

臺灣二〇〇七年國際科學展覽會

科 別：數學

作 品 名 稱：生生不息-正五邊形的繁衍及算術法則

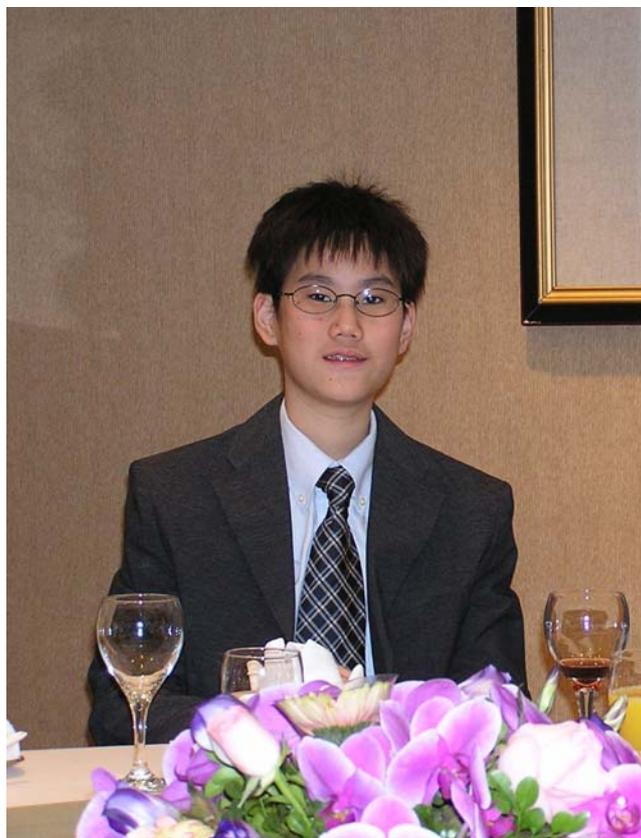
得 獎 獎 項：第一名

美國正選代表：美國第 58 屆國際科技展覽會

學 校 / 作 者：高雄市立高雄高級中學

劉玠暘

作者簡介



我從小就對科學有濃厚的興趣，國中時自然科學表現優異，參加很多比賽及科學展覽，得到高雄市科展 43 屆應用科學第二名、44 屆物理科第三名及最佳團隊合作獎、45 屆數學科佳作...等許多獎項，尤其數學更是突出，獲 2005 青少年數學國際城市邀請賽銅牌獎。高一參加中山大學數學資優班及成功大學物理資優班迄今。期許自己能在高中階段獲得更多的數學知識與能力，並在未來能將數學應用於各方面以造福社會。除學術之外，我喜歡打橋牌、游泳、彈鋼琴，並喜歡與人聊天，談論事情。我擁有許多朋友，並好為人師。

Endlessly Propagating

--The multiplication and arithmetic rules of regular pentagon

This study was to explore the nature of two basic constitutes of the regular pentagon,



A and B . With these two constitutes, the regular pentagon could be multiplied into any times in size. We used four multiplication methods ($a' = \varphi a$ 、 $a' = k a$ 、 $a' = a + 1$ 、 $a' = a + \frac{1}{\varphi}$) to show how the regular pentagon enlarge and to verify that the enlarged regular pentagons derived from computer did exist. By integrating these four multiplication rules, we were able to arrange regular pentagon of any length of side $\frac{x}{\varphi} + y$ ($x, y \in N \cap \{0\}, x^2 + y^2 \neq 0$), and evidenced the

$$\text{equation was } \begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$$

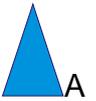
(If m,n is the number of A,B of a regular pentagon respectively)

When we tried to verify if any regular pentagon could be constituted by other smaller regular pentagons, we found that it was un-dividable only if the length of pentagon side were $\frac{F_{n-1}}{\varphi} + F_n$ (the number of A, B were the 2n and 2n-1 item of Lucas Sequence), otherwise, any regular pentagon is able to be constituted by other smaller regular pentagons. The divided forms could be multiple. We also found that any pentagon could be divided by two successive un-dividable pentagons, which is called “standard division rule”. We expected to derive all kinds of division by analysis of two successive un-dividable pentagons in standard division rule.

Finally, we found out that when a pentagon was divided into prime factorization (p units of P_i and q units of P_{i+1}), p and q have certain rule : $p = (k-1)^2 + 2(k-1)t$, $q = 5t^2 + 2(k-1)t$,
or $p = (k-1)^2 + 2(k-1)t$, $q = 5t^2 + 2(k-1)t$, $k, t \in N$

中文摘要

生生不息－正五邊形的繁衍及算術法則

這個研究起源於一個拼圖玩具：利用  A、 B 兩種黃金三角形排出指定大小的正五邊形。我們的研究動機是：

- 一、假如無限量供應 A 和 B，能夠拼出哪些邊長的正五邊形？
- 二、哪些拼好的正五邊形不能拆成一些較小的正五邊形？

我們將研究的主要結果分述如下：

- 一、假設可以拼成邊長為 a 的正五邊形，我們找到了四類有系統的拼法（繁殖法則）可以拼出邊長為 a' 的更大的正五邊形。分別是：

$$a' = \varphi a, \quad a' = ka, \quad a' = a + 1, \quad a' = a + \frac{1}{\varphi}。 \text{ (其中 } \varphi \text{ 為黃金比例)}$$

- 二、我們證明邊長形如 $a = x \cdot \frac{1}{\varphi} + y \cdot 1$ 都可以拼成。不僅如此，我們證明了

$$\text{A 的個數恰好需要 } m = x^2 + 6xy + 4y^2 \text{ 個，}$$

$$\text{B 的個數恰好需要 } n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \text{ 個。}$$

$$\text{並推得 } \frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} < \varphi。$$

- 三、定義“質形”為不能被分解成更小的正五邊形之正五邊形，按照邊長由小到大以 P_1, P_2, \dots 表示。我們證明了

- (1) $\frac{m}{n}$ 是迄今的最大值時 若且唯若 此正五邊形是質形

- (2) 第 i 個質形 P_i ，邊長為 $\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i$

- (3) A、B 的個數分別為盧卡斯數列 L_{2i} 、 L_{2i-1}

- 四、我們證明質形之間有以下算術的關係

$$\begin{cases} P_a + P_{a+2k} = L_{2k+1} \cdot P_{a+k} \\ P_a + P_{a+2k+1} = L_{2k+1} \cdot P_{a+k} + L_{2k+1} \cdot P_{a+k+1} \end{cases}$$

- 五、我們證明一個拼法必可分解成 $p \cdot P_i + q \cdot P_{i+1}$ 的形式，我們稱為標準分解式。

- 六、我們證明在標準分解式中，無論 i 為多少， p, q 都有以下規律：

$$p = (k-1)^2 + 2(k-1)t, \quad q = 5t^2 + 2(k-1)t, \quad \text{或}$$

$$p = 5t^2 + 2(k-1)t, \quad q = (k-1)^2 + 2(k-1)t。$$

目 錄

作者簡介	1
英文摘要	2
中文摘要	3
目錄	4
壹、 研究動機	5
貳、 研究目的	5
參、 研究器材	5
肆、 背景資料與定義	6
伍、 研究方法與步驟	7
陸、 研究結果	12
柒、 討論	14
捌、 結論	32
玖、 展望	33
拾、 參考資料	33
附件	34

壹、研究動機

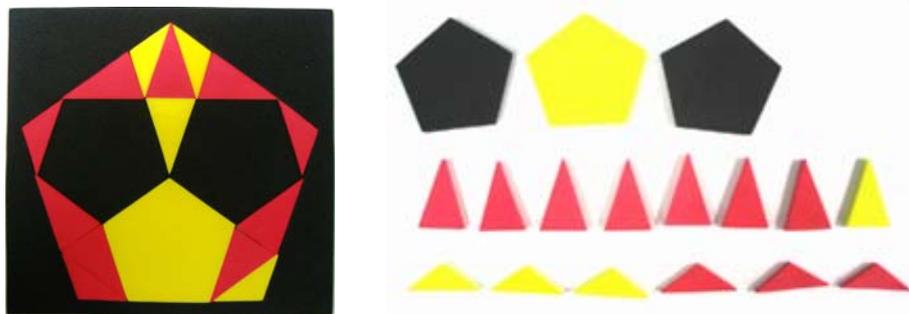
這個研究出自一套名為「畢達哥拉斯的拼圖」的玩具，拼圖的元件有 8 個 $108^\circ - 36^\circ - 36^\circ$ 的三角形、6 個 $36^\circ - 72^\circ - 72^\circ$ 的三角形，以及 3 個正五邊形。遊戲的任務是要使用這些元件拼出各種大大小小的正五邊形。在完成了所有遊戲中所要求的圖形後，我開始對這些大大小小的正五邊形，它們的邊長、面積、組成單元之間的關係及規律感到好奇。我想知道，這兩種基本組成單元各無限多個能排出哪些正五邊形？能否找出固定的方法拼排出這些正五邊形？用一樣個數的組成單元能做出多少種正五邊形？而這些疑問，促使我進行了本次研究。

貳、研究目的

- 一、歸納不同尺寸的正五邊形，在邊長、面積、組成單元及數形關係上所展現的規律。
- 二、探討以兩種黃金三角形為基本組成單元，能製造出何種(邊長)正五邊形。
- 三、找出正五邊形放大為不同尺寸的正五邊形的機制，以產生目的二中所有的正五邊形。
- 四、尋求能由邊長推算出正五邊形組成單元之數量的方法(通式)。
- 五、藉由目的三所歸納的放大機制，找出能將正五邊形切割成基本組成單元的方法。
- 六、將正五邊形分解成數個較小的正五邊形，並歸納出何種正五邊形不能被分解(質形)，藉此尋求各正五邊形所能化成的不同型態，以及其分解成質形的形式。

參、研究器材

- 一、拼圖模型 The Puzzle of Pythagoras(如下圖所示)。



- 二、自製紙片模型。
- 三、數位相機、紙、筆。
- 四、Word 軟體、Excel 軟體、GSP4.01、Visual Basic 2005、Mathematica 5.2、電腦。

肆、背景資料與定義

一、背景資料

(一) 正五邊形中，牽涉到許多有關黃金比例($1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 或 $\frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1$)的問題，其中

$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ 稱為 φ ， $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 稱為 $\frac{1}{\varphi}$ 。

(二) 承上， $\frac{1}{\varphi} = \varphi - 1$ (即 $\varphi = \frac{1}{\varphi} + 1$)， $\varphi + \frac{1}{\varphi} = \sqrt{5}$ ， $\varphi^2 = \varphi + 1$ ， $\varphi^2 + \frac{1}{\varphi^2} = 3$ 。

(三) 三角形 $A(36^\circ - 72^\circ - 72^\circ)$ 與三角形 $B(108^\circ - 36^\circ - 36^\circ)$ 之邊長分別為 $1 : 1 : \frac{1}{\varphi}$ 和 $\frac{1}{\varphi} : \frac{1}{\varphi} : 1$ 。

二、定義

(一) 研究中，稱正五邊形之組成單元(黃金三角形)  三角形稱為 A ， 三角形稱為 B ，欲拼之五邊形為 C (邊長 $a = \frac{x}{\varphi} + y$)，且令第一個正五邊形 C_1 (邊長 $a = \frac{1}{\varphi}$) 為已知。

(二) 承(一)，本研究中，令較長之邊長(即三角形 A 之斜邊、三角形 B 之底邊)為 1 ，則較短之邊長(即三角形 A 之底邊、三角形 B 之斜邊)為 $\frac{1}{\varphi}$ 。

(三) 承(一)，本研究中 A 的個數以 m 表示， B 的個數為以 n 表示。

(四) 本研究中有許多正五邊形都可以衍生出另一個正五邊形，我們定義前者為「親代」，後者為「子代」，而此過程稱為「繁殖」。至於繁殖的方法，則稱為「繁殖法則」。換言之，子代正五邊形是藉各式各樣之繁殖法則(包括邊長、排列方式等變化)由親代繁殖出來的。

(五) 我們發現，在由一個 A 和一個 B 組成的等腰梯形和等腰三角形中(見下圖)，其 A, B 之相對位置可以互換，我們稱它為「交換圖形」。



(六) 在「正五邊形的分解與再合成」中，我們稱無法由其他更小的正五邊形組成的正五邊形稱為「質形」。當可以分解時，稱其他更小的正五邊形的標準組成方法(即其標準之分解形式)為「標準分解式」。

(七) 當一些圖形與另外一些圖形之總 A 、 B 個數相同時，我們定義它們等價(如 1 個 C_1 和 1 個 $C_4 \equiv 3$ 個 C_2)。

(八) 本研究中，所有質形皆以 P 表示，費波那契數列第 n 項以 F_n 表示，令 $F_1=0$ ；而盧卡斯數列第 n 項則以 L_n 表示，令 $L_1=2$ 。

伍、研究方法與步驟

一、電腦計算

(一) 爲了找出所有正五邊形之組成單元 A、B 個數 m、n，我們使用電腦來幫助計算！

(二) 首先，因爲 m 個 A 面積(a)和 n 個 B 面積(b)之和等於 C 面積(c)，即 $mA + nB = C$ ，

$$\Rightarrow n = \frac{C - mA}{B} \dots\dots\dots(1)。$$

(三) 其次，因 $A = l^2 \cos 36^\circ \times \cos 18^\circ = \cos 18^\circ \times \cos 36^\circ$ ， $B = \frac{1}{2} \times l^2 \times \cos 18^\circ = \frac{1}{2} \times \cos 18^\circ$ ，

$C = 2a^2 \times \cos^3 18^\circ$ ，所以我們將三者之面積以及前述之式(1)代入 Excel 中以求 m、n 之值。

(四) 由於我們既不知道 m 值也不知道 n 值，我們就以回饋的方式令 $m=1,2,3,\dots$ 來反求 n，

$$\text{即 } n = \frac{2a^2 \times \cos^3 18^\circ - m \times \cos 36^\circ}{\frac{1}{2}} = 2(2a^2 \cos^3 18^\circ - m \cos 36^\circ) \text{ 且 } m, n \in N，\text{ 只取其正整數解}$$

(m, n) ，就代表組成正五邊形的單元個數。

(五) 承(四)因爲 A 爲 B 之 $2 \cos 36^\circ$ 倍，所以其公倍數不會爲自然數，故正五邊形組成單元之個數 (m, n) 必有一解或無解。

二、第一、二繁殖法則

由於我們想了解正五邊形之邊長、面積等與其組成單元 A、B 的個數 (m, n) 之關係，我們列出前述之前 50 個正五邊形的資料(見附表一)，試圖找出其規律。
以下爲我們所發現的四種繁殖法則：

在第一、二繁殖法則當中，子代都是取一個已知的正五邊形(其所有資料皆爲已知，包含其邊長，A、B 個數，及至少一種拼法)作親代，將其每個 A、B 放大之後，再重新組合而成。

(一) 第一繁殖法則

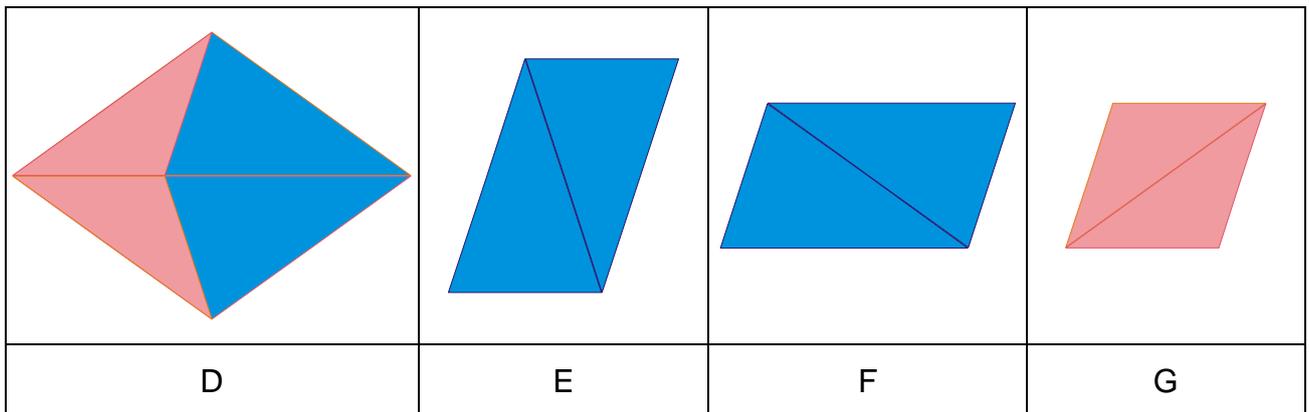
1. 首先，將一個已知的正五邊形，細分成由 A、B 組合成的形式。
2. 其次，將每一個 A 改成兩個 A 和一個 B 組合成的放大圖形，而將每一個 B 改成一 A 和一個 B 組合成的放大圖形。
3. 最後，將這些 A、B 的放大圖形依原正五邊形(親代)之 A、B 排法拼合，形成其放大圖形(即其藉由第一繁殖法則繁殖出的子代)。

(二) 第二繁殖法則

1. 首先，將一個已知的正五邊形，細分成由 A、B 組合成的形式。
2. 其次，將每一個 A 改成 k^2 個 A 組合成的放大圖形，而將每一個 B 改成 k^2 個 B 組合成的放大圖形。
3. 最後，將這些 A、B 的放大圖形依原正五邊形(親代)之 A、B 排法拼合，形成其放大圖形(即其藉由第二繁殖法則繁殖出的子代)。

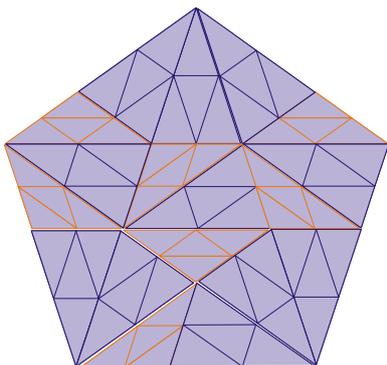
三、 第三、四繁殖法則

在第三及第四繁殖法則當中，子代都是由親代向外平移擴張後加上一些轉折、補綴部分而形成的，這些「外掛」的部分可由一些平行四邊形和固定的「配件」來合成，其中平行四邊形的部份我們發現可以使用 4 種「替換邊長平行四邊形」D、E、F、G(實際上 E、F 是同一平行四邊形排成不同方向)，如下圖。

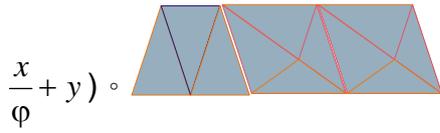


(三) 第三繁殖法則

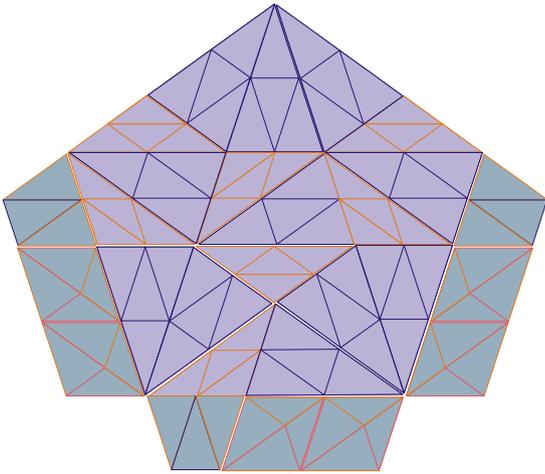
4. 首先，排出一個正五邊形其邊長為 $x/\varphi + y$ (這裡用 $2/\varphi + 2$ 代表)。



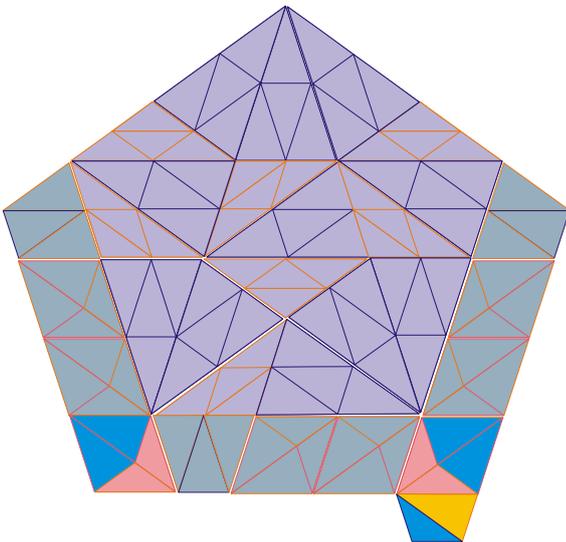
5. 其次，用 1 個 A、 $x-1$ 個 E 和 y 個 D 拼成三個相同的等腰梯形，邊長為 $(1, \frac{x-1}{\phi} + y, 1, \frac{x}{\phi} + y)$ 。



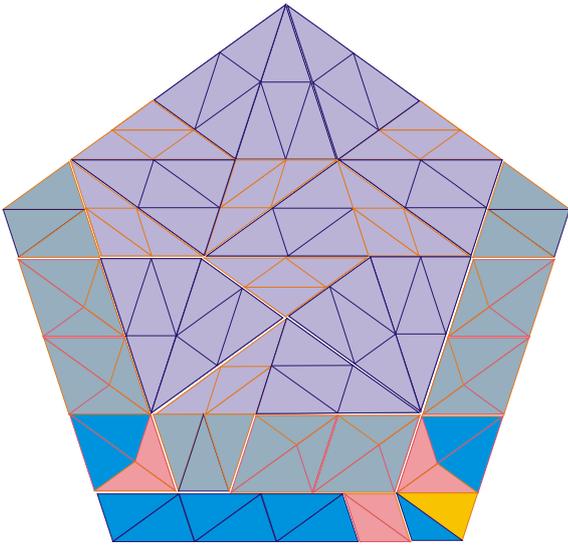
6. 將這三個等腰梯形的 $\frac{x}{\phi} + y$ 之邊長分別與母代正五邊形的相鄰三邊相連接



7. 再來，將 2 個 D 分別排在 2 個角落(步驟 2 所作等腰梯形兩兩之間)，並用 1 個 A 和 1 個 B 拼成邊長為 $(\frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi}, \frac{1}{\phi}, 1)$ 的等腰梯形，置於其中 1 個 D 下。



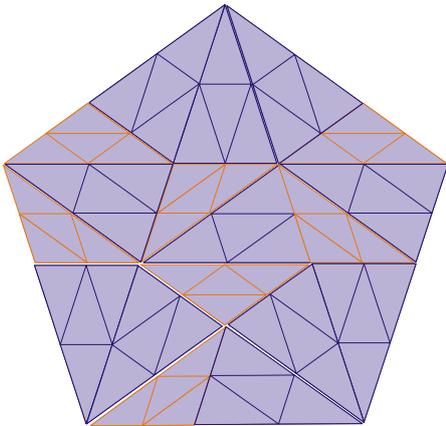
8. 然後，用 $x-1$ 個 G 和 $y+1$ 個 F 拼成一個平行四邊形，邊長為 $(\frac{1}{\phi}, \frac{x-1}{\phi} + y + 1, \frac{1}{\phi}, \frac{x-1}{\phi} + y + 1)$ ，並將此平行四邊形排在步驟 4 所作之等腰梯形旁。



9. 最後我們所排出的子代正五邊形邊長即為親代之邊長+1 (即 $\frac{x}{\varphi} + y + 1$)。

(四) 第四繁殖法則

1. 首先，排出一個正五邊形其邊長為 $x/\varphi + y$ (這裡用 $2/\varphi + 2$ 代表)。

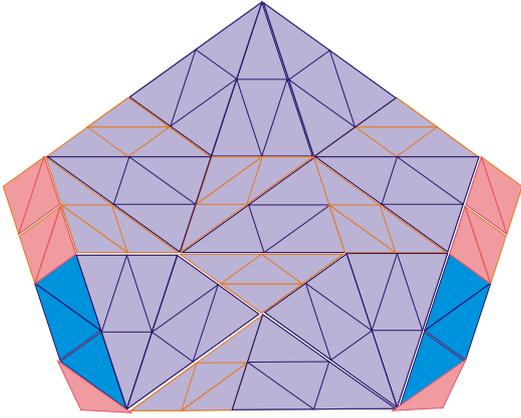


2. 其次，用 1 個 A、1 個 B、x 個 G 和 y-1 個 F 拼成兩個相同的等腰梯形，邊長為 $(\frac{1}{\varphi},$

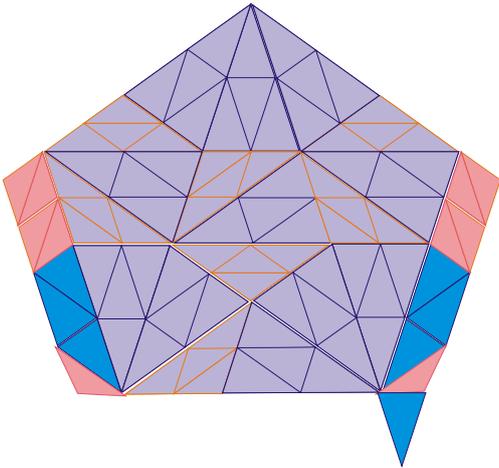
$$\frac{x+1}{\varphi} + y - 1, \frac{1}{\varphi}, \frac{x}{\varphi} + y)。$$



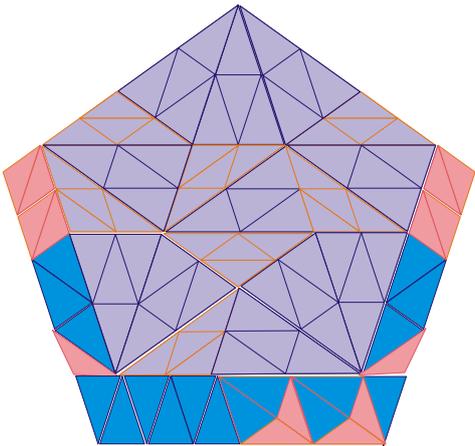
3. 將這兩個等腰梯形的 $\frac{x}{\varphi} + y$ 之邊長分別與母代正五邊形的不相鄰兩邊相連接



4. 再來，將 1 個 A 排在步驟 2 所作的其中一個等腰梯形之下方。



5. 然後，用 $x+1$ 個 E 和 y 個 D 拼成一個平行四邊形，邊長為 $(1, \frac{x+1}{\phi} + y, 1, \frac{x+1}{\phi} + y)$ ，並將此平行四邊形排在步驟 4 之 A 旁。



6. 最後我們所排出的子代正五邊形邊長即為親代之邊長 $+\frac{1}{\phi}$ (即 $\frac{x+1}{\phi} + y$)。

陸、研究結果

一、電腦計算

- (一) 我們發現不同邊長的正五邊形其組成單元 A,B 之個數都可以用此回饋方式求出。
- (二) 由此方法我們後來發現，仍有很多圖形是不屬於第一、二繁殖法則之方法，因為並非所有邊長之間都是 φ 倍的關係，這使我們突破很多瓶頸和迷思。
- (三) 由於我們是以回饋的方式求得 m 、 n 之值，所以我們無法確定其恰有一解(也就是說，每個五邊形之組成單元 A,B 之個數只有一種狀況)，不過由方法與步驟二中我們可以確定此解是唯一的。
- (四) 承上，因為我們不能確定是不是每一組 m 、 n 值都能拼出所要的正五邊形(也就是此解存在)，所以我們必須找出一種以上的規律，足以涵蓋所有的正五邊形或者證明出部分正五邊形是不確定是否能夠排出來，於是我們進行了後面的實驗。

二、繁殖法則

- (一) 五邊形 C_1 (邊長為 $1/\varphi$) 是由 1 個 A 和 2 個 B 組成。
- (二) 由 2 個 A 和 1 個 B 可以組成一個 A 的放大圖 A' ，由 1 個 A 和 1 個 B 可組成一個 B 的放大圖 B' ，而此二者又可將一個正五邊形 C，繁殖(放大)成另一個正五邊形 C' 。
- (三) 由以上討論可得第一繁殖法則： $m' = 2m + n$, $n' = m + n \Rightarrow m' + n' = 3m + 2n$ 。
- (四) 承(二)，因為 A 到 A' 邊長由 $1, 1, 1/\varphi$ 變成 $1/\varphi + 1, 1/\varphi + 1, 1$ (即 $\varphi, \varphi, 1$)，B 到 B' 邊長由 $1/\varphi, 1/\varphi, 1$ 變成 $1, 1, 1/\varphi + 1$ (即 $1, 1, \varphi$)，所以 C' 的邊長為 C 邊長之 φ 倍。
- (五) 由第 1,3,5,8 和第 2,6 個正五邊形可看出，當一個正五邊形之邊長為其親代之 k 倍時，其組成單元之個數 m 、 n 會變為 k^2 倍，我們將其定義為「第二繁殖法則」。
- (六) 由第一繁殖法則和第二繁殖法則可以繁殖出一種第二子代(見前表 2)，此第二子代是由親代經 $3m + 2n$ 後再乘以 k^2 所求出的。
- (七) 我們發現，尚有一種繁殖法則可將邊長放大為 $\sqrt{5}$ 倍(即 A、B 個數)。先改親代為旋轉對稱後能相接之形式，再將 5 個相同的圖形互相連接即可繁殖出子代。但由於

$$\left(\frac{x}{\varphi} + y\right) \cdot \sqrt{5} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}x + y\right) \cdot \sqrt{5} = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cdot (2y - x) + (2x + y), \text{ 故 } 2y < x \text{ 時不能使用。}$$

- (八) 第一繁殖法則和第二繁殖法則可以以任何正五邊形為親代繁殖出下一子代。
- (九) 在排列前 10 個正五邊形之過程中，我們發現有一種「交換圖形」的現象，我們推測可以使用它來使同一個圖形呈現不同的排列方式，而且同一個正五邊形之不同排列方式都可以用交換圖形的方式加以取代(也就是基本上它是同一個排列方式)。
- (十) 我們想要找出一或數種繁殖法則解決其他不適用於第一、二繁殖法則的正五邊形(見表 3)，所以繼續了後面的實驗。

No.	7	10	14	15	17	19	22	23
邊長	$2/\varphi+1$	$3/\varphi+1$	$1/\varphi+3$	$4/\varphi+1$	$3/\varphi+2$	$5/\varphi+1$	$4/\varphi+2$	$1/\varphi+4$
m	20	31	44	55	61	59	80	89
n	15	27	43	35	42	63	60	58
No.	24	28	30	31	33	34	35	36
邊長	$6/\varphi+1$	$5/\varphi+2$	$7/\varphi+1$	$4/\varphi+3$	$1/\varphi+5$	$6/\varphi+2$	$3/\varphi+4$	$8/\varphi+1$
m	76	101	95	124	131	124	145	116
n	87	82	115	83	87	108	90	147
No.	38	40	41	43	44	45	48	50
邊長	$5/\varphi+3$	$2/\varphi+5$	$7/\varphi+2$	$9/\varphi+1$	$1/\varphi+6$	$6/\varphi+3$	$8/\varphi+2$	$5/\varphi+4$
m	151	164	149	139	181	180	176	209
n	107	103	138	183	122	135	172	138

【表 3】無法用第一繁殖法則排出來的正五邊形(前 50 個中)

三、第三、四繁殖法則

- (一) 針對那些第一、二繁殖法則不能夠排出的正五邊形，我們找出了兩種繁殖法則：一種是子代正五邊形為親代邊長+1(第三繁殖法則)，一種是子代正五邊形為親代邊長+ $1/\varphi$ (第四繁殖法則)。
- (二) 實際上，我們不只做了四種繁殖法則，我們發現了將近 10 種，只是因為我們發現它們都和其他四種之涵蓋範圍重複，所以未把它們列入。
- (三) 第三繁殖法則是由邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ ($x \in N, y \in N \cap \{0\}$) 的正五邊形作親代繁殖出其子代(其邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y + 1$)，第四繁殖法則是由邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ ($x \in N \cap \{0\}, y \in N$) 的正五邊形作親代繁殖出其子代(其邊長為 $\frac{x+1}{\varphi} + y$)。
- (四) 承(三)，不同於第一、二繁殖法則，第三、四繁殖法則只能分別在 $x > 0$ 、 $y > 0$ 之特定圖形上使用，也就是其親代是有條件限制的。
- (五) 承(三)，由於我們可以絕大多數正五邊形(除 $x = 0$ 、 $y = 0$)為親代，繁殖出邊長+1及+ $\frac{1}{\varphi}$ 之子代正五邊形，所以我們能夠以 C_1 為最初的親代，藉若干繁殖法則，繁殖出由數個 $\frac{1}{\varphi}$ 及 1 構成邊長 $\left(\text{即 } \frac{x}{\varphi} + y \mid x, y \in N \cap \{0\}, x^2 + y^2 \neq 0 \right)$ 的子代。
- (六) 我們希望能夠藉由繁殖法則的合併使用，利用繁殖過程中 A、B 個數的變化，衍生出一種方法可以計算出各種邊長正五邊形之組成元素 A、B 的個數。

柒、討論

一、繁殖法則的結合與繁殖通式的推導

利用第二、三、四繁殖法則的整合，我們能夠排出邊長為 $\frac{x}{\varphi}+y$ (x, y 為任意正整數)的正五邊形，步驟如下。並且運用前面各繁殖法則中組成單元之變化(m 、 n 值之變化)的結果運算後，更可以得到邊長為 $\frac{x}{\varphi}+y$ (x, y 為任意正整數)的正五邊形之組成單元(m 、 n) 之值。

(三) 第二繁殖法則與第三繁殖法則的結合

1. 我們已知邊長為 $\frac{1}{\varphi}$ 的正五邊形其組成單元之 A 的個數 $m=1$ 、B 的個數 $n=2$ 。
2. 利用第二繁殖法則的結論，我們排出邊長為 $\frac{x}{\varphi}$ 的正五邊形，而其 A 的個數 $m=x^2$ 、B 的個數 $n=2x^2$ ，再利用修改後的第三繁殖法則，做 y 次的外擴步驟。
3. 由第三繁殖法則可知每做一次外擴步驟其組成的變化為 $m'=m+6x+8y+4$ 、 $n'=n+2x+6y+3$ ，且每一次外擴， x 之值恆不變， y 之值則由第一次外擴時的 0、第二次外擴時的 1，一直增加到第 y 次外擴時的 $y-1$ ，由此可得將邊長為 $\frac{x}{\varphi}$ 的正五邊形外擴 y 次後的組成單元如下：

$$m = x^2 + \sum_{p=0}^{y-1} (6x + 8p + 4) = x^2 + (6x + 4) \times y + \left\{ \frac{[1 + (y-1)] \times (y-1)}{2} \right\} \times 8 = x^2 + 6xy + 4y^2$$

$$n = 2x^2 + \sum_{p=0}^{y-1} (2x + 6p + 3) = 2x^2 + (2x + 3) \times y + \left\{ \frac{[1 + (y-1)] \times (y-1)}{2} \right\} \times 6 = 2x^2 + 2xy + 3y^2$$

4. 最後就能排出邊長為 $\frac{x}{\varphi}+y$ 的正五邊形。

(四) 第二繁殖法則與第四繁殖法則的結合

1. 我們已知邊長為 1 的正五邊形其組成單元之 A 的個數 $m=4$ 、B 的個數 $n=3$
2. 利用第二繁殖法則的結論，我們排出邊長為 y 的正五邊形，而其 A 的個數 $m=4y^2$ 、B 的個數 $n=3y^2$ ，再利用修改後的第四繁殖法則，做 x 次的外擴步驟。
3. 由第四繁殖法則可知每做一次外擴步驟其組成的變化為 $m'=m+2x+6y+1$ 、 $n'=n+4x+2y+2$ ，且每一次外擴， y 之值恆不變， x 之值則由第一次外擴時的 0、第二次外擴時的 1，一直增加到第 x 次外擴時的 $x-1$ ，由此可得將邊長為 $\frac{x}{\varphi}$ 的正五邊形外擴 x 次後的組成單元如下：

$$m = 4y^2 + \sum_{q=0}^{x-1} (2q + 6y + 1) = 4y^2 + (6y + 1) \times x + \left\{ \frac{[1 + (x-1)] \times (x-1)}{2} \right\} \times 2 = x^2 + 6xy + 4y^2$$

$$n = 3y^2 + \sum_{q=0}^{x-1} (4q + 2y + 2) = 3y^2 + (2y + 2) \times x + \left\{ \frac{[1 + (x-1)] \times (x-1)}{2} \right\} \times 4 = 2x^2 + 2xy + 3y^2$$

4. 最後就能排出邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ 的正五邊形。

(五) 第三繁殖法則與第四繁殖法則的結合

1. 我們先利用第一繁殖法則作出邊長為 $\frac{1}{\varphi} + 1$ 的正五邊形，其中 A 的個數 $m = 11$ 、B 的個數 $n = 7$ 。

2. 利用第三繁殖法則的結論，做 $x-1$ 次的外擴步驟即可排出邊長為 $\frac{x}{\varphi} + 1$ 的正五邊形。依照結論，每做一次外擴步驟其組成的變化為 $m' = m + 2x + 6y + 1$ 、 $n' = n + 4x + 2y + 2$ ，且每一次外擴， y 之值恆為 1， x 之值則由第一次外擴時的 1、第二次外擴時的 2，一直增加到第 $x-1$ 次外擴時的 $x-1$ ，由此可得邊長為 $\frac{x}{\varphi} + 1$ 的正五邊形其組成單元：

$$m = 11 + \sum_{q=1}^{x-1} (2q + 6y + 1) = x^2 + 6x + 4$$

$$n = 7 + \sum_{q=1}^{x-1} (4q + 2y + 2) = 2x^2 + 2x + 3$$

3. 利用第三繁殖法則的結論，做 $y-1$ 次的外擴步驟即可排出邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ 的正五邊形。依照結論，每做一次外擴步驟其組成的變化為 $m' = m + 6x + 8y + 4$ 、 $n' = n + 2x + 6y + 3$ ，且每一次外擴， x 之值恆不變， y 之值則由第一次外擴時的 1、第二次外擴時的 2，一直增加到第 $y-1$ 次外擴時的 $y-1$ ，由此可得邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ 的正五邊形其組成單元：

$$m = x^2 + 6x + 4 + \sum_{p=1}^{y-1} (6x + 8p + 4) = x^2 + 6xy + 4y^2$$

$$n = 2x^2 + 2x + 3 + \sum_{p=1}^{y-1} (2x + 6p + 3) = 2x^2 + 2xy + 3y^2$$

4. 最後就能排出邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ 的正五邊形。

補充說明：

1. 若步驟改為先由邊長為 $\frac{1}{\varphi} + 1$ 的正五邊形外擴排出邊長為 $\frac{1}{\varphi} + y$ 的正五邊形，再由邊長為

$\frac{1}{\varphi} + y$ 的正五邊形外擴排出邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ 的正五邊形亦可，結果相同，在此省略。

2. 邊長為 $\frac{x}{\varphi}$ 和 y 之正五邊形，必須由第二繁殖法則拼排。

二、綜合討論

(一) 我們在使用第二、三、四繁殖法則之結合(兩兩結合)時，均可由已知之最基本正五邊形(邊長為 $\frac{1}{\varphi}$) 排成。

(二) 我們都是用邊長為 $\frac{1}{\varphi}$ 之正五邊形為原生圖形，再使用第一繁殖法則放大兩次繁殖出邊長為 1 和 $\frac{1}{\varphi} + 1$ 的正五邊形做為第二、三、四繁殖法則的結合最初的親代，因此也可以將邊長為 1 和 $\frac{1}{\varphi} + 1$ 的正五邊形視為已知之母圖形來使用。

(三) 我們發現，無論是哪兩種繁殖法則的結合，最後所計算出來的公式(x, y 與 m, n

的關係)都相同，為
$$\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}。$$

(四) 而無 $\frac{1}{\varphi}$ 項或常數項者可視為 $x=0$ 或 $y=0$ ，亦可用此式計算。

三、繁殖法則通式的驗證

利用 $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times ab \times \sin \theta$ (三角形面積公式)

令 φ 為 $x^2 - x - 1 = 0$ 的解 (利用三角形相似)，可得 $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ ， $\varphi^2 = \varphi + 1$ ，

$$\varphi^3 = \varphi \times \varphi^2 = \varphi \times (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$$

$$\text{已知 } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2\varphi}$$

$$\text{又 } B = \frac{1}{2} \times a^2 \times \sin 108^\circ = \frac{1}{2} \times a^2 \times \cos 18^\circ$$

若 $a = \frac{1}{\varphi}$ ，則 $B = \frac{1}{2\varphi^2} \times \cos 18^\circ$ (令 $a = \frac{1}{\varphi}$ 為正五邊形邊長)

$$A = \frac{1}{2} \times (\varphi a)^2 \times \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \times (\varphi a)^2 \times 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ$$

$$= (\varphi a)^2 \times \sin 18^\circ \times \cos 18^\circ = (\varphi a)^2 \times \frac{1}{2\varphi} \times \cos 18^\circ = \frac{1}{2} \varphi a^2 \times \cos 18^\circ$$

若 $\varphi a = 1$ ，則 $A = \frac{1}{2\varphi} \times \cos 18^\circ$

五邊形面積 $= A + 2B = \frac{1}{2} \varphi a^2 \times \cos 18^\circ + 2 \times \left(\frac{1}{2} \times a^2 \times \cos 18^\circ \right) = \left(1 + \frac{\varphi}{2} \right) a^2 \times \cos 18^\circ$

若正五邊形邊長為 $\left(\frac{x}{\varphi} + y \right)$ ，

$$\begin{aligned} \text{則五邊形面積} &= \left(1 + \frac{\varphi}{2} \right) \left(\frac{x}{\varphi} + y \right)^2 \times \cos 18^\circ = \left(1 + \frac{\varphi}{2} \right) \times \left(\frac{x^2}{\varphi^2} + \frac{2xy}{\varphi} + y^2 \right) \times \cos 18^\circ \\ &= \left(\frac{2x^2 + 4xy\varphi + 2y^2\varphi^2 + x^2\varphi + 2xy\varphi^2 + y^2\varphi^3}{2\varphi^2} \right) \times \cos 18^\circ \\ &= \left(\frac{2x^2 + 4xy\varphi + 2y^2(\varphi + 1) + x^2\varphi + 2xy(\varphi + 1) + y^2(2\varphi + 1)}{2\varphi^2} \right) \times \cos 18^\circ \\ &= \left(\frac{(x^2 + 6xy + 4y^2)\varphi + (2x^2 + 2xy + 3y^2)}{2\varphi^2} \right) \times \cos 18^\circ \end{aligned}$$

若以 A 及 B 為基本圖形，要拼出邊長為 $\left(\frac{x}{\varphi} + y \right)$ 的正五邊形，則分別需要 m 個 A 及 n 個 B，

$$\begin{aligned} \text{可得算式} &\left(\frac{(x^2 + 6xy + 4y^2)\varphi + (2x^2 + 2xy + 3y^2)}{2\varphi^2} \right) \times \cos 18^\circ = m \left(\frac{1}{2\varphi} \times \cos 18^\circ \right) + n \left(\frac{1}{2\varphi^2} \times \cos 18^\circ \right) \\ &= \left(\frac{m\varphi + n}{2\varphi^2} \right) \times \cos 18^\circ \Rightarrow (x^2 + 6xy + 4y^2)\varphi + (2x^2 + 2xy + 3y^2) = m\varphi + n \end{aligned}$$

$$\text{又 } \varphi \text{ 爲無理數 } \therefore \begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$$

由於我們可以使用面積的方法驗證通式的正確性(即以排列方式計算出的公式和以面積計算出的不謀而合)，因此我們可以確定這個公式是正確的，而無法用第三、四繁殖法則排出(邊長為 $\frac{x}{\varphi}$ 或 y)之正五邊形也都可以適用。

四、正五邊形的分解與再合成---正五邊形的算術

- (一) 由之前的討論我們想到，這些正五邊形是否能分解開來，再將其重組，合成若干個較小的正五邊形？於是我們將各個正五邊形分解成一個個組成單元 A,B 再重新合成更小的正五邊形，而我們所研究的範圍僅限由大的正五邊形分解成小的正五邊形且沒有剩下的單元 A,B。
- (二) 我們利用正五邊形之 A,B 的個數 m,n 來計算。因為若一正五邊形可完全由若干小正五邊形合成，其 m,n 值必等於各個小五邊形 m,n 值的和。
- (三) 我們將之前的研究過程中所求得的各正五邊形 m,n 值，帶入 Excel 電腦程式中，用回饋的方式，先同時減去 m_2, n_2 的若干倍數後再同時除以 m_1, n_1 或者 m_4, n_4 ，取得到的數值相同的一組解，即可看出其以 C_1, C_2, C_4 分解的形式。
- (四) 我們將各正五邊形的 m,n 值一一輸入儲存格內計算，再將結果記錄下來，做成了表格，並將部分結果列於下表。

No.	1-C1	2-C2	3	4-C4	5	6	7	8
邊長	$1/\varphi$	1	$2/\varphi$	$1/\varphi+1$	$3/\varphi$	2	$2/\varphi+1$	$4/\varphi$
m	1	4	4	11	9	16	20	16
n	2	3	8	7	18	12	15	32
C ₁	1	0	4	0	9	0	0	16
C ₂	0	1	0	0	0	4	5	0
C ₄	0	0	0	1	0	0	0	0
No.	9-C9	10	11	12	13	14	15	16
邊長	$1/\varphi+2$	$3/\varphi+1$	3	$5/\varphi$	$2/\varphi+2$	$4/\varphi+1$	$1/\varphi+3$	$6/\varphi$
m	29	31	36	25	44	44	55	36
n	18	27	27	50	28	43	35	72
C ₁	0	3	0	25	0	8	0	36
C ₂	0	7	9	0	0	9	0	0
C ₄	0	0	0	0	4	0	5	0
No.	17	18	19	20-C20	21	22	23	24
邊長	$3/\varphi+2$	4	$5/\varphi+1$	$2/\varphi+3$	$7/\varphi$	$4/\varphi+2$	$1/\varphi+4$	$6/\varphi+1$
m	61	64	59	76	49	80	89	76
n	42	48	63	47	98	60	58	87
C ₁	0	0	15	0	49	0	0	24
C ₂	7	16	11	0	0	20	3	13
C ₄	3	0	0	0	0	0	7	0

No.	25	26	27	28	29-4*C9	30	31	32
邊長	$3/\varphi+3$	$8/\varphi$	5	$5/\varphi+2$	$2/\varphi+4$	$7/\varphi+1$	$4/\varphi+3$	$9/\varphi$
m	99	64	100	101	116	95	124	81
n	63	128	75	82	72	115	83	162
C ₁	0	64	0	5	0	35	0	81
C ₂	0	0	25	24	0	15	9	0
C ₄	9	0	0	0	0	0	8	0
No.	33	34	35-5*C9	36	37	38	39	40-7*C9
邊長	$1/\varphi+5$	$6/\varphi+2$	$3/\varphi+4$	$8/\varphi+1$	6	$5/\varphi+3$	$10/\varphi$	$2/\varphi+5$
m	131	124	145	116	144	151	100	164
n	87	108	90	147	108	107	200	103
C ₁	0	12	0	48	0	0	100	0
C ₂	8	28	0	17	36	24	0	1
C ₄	9	0	0	0	0	5	0	4
No.	41	42	43	44	45	46	47-C47	48
邊長	$7/\varphi+2$	$4/\varphi+4$	$9/\varphi+1$	$1/\varphi+6$	$6/\varphi+3$	$11/\varphi$	$3/\varphi+5$	$8/\varphi+2$
m	149	176	139	181	180	121	199	176
n	138	112	183	122	135	242	123	172
C ₁	21	0	63	0	0	121	0	32
C ₂	32	0	19	15	45	0	0	36
C ₄	0	16	0	11	0	0	0	0

(五) 我們將無法以比本身小的正五邊形合成之正五邊形稱為「質形」，每個正五邊形化成由質形合成的標準方式，稱為其「標準分解式」。

(六) 舉例來說：我們以第 1,2,4 個正五邊形(C₁,C₂,C₄)，其邊長 $a=\frac{1}{\varphi}, 1, \frac{1}{\varphi}+1$ (即 φ) 為基本的「質形」，將每個正五邊形做「質因形分解」列出其「標準分解式」，不能分解成更小的五邊形者，就是質形，也可以作為更大的正五邊形的「質因形」。

(七) 因為 1 個 C₁ 和 1 個 C₄ 可換成 3 個 C₂，所以在含有 C₁,C₂,C₄ 的分解方式之表達上，僅以 p 個 C₁ 和 q 個 C₂ 或 r 個 C₂ 和 s 個 C₄ 來表示，C₁,C₄ 不會同時出現。

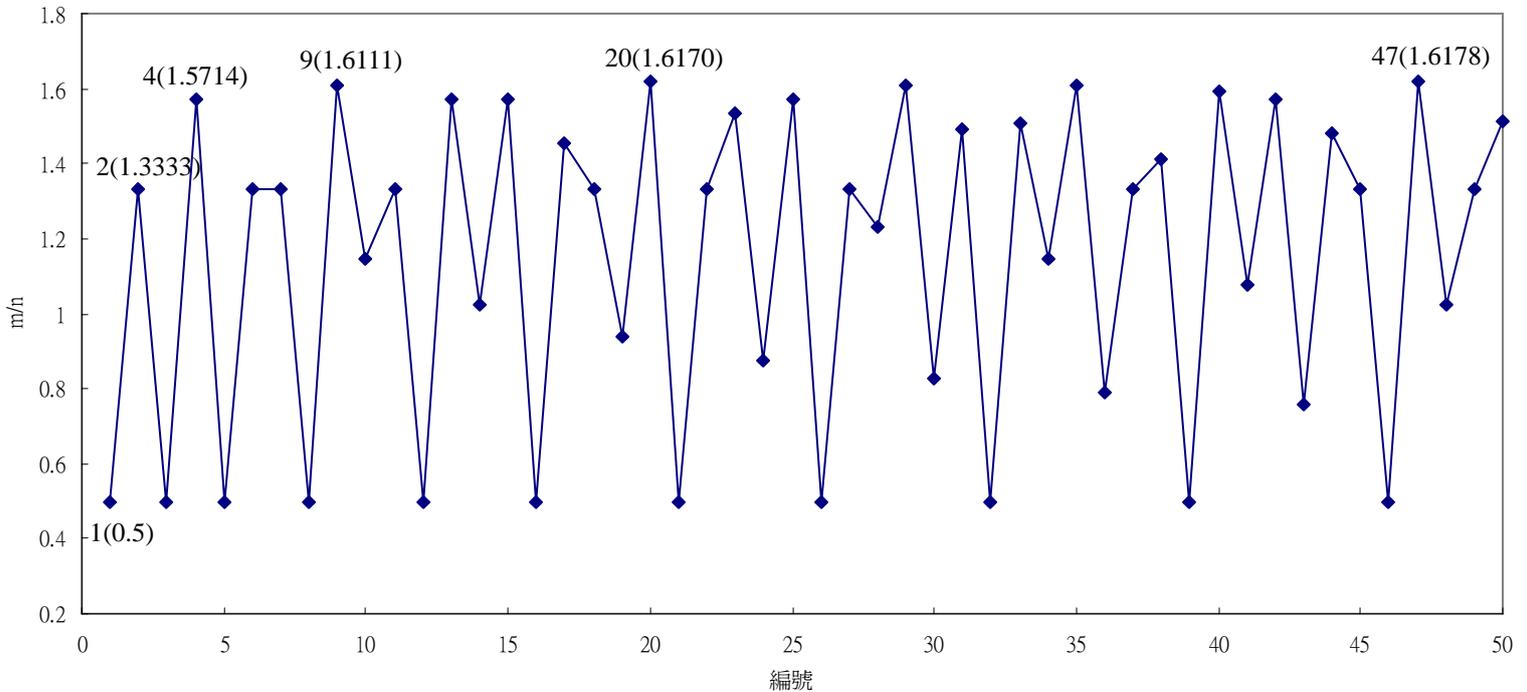
(八) 表格中 C₁、C₂、C₄ 三個欄位皆出現 0 時，該組無法以 C₁、C₂、C₄ 組合而成。此時應可分成兩種情況討論。

1. 出現「質形」：如 C₉ 無法用比 C₉ 小的正五邊形分解(即無法用比 C₉ 小的質形-- C₁、

C_2 、 C_4 分解)； C_{20} 無法用比 C_{20} 小的「質形」分解 (無法用比 C_9 小的質形-- C_1 、 C_2 、 C_4 、 C_9 分解)。

2. 可用除了 C_1 、 C_2 、 C_4 之外的「質形」來表示，如 C_{29} 、 C_{35} 可用 C_9 分解。
3. 因一開始是用 C_1 、 C_2 、 C_4 三種「質形」作為檢驗對象，隨著數量增加，「質形」便會相繼出現，出現新「質形」時就將「質形」的檢驗對象擴大，相對於將數字做質因式分解而言，有異曲同工之妙。

(九) 我發現當 m,n 比值有創新高的現象時，也就是比值比之前的數值都高時，「質形」就會出現，於是將「質形」出現時的 m,n 比值做成圖表觀察，發現在前 50 個正五邊形中，有六個正五邊形 m,n 比值创新高，分別是 C_1 、 C_2 、 C_4 、 C_9 、 C_{20} 、 C_{47} ，與前面表格中觀察出來的質形吻合。



(十) 觀察「質形」出現時的 x 、 y 值，我們意外的發現數對 (x, y) 恰為費氏數列中相鄰兩項，而數對 (m, n) 為盧卡斯數列中相鄰兩項(不同的是，為 L_{2n}, L_{2n-1})。

0	C_1	C_2	C_4	C_9	C_{20}	C_{47}
(x, y)	$(1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 3)$	$(3, 5)$
(m, n)	$(1, 2)$	$(4, 3)$	$(11, 7)$	$(29, 18)$	$(76, 47)$	$(199, 123)$

我們想要證明，若 (x,y) 為 (F_{n-1}, F_n) ，則 (m,n) 為盧卡斯數列中之 (L_{2n}, L_{2n-1}) ，其過程如下：

設兩正五邊形之 x, y 值 x_1, y_1 及 x_2, y_2 為費氏數列中連續三項，其中 $x_2 = y_1, y_2 = x_1 + y_1, \dots$ (1)

$$\text{又由 } m, n \text{ 與 } x, y \text{ 的關係式 } \begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$$

$$\text{知 } \begin{cases} m_1 = x_1^2 + 6x_1y_1 + 4y_1^2 \\ n_1 = 2x_1^2 + 2x_1y_1 + 3y_1^2 \end{cases}, \begin{cases} m_2 = x_2^2 + 6x_2y_2 + 4y_2^2 \\ n_2 = 2x_2^2 + 2x_2y_2 + 3y_2^2 \end{cases}, \text{ 將(1)代入後式}$$

$$\text{得 } \begin{cases} m_2 = y_1^2 + 6y_1(x_1 + y_1) + 4(x_1 + y_1)^2 = 11y_1^2 + 14x_1y_1 + 4x_1^2 \\ n_2 = 2y_1^2 + 2y_1(x_1 + y_1) + 3(x_1 + y_1)^2 = 7y_1^2 + 8x_1y_1 + 3x_1^2 \end{cases}$$

$$\text{而 } \begin{cases} m_1 + n_1 = 3x_1^2 + 8x_1y_1 + 7y_1^2 \text{ 恰} = n_2 \\ m_1 + n_2 = 4x_1^2 + 14x_1y_1 + 11y_1^2 \text{ 恰} = m_2 \end{cases}$$

$$\text{由此可知 } \begin{cases} m_2 = m_1 + n_2 \\ n_2 = m_1 + n_1 \end{cases} \text{ 可看出其為一延伸數列}$$

又 \because 當 $(x, y) = (1, 0)$ 時, $(m, n) = (2, 1)$

\therefore 此類正五邊形之 m, n 值會構成盧卡斯數列

(十一) 承上，因此我們大膽推測下一個質形出現時應為 $5/\varphi + 8$ ，經過 EXCEL 檢驗發現

確實無法用 $C_1, C_2, C_4, C_9, C_{20}$ 及 C_{47} 做分解；另外檢驗 m, n 比值發現比值為

1.6180...，也出現創新高的情形，與之前的結果符合。

我們認為，所有的 (x, y) 恰為 (F_{n-1}, F_n) 的正五邊形皆為質形，於是作出了以下的證明：

設 F_{n-1}, F_n 為費波那契數列的連續兩項， $p, q \in Z, 0 < p \leq F_{n-2}, 0 < q \leq F_{n-3}, n \geq 2$

$$\text{欲證明 } \frac{(F_{n-1} - p)^2 + 6(F_{n-1} - p)(F_n - q) + 4(F_n - q)^2}{2(F_{n-1} - p)^2 + 2(F_{n-1} - p)(F_n - q) + 3(F_n - q)^2} < \frac{F_{n-1}^2 + 6F_{n-1}F_n + 4F_n^2}{2F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + 3F_n^2}$$

$$\begin{aligned} \text{而 } & \frac{(F_{n-1} - p)^2 + 6(F_{n-1} - p)(F_n - q) + 4(F_n - q)^2}{2(F_{n-1} - p)^2 + 2(F_{n-1} - p)(F_n - q) + 3(F_n - q)^2} \\ & = \frac{F_{n-1}^2 + 6F_{n-1}F_n + 4F_n^2 + (-2p - 6q)F_{n-1} + (-6p - 8q)F_n + (p^2 + 4q^2) + 6pq}{2F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + 3F_n^2 + (-4p - 2q)F_{n-1} + (-2p - 6q)F_n + (2p^2 + q^2) + 2pq} \end{aligned}$$

又 $(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq$ ，
與 $(-4p-2q)F_{n-1}+(-2p-6q)F_n+(2p^2+q^2)+2pq$ 皆 <0

$$\text{且 } 1 < \frac{F_{n-1}^2 + 6F_{n-1}F_n + 4F_n^2}{2F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + 3F_n^2} < \varphi$$

$$\therefore \text{—且 } \frac{(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq}{(-4p-2q)F_{n-1}+(-2p-6q)F_n+(2p^2+q^2)+2pq} \geq \varphi,$$

$$\frac{(F_{n-1}-p)^2 + 6(F_{n-1}-p)(F_n-q) + 4(F_n-q)^2}{2(F_{n-1}-p)^2 + 2(F_{n-1}-p)(F_n-q) + 3(F_n-q)^2} \text{ 必 } < \frac{F_{n-1}^2 + 6F_{n-1}F_n + 4F_n^2}{2F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + 3F_n^2}$$

$$\text{當 } \frac{(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq}{(-4p-2q)F_{n-1}+(-2p-6q)F_n+(2p^2+q^2)+2pq} \geq \varphi \text{ 時,}$$

$$\Leftrightarrow (-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq$$

$$\leq (-4\varphi p-2\varphi q)F_{n-1}+(-2\varphi p-6\varphi q)F_n+(2\varphi p^2+\varphi q^2)+2\varphi pq$$

$$\Leftrightarrow (-2p+4\varphi p-6q+2\varphi q)F_{n-1}+(-6p+2\varphi p-8q+6\varphi q)F_n$$

$$+(1-2\varphi)p^2+(4-\varphi)q^2+(6-2\varphi)pq \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (-2\varphi+1)p^2+2p(-F_{n-1}+2\varphi F_{n-1}-3F_n+\varphi F_n)$$

$$+2q(-3F_{n-1}+\varphi F_{n-1}-4F_n+3\varphi F_n)+(4-\varphi)q^2+(6-2\varphi)pq \leq 0 \dots \text{合}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because 0 < p < F_{n-2}, 0 < q < F_{n-3} \\ \Rightarrow (4-\varphi)q^2 + (6-2\varphi)pq \\ \ll (-2\varphi+1)p^2 - 2p(-F_{n-1}+2\varphi F_{n-1}-3F_n+\varphi F_n) - 2q(-3F_{n-1}+\varphi F_{n-1}-4F_n+3\varphi F_n) \end{array} \right)$$

$$\text{由次可知, } \frac{(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq}{(-4p-2q)F_{n-1}+(-2p-6q)F_n+(2p^2+q^2)+2pq} \geq \varphi$$

$$\Rightarrow \frac{(F_{n-1}-p)^2 + 6(F_{n-1}-p)(F_n-q) + 4(F_n-q)^2}{2(F_{n-1}-p)^2 + 2(F_{n-1}-p)(F_n-q) + 3(F_n-q)^2} < \frac{F_{n-1}^2 + 6F_{n-1}F_n + 4F_n^2}{2F_{n-1}^2 + 2F_{n-1}F_n + 3F_n^2}$$

由以上證明，我們獲知以 $\frac{F_{n-1}+F_n}{\varphi}$ 為邊長之正五邊形，其 m,n 比值皆大於邊長介於

$\frac{F_{n-1}+F_n}{\varphi}$ 和 $\frac{F_{n-3}+F_{n-2}}{\varphi}$ (含)之間的正五邊形之 m,n 比值，故當 $x=F_{n-1}, y=F_n$ 時， m,n 比值大

於所有邊長之 $x < F_{n-1}, y < F_n$ 的正五邊形之 m,n 比值。至於當 $x < F_{n-1}, y > F_n$ 或 $x > F_{n-1}, y < F_n$

時，在後方的敘述中會言明。而我們又猜想，質形之邊長必為 $\frac{F_{n-1}+F_n}{\varphi}$ 。

(十二) 此時我們由圖表中也發現 m,n 比值都介於 $1/2$ 與 $1.618\dots$ 之間，似乎與黃金比

例 φ 有著密切的關係，於是我們嘗試著去尋找 m,n 比值的範圍：

首先，我們已知正五邊形繁殖法則通式(即 A、B 個數與邊長的關係)為

$$\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$$

設 m 為 n 之 k 倍

$$\Rightarrow (x^2 + 6xy + 4y^2) = k(2x^2 + 2xy + 3y^2)$$

$$\Rightarrow (2k-1)x^2 + (2ky-6y)x + (3ky^2 - 4y^2) = 0$$

$$\because x \in R \therefore D \geq 0$$

$$\Rightarrow (2ky-6y)^2 - 4(2k-1)(3ky^2 - 4y^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow -20k^2y^2 + 20ky^2 + 20y^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow y^2(k^2 - k - 1) \leq 0 \Rightarrow k^2 - k - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$$

$$\text{又 } k = \frac{m}{n} = \frac{x^2 + 6xy + 4y^2}{2x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{x^2 + xy + 1.5y^2}{2x^2 + 2xy + 3y^2} + \frac{5xy + 2.5y^2}{2x^2 + 2xy + 3y^2} = \frac{1}{2} + \frac{2.5(2xy + y^2)}{2x^2 + 2xy + 3y^2},$$

$$\text{且 } x, y \geq 0, x+y > 0 \Rightarrow 2x^2 + 2xy + 3y^2 \neq 0 \quad \therefore \text{當 } y=0 \text{ 時, } k \text{ 有最小值 } \frac{1}{2}$$

$$\text{故 } \frac{1}{2} \leq k \leq \varphi, \text{ 但由於 } m, n \in N, \therefore \frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} < \varphi.$$

總而言之，我們發現，當 $\frac{x}{y} = \varphi$ 時， $\frac{m}{n} = \varphi$ ，且若 $\frac{x}{y}$ 越接近 φ ， $\frac{m}{n}$ 也越接近 φ ，因

此當 x, y 皆為費氏數列的一項，且 y 為 x 之後一項時，其 $\frac{m}{n}$ 必大於所有較小的正

五邊形之 $\frac{m}{n}$ ，故此種以 $\frac{F_{n-1} + F_n}{\varphi}$ 為邊長之正五邊形，必為質形。而我們也可以利用這些質形檢驗出其他正五邊形是否也為質形。

(十三) 爲了推論的完整性，我們從另一個面向思考，若 (x, y) 非費氏數列中相鄰兩項，

則必可用比他小的質形做分解，即任意邊長非 $\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i$ 之正五邊形皆非質形，換句話說，任一邊長非 $\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i$ 之正五邊形皆可被邊長爲 $\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i$ 之正五邊形分解。

設第 i 個正五邊形 C_i 是由 m_i 個 A 和 n_i 個 B 組成(以下以 m, n 代)，並將之分爲 p 個邊長

$\frac{F_{k-1}}{\varphi} + F_k$ 之正五邊形和 q 個邊長 $\frac{F_k}{\varphi} + F_{k+1}$ 之正五邊形

則若 $p, q \in N \Leftrightarrow C_i$ 可被此二者分解 (按: C_i 之 m_i/n_i 介於二者的 m, n 比值之間, $i \in N$)

$$\text{由 } \begin{cases} L_{2k}p + L_{2k+2}q = m \\ L_{2k-1}p + L_{2k+1}q = n \end{cases} \wedge \frac{L_{2k}}{L_{2k-1}} < \frac{m}{n} < \frac{L_{2k+2}}{L_{2k+1}}$$

$$\Rightarrow p = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} m & L_{2k+2} \\ n & L_{2k+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{2k} & L_{2k+2} \\ L_{2k-1} & L_{2k+1} \end{vmatrix}}, q = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} L_{2k} & m \\ L_{2k-1} & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{2k} & L_{2k+2} \\ L_{2k-1} & L_{2k+1} \end{vmatrix}}, \frac{L_{2k}}{L_{2k-1}} < \frac{m}{n} < \frac{L_{2k+2}}{L_{2k+1}}$$

1. 以數學歸納法證明 $\begin{vmatrix} L_{r+1} & L_{r+3} \\ L_r & L_{r+2} \end{vmatrix} = -5$ (當 r 為奇數) $\vee 5$ (當 r 為偶數)

$$\begin{vmatrix} L_{r+1} & L_{r+3} \\ L_r & L_{r+2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{r+1} & L_r + 2L_{r+1} \\ L_r & L_r + L_{r+1} \end{vmatrix} = L_{r+1}(L_r + L_{r+1}) - L_r(L_r + 2L_{r+1}) = -L_r^2 - L_r L_{r+1} + L_{r+1}^2$$

$$\text{當 } r = 1 \text{ 時, } L_r = 2, L_{r+1} = 1 \Rightarrow -L_r^2 - L_r L_{r+1} + L_{r+1}^2 = -5$$

$$\text{當 } r = 2 \text{ 時, } L_r = 1, L_{r+1} = 3 \Rightarrow -L_r^2 - L_r L_{r+1} + L_{r+1}^2 = 5$$

$$\begin{aligned} \text{又 } -L_{n+2}^2 - L_{n+2}L_{n+3} + L_{n+3}^2 &= -(L_n + L_{n+1})^2 - (L_n + L_{n+1})(L_n + 2L_{n+1}) + (L_n + 2L_{n+1})^2 \\ &= -L_n^2 - 2L_n L_{n+1} - L_{n+1}^2 - L_n^2 - 3L_n L_{n+1} - 2L_{n+1}^2 + L_n^2 + 4L_n L_{n+1} + 4L_{n+1}^2 \\ &= -L_n^2 - L_n L_{n+1} - L_{n+1}^2 \dots \text{即當 } r = n + 2 \text{ 時, 其值與 } r = n \text{ 時相同} \end{aligned}$$

$$\text{故得證 } \forall r \in N, \text{ 若 } r \text{ 為奇數, } \begin{vmatrix} L_{r+1} & L_{r+3} \\ L_r & L_{r+2} \end{vmatrix} = -5, \text{ 若 } r \text{ 為偶數, } \begin{vmatrix} L_{r+1} & L_{r+3} \\ L_r & L_{r+2} \end{vmatrix} = 5 \dots (1)$$

2. 以數學歸納法證明 $5 \mid \begin{vmatrix} m & L_{r+1} \\ n & L_r \end{vmatrix} (r \in N)$

$$\text{已知 } \begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases} (x, y \in N)$$

$$\text{當 } r = 1 \text{ 時, } 2m - n = 10xy + 5y^2$$

$$\text{當 } r = 2 \text{ 時, } m - 3n = -5x^2 - 5y^2$$

假設當 $r = n, r = n + 1$ 時皆成立

$$\Rightarrow \begin{cases} L_n m - L_{n+1} n = 5t \\ L_{n+1} m - L_{n+2} n = 5s \end{cases} (t, s \in Z)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L_{n+2} m - L_{n+3} n &= (L_n + L_{n+1})m - (L_{n+1} + L_{n+2})n = (L_n m - L_{n+1} n) + (L_{n+1} m - L_{n+2} n) \\ &= 5(t + s) \Rightarrow 5 \mid L_{n+2} m - L_{n+3} n \end{aligned}$$

$$\text{故得證 } \forall r \in N, 5 \mid \begin{vmatrix} m & L_{r+1} \\ n & L_r \end{vmatrix} \dots (2)$$

3. 又當 $\frac{L_{2k}}{L_{2k-1}} < \frac{m}{n} < \frac{L_{2k+2}}{L_{2k+1}}$ 時, $\begin{vmatrix} L_{2k+2} & m \\ L_{2k+1} & n \end{vmatrix} > 0 \wedge \begin{vmatrix} m & L_{2k} \\ n & L_{2k-1} \end{vmatrix} > 0 \dots (3)$

因此, 由(1),(2),(3)可知原式之 $p, q \in N$, 也就是說任一正五邊形 C_i 可被分解為兩個

相鄰的質形,二者之 m, n 比值恰一大於一小於該正五邊形 C_i 之 m, n 比值(m_i/n_i)。

※若一正五邊形之 m, n 比值不是介於兩個邊長分別為 $\frac{F_{k-1}}{\varphi} + F_k$ 和 $\frac{F_k}{\varphi} + F_{k+1}$ 之質形之間,其必為一邊長為 $\frac{F_{j-1}}{\varphi} + F_j$ 之正五邊形(質形)的放大圖。

(十四) 由此可確定質形種類的唯一性,並能推出:由小到大的第 i 個質形 P_i ,其邊長為 $\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i$, A、B 的個數分別為 L_{2i} 、 L_{2i-1} (即 $(x, y) = (F_{i-1}, F_i)$, $(m, n) = (L_{2i}, L_{2i-1})$)。

(十五) 另外在分解過程中,除了發現(七)所提的在連續四質形中,中間一質形的三倍與其前後質形之和可以互相代換之外,還由此推出連續四質形中,首末兩者之和與中間兩者之和的兩倍等價...等,進而發現了質形之間的轉換關係:(1)第 a 個質形加上第 $a+2k$ 個質形的 A、B 個數等於第 $a+k$ 個質形的 A、B 個數的 L_{2k+1} 倍,(2)第 b 個質形加上第 $b+2h+1$ 個質形的 A、B 個數等於第 $b+h$ 個質形加上第 $b+h+1$ 個質形的 A、B 個數的 L_{2h+1} 倍。以下證明之

已知正五邊形中,第 i 個質形 P_i 之 $(m, n) = (L_{2i}, L_{2i-1})$ 。

欲證明 P_a 和 P_{a+2k} 可與 L_{2k+1} 倍的 P_{a+k} 相替換,可先分析出 P_a 之 (m, n) 為 (L_{2a}, L_{2a-1}) , P_{a+2k} 之 (m, n) 為 $(L_{2a+4k}, L_{2a+4k-1})$, P_{a+k} 之 (m, n) 為 $(L_{2a+2k}, L_{2a+2k-1})$,由於 A、B 二基本單元之間無法相轉換,因此應同時證明 $L_{2a} + L_{2a+4k} = L_{2k+1} \times L_{2a+2k}$ 及 $L_{2a-1} + L_{2a+4k-1} = L_{2k+1} \times L_{2a+2k-1}$,不妨將此二者合而為一,更廣泛地去證明

$$L_\alpha + L_{\alpha+4k} = L_{2k+1}L_{\alpha+2k} \equiv L_{\alpha-2t} + L_{\alpha+2t} = L_{2t+1}L_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}, k, t \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

以數學歸納法證明 $L_{\alpha-2t} + L_{\alpha+2t} = L_{2t+1}L_\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N} \cup \{0\})$

1. 當 $t=0$ 時, $L_{\alpha-2t} = L_{\alpha+2t} = L_\alpha \Rightarrow L_{\alpha-2t} + L_{\alpha+2t} = L_\alpha + L_\alpha = 2L_\alpha = L_{2 \times 0 + 1}L_\alpha \dots$ 成立

2. 當 $t=1$ 時, 設 $L_\alpha = x$, $L_{\alpha-1} = y \Rightarrow L_{\alpha-2} = L_\alpha - L_{\alpha-1} = x - y$, $L_{\alpha+2} = L_\alpha + L_{\alpha+1} = x + (x + y) = 2x + y \Rightarrow L_{\alpha-2} + L_{\alpha+2} = 3x = 3L_\alpha = L_{2 \times 1 + 1}L_\alpha \dots$ 亦成立

3. 假設 $\begin{cases} t=n-1 \\ t=n \end{cases} (n \in \mathbb{N})$ 皆成立, 則 $\begin{cases} L_{\alpha-2n+2} + L_{\alpha+2n-2} = L_{2n-1}L_\alpha \dots (1) \\ L_{\alpha-2n} + L_{\alpha+2n} = L_{2n+1}L_\alpha \dots (2) \end{cases}$

$$\begin{aligned}
(1)-(2) : -L_{\alpha-2n+1} + L_{\alpha+2n-1} &= L_{2n}L_{\alpha} \\
\Rightarrow \text{右} &= L_{2n+3}L_{\alpha} = (L_{2n+1} + L_{2n+2})L_{\alpha} = (L_{2n+1} + (L_{2n+1} + L_{2n}))L_{\alpha} \\
&= 2(L_{\alpha+2n} + L_{\alpha-2n}) + (L_{\alpha+2n-1} - L_{\alpha-2n+1}) \\
&= L_{\alpha+2n} + (L_{\alpha+2n} + L_{\alpha+2n-1}) + L_{\alpha-2n} + (L_{\alpha-2n} - L_{\alpha-2n+1}) \\
&= L_{\alpha+2n} + L_{\alpha+2n+1} + L_{\alpha-2n} - L_{\alpha-2n+1} \\
&= L_{\alpha+2n+2} + L_{\alpha-2n-2} = \text{左} \dots \dots \text{推得} t=n+1 \text{時亦成立}
\end{aligned}$$

$$\therefore \forall \alpha \in \mathbb{Z}, t \in \mathbb{N} \cup \{0\}, L_{\alpha-2t} + L_{\alpha+2t} = L_{2t+1}L_{\alpha}, \text{ 故得證 } \forall a \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}, P_a + P_{a+2k} = L_{2k+1} * P_{a+k}$$

(十六) 承上，由於質形之間可以轉換，導致分解成質因形的方式並不是唯一的，因此定義在一個正五邊形的「標準分解式」中，只能以一個或兩個連續的質形來表達(質因形不能超過兩個)，以確保分解式的唯一性。而我們也猜想，一個正五邊形，除了以一個或兩個相鄰的質形分解之外，應該有不同之質形組成方式，而其 $\frac{m}{n}$ 值介於(或等於)該質形 $\frac{m}{n}$ 值之間，例如 C_{14} ，除了可分解為 8 個 $C_1(P_1)$ 和 9 個 $C_2(P_2)$ 之外，尚可化為 11 個 $C_1(P_1)$ 和 3 個 $C_4(P_3)$ 的形式。

(十七) 在前面的討論過程中，我想出了幾個做「質因形分解」，求標準分解式的方法，曾一度利用類似輾轉相除法的方式，逐次減去比其 $\frac{m}{n}$ 值大的質形，使其剩餘之 $\frac{m}{n}$ 值越來越小，直至分解完畢後，再加以轉換。

(十八) 因為一正五邊形能由兩連續質形組成，故能以 m, n 值為係數列出(十三)中的二元一次聯立方程組，其解即為需使用之質形的個數。

(十九) 我們將這些結論，應用到正十邊形(由 10 個 A 組成)中，發現其結果皆可互通，

$$\text{其繁殖通式爲} \begin{cases} m = 10(x^2 + 2xy + 2y^2) \\ n = 10(2xy + y^2) \end{cases}, \varphi \leq \frac{m}{n} < \infty, \text{ 其第 } n \text{ 個質形 } P_n, \text{ 邊長爲 } \frac{F_{n-1} + F_n}{\varphi}, A、B \text{ 的個數分別爲 } F_{2n}、F_{2n-1} \text{ (即 } (x, y) = (F_{n-1}, F_n), (m, n) = (F_{2n}, F_{2n-1}) \text{)}。$$

五、正五邊形標準分解式的探討

(一) 觀察正五邊形分解成質形的方式(見附件一)，可以發現它們分解成的連續兩個質形時所數量呈現出一個很明顯的規律。

(二) 我逆向操作，設計了一個電腦程式，以計算 A、B 個數(m,n)的方式，檢驗兩連續質形的哪些(非負整數，電腦代 0~100)倍(扣除質形的正整數倍放大圖)拆散成 A 與 B 後能再合成一個正五邊形，下表為 $P_1 \times P_2$ 中可合成正五邊形的 p,q 值。

第 1 週期	p	0	3	8	15	24	35	48	63	80	99
	q	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
第 2 週期	p	0	5	12	21	32	45	60	77	96	
	q	20	24	28	32	36	40	44	48	52	
第 3 週期	p	0	7	16	27	40	55	72	91		
	q	45	51	57	63	69	75	81	87		
第 4 週期	p	0	9	20							
	q	80	88	96							

(三) 藉由程式的計算，發現任兩連續質形之個數(這裡以 p 表示較小者個數，q 表示較大者個數)中，會有一系列的規律出現，如下表。我們稱兩兩質形($P_i \times P_{i+1}$)之若干倍數合成的正五邊形集合為一組，其中有兩大類，兩類間僅 p 與 q 相反，而將 q 為等差級數稱做順式，反之為反式($P_1 \times P_2$ —即第一組—只有順式)，每一類中，以 $p=0, q=5$ 或 $p=5, q=0$ 為開頭者稱為第一週期，以 $p=0, q=20$ 或 $p=20, q=0$ 為開頭者稱為第二週期…以此類推。

(四) 接著，觀察擁有這些規律的正五邊形之邊長，發現無論是哪一組哪一類，第一週期的邊長都是從某一個質形的 $\sqrt{5}$ 倍為起頭，再逐一增加一固定數目(為費氏數列的連續兩項)，與前者同組同類之第二週期的邊長都是從某一個質形的 $2\sqrt{5}$ 倍為起頭，再逐一增加一相同之固定數目…以此類推，每一週期皆無限延伸。而由於第 i 個質形之 $\sqrt{5}$ 倍放大圖，對第 i-1 組而言是 0 個第 i-1 個質形與 5 個第 i 個質形；對第 i 組而言是 5 個第 i 個質形與 0 個第 i+1 個質形，所以連續兩組中，前一組的順式與後一組的反是共用一個起頭。

(五) 以數學符號描述，第 i 組順式之第 t 週期是以 P_{i+1} 的 $\sqrt{5}t$ 倍為起頭，逐一增加

$$\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i, \text{ 亦即 } \Delta x = F_{i-1}, \Delta y = F_i; \text{ 而反式則以 } P_i \text{ 的 } \sqrt{5}t \text{ 倍為起頭，逐一增加}$$

$$\frac{F_i}{\varphi} + F_{i+1}, \text{ 亦即 } \Delta x = F_i, \Delta y = F_{i+1}。$$

(六) 又我們知， P_i 的邊長為 $\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i\right) \cdot \sqrt{5} = \left(F_{i-1} \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} + F_i\right) \cdot \sqrt{5} = \frac{5}{2}F_{i-1} + \left(F_i - \frac{1}{2}F_{i-1}\right) \cdot \sqrt{5} \\ &= (2F_i - F_{i-1}) \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2F_{i-1} + F_i = \frac{2F_i - F_{i-1}}{\varphi} + 2F_{i-1} + F_i = \frac{F_{i-2} + F_i}{\varphi} + F_{i-1} + F_{i+1} \\ &\left(= \frac{L_{i-1}}{\varphi} + L_i, \text{亦可用數學歸納法證明之} \right) \end{aligned}$$

(七) 故第*i*組順式之第*t*週期中的第*k*個正五邊形其邊長為

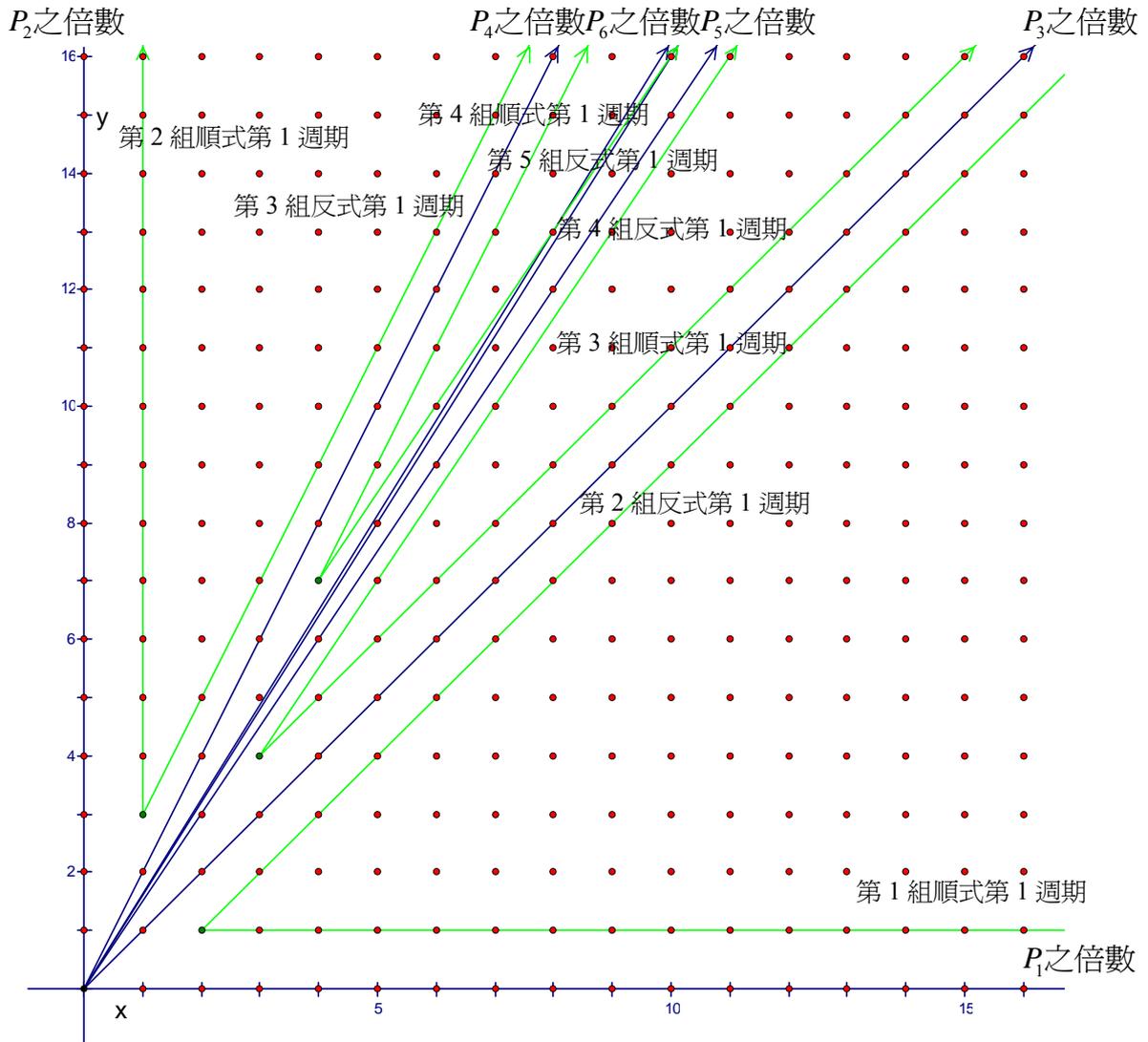
$$\frac{(F_{i-1} + F_{i+1})t + kF_{i-1}}{\varphi} + (F_i + F_{i+2})t + kF_i, \text{ 即 } x = (F_{i-1} + F_{i+1})t + kF_{i-1},$$

$$y = (F_i + F_{i+2})t + kF_i; \text{ 而反式者則為 } \frac{(F_{i-2} + F_i)t + kF_i}{\varphi} + (F_{i-1} + F_{i+1})t + kF_{i+1}, \text{ 即}$$

$$x = (F_{i-2} + F_i)t + kF_i, \quad y = (F_{i-1} + F_{i+1})t + kF_{i+1}.$$

(八) 緊接著，我又發現了這些邊長的另一個特點。以正五邊形邊長中的 x, y 為軸，做出一個二維的直角座標系(如圖)，而第一象限及座標軸正向的格子點(紅色)則代表各種邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y \mid x, y \in N \cup \{0\}$ 的正五邊形。我們將質形及其正整數倍放大圖劃除(藍色，包括座標軸)，把整塊區域分成若干部分。我們發現，每一個部分都是由第 i 個質形的倍數與第 $i+2$ 個質形的倍數(\because 費氏數列的前後項比—這些藍線的斜率—會以上下擺盪的方式趨近於 φ)所夾，而每部分之端點(最尖端，最靠近原點的點)為夾該部分之兩質形(一倍)之向量和，也就是說，該點所代表的正五邊形之邊長為 $\frac{F_{i-1} + F_{i+1}}{\varphi} + F_i + F_{i+2}$ ，恰好與第 $i+1$ 個質形的 $\sqrt{5}$ 倍邊長相同。更有意思的是，第 i 組順式第 1 週期恰好便是以此端點為起頭，順著第 i 個質形的倍數(與之平行)逐一分佈而延伸(因其與該質形倍數相同， $\Delta x = F_{i-1}$ ， $\Delta y = F_i$)；而第 $i+1$ 組反式第 1 週期也是以此端點為起頭，順著第 $i+2$ 個質形的倍數逐一分佈而延伸($\Delta x = F_{i+1}$ ， $\Delta y = F_{i+2}$)，也因此，計入第 i 組順式與第 $i+1$ 組反式之第 1 週期，夾在第 i 個質形的倍數與第 $i+2$ 個質形的倍數之間的格子點，等於被削去了一層(也可說是平移了 $(F_{i-1} + F_{i+1}, F_i + F_{i+2})$ ，綠色)。至於被削去一層後剩下的格子點，其端點顯然是

$2(F_{i-1} + F_{i+1}, F_i + F_{i+2})$ (可以平移觀點解釋)，且剩下部分的最外層正是第 i 組順式與第 $i+1$ 組反式之第 2 週期……以此類推。



(九) 如此一來，就充分地表示夾在第 i 個質形的倍數與第 $i+2$ 個質形的倍數之間的格子點，都會被第 i 組順式與第 $i+1$ 組反式填滿，亦即此類「特殊」的正五邊形(邊長為 $\frac{(F_{i-1} + F_{i+1})t + kF_{i-1}}{\varphi} + (F_i + F_{i+2})t + kF_i$ 或 $\frac{(F_{i-2} + F_i)t + kF_i}{\varphi} + (F_{i-1} + F_{i+1})t + kF_{i+1}$) 其實正是所有除了質形及其正整數倍放大圖外的正五邊形。

(十) 當確立了這些邊長變化的完備性後，我們便要利用這些邊長的變化量換算出 A、B 個數的變化量轉化成質形個數差，以推導正五邊形標準分解式的係數。首先，分析邊長變化造成的 A、B 個數變化。

設正五邊形的邊長由 $\frac{x}{\varphi} + y$ ，變成 $\frac{x+\alpha}{\varphi} + y + \beta$ ， $x, y, \alpha, \beta \in N$

$$\begin{aligned}\Delta m &= (x+\alpha)^2 + 6(x+\alpha)(y+\beta) + 4(y+\beta)^2 - x^2 + 6xy + 4y^2 \\ &= 2\alpha x + 6\beta x + 6\alpha y + 8\beta y + \alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2 \dots(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta n &= 2(x+\alpha)^2 + 2(x+\alpha)(y+\beta) + 3(y+\beta)^2 - 2x^2 + 2xy + 3y^2 \\ &= 4\alpha x + 2\beta x + 2\alpha y + 6\beta y + 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2 \dots(2)\end{aligned}$$

(十一) 由前面的推導，我們代 $x = x_0 + (k-1)\alpha$ ， $y = y_0 + (k-1)\alpha$ ，順式 $\alpha = F_{i-1}$ 、 $\beta = F_i$ ，

$$x_0 = (F_{i-1} + F_{i+1})t, \quad y_0 = (F_{i-2} + F_i)t; \quad \text{反式 } \alpha = F_i, \quad \beta = F_{i+1}, \quad x_0 = (F_{i-2} + F_i)t,$$

$$y_0 = (F_{i-1} + F_{i+1})t \circ$$

順式方面：

$$\begin{aligned}\text{由(1)} : \Delta m &= 2t((\alpha + 3\beta)x_0 + (3\alpha + 4\beta)y_0) + (2k-1)(\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2) \\ &= (2\alpha + 6\beta)(F_{i-1} + F_{i+1})t + (6\alpha + 8\beta)(F_{i-2} + F_i)t + (2k-1)(\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2) \\ &= [(2k-1) + 2t]m(P_i) + 2t \bullet m(P_{i+1})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{由(2)} : \Delta n &= 2t((2\alpha + \beta)x_0 + (\alpha + 3\beta)y_0) + (2k-1)(2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2) \\ &= (4\alpha + 2\beta)(F_{i-1} + F_{i+1})t + (2\alpha + 6\beta)(F_{i-2} + F_i)t + (2k-1)(2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2) \\ &= [(2k-1) + 2t]n(P_i) + 2t \bullet n(P_{i+1})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_{k+1} - p_k = (2k-1) + 2t, \quad q_{k+1} - q_k = 2t$$

$$\therefore p = 0 + \sum_{r=1}^{k-1} [(2r-1) + 2t] = (k-1)^2 + 2(k-1)t, \quad q = 5t^2 + \sum_{r=1}^{k-1} 2t = 5t^2 + 2(k-1)t$$

反式方面：

$$\begin{aligned}\text{由(1)} : \Delta m &= 2t((\alpha + 3\beta)x_0 + (3\alpha + 4\beta)y_0) + (2k-1)(\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2) \\ &= (2\alpha + 6\beta)(F_{i-2} + F_i)t + (6\alpha + 8\beta)(F_{i-1} + F_{i+1})t + (2k-1)(\alpha^2 + 6\alpha\beta + 4\beta^2) \\ &= 2t \bullet m(P_i) + [(2k-1) + 2t]m(P_{i+1})\end{aligned}$$

$$\text{由(2)} : \Delta n = 2t((2\alpha + \beta)x_0 + (\alpha + 3\beta)y_0) + (2k-1)(2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2)$$

$$= (4\alpha + 2\beta)(F_{i-2} + F_i)t + (2\alpha + 6\beta)(F_{i-1} + F_{i+1})t + (2k-1)(2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2)$$

$$= 2t \bullet n(P_i) + [(2k-1) + 2t]n(P_{i+1})$$

$$\Rightarrow p_{k+1} - p_k = 2t, \quad q_{k+1} - q_k = (2k-1) + 2t$$

$$\therefore p = 5t^2 + \sum_{r=1}^{k-1} 2t = 5t^2 + 2(k-1)t, \quad q = 0 + \sum_{r=1}^{k-1} [(2r-1) + 2t] = (k-1)^2 + 2(k-1)t$$

故得證，第 i 組順式第 t 週期的正五邊形 $p = (k-1)^2 + 2(k-1)t$ ， $q = 5t^2 + 2(k-1)t$ ；

第 i 組反式第 t 週期的正五邊形 $p = 5t^2 + 2(k-1)t$ ， $q = (k-1)^2 + 2(k-1)t$ 。

承上，這也解釋了為何每一組之 p, q 皆完全相同(除了第一組沒有反式)。

(十二) 由此可知，邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ 之正五邊形，除了質形本身和邊長為 $\frac{k}{\varphi}$ 之正五邊形，

分解方式具有唯一性，其它的正五邊形，都至少有兩種以上的分解方式。

捌、結論

- 一、 我們總共發現了四種繁殖法則，就邊長 a 而言，分別是： $a' = \varphi a$ (法則一)、
 $a' = k a$ (法則二)、 $a' = a + 1$ (法則三)、 $a' = a + \frac{1}{\varphi}$ (法則四)。
- 二、 第一繁殖法則和第二繁殖法則可以以任何正五邊形為親代繁殖出下一個子代，也就是其親代是無條件限制的。而第三、四繁殖法則分別不能使用於 $a = y$ 、 $a = \frac{x}{\varphi}$ 的正五邊形上，也就是其親代略有條件限制。
- 三、 我們發現有一種「交換圖形」的現象，推測可以使用它來使同一個圖形呈現不同的排列方式，而且同一正五邊形之不同排列方式都可以用交換圖形的方式加以取代(及其基本上為同一排列方式)。
- 四、 第三、四繁殖法則可以以各種邊長之正五邊形為親代使其產生邊長加 1 或 $\frac{1}{\varphi}$ 的子代，且藉由其與第二繁殖法則的合併使用，衍生出一種方法可以繁殖出任何一種邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ ($x, y \in N \cup \{0\}, x^2 + y^2 \neq 0$) 形式之正五邊形，並藉此計算出其組成元素之個數。
- 五、 由於已經能證明出任何一種邊長為 $\frac{x}{\varphi} + y$ ($x, y \in N$) 形式之正五邊形都能以 A 、 B 兩種基本元素排出(即 m 、 n 之解必存在)，且因 A 、 B 之面積比為無理數(不能互相替換)，可以確定此解是唯一的，所以能確定 m 、 n 值恰有一解。
- 六、 我們已經確定 A 、 B 兩種基本元素能繁殖出任何一種邊長之正五邊形，且計算並證明出其通式，為

$$\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases} \left(\text{若正五邊形的邊長為} \left(\frac{x}{\varphi} + y \right) \text{形式，} m、n \text{代表} A、B \text{的個數} \right)$$
- 七、 我們發現所有正五邊形 $\frac{m}{n}$ 值都介於 $\frac{1}{2}$ 和 φ 之間，關係為 $\frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} < \varphi$ 。
- 八、 第 i 個質形 P_i ，邊長之 $\frac{1}{\varphi}$ 項、常數項係數分別為費波那契數列的第 $i-1, i$ 項，即
 $(x, y) = (F_{i-1}, F_i)$ ； A 、 B 的個數分別為盧卡斯數列之第 $2i, 2i-1$ 項，即 $(m, n) = (L_{2i}, L_{2i-1})$ 。
- 九、 因為質形之間本身具有 1 個 P_a 和 1 個 $P_{a+2k} \equiv L_{2k+1}$ 個 P_{a+k} 、 1 個 P_b 和 1 個 $P_{b+2h+1} \equiv L_{2h+1}$ 個 P_{b+h} 和 L_{2h+1} 個 P_{b+h+1} 等互相轉換的關係，致分解成質因形的方式並非唯一，因此在「標準分解式」中規定需以連續二質形來表達，方便紀錄及計算。
- 十、 第 i 組順式第 t 週期的正五邊形 $p = (k-1)^2 + 2(k-1)t$ ， $q = 5t^2 + 2(k-1)t$ ；第 i 組反式第 t 週期的正五邊形 $p = 5t^2 + 2(k-1)t$ ， $q = (k-1)^2 + 2(k-1)t$ 。

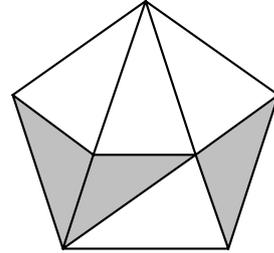
玖、展望

- 一、我想進一步探討相同邊長的正五邊形中，基本單元 A、B 的不同排列方式及排法之數量。
- 二、期望能藉前述探討的結果，將正五邊形的分解，進一步擴充成多對多的轉換，使「正五邊形的算術」臻於完備。

拾、參考資料

- 一、吳振奎 斐波那契數列 一版二刷 九章出版社 P.43~70 (2000)
- 二、吳映澄、黃靖琪、廖健琮 (2004) 圖形 DNA—正多邊形的疊套生成圖概論。第 44 屆高雄市中小學科展。高師附中。
- 三、謝夢寰、馬靖威 (2003) 初等代數鏡頭下的 Fibonacci Sequence。台灣 2003 國際科學展覽會。高雄市私立國光高級中學。
- 四、<http://members.cox.net/tessellations/index.html>。
- 五、<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fibFormula.html>。
- 六、THE PUZZLE OF PYTHAGORAS。

2007 ISEF / Mathematics
Research Paper



Endless Propagation

the arithmetic rules of regular pentagons

Albert Chiehyang Liu

Kaohsiung Municipal
Kaohsiung Senior High School
Taiwan

Contents

Abstract	i
Introduction	1
Materials and Methods	3
Results and Discussion	6
Conclusion	11
Future Works	12
Acknowledgements	13
References	14

Abstract

This study originated from a puzzle game in which people were asked to construct a regular pentagon from an unlimited supply of two kinds of golden triangles of fixed sizes: acute golden triangle A and obtuse golden triangle B. When completing such an exercise, it is natural to ask:

1. What sizes of regular pentagons are constructible?
2. Identify the irreducible pentagons in this construction: pentagons containing no sub-pieces which themselves can construct smaller pentagons.

Our main results are as follows:

1. We find that the side lengths of the constructible regular pentagons are exactly the integral linear combinations of 1 and the reciprocal of the golden ratio. We also proved that the numbers of A and B are expressible as quadratic forms of the coefficients.
2. The sides of the irreducible objects can be characterized by a weighted linear combination of two successive terms of Fibonacci numbers. We also established two equations between prime pentagons expressing multiplicities of the decomposition.
3. We establish the "prime factorization of the pentagons": every constructible regular pentagon can be decomposed into either one or two kinds of successive prime pentagons.

Finally, we show that the constructible pentagons may be classified according to the prime factorization and such a classification can be illustrated by an interesting planar pattern. A complete description of all prime factorizations can then be achieved from such patterns.

Key Words: Pentagon, Golden triangle, Fibonacci sequence, Lucas sequence

Introduction

1. Motivation

Our study originated from a puzzle game, "the Puzzle of Pythagoras" (Fig. 1), in which people are asked to construct regular pentagons of various sizes with acute and obtuse golden triangles of fixed sizes. We wished to investigate the number patterns resulting from the possible constructions.

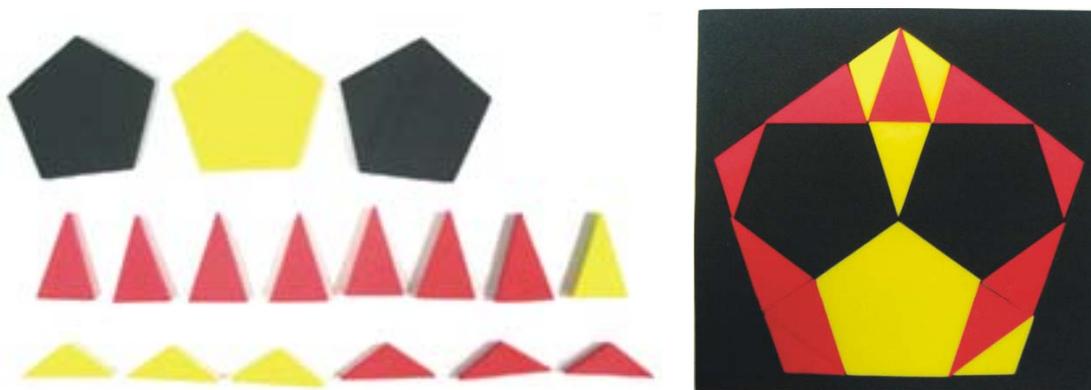


Fig. 1 The Puzzle of Pythagoras

2. Definitions and Notations

- 2-1. Golden triangles are isosceles triangles having the divine proportion as the ratio of their sides. There are two types of golden triangles: Type A: acute golden triangles with the hypotenuse to base ratio= ϕ (36° - 72° - 72° as interior angles) and type B: obtuse golden triangle with the hypotenuse to base ratio= $1/\phi$ (108° - 36° - 36° as interior angles).
- 2-2. Throughout this research, the side lengths of the golden triangles are fixed: the hypotenuse of A and the base of B were given the unit length, so the base of A and the hypotenuse of B have length $1/\phi$. A construction is said to be of the type (m,n) if m type A golden triangles and n type B golden triangles are used in the construction.

- 2-3. We defined some figures as being "equal in value" when their sum of m and sum of n were the same.

3. Goals

- 3-1. To study the relationship between the side lengths, the angles, and the areas, and to count the numbers of A's and B's in the decompositions.
- 3-2. To characterize the regular pentagons constructible with A's and B's.
- 3-3. To investigate the combinatorial properties of the regular pentagons.
- 3-4. To seek a general formula for the numbers of A's and B's.
- 3-5. To formulate the notion of a "prime" pentagon.
- 3-6. To seek an analogy of "prime factorization" for pentagons.

Materials and Methods

1. Equipments

- 1-1. The Puzzle of Pythagoras (right picture)
- 1-2. Hand made paper models.
- 1-3. PC, Digital camera, paper and pen.
- 1-4. Softwares: Microsoft Word, Microsoft Excel, GSP4.01, Microsoft Visual Basic2005, Mathematica5.2, Python25.

2. Propagation Methods:

2-1. 1st Propagation Method (Fig. 2-1):

Triangulate a regular pentagon into a construction form made up by A and B. And then replace every A by a magnification constructed by 2 As and 1 B, and every B by 1 A

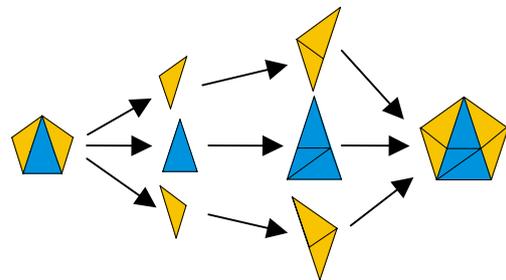


Fig. 2-1 1st Propagation Method

and 1 B. Finally, arrange these magnified As, Bs figure in accordance with the original align, and then this pentagon is magnified into φ times.

2-2. 2nd Propagation Method (Fig. 2-2):

Triangulate a regular pentagon into a construction form made up by A and B. And then replace every A by a magnification constructed by

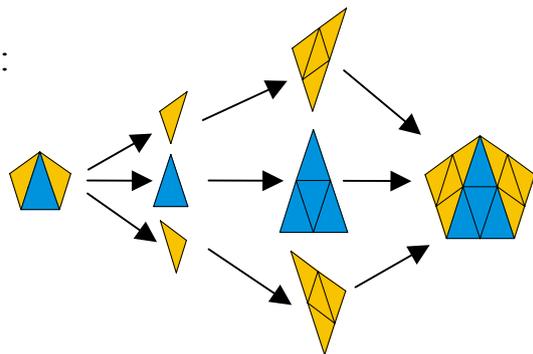


Fig. 2-2 2nd Propagation Method

k^2 As, and every B by k^2 Bs.

Finally, arrange these magnified As, Bs figure in accordance with the original align, and then this pentagon is magnified into k times.

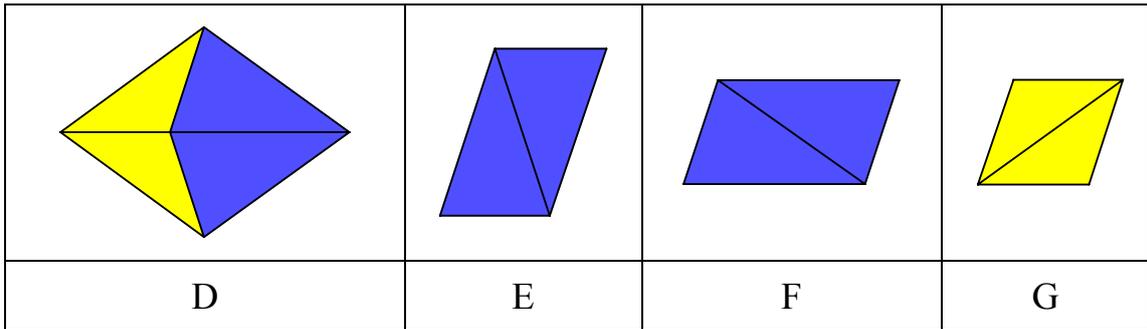


Fig. 2-3 Parallelogram pieces

2-3. 3rd Propagation Method (Fig. 2-4):

Attach 4 As, 1 Bs, 3y Ds, 3x Es, y Fs, x Gs to a constructed regular pentagon with side length of $\frac{x}{\varphi} + y$, and make its side length expand (into $\frac{x}{\varphi} + y + 1$)

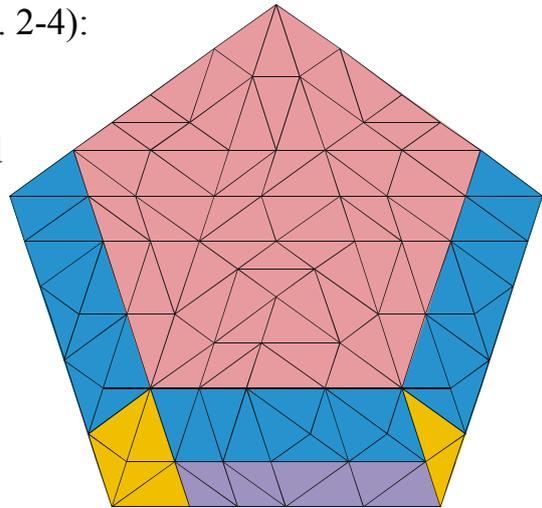


Fig. 2-4 3rd Propagation Method

2-4. 4th Propagation Method (Fig. 2-5):

Attach 1 As, 2 Bs, y Ds, x Es, 2y Fs, 2x Gs to a constructed regular pentagon with side length of $\frac{x}{\varphi} + y$, and make its side length expand (into $\frac{x+1}{\varphi} + y$).

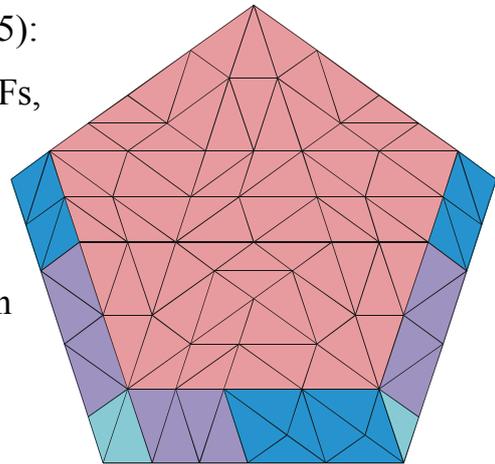


Fig. 2-5 4th Propagation Method

3. Propagation Formulae

3-1. By combining these four propagation methods, we discovered that the side lengths of the constructible regular pentagons are exactly of the form $\frac{x}{\varphi} + y$, when x, y are non-negative integers.

Such pentagons are here denoted by $Q(x, y)$.

3-2. Moreover, we discovered that the numbers of As and Bs, (m, n) , can be expressed by (x, y) , the formulae:
$$\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$$

3-3. Search for the range of the ratio of m and n :

Supposed that $k = \frac{m}{n}$. Since $\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$, it follows that the

quadratic equation $(2k - 1)x^2 + (2ky - 6y)x + (3ky^2 - 4y^2) = 0$ is solvable.

But this is the case if and only if

$$(2ky - 6y)^2 - 4(2k - 1)(3ky^2 - 4y^2) \geq 0, \text{ i.e..}$$

$$\text{Therefore, } \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq k \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi.$$

Since $x, y \geq 0, x + y > 0$, k attains its minimum value $\frac{1}{2}$ when $y = 0$.

And since m and n are natural numbers.

$$\text{Consequently, } \frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} < \varphi.$$

Results and Discussion

1. Exploration of Prime Pentagons

1-1. We calculated with the numbers of A and B, m and n. If a regular pentagon can be reassembled into several smaller regular pentagons, the numbers m and n will be equal to the sum of m and the sum of n of those smaller regular pentagons.

1-2. **Definition** We defined regular pentagons that cannot be reassembled into smaller regular pentagons as prime pentagons.

1-3. **Lemma 1.1** A regular pentagon with the ratio m/n larger than that of any smaller pentagon is a prime pentagon.

Proof: It's obvious that if the m/n of a regular pentagon is larger than that of any smaller pentagon (Fig. 3), it will be irreducible, because it contains too many As

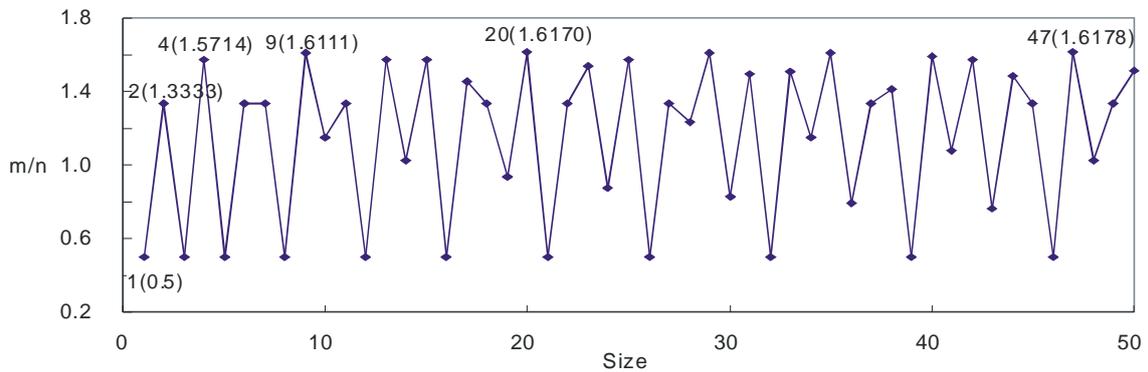


Fig. 3 Ratio m/n vs. size

1-4. After observing the prime pentagons on the chart, we discovered that their x and y are two successive terms of the Fibonacci sequence, and their m and n are two successive terms of the Lucas sequence. (Table 1.)

No.	1	2	4	9	20	47
(x,y)	(1,0)	(0,1)	(1,1)	(1,2)	(2,3)	(3,5)
(m,n)	(1,2)	(4,3)	(11,7)	(29,18)	(76,47)	(199,123)

Table 1. Properties of prime pentagons

- 1-5. **Lemma 1.2** The x and y of a pentagon are two adjacent Fibonacci numbers (F_{i-1}, F_i) if and only if the corresponding m and n are two adjacent Lucas numbers (L_{2i}, L_{2i-1})

Proof: Since $\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$, it follows that the m s and n s

here can form a recursive sequence: $\begin{cases} m_2 = m_1 + n_2 \\ n_2 = m_1 + n_1 \end{cases}$. And since

when $i=1 \Rightarrow m=1, n=2$, the result holds for every natural number i .

- 1-6. **Lemma 1.3** Regular pentagons having side lengths of the form

$$\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i \text{ are prime pentagons.}$$

Proof: Supposed that p and q are two successive terms of the Fibonacci sequence, $p, q \in \mathbb{Z}, 0 < p \leq F_{i-2}, 0 < q \leq F_{i-3}, n \geq 2$, We can prove that

$$\frac{(F_{i-1} - p)^2 + 6(F_{i-1} - p)(F_i - q) + 4(F_i - q)^2}{2(F_{i-1} - p)^2 + 2(F_{i-1} - p)(F_i - q) + 3(F_i - q)^2} < \frac{F_{i-1}^2 + 6F_{i-1}F_i + 4F_i^2}{2F_{i-1}^2 + 2F_{i-1}F_i + 3F_i^2}$$

This means that if a regular pentagon has a side length of $\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i$, its m/n is larger than those of all the smaller constructible pentagons.

It follows from **Lemma 1.1** that these regular pentagons are prime pentagons.

\Rightarrow We referred to the i th of them as P_i .

- 1-7. **Lemma 1.4** Every constructible regular pentagon can be reconstructed into two successive prime pentagons.

Proof: Consider the system of linear equations:

$$\begin{cases} L_{2i}p + L_{2i+2}q = m \\ L_{2i-1}p + L_{2i+1}q = n \end{cases}$$

This system of equations has solutions in p and q if and only if

$$\begin{vmatrix} L_{2i} & L_{2i+2} \\ L_{2i-1} & L_{2i+1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

In this case,
$$p = \frac{\begin{vmatrix} m & L_{2i+2} \\ n & L_{2i+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{2i} & L_{2i+2} \\ L_{2i-1} & L_{2i+1} \end{vmatrix}}, \quad q = \frac{\begin{vmatrix} L_{2i} & m \\ L_{2i-1} & n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_{2i} & L_{2i+2} \\ L_{2i-1} & L_{2i+1} \end{vmatrix}}$$

Therefore, p, q are integers if both $\begin{vmatrix} m & L_{2i+2} \\ n & L_{2i+1} \end{vmatrix}$ and $\begin{vmatrix} L_{2i} & m \\ L_{2i-1} & n \end{vmatrix}$ are

divisible by $\begin{vmatrix} L_{2i} & L_{2i+2} \\ L_{2i-1} & L_{2i+1} \end{vmatrix}$

Since, from the mathematical induction,

$$\begin{vmatrix} L_{r+1} & L_{r+3} \\ L_r & L_{r+2} \end{vmatrix} = -5(r \text{ is an odd number}) \quad \text{or} \quad 5(r \text{ is an even number}), \quad \text{it}$$

suffices to show that both $\begin{vmatrix} m & L_{2i+2} \\ n & L_{2i+1} \end{vmatrix}$ and $\begin{vmatrix} L_{2i} & m \\ L_{2i-1} & n \end{vmatrix}$ are multiples of 5.

Again, this follows from mathematical induction and the

relations:
$$\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$$

1-8. From the above, we can conclude that:

Theorem 1

1. A regular pentagon is a prime pentagon if and only if the ratio of m and n is larger than that of any smaller constructible regular pentagon.
2. The side length of the i th prime pentagon is of the form $F_{i-1}/\varphi + F_i$.
3. The number of A and B of the i th prime pentagon are L_{2i} and L_{2i-1} respectively.

1-9. From Theorem 1 and the mathematical induction:

Theorem 2 For P_i as the i th prime pentagon, L_i as the i th Lucas number:

1. $P_a \cup P_{a+2k}$ can be reassembled into L_{2k+1} pieces of P_{a+k} 's.
2. $P_b \cup P_{b+2h+1}$ can be reassembled into L_{2h+1} pieces of P_{b+h} 's and L_{2h+1} pieces of P_{b+h+1} 's.

2. Exploration of Prime Factorization of the Pentagons

2-1. Since prime pentagons were transformed among themselves, the factorizations may not be unique, so we defined the factorizations involving only one size of prime pentagons, or two successive sizes of prime pentagons (p pieces of P_{b+h} and q pieces of P_{b+h+1}) as the "prime factorization of the pentagons".

2-2. After observing the way pentagons may be reassembled into prime pentagons in prime factorization, we discovered an apparent regularity among the number of the two kinds of successive prime pentagons. We wrote a program with Visual Basic to calculate this and the results (Table 2) are shown below.

1st Orbit	p	0	3	8	15	24	35	48	63	80	...
	q	5	7	9	11	13	15	17	19	21	...
2nd Orbit	p	0	5	12	21	32	45	60	77	96	...
	q	20	24	28	32	36	40	44	48	52	...
3rd Orbit	p	0	7	16	27	40	55	72	91	112	...
	q	45	51	57	63	69	75	81	87	93	...
4th Orbit	p
	q

Table 2 Coefficients of prime factorization

2-3. We named the set of pentagons that can be reconstructed into the same two kinds of successive prime pentagons, P_i, P_{i+1} as the i th group, and there are two classes in each group, which every element's (p, q) is the opposite of those of the other class. We referred to the class which ps of its elements can form equal difference sequences as cis class, and the other one as trans class. In each classes, a set of elements that starts with $p = 0, q = 5t^2$ or $p = 5t^2, q = 0$ is called the t th orbit.

2-4. Because we can prove that every constructible pentagon with a ratio of x, y is between that of the i th and $i+2$ th prime pentagon all belongs to either the cis class of the i th group or

the trans class of the $i+1$ th group, all these "special" sides actually represents all the constructible pentagons except the similar figures in integral dilation of prime pentagons (Fig. 3, the term "integral dilation" is reduced to "dilation" in the chart).

2-5. With these "special" side lengths, two systems of integral parametric equations to express the ps and qs are formulated: $\begin{cases} p = (k-1)^2 + 2(k-1)t \\ q = 5t^2 + 2(k-1)t \end{cases}$, $\begin{cases} p = 5t^2 + 2(k-1)t \\ q = (k-1)^2 + 2(k-1)t \end{cases}$, for natural numbers k, t .

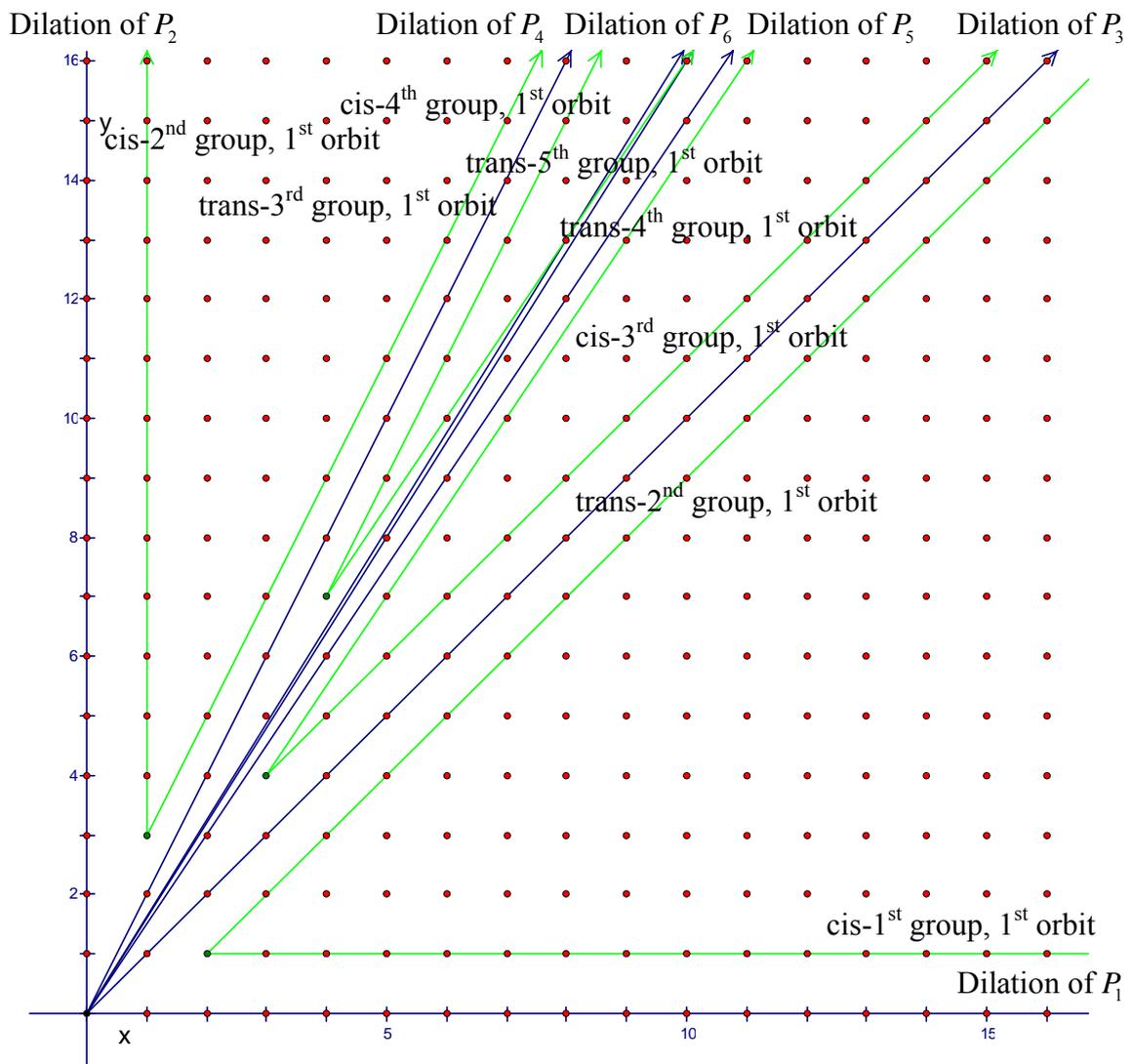


Fig. 4 Pentagons with side length $x/\varphi + y$

Conclusions

1. We have found four propagation methods to enlarge an existing constructible regular pentagon with side lengths a to a larger one with side lengths a' : $a' = \varphi a$, $a' = ka$, $a' = a + 1$, $a' = a + \frac{1}{\varphi}$.

2. The side lengths of the constructible regular pentagons are exactly the integral linear combinations of 1 and $\frac{1}{\varphi}$. The numbers m and n are given

$$\text{by } \begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}.$$

3. The ratio $\frac{m}{n}$ of every constructible pentagon lies between $\frac{1}{2}$ and φ ;

$$\frac{1}{2} \leq \frac{m}{n} < \varphi.$$

4. The i th prime pentagon P_i has side length $\frac{F_{i-1}}{\varphi} + F_i$, the number of As and Bs are L_{2i}, L_{2i-1} .

5. Since prime pentagons are transformed among themselves: 1 P_a and 1 P_{a+2k} can be reconstructed into $L_{2k+1} P_{a+k}$ s, 1 P_b and 1 P_{b+2h+1} can be reconstructed into $L_{2h+1} P_{b+h}$ s and P_{b+h+1} s., the reductive forms are non-unique. So we established the "prime factorization of the pentagons" as a reductive form expressed by two successive prime pentagons.

6. The ps and qs of the prime factorization are expressed by two integral

$$\text{systems of parametric equations: } \begin{cases} p = (k-1)^2 + 2(k-1)t \\ q = 5t^2 + 2(k-1)t \end{cases}, \text{ and}$$

$$\begin{cases} p = 5t^2 + 2(k-1)t \\ q = (k-1)^2 + 2(k-1)t \end{cases}, \text{ for nature numbers } k, t.$$

Future Works

1. To investigate the different arrangements and the number of permutations of As and Bs in a same regular pentagon.
2. To investigate the properties of the triangulated regular pentagon patterns.

Acknowledgements

With warm thanks to Prof. JC Chuan of NCHU for his superb guidance in Geometry and insightful editorial instructions in the presentation of the poster and the research paper; to Prof. SP Eu of NUK for his instructions in research development and structure; to Prof. HL Li of CHU for his instructions in the presentation of the poster and the computer display; to Prof. CK Law of NSYSU for his helpful suggestions and his guidance in the reference checking. Warm thanks also goes to my senior high school math teacher CN Sen for his valuable teaching and help; to my junior high school math teacher JC Ou for his enlightening teaching and lasting help; my junior high school science teacher IF Tseng for her teaching in scientific research methods and constant encouragement.

I would also like to express my appreciation to my school, Kaohsiung Senior High School, Taiwan; and my class teacher SJ Wang and my classmates; also the Dean of Teaching Affairs CD Sheu; and Principal SS Huang.

Finally I would like to say thanks to my parents CK and HF Liu, MD. PhD., my elder brother Jeremy and younger brother Benjamin for their love and invaluable support throughout my school years.

References

1. Wolfram MathWorld. Golden Triangle.
<http://mathworld.wolfram.com/GoldenTriangle.html>.
2. Tessellations. The Puzzle of Pythagoras.
<http://www.tessellations.com>.
3. Wu, Z.K. (2000). Fibonacci Sequence. (1st ed. 2nd print). Taipei: Chiuchang Company.
4. Clason, R.G. (1994). The family of golden triangle tile patterns. *The Mathematical Gazette*, 75, 130-148.
5. Ackermann, E.C. (1895). *The American Mathematical Monthly*, 2. 260-264.
6. Conway, J.H., & Coxeter, H.S.M. (1973). Triangulated Polygons and Frieze Patterns. *The Mathematical Gazette*, 57. 87-94, 175-183.
7. Hoehn, L. (1990). The Golden Ratio via Ptolemy's Theorem. *The Mathematical Gazette*, 74. 279-283.

評語

1. 這件作品的題材選自幾何分割、Lucas 級數、電腦模擬數論組合學等之交集，把握到數學遊戲的精華，實為難能可貴。
2. 可加強 Flash 之應用來展示生動的作圖過程。
3. 口頭表達雖然清楚，但有待加強。