r 為一完全平方數時 $\sqrt{r\ell}$ 與 $\sqrt{\ell}$ 皆 $\in \{a\sqrt{\ell} \mid a \in Q\}$，而有可能 $r\ell$ 可用三整數平方和表示但 ℓ 卻不行，以下將證明這是不可能的。

(1)

當 r 為偶數時，r 必有因數 4，此因數將會因取 q(a)之故而消去，故不予討論。

(2)

當 r 為奇數時，令 r=2n-1 $(n \in N)$，由於

$$r^2 \equiv (2n-1)^2 \equiv 4n^2 - 4n + 1 \equiv 8\frac{n(n-1)}{2} + 1 \equiv 1 \pmod 8$$

亦不會影響 $r\ell$ 模 8 之值，即 $r\ell \equiv \ell \pmod 8$。

故得以下定理：

定理五：△ABC 面積 $\in \{k\sqrt{\gamma} \mid k \in Q, \gamma \in N\}$ 且 $q(\gamma) \not\equiv 7 \pmod 8$ 為△ABC 可以用 N^3 連出相似形的充要條件。

(二)、空間中給定角度、邊長的多邊形

由於若有一空間中經過任三相異格子點的平面 P，則 P 上之格子點可視為伸縮後的平面格子點，故亦具有「方向可旋轉」的性質。

所以若令一多邊形任三頂點連成的面積非零之三角形集合為 S，而 S 中每一三角形之面積 $\in \{k\sqrt{\gamma} \mid k \in Q, \gamma \in N\}$，且 γ 為定值，$q(\gamma) \not\equiv 7 \pmod 8$，則可仿造〈二之(二)、給定角度、邊長比的多邊形〉平面上建構多邊形之方法建構出空間中的多邊形。故得以下定理：

定理六：對多邊形(頂點連線長度之平方皆為有理數)任三個頂點連成的面積非零之所有三角形 T，所有 T 之面積$\in \{k\sqrt{\gamma} \mid k\in Q,\gamma\in N\}$，且$\gamma$為定值，q($\gamma$)≠7(mod 8)為此多邊形可用 N^3 連出相似形的充要條件。

(三)、空間中給定邊長比的三角錐

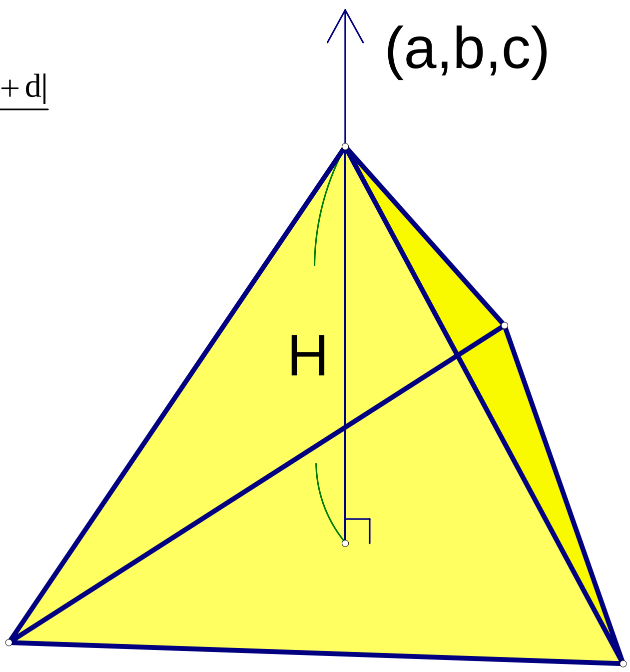
首先，三角錐的各邊長平方必須為有理數。

由之前的討論，知道若在空間中可以用 N^3 連成一三角錐之相似體，則以此三角錐任意三頂點連成之三角形必須都可以用 N^3 連成相似形。

再者，當做出一三角錐的底面時，令此底面所在的平面為 P：ax+by+cz+d=0(a,b,c$\in$N)，由〈三之(一) 給定邊長比的三角形〉的討論，我們知道此平面的法向量$\vec{n}$(a,b,c)之長度為$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$，且底面三角形面積=$k\sqrt{a^2+b^2+c^2},k\in Q$，故令此底面面積$=k\vec{n},k\in Q$。

又此三角錐不屬於底面的一點亦$\in N^3$，令其座標為(x,y,z)(x,y,z$\in$N)由點到面距離公式，知此點到底面之距離 H

$$=\frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|ax+by+cz+d|}{|\vec{n}|}$$



圖十一：三角錐。

又分子$\in$N，故三角錐之體積

$$=\frac{1}{6}(k|\vec{n}|)\frac{|ax+by+cz+d|}{|\vec{n}|}$$
$$=\frac{1}{6}k\,|ax+by+cz+d|\in Q$$

由以上討論，知道以下定理：

定理七：三角錐(邊長平方皆為有理數)可以 N^3 連出相似體有兩必要條件

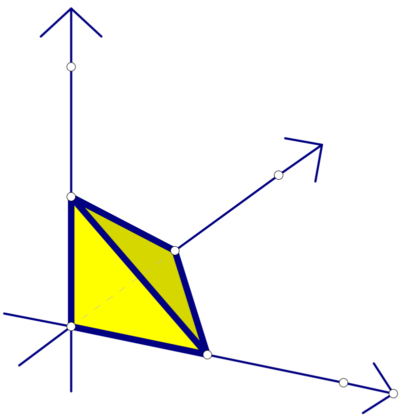
$$\begin{cases}\text{此三角錐任意頂點連成的面積非零之三角形必須都可以用}N^3\text{連成相似形}\\ \text{此三角錐的體積}\in Q\end{cases}$$

(四)、空間中的正多面體

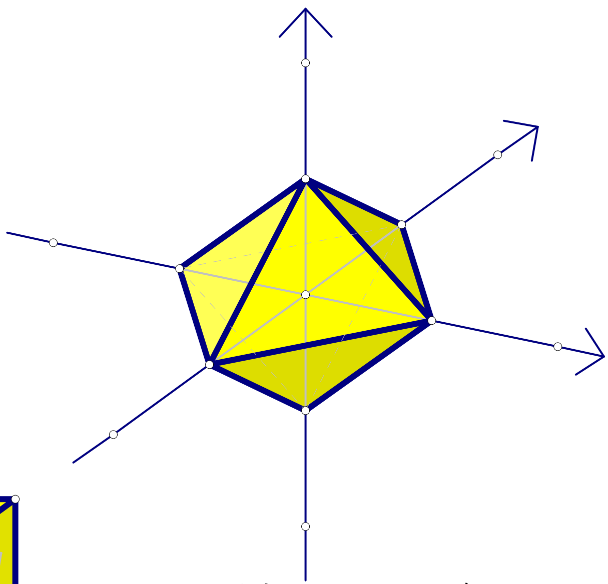
我們知道正多面體只有五種，那哪一些正多面體可以用 N^3 連出呢？

由於未得出三角錐可用 N^3 連出相似體之充要條件，故只能使用定理六的對偶定理證明哪一些多面體絕對不可能用 N^3 連出，至於可用 N^3 連出的多面體，就以舉例的方式呈現。

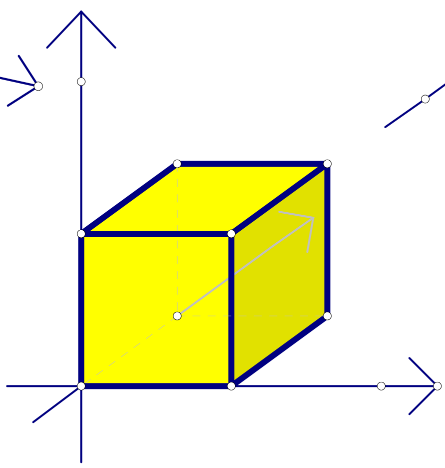
正四面體：(0,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)
正六面體：(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)
正八面體：(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0),(0,0,-1),(0,-1,0),(-1,0,0)



圖十二：正四面體。



圖十四：正八面體。



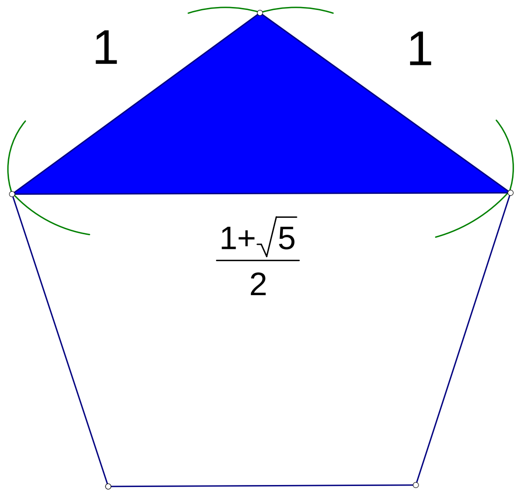
圖十三：正六面體。

至於正十二面體和正二十面體是無法用 N^3 連出的，理由如下：

由於正十二面體和正二十面體由頂點連成的多邊形中都有正五邊形存在，取相鄰三點所形成的三角形來看，此三角形面積為

$$\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

面積除以邊長 1 的平方並不屬於平方根數，因此 γ 函數值不存在，表示此三角形無法以 N^3 連出相似形。由定理七的對偶定理得知正十二面體和正二十面體皆無法由 N^3 連出。



$$三角形高h=\sqrt{1^2-(\frac{1+\sqrt{5}}{4})^2}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$$

$$面積=\frac{1}{2}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{16}$$

圖十五

四、更高維空間中的情形

易證明 n 維空間($n\geq 3$)中的二維子空間若含有三個點 $\in Q^n$ ，則二維子空間上的 Q^n 必可視為一伸縮後的平面座標系上的 Q^2(詳見附錄)。

現在問題即在有哪些可能的格子點？在 n 維空間中任取兩正交且屬於 VQ^n 的向量構成一平面 P，令兩向量分別是 $\vec{A}(a_1,a_2,......,a_n),\vec{B}(b_1,b_2,......,b_n)$，且知 $a_1b_1+a_2b_2+......+a_nb_n=0$ ，

則由定理三及定理四得知△ABC 的面積$\in\{ k|\vec{A}||\vec{B}| \mid k\in Q\}$為平面 P 上$N^n$可連出△ABC 相似形的充要條件。

我們先定義集合γ^n為使下列敘述正確的集合：

三角形可以用 n 維格子點連出相似形的充要條件是此三角形之面積$\in\{k\sqrt{\gamma^n} \mid k\in Q\}$。

易了解$\gamma^2\subset\gamma^3\subset\gamma^4\subset......\subset N$。這也表示了最大的可能即是正整數集合 N，但是否有一γ^n能達到與 N 相等呢？以下會慢慢揭開這個神秘面紗。

由前述討論知道$\gamma^2=\{k^2 \mid k\in N\}$，$\gamma^3=\{\gamma \mid q(\gamma)\neq 7(\mathrm{mod}\ 8), \gamma\in N\}$。

但更高維的情況呢？

(一)四維空間

由參考資料一第六章§7(130 頁，因版本可能有異)與參考資料二中提到的恆等式，即 Euler 在推導四平方和問題時發現的公式：

$$\begin{aligned}
&(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)\\
&=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+(x_1y_2-x_2y_1+x_3y_4-x_4y_3)^2\\
&\quad+(x_1y_3-x_3y_1+x_4y_2-x_2y_4)^2+(x_1y_4-x_4y_1+x_2y_3-x_3y_2)^2
\end{aligned}$$

得到當 n=4, $a_1,a_2,a_3,a_4,b_1,b_2,b_3,b_4\in Z, a_1,a_2,a_3,a_4$與$b_1,b_2,b_3,b_4$各組皆不全為零時，

$$\begin{aligned}
&(|\vec{A}||\vec{B}|)^2\\
&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2)\\
&=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4)^2+(a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2\\
&\quad+(a_1b_3-a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)^2+(a_1b_4-a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)^2
\end{aligned}$$

但由於$\vec{A},\vec{B}$正交，$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+a_4b_4=0$，故

$$(|\vec{A}||\vec{B}|)^2=(a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3)^2+(a_1b_3-a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4)^2+(a_1b_4-a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)^2$$

因為$(a_1b_2-a_2b_1+a_3b_4-a_4b_3),(a_1b_3-a_3b_1+a_4b_2-a_2b_4),(a_1b_4-a_4b_1+a_2b_3-a_3b_2)$皆是整數，與

三維空間VN^3長度的形式：三整數平方和，一模一樣。由定理三及定理四，且N^4中有子集合N^3，故N^4可連出的三角形，N^3亦可連出，亦即$\gamma^4=\gamma^3$。

(二)五維空間

那到底有沒有一γ^n會等於γ_A呢？

我使用建構法證明出γ^5即可完成此任務：

> 引理一：四平方和定理(Euler,Lagrange)：任何整數皆可表達為四個整數的平方和。

證明詳見參考資料二。

由於$\gamma^4 \subset \gamma^5$，故其實我們只要證明 q(s)≠7(mod 8)時的情況，但以下證明不需要此前提。

當我們想要造出 s 使其符合

$$s=k(|\bar{A}||\bar{B}|)=k\sqrt{(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+x_5^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2+y_5^2)}, k\in Q$$

且$x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,y_1,y_2,y_3,y_4,y_5\in Z, x_1,x_2,x_3,x_4,x_5$與$y_1,y_2,y_3,y_4,y_5$各組皆不全為零時，由引理，令

$$s=a^2+b^2+c^2+d^2 (a,b,c,d\in Z)$$

則令

$$\overline{A}(a,b,c,d,0), \overline{B}(0,0,0,0,1)$$

符合$\overline{A}\perp\overline{B}$且

$$|\overline{A}||\overline{B}|=\sqrt{1\cdot(a^2+b^2+c^2+d^2)}=\sqrt{s^2}=s$$

故由定理三與定理四得知$\gamma^5=$正整數集合N。

又由於比五次方更高維的空間中皆包含五維空間格子點，故對所有$n\geq 5$，$\gamma^n=N$。

柒、結果與討論

定義：

一、n 次空間中的整數格子點集合稱為 N^n。

二、集合 γ^n 為使下列敘述正確的集合：

三角形可以用 n 維格子點連出相似形的充要條件是此三角形之面積 $\in \{k\sqrt{\gamma^n} \mid k \in Q\}$。

三、若有正整數 a，且 $4^n \mid a, 4^{n+1} \nmid a$，則 $q(a) = a/4^n$。

結論：

一、△ABC 面積∈Q 為△ABC 可以用 N^2 連出其相似形的充要條件(△ABC 的三邊長之平方皆為有理數)。

二、對多邊形 A 所有任三個頂點連成的三角形 T，T 的面積皆為有理數為此多邊形可用 N^2 連出相似形的充要條件(多邊形 A 所有頂點連線之平方皆為有理數)。

三、△ABC 面積 $\in \{k\sqrt{mn} \mid k \in Q\}$ 為△ABC 可以用基底向量為 $(\sqrt{m},0)$ 與 $(0,\sqrt{n})$ $(m, n \in Q)$ 的 N^2 連出相似形的充要條件。(△ABC 的三邊長之平方皆為有理數)

四、在一基底向量為 $(\sqrt{m},0)$ 與 $(0,\sqrt{n})$ $(m, n \in Q)$ 的直角座標系上，取任兩垂直向量 $\vec{i}, \vec{j} \in VN^2$，則

$$|\vec{i}||\vec{j}| = k\sqrt{mn}, k \in Q$$

五、在基底向量為 $(\sqrt{m},0)$ 與 $(0,\sqrt{n})$ $(m, n \in Q)$ 的平面 P 上若有兩垂直向量 $\vec{i}, \vec{j} \in VN^2$，則△ABC 面積 $\in \{k|\vec{i}||\vec{j}| \mid k \in Q\}$ 為△ABC 可以用 P 的 N^2 連出相似形的充要條件(△ABC 的三邊長之平方皆為有理數)。
(此結論由結論三與結論四得來。)

六、△ABC 面積 $\in \{k\sqrt{\gamma} \mid k \in Q, \gamma \in N\}$ 且 $q(\gamma) \neq 7 \pmod 8$ 為△ABC 可以用 N^3 連出相似形的充要條件。

七、對多邊形(頂點連線長度之平方皆為有理數)任三個頂點連成的面積非零之所有三角形 T，所有 T 之面積 $\in \{k\sqrt{\gamma} \mid k \in Q, \gamma \in N\}$，且 γ 為定值，$q(\gamma) \neq 7 \pmod 8$ 為此多邊形可用 N^3 連出相似形的充要條件。

八、定理七：三角錐(邊長平方皆為有理數)可以 N^3 連出相似體有兩必要條件

$$\begin{cases}\text{此三角錐任意頂點連成的面積非零之三角形必須都可以用}N^3\text{連成相似形}\\ \text{此三角錐的體積}\in Q\end{cases}$$

九、正多面體中，正四面體、正六面體、正八面體皆可用 N^3 連出；正十二面體、正二十面體則否。

十、$\gamma^2=\{k^2 \mid k\in N\}$，$\gamma^3=\{\gamma \mid q(\gamma)\neq 7(\text{mod } 8), \gamma\in N\}$，$\gamma^4=\gamma^3$，
對所有 $n\geq 5$，$\gamma^n=$ 正整數集合N。

捌、發展方向

一、四面體可用空間格子點連出相似形的充要條件？更甚者求出 n 維單形在 m 維空間格子點上可以連出相似形(體)的充要條件($n,m\in N-\{1\}$)。(本篇研究已探討出二維單形——三角形在 m 維空間($m\in N-\{1\}$)中的情形。)

二、對邊長平方為正整數的△ABC，可以用格子點連出「全等形」的充要條件？更甚者求出 n 維單形在 m 維空間格子點上可以連出「全等形(體)」的充要條件($n,m\in N-\{1\}$)。

三、座標系為斜角座標系時，會有什麼結果？

四、由〈參考資料三〉中知道，平面格子點可以連出的正多邊形只有正方形。因此我想說若在三維空間，甚至更高維的空間中，可以連出哪些正多邊形呢？我已經證明出在三維空間中還可以連出正三角形和正六邊形，其他正多邊形不管用幾維空間皆連不出來。但是證明過程有些脫離本文的內容，因此我打算在往後的科展作品中做更深入的研究。

玖、參考資料

一、《數論導引》華羅庚。凡異出版社。
二、〈基礎數論〉李華介。http://math.ntnu.edu.tw/~li/ent-html/ent-html.html。
三、〈談求面積的 Pick 公式〉蔡聰明。http:/episte.math.ntu.edu.tw/articles/sm/sm_25_10_1/。
四、《高中數學②整數系 有理數系》林義雄。九張出版社。

拾、附錄

附錄定理一：以格子點連成的任何兩不平行向量當新座標系的基底向量時
(1)原格子點必在此新座標系中的有理數格子點上；
(2)新座標系中的格子點必在原座標系的格子點上。
(原座標系與新座標系皆可為斜角座標系，且兩基底座標不必等長)。

證明：

令原座標系的兩基底座標為(a,b)與(c,d)，且新基底向量在原座標表為(x_1, y_1)與(x_2, y_2)。

(1)

已知原座標系格子點上的某一點(x,y)與原點所形成的向量可以兩基底向量(a,b)與(c,d)表為(x,y)=x(a,b)+y(c,d)，且此表法是唯一的。

則因

$$x(a,b)+y(c,d)=x\frac{(ay_2\text{-}bx_2)(x_1,y_1)+(bx_1\text{-}ay_1)(x_2,y_2)}{x_1y_2\text{-}x_2y_1}+y\frac{(cy_2\text{-}dx_2)(x_1,y_1)+(dx_1\text{-}cy_1)(x_2,y_2)}{x_2y_1\text{-}x_1y_2}$$

$$=\frac{x(ay_2\text{-}bx_2)\text{-}y(cy_2\text{-}dx_2)}{x_1y_2\text{-}x_2y_1}(x_1,y_1)+\frac{x(bx_1\text{-}ay_1)\text{-}y(dx_1\text{-}cy_1)}{x_1y_2\text{-}x_2y_1}(x_2,y_2)$$

所以我們得知，(x, y)在新座標系中的座標為

$$\left(\frac{x(ay_2-bx_2)-y(cy_2-dx_2)}{x_1y_2-x_2y_1},\frac{x(bx_1-ay_1)-y(dx_1-cy_1)}{x_1y_2-x_2y_1}\right),$$

而 x,y 座標皆為有理數，故必在新座標系的有理數格子點上。

(2)

又我們知道在新座標系中的格子點為

$$m(x_1,y_1)+n(x_2,y_2)=(mx_1+nx_2,my_1+ny_2),m,n\in Z，$$

其中 x,y 座標皆為整數，x_1, x_2皆為 a 的倍數，y_1, y_2皆為 b 的倍數，故皆為原座標系中的格子點。

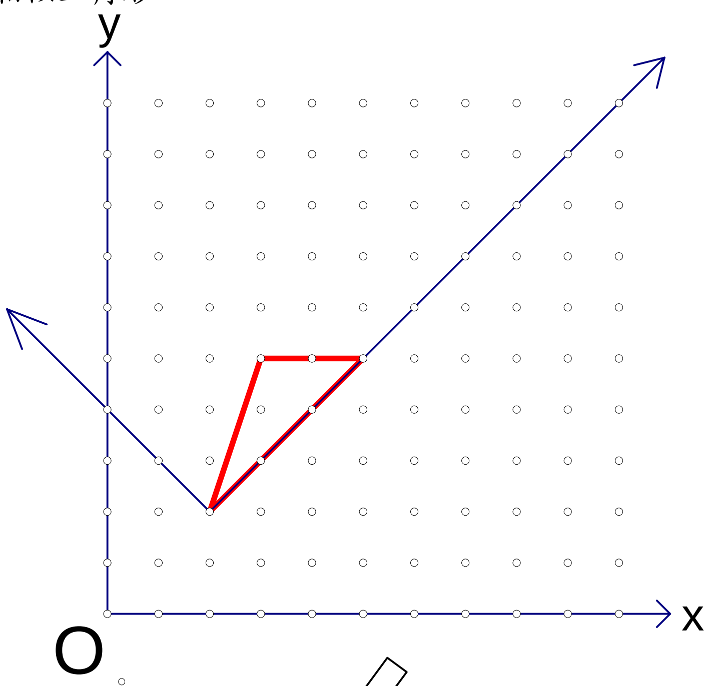
定理得證。

(1)對基底向量等長的普通直角座標系

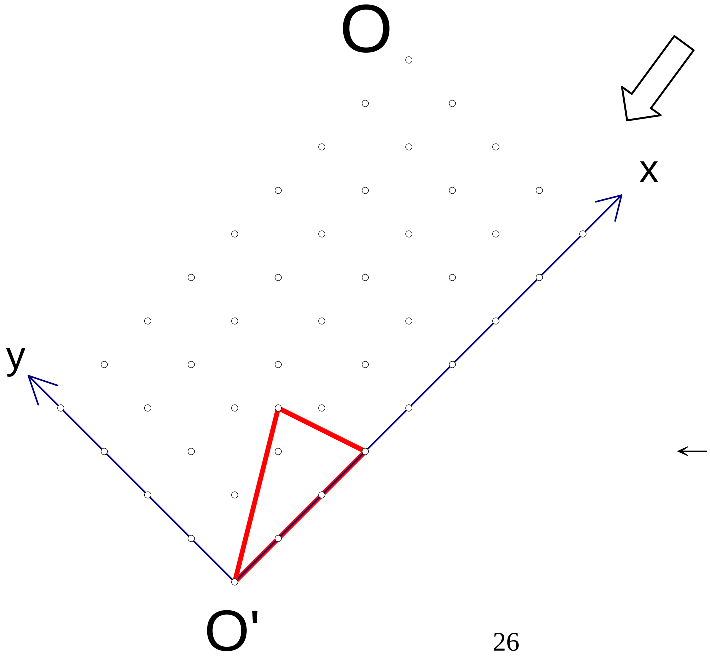
由此定理，得知當我們在 N^2 格子點上可以連出某三角形的相似形△ABC 時，若再取以格子點連成的任兩垂直向量 (a,b)與(b,-a),$a,b \in Z$ 為基底向量做一新座標系 E，由於(a,b)與(b,- a)長度相等，故 E 亦為一基底向量等長的直角座標系，而△ABC 頂點皆在 E 的 Q^2 上，再經由座標整數化後，在 E 的觀點即是一旋轉後的相似三角形。

當我們以△ABC 其中一邊方向上的 VN^2 及其垂直等長向量為基底向量做一新座標系 O'，並座標整數化後，△ABC 在 O'中便是一底邊黏在 x 軸上的相似三角形。

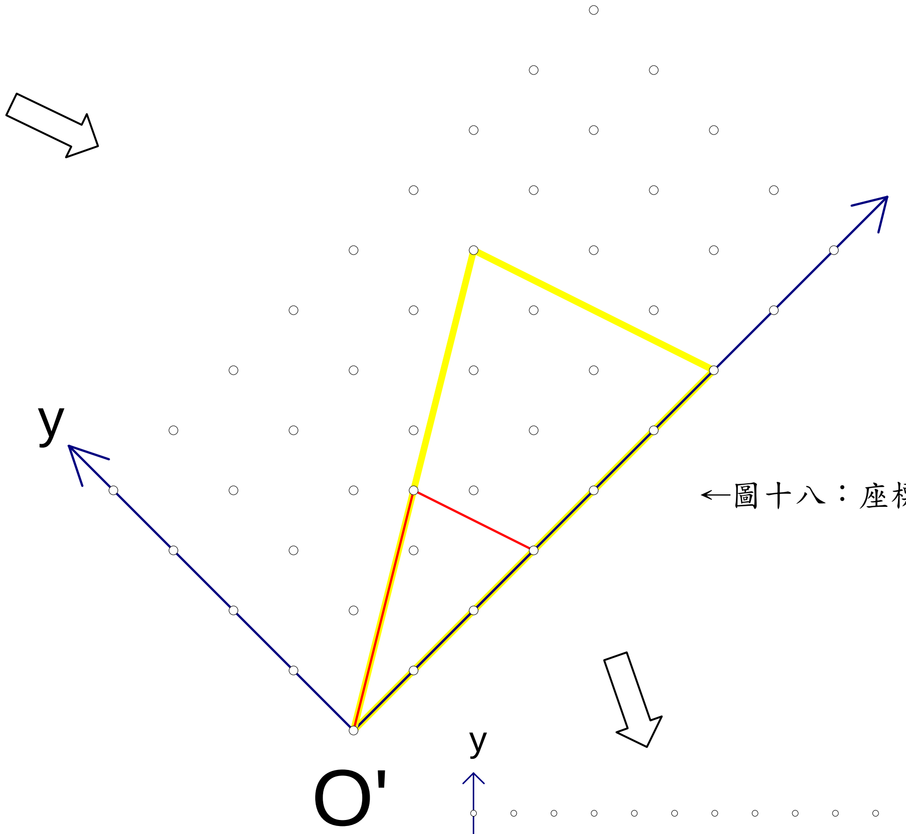
接著以 O 的任意格子點連線向量 $\bar{i}$ 及其垂直等長向量 $\bar{j}$ 做為基底向量再做一座標系 O"，將邊長黏在 x 軸的三角形照 O'的座標黏上 O"，形成△A'B'C'，則在 O 的觀點△A'B'C'即是一旋轉過後的△ABC 的相似三角形。由於 $\bar{i}$ 、 $\bar{j}$ 可以任取，代表△ABC 可以用任何格子點連線方向當作其中一邊的方向做出相似三角形。



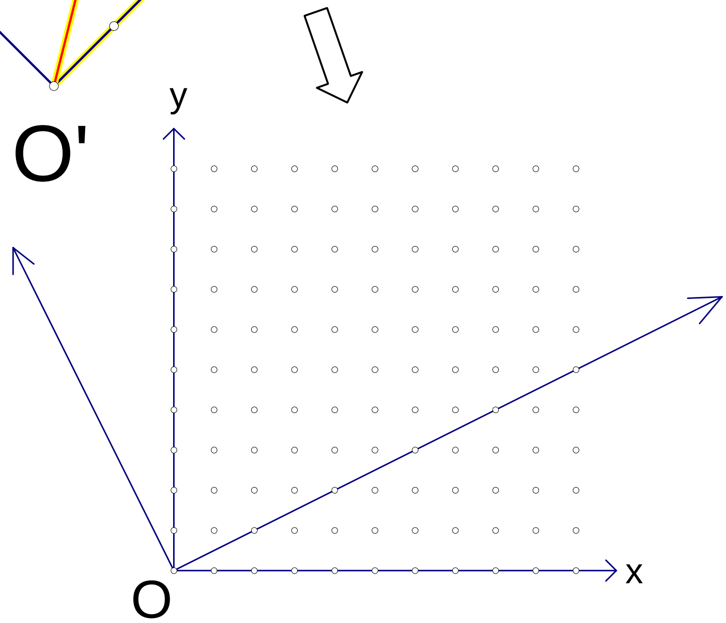
→圖十六：以三角形一邊方向上的 VN^2 與其垂直等長向量當作兩基底向量，做出新座標系 O'。



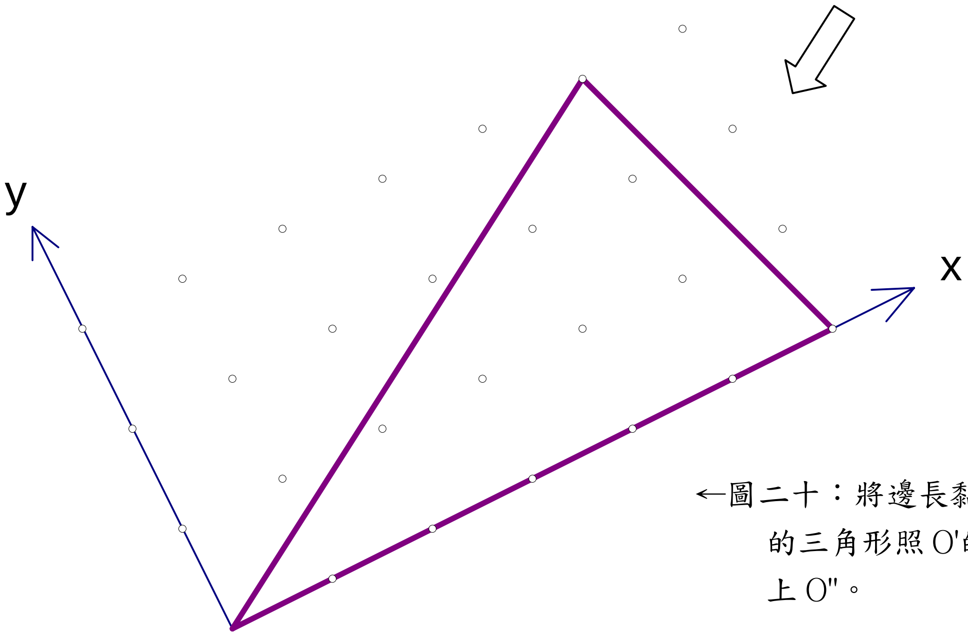
←圖十七：新座標系 O'。



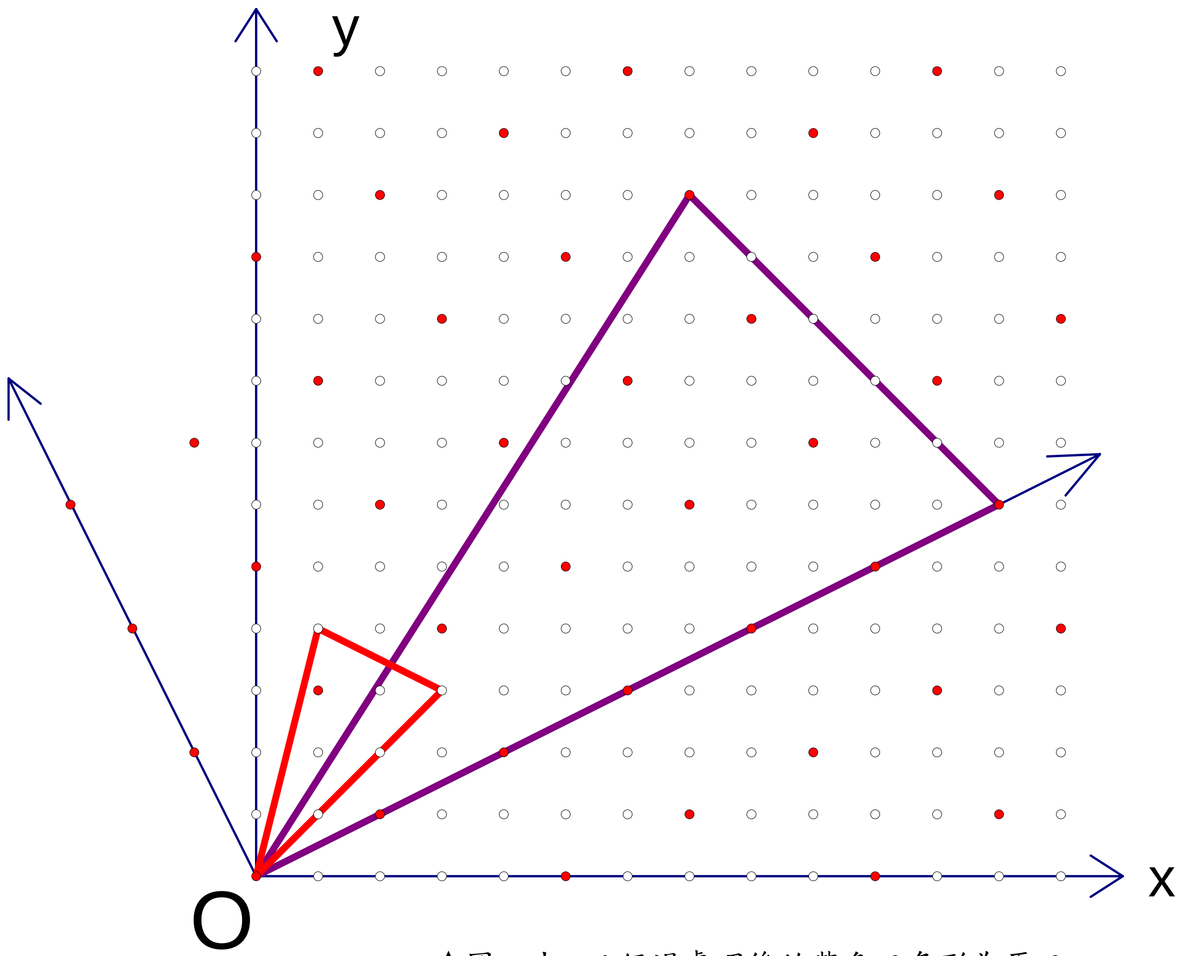
←圖十八：座標整數化。



→圖十九：在 O 上找出任意一向量其垂直等長向量當作兩基底向量，做出座標系 O"。



←圖二十：將邊長黏在 x 軸的三角形照 O'的座標黏上 O"。



↑圖二十一：經過處理後的紫色三角形為原三角形(紅色三角形)方向不同但卻相似的三角形。

(2)對基底向量不等長的直角座標系

對一基底向量為$(\sqrt{m},0),(0,\sqrt{n})$的直角座標系，令其上有一向量$(a\sqrt{m},b\sqrt{n})$，取

$$\vec{i}(am\sqrt{m},bm\sqrt{n}),\vec{j}(bn\sqrt{m},-am\sqrt{n})$$

則

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=abm^2n-abm^2n=0$$

$$\frac{|\vec{i}|}{|\vec{j}|}=\sqrt{\frac{a^2m^3+b^2m^2n}{b^2mn^2+a^2m^2n}}=\sqrt{\frac{m}{n}}$$

故亦為一基底向量長比$\sqrt{m}:\sqrt{n}$的直角座標系。

仿造(1)處的建構法：

當某三角形可以用基底向量長比$\sqrt{m}:\sqrt{n}$的直角座標系 O 之N^2連成相似形△ABC 時，任取$\vec{i}(pm\sqrt{m},qm\sqrt{n}),\vec{j}(pn\sqrt{m},-qm\sqrt{n}),p,q\in Z$建構一新座標系 E，則△ABC 的頂點皆在 E 的Q^2上，再經由座標整數化後，在 E 的觀點即是一旋轉後的相似三角形。

令△ABC 其中一邊向量為$\vec{v}(a\sqrt{m},b\sqrt{n}),a,b\in Z$，我們以$m\vec{v}(am\sqrt{m},bm\sqrt{n})$與$\vec{u}(bn\sqrt{m},-am\sqrt{n})$為基底向量建構新座標系 O'，並經座標整數化後，此三角形△ABC 在新座標系 O'中便是一底邊黏在 x 軸上的相似三角形。

接著以 O 的任意格子點連線向量$\vec{i}(a'm\sqrt{m},b'm\sqrt{n}),\vec{j}(b'n\sqrt{m},-a'm\sqrt{n}),a',b'\in Z$做為基底向量再做一座標系 O"，將邊長黏在 x 軸的三角形照 O'的座標黏上 O"，則在 O 的觀點即是一旋轉過後的△ABC 的相似三角形。由於$\vec{i}$、$\vec{j}$可以任取，代表此三角形△ABC 可以用任何格子點連線方向當作其中一邊的方向做出相似三角形。

附錄定理二：n 維空間($n\geq 3$)中的二維子空間若含有三個點$\in Q^n$，則二維子空間上的Q^n必可視為一伸縮後的平面座標系上的Q^2。

在此二維子空間 P 上任取兩正交向量$\vec{i},\vec{j}\in VN^n$。

令$\vec{i}=(a_1,a_2,......,a_n)$，$\vec{j}=(b_1,b_2,......,b_n)$(其中$a_1,a_2,......,a_n,b_1,b_2,......,b_n\in Q$)，則由$\vec{i}$、$\vec{j}$為基底所形成的新直角座標系$O'$中之每一$\in VQ^2$的向量$s\vec{i}+t\vec{j}=(sa_1+tb_1,sa_2+tb_2,......,sa_n+tz_2)$(其中$s,t\in Q$)皆是原空間座標系 O 的$VQ^n$，即$O'$中每一$Q^2$皆屬於 O 的$Q^n$。

但是 O 中位於此二維子空間 P 上的Q^n是否都$\in O'$中的Q^2呢？

令 P 上的點$(x_1,x_2,......,x_n)\in$ O 中的Q^n，而此點在O'中的座標為(u,v)，則

$$\begin{cases} x_1=ua_1+vb_1 \in Q \\ x_2=ua_2+vb_2 \in Q \\ \quad\vdots \\ \quad\vdots \\ x_n=ua_n+vb_3 \in Q \end{cases}$$

又由於$(a_1, a_2, ..., a_n) \perp (b_1, b_2, ..., b_n)$

因此兩者不平行，$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = ... = a_n : b_n$爲非，

不失一般性，令$a_1 : b_1 \neq a_2 : b_2 \Rightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$

故$\begin{cases} u = \dfrac{b_2 x_1 - b_1 x_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \in Q \\ v = \dfrac{a_1 x_2 - a_2 x_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \in Q \end{cases}$

得證。

評語

1) 作品的語氣頗似成熟的學術論文，看不出與問題掙扎的樂趣。

2) 科展的版面有限，作抱報告的時間有限。在此限制下，要思整體的表達而不是局部細節的呈現。