臺灣二ＯＯ七年國際科學展覽會

科　　　　別　：數學

作 品 名 稱　：直角三角形生成關係的研究與發展

學校 / 作者　：高雄市立三民國民中學　　　　楊媛甯

作者簡介及照片

楊媛甯，在港都高雄長大。直到國中，遇到兩位很喜歡數學的老師，上過他們的課以後才發現：原來數學這麼有趣！於是在兩位老師的指導下，我開始研究數學。從此，數學變成為我生活的一部分。「這會不會影響課業？」有人問過。研究數學使我的思路更清晰、更有邏輯，對我來說是很大的幫助，也是讓我繼續向前的動力。

這一路走來，有時風平浪靜，有時崎嶇難行，但都使我成長不少。我真高興當初做了這個決定。

Research and Development of The Generative Relationship within The Right-angled Triangle

Abstract

$k\left(2\alpha\beta,\alpha^2-\beta^2,\alpha^2+\beta^2\right)$ is a popular formula in Pythagoras Theory, often proved in algebra approach among books. Nevertheless, in light of junior high students, the aforementioned algebra method is neither direct nor practical.

Hence, a different thinking method is derived from geometry perspective, using the straight line concept to reinterpret Pythagoras Theory and define the geometric meanings of α and β.

In the process of logical development, a useful correlation emerges: a rational number correlates with a straight-angled triangle, and two rational numbers correlate with Heron Triangle. This correlation can be applied to all kinds of geometrical diagrams to prove the correlated homogenous solution.

Ultimately, my interest lies in the diagram methods of Heron Triangle, Perfect Heron Polygon, and Super Perfect Heron Polygon in order to apply our developed correlations to solve the above mentioned problems.

直角三角形上生成關係的研究與推展

摘要

$k\left(2\alpha\beta,\alpha^2-\beta^2,\alpha^2+\beta^2\right)$是大家熟悉畢氏定理的通式解，且一般書籍的証明大都採用代數的手法證明。以國中生而言，上述的代數方對國中生來說不夠直接且較無推展的實用性。

因此幾何觀點出發發展另一種思考方式，利用角平線的性質給予畢氏定理比例解另一種全新的詮釋，並賦予比例解中的參數α、β在幾何的意義。

在推理的過程中，我們得到一個相當有用的對應關係：一個有理數對應到一個直角三角形、兩個有理數對應到海倫三角形，再將此對應關係運用到各種幾何圖形上面，即可證明出他們所對應的通式解。

最後我的興趣鎖定在海倫三角形、完美海倫多邊形與超完美海倫多邊形上的做圖方法上，善用我們所發展的對應關係，上述的問題皆可迎刃而解。

壹、研究動機

在上數學課時，老師介紹了兩種三角形：一種是勾股三角形（三邊長爲正整數）；另一種是 Heron（海倫）三角形（三邊長爲正整數，面積也爲正整數）。透過老師的敘述，得知勾股三角形的比例解很早就被人所求出，而其型態爲：$k\left(2\alpha\beta,\alpha^2-\beta^2,\alpha^2+\beta^2\right)$。然而對於有關海倫三角形的部分，在查閱有關書籍後：在蔡聰明教授所著的一本書「數學拾貝」p.199 有一段話：「海倫三角形的三個邊是否可用一般公式表達出來？這個問題，目前都沒有答案，也許是真的不存在一般公式。」我思索很久，突然有個念頭：

一、在文獻上解釋勾股三角形比例解都是以代數的手法出發，是否可拋棄傳統的包袱，以幾何的觀點切入，創造出另一片天？

二、勾股三角形是海倫三角形的特例，可否由勾股三角形的性質推展到海倫三角形，打破目前沒有答案的困境？

於是，在數學老師的指導下，運用了一些國中所學到的幾何性質，針對直角三角形獨創出一個有趣的幾何證法，並且希望能將此幾何證法，發展到多邊形與海倫多邊形等相關問題上，遂展開了這次的探索之旅。

貳、研究目的

一、如何運用一個子直角三角形的兩股比，建構出任何直角三角形的三邊比，並得到勾股三角形的比例解。

二、如何運用兩個子直角三角形的兩股比，建構出任何三角形的三邊比。

三、從一般三角形出發，發展出等差三角形、倍角三角形、海倫三角形。

四、如何運用多個子直角三角形的兩股比，建構出任何多邊形的邊長比，並探討出完美海倫多邊形的比例解。

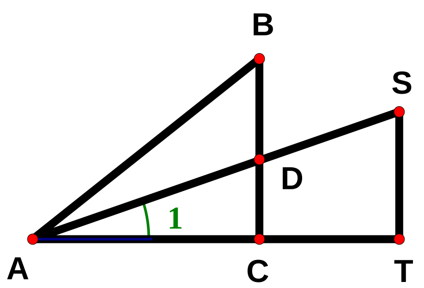
五、如何運用構造法，結合多個子直角三角形的兩股比，造出超完美海倫多邊形。

六、求出特殊海倫三角形（等差、倍角）、特殊完美海倫四邊形（梯形、平行四邊形、菱形、鳶形、長方形）的比例解。

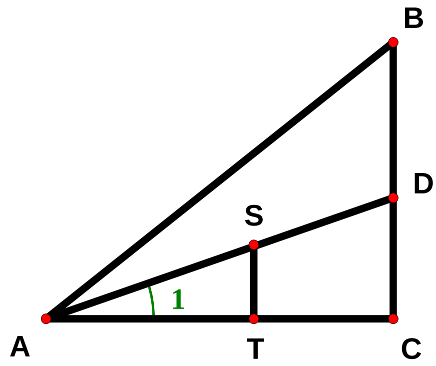
七、子直角三角形理論在 GSP 作圖上的應用。

參、定義名詞

一、子（母）三角形：給定直角ΔAST，$\angle T = 90°, \overline{AT} > \overline{ST}$，在$\overline{AT}$取一點C作$\angle CAB = 2\angle SAT$，且$\overline{BC} \perp \overline{AC}$。我將此$\Delta ABC$稱為$\Delta AST$之母直角三角形，而稱$\Delta AST$為$\Delta ABC$的子直角三角形（如圖一、二）。



(圖一)



(圖二)

二、勾股三角形：若直角三角形三邊長均為正整數，稱之。

三、海倫三角形：若三角形其三邊長為正整數，面積也為正整數，稱之。

四、完美等差 n 邊形：固定 n 邊形的某一頂點（$n \geq 4$），將 n 邊形切割成 n-2 個三角形，若此 n-2 個三角形中的每一個三角形其三邊長均為等差，稱之。

五、海倫 n 邊形：若一個 n 邊形其邊長、面積為正整數，稱之。

註：若一個 n 邊形經放大正整數倍後，能成為海倫 n 邊形，則此 n 邊形亦可稱之為海倫 n 邊形。

六、完美海倫 n 邊形：固定 n 邊形的某一頂點（$n \geq 4$），將 n 邊形切割成 n-2 個三角形，若此 n-2 個三角形中的每一個三角形其三邊長均為正整數，且面積也為正整數，稱之。

七、超完美海倫 n 邊形：若一個 n 邊形所有邊長、對角線及面積為正整數，稱之。

肆、研究過程

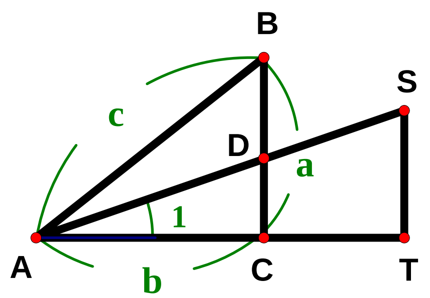
研究目的一：如何運用一個子直角三角形的兩股比，建構出任何直角三角形的三邊比，並得到勾股三角形的比例解。

為了探討這個問題，我定義了直角三角形中的「子、母關係」。如何運用這個定義，再配合角平分線的比例性質，得出任何直角三角形的三邊比？敘述如下：

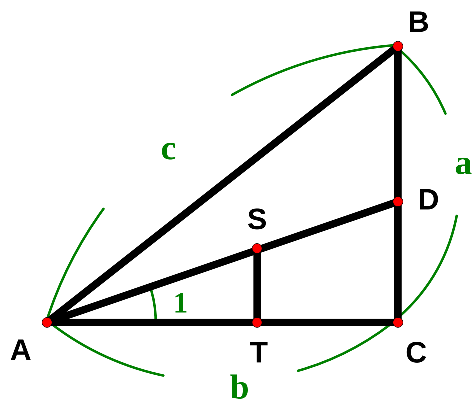
定理一：給定直角ΔAST，$\angle T=90°, \overline{AT}>\overline{ST}$，在$\overline{AT}$取一點C作$\angle CAB=2\angle SAT$，$\overline{BC}\perp\overline{AC}$且$\overline{AS}$交$\overline{BC}$於D（如圖三、圖四）。

令$\dfrac{\overline{ST}}{\overline{AT}}=r_1$（小於1），$\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$。

則$a:b:c=2r_1:1-r_1^2:1+r_1^2$。



(圖三)



(圖四)

證明：因$\overline{AD}$平分$\angle BAC$

$$所以\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}\Rightarrow\frac{\overline{CD}}{\overline{CD}+\overline{BD}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AC}+\overline{AB}}\Rightarrow\frac{\overline{CD}}{a}=\frac{b}{b+c}\Rightarrow\overline{CD}=\frac{ab}{b+c}$$

$$因\Delta AST\sim\Delta ADC\Rightarrow\frac{\overline{ST}}{\overline{AT}}=\frac{\overline{CD}}{\overline{AC}}\Rightarrow r_1=\frac{\frac{ab}{b+c}}{b}=\frac{a}{b+c}$$

$$因\Delta ABC為直角三角形\Rightarrow(c+b)(c-b)=a^2\Rightarrow\frac{a}{b+c}=\frac{c-b}{a}$$

$$故 r_1=\frac{a}{b+c}=\frac{c-b}{a}$$

因$\begin{cases} r_1 = \dfrac{a}{b+c} \Rightarrow \dfrac{1}{r_1} = \dfrac{b+c}{a} = \dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a} \\ r_1 = \dfrac{c-b}{a} \Rightarrow r_1 = \dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a} \end{cases}$

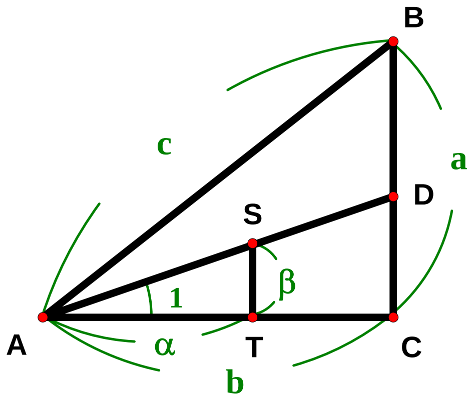
故$\dfrac{1}{r_1} - r_1 = \left(\dfrac{b}{a} + \dfrac{c}{a}\right) - \left(\dfrac{c}{a} - \dfrac{b}{a}\right) = \dfrac{2b}{a} \Rightarrow \dfrac{1-r_1{}^2}{r_1} = \dfrac{2b}{a} \Rightarrow \dfrac{1-r_1{}^2}{2r_1} = \dfrac{b}{a}$

設$a = 2r_1k, b = (1-r_1{}^2)k$代入$a^2 + b^2 = c^2$，得$c = (1+r_1{}^2)k$

故$a : b : c = 2r_1k : (1-r_1{}^2)k : (1+r_1{}^2)k = 2r_1 : 1-r_1{}^2 : 1+r_1{}^2$

定理二：給定一直角ΔABC，其兩股長分別爲a、b，斜邊長爲c。

則其所對應的子直角ΔAST兩股長的比值$r_1 = \dfrac{a}{b+c}$（如圖五），且利用此比值帶入**定理一**，可得到原來的ΔABC。



(圖五)

證明：由**定理一**證明過程中可得$r_1 = \dfrac{a}{b+c}$，利用$r_1 = \dfrac{a}{b+c}$與商高定理的關係帶入定理一，得直角三角形的三邊比爲

$$2 \times \frac{a}{b+c} : 1 - \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 : 1 + \left(\frac{a}{b+c}\right)^2 = 2a(b+c) : (b+c)^2 - a^2 : (b+c)^2 + a^2$$

$$= 2a(b+c) : b^2 + 2bc + c^2 - a^2 : b^2 + 2bc + c^2 + a^2$$

$$= 2a(b+c) : b^2 + 2bc + b^2 : c^2 + 2bc + c^2$$

$$= 2a(b+c) : 2b(b+c) : 2c(b+c) = a : b : c$$ 得證。

由**定理一**得知：子直角三角形兩股的比值r_1決定了母直角三角形三邊長的比例，把這些相同比例的直角三角形集合起來就形成一個母直角三角形家族，因此每一個r_1值就對應到一個母直角三角形家族。相反的，給定一個母直角三角形，由**定理二**，亦可找出其所對應子直角三角形的比值r_1，綜合**定理一**、**定理二**可得所有的直角三角形(可放大或縮小)，都可與子直角三角形的兩股比$r_1\ (0<r_1<1)$作二對一的對應關係，如$r_1=\dfrac{1}{2}$、$r_1=\dfrac{1}{3}$都對應到同一母直角三角形(3,4,5)。

現在將主題擺在勾股三角形（三邊長a,b,c為正整數）上，見圖五及**定理二**得知：給定任一勾股三角形，必存在一個大於 0 小於 1 的有理數r_1與之對應，也就是說，所有的勾股三角形(可放大或縮小)可與大於 0 小於 1 的有理數作二對一的對應關係。令有理數$r_1=\dfrac{\beta}{\alpha}$，$\alpha,\beta$為正整數，則$\alpha,\beta$結構出子直角三角形的兩股長。再利用此關係，改寫**定理一**的型態，即可得到勾股三角形（三邊長為正整數）的比例解。敘述如下：

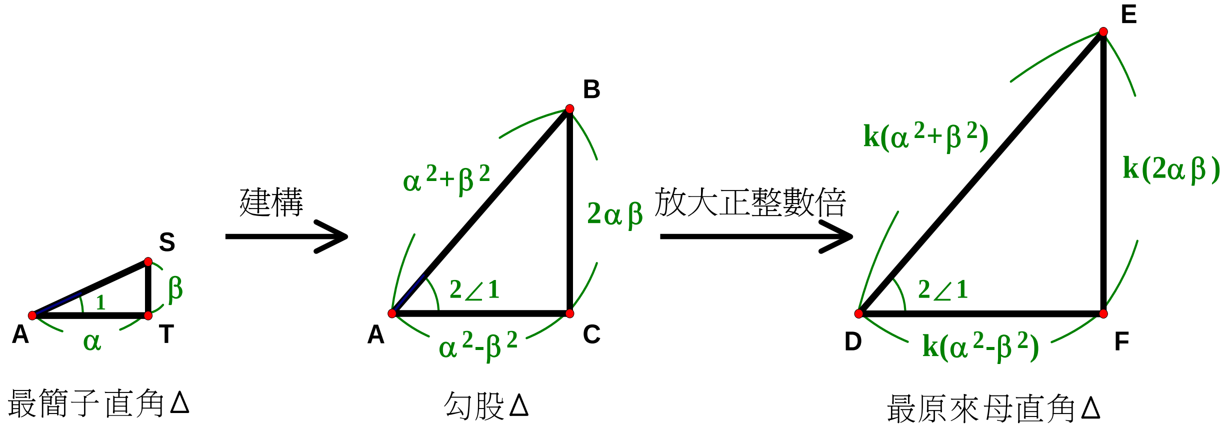
定理三：直角ΔABC，$\angle C=90^\circ$，令$r_1=\dfrac{\beta}{\alpha}$，其中$\alpha>\beta$，$(\alpha,\beta)=1$，$\alpha,\beta$為正整數，則$a:b:c=2\alpha\beta:\alpha^2-\beta^2:\alpha^2+\beta^2$。

證明：因$a:b:c=2r_1:1-r_1^2:1+r_1^2$，把$r_1=\dfrac{\beta}{\alpha}$代入上式得

$$a:b:c=2\frac{\beta}{\alpha}:1-\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2:1+\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=2\alpha\beta:\alpha^2-\beta^2:\alpha^2+\beta^2$$

將**定理三**結合放大與縮小之相似形的理論，即可得到下面的結論：

結論：勾股三角形的比例解為：$k\left(2\alpha\beta,\alpha^2-\beta^2,\alpha^2+\beta^2\right)$，其中$\alpha,\beta$就是子直角三角形的兩股長。（見圖六）

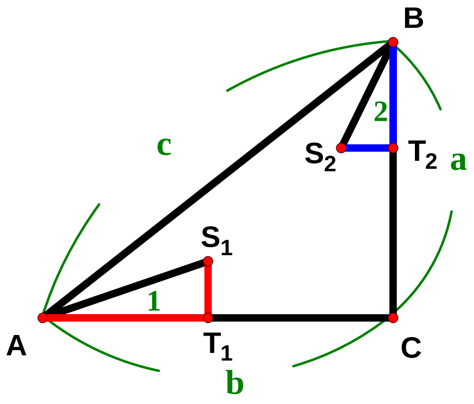


(圖六)

運用這一個結論，可取$(\alpha,\beta)=(2,1)$，$k=1$，就可得到直角三角形(3,4,5)；取$(\alpha,\beta)=(3,2)$，$k=2$，就可得到直角三角形(10,24,26)。其他數據如下：

母直角Δ / 子直角Δ	(3,4,5)	(6,8,10)	(9,12,15)	(5,12,13)	(10,24,26)	(15,36,39)
	r_1	r_1	r_1	r_1	r_1	r_1
底α	2	2	2	3	3	3
底β	1	1	1	2	2	2
k	1	2	3	1	2	3
母直角Δ / 子直角Δ	(7,24,25)	(14,48,50)	(21,72,75)	(8,15,17)	(16,30,34)	(24,45,51)
	r_1	r_1	r_1	r_1	r_1	r_1
底α	4	4	4	4	4	4
底β	3	3	3	1	1	1
k	1	2	3	1	2	3

再回歸到一般直角三角形，由於每一個直角三角形皆有兩個銳角，因此分別由這兩個銳角做其角平分線可分別得到其所對應的兩個子直角三角形（表示如圖七），利用這兩個子直角三角形的兩股比，可決定相同的母子角三角形。令對應頂點A的子直角三角形的兩股比值為$r_1=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{AT_1}$，對應頂點$B$的子直角三角形的兩股比值為$r_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{BT_2}$。針對$r_1,r_2$可決定同一個母直角三角形的特性，其$r_1,r_2$理應有所關係，而此關係為何呢，敘述如下：



(圖七)

令對應頂點 A 的子直角三角形的兩股比值爲 $r_1=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}$，對應頂點 B 的子直角三角形的兩股比值爲 $r_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}$。然而針對同一個母直角三角形所得到的比值 r_1, r_2，恰好滿足一個很漂亮的代數式，讓我心中敬存「數學之美」。將此定理敘述如下：

定理四：直角三角形 ABC，$\angle C=90^\circ$，r_1, r_2 的定義如上述，

則 $r_1r_2+r_1+r_2=1$。

證明：因 $r_1=\dfrac{a}{b+c}$，$r_2=\dfrac{b}{a+c}$

$$r_1\cdot r_2+r_1+r_2=\frac{a}{b+c}\times\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=\frac{ab}{(b+c)(a+c)}+\frac{a^2+ac+b^2+bc}{(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{ab}{(b+c)(a+c)}+\frac{ac+bc+c^2}{(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{ab+ac+bc+c^2}{(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{a(b+c)+c(b+c)}{(b+c)(a+c)}$$

$$=\frac{(b+c)(a+c)}{(b+c)(a+c)}$$

$$=1$$

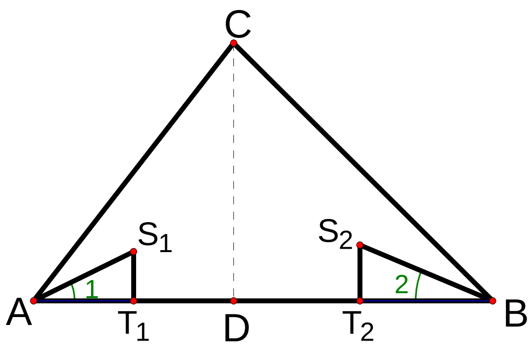
研究目的二：如何運用兩個子直角三角形的兩股比，建構出任何三角形的三邊比。

給予一個三角形，必可找到一條高，把三角形分成二個直角三角形。而每一個直角三角形都可找到一個子直角三角形來生成。因此三角形的邊長的比，即可運用兩子直角三角形之兩股長的比值表示之。

今在ΔABC中，由C做底邊上的高$\overline{CD}$，即可得到兩個直角三角形。取其子直角三角形，分別爲ΔAS_1T_1、ΔBS_2T_2。令其兩股比值爲$r_1=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}$、$r_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}$，其中$\angle A$，$\angle B$爲銳角，$\angle A=2\angle S_1AT_1$，$\angle B=2\angle S_2BT_2$，則三角形的三邊比即可用$r_1,r_2$表之，陳述如下：

定理五：分別由ΔAS_1T_1、ΔBS_2T_2這兩個子直角三角形所形成的ΔABC，其三邊比$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c=r_1(1+r_2^2):r_2(1+r_1^2):(r_1+r_2)(1-r_1r_2)$，

其中$r_1=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}$，$r_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}$，$0<r_1<1$，$0<r_2<1$（見圖八）。



(圖八)

證明：作$\overline{CD}\perp\overline{AB}$則$\Delta ACD$中$\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}=2r_1:1-r_1^2:1+r_1^2$，$\Delta BCD$中$\overline{CD}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_2:1-r_2^2:1+r_2^2$。

由$\begin{cases}\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}=2r_1:1-r_1^2:1+r_1^2\\ \overline{CD}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_2:1-r_2^2:1+r_2^2\end{cases}$ 利用連比

得$\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_1r_2:r_2(1-r_1^2):r_2(1+r_1^2):r_1(1-r_2^2):r_1(1+r_2^2)$

故$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AD}+\overline{BD}$

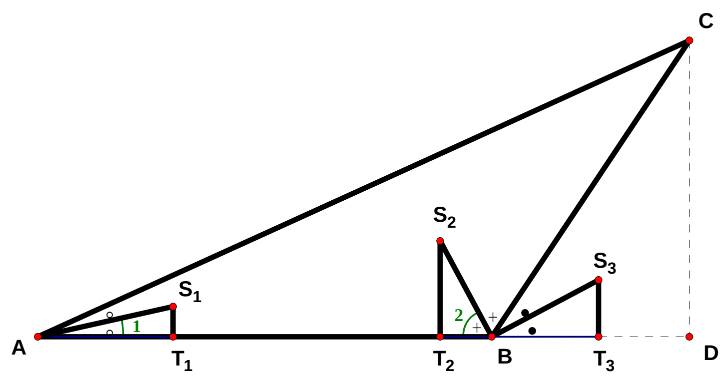
$$=r_1(1+r_2^2):r_2(1+r_1^2):r_2(1-r_1^2)+r_1(1-r_2^2)$$

$$=r_1(1+r_2^2):r_2(1+r_1^2):(r_1+r_2)(1-r_1r_2)$$

上面證明中所用到的兩個子直角三角形，是位在$\overline{AB}$上兩個銳角的夾角所建立的，由於任何三角形不管是鈍角三角形、直角三角形或銳角三角形均有兩個銳角，故此公式解具有一般性，因此任一個三角形（可放大或縮小），都可以找到一組數對(r_1, r_2)（$0<r_1<1, 0<r_2<1$）與此三角形作多對一的對應關係，更精確的來說，在考慮r_1, r_2可交換，與三角形中任取兩銳角可建構同一個母直角三角形的情況下，最多可產生六對一的對應情形，例如：

$(r_1, r_2)=(\frac{1}{2},\frac{2}{3}),(\frac{2}{3},\frac{4}{7}),(\frac{1}{2},\frac{4}{7}),(\frac{2}{3},\frac{1}{2}),(\frac{4}{7},\frac{2}{3}),(\frac{4}{7},\frac{1}{2})$共有六種組合對應同一個母直角三角形。

現在來個想法大轉變，若取一個鈍角三角形（高不在三角形內），而所取的兩個子直角三角形硬要在一銳角、一鈍角的角平分線上建立，則整個三角形邊長比要如何修正？（如圖九）：



(圖九)

由$\angle A$、$\angle B$的角平分線上出發，取兩個子直角三角形，分別為ΔAS_1T_1，ΔBS_2T_2，其兩股比值為$r_1=\frac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}$，$r_2=\frac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}$，且$\angle A$為銳角，$\angle B$為鈍角$(\angle A=2\angle S_1AT_1$，$\angle B=2\angle S_2BT_2)$，其中$r_1<1$，$r_2>1$。

現作$\overline{CD}\perp\overrightarrow{AB}$於$D$，則$\Delta ACD,\Delta BCD$為直角三角形，因$\Delta AS_1T_1$控制直角$\Delta ACD$，而$\Delta BS_2T_2$無法控制$\Delta BCD$，所以換個方向在$\angle CBA$的外角$\angle CBD$上作一條角平分線，在其上取一點$S_3$作直角$\Delta BS_3T_3$控制$\Delta BCD$，則因$\Delta BS_2T_2\sim\Delta S_3BT_3$得$\frac{\overline{S_3T_3}}{\overline{BT_3}}=\frac{\overline{BT_2}}{\overline{S_2T_2}}=\frac{1}{r_2}$。利用這個轉換得定理如下：

定理六：分別由ΔAS_1T_1，ΔBS_2T_2這兩個子直角三角形形成的ΔABC其三邊長比

爲$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$

其中$r_1=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}$，$r_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}$（如圖九），$0<r_1<1$，$r_2>1, 0<r_1r_2<1$。

證明：在ΔACD中，$\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}=2r_1:1-r_1{}^2:1+r_1{}^2$。

在ΔBCD中，$\overline{CD}:\overline{BD}:\overline{BC}=2\dfrac{1}{r_2}:1-\left(\dfrac{1}{r_2}\right)^2:1+\left(\dfrac{1}{r_2}\right)^2$

$$=2r_2:r_2{}^2-1:r_2{}^2+1$$

由$\begin{cases}\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}=2r_1:1-r_1{}^2:1+r_1{}^2\\ \overline{CD}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_2:r_2{}^2-1:r_2{}^2+1\end{cases}$ 利用連比

得$\overline{CD}:\overline{AD}:\overline{AC}:\overline{BD}:\overline{BC}=2r_1r_2:r_2\left(1-r_1{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):r_1\left(r_2{}^2-1\right):r_1\left(r_2{}^2+1\right)$

故$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=\overline{BC}:\overline{AC}:\left(\overline{AD}-\overline{BD}\right)$

$$=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):r_2\left(1-r_1{}^2\right)-r_1\left(r_2{}^2-1\right)$$

$$=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$$

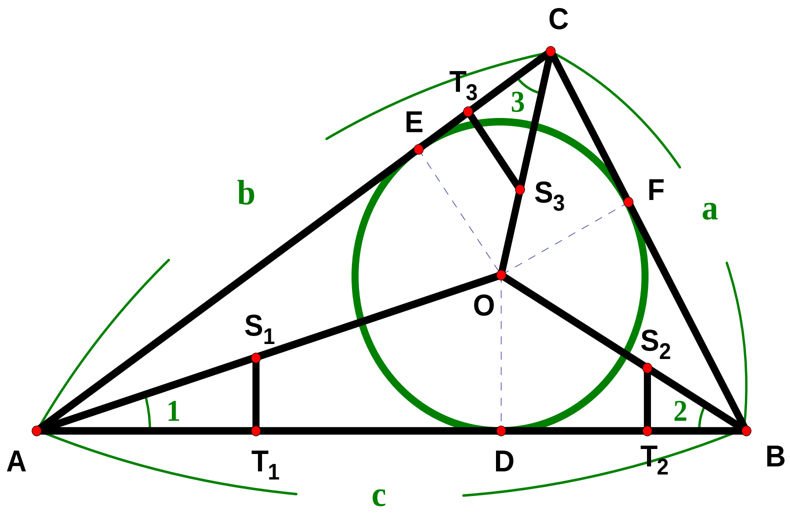
因**定理六**得到的結果和**定理五**相同，所以得到一個結論：

結論：給定任何ΔABC，其三邊長的比值可由三內角中任兩內角上的子直角三角形的兩股長的比值所決定。

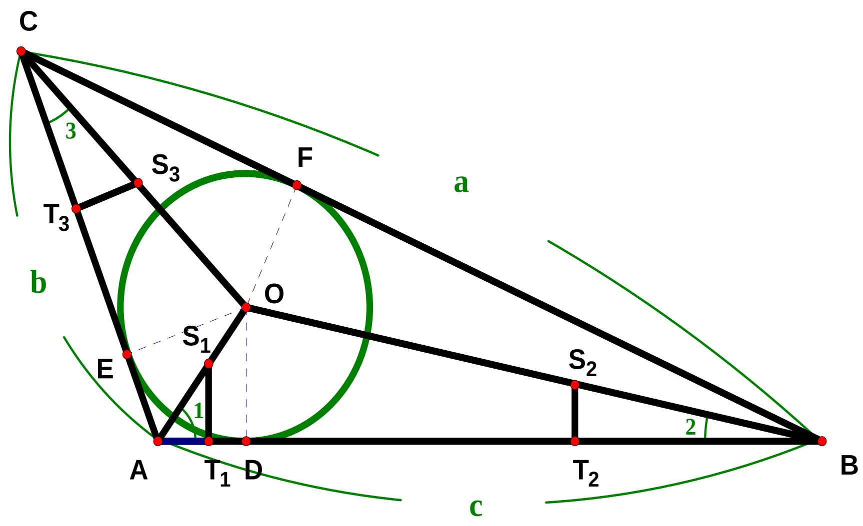
純粹就**定理五**來看，爲了迅速的確定**定理五**所作之三角形爲何種三角形時，第三個角所形成的子直角三角形兩股比值r_3將會是極大的關鍵，當$r_3>1$時爲鈍角三角形，$r_3=1$時爲直角三角形，$0<r_3<1$時爲銳角三角形。因此若能找出r_1, r_2, r_3之間的關係，就可以由r_1, r_2的值來決定r_3的值。

而此三數是否蘊含著某種關係呢？經過幾何與代數的推演得到一個漂亮的恆等式，證明詳述如下：

定理七：分別由ΔAS_1T_1與ΔBS_2T_2這兩個子直角三角形所形成的ΔABC，在C的角平分線上取一點S_3，作$\overline{S_3T_3}\perp\overline{AC}$。令直角$\Delta CS_3T_3$中$\dfrac{\overline{S_3T_3}}{\overline{CT_3}}=r_3$，則$r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=1$（如圖十、圖十一）。



(圖十)



(圖十一)

證明：（1）延長$\overline{AS_1},\overline{BS_2},\overline{CS_3}$，令其交點爲$O$，則$O$爲$\Delta ABC$的內心。

（2）作ΔABC的內切圓，其三個切線分別爲D,E,F，則$r_1=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{AD}}$，

同理$r_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}=\dfrac{\overline{OD}}{\overline{BD}}$，$r_3=\dfrac{\overline{S_3T_3}}{\overline{CT_3}}=\dfrac{\overline{OE}}{\overline{CE}}$。

（3）令$S=\frac{1}{2}(a+b+c)$，因$\overline{OD}=\frac{2\Delta ABC}{2S}=\frac{\Delta ABC}{S}$, $\overline{AD}=S-a$ ，

故$r_1=\frac{\overline{OD}}{\overline{AD}}=\frac{\frac{\Delta ABC}{S}}{S-a}=\frac{\Delta ABC}{S(S-a)}$ ，同理$r_2=\frac{\Delta ABC}{S(S-b)}$, $r_3=\frac{\Delta ABC}{S(S-c)}$ 。

（4）$r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3$

$$=\frac{\Delta ABC}{S(S-a)}\times\frac{\Delta ABC}{S(S-b)}+\frac{\Delta ABC}{S(S-b)}\times\frac{\Delta ABC}{S(S-c)}+\frac{\Delta ABC}{S(S-a)}\times\frac{\Delta ABC}{S(S-c)}$$

$$=\frac{\Delta ABC^2}{S^2}\left(\frac{1}{(S-a)(S-b)}+\frac{1}{(S-b)(S-c)}+\frac{1}{(S-a)(S-c)}\right)$$

$$=\frac{\Delta ABC^2}{S^2}\times\frac{(S-c)+(S-a)+(S-b)}{(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=\frac{\Delta ABC^2}{S^2}\times\frac{3S-2S}{(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=\frac{\Delta ABC^2}{S^2}\times\frac{S}{(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=\Delta ABC^2\times\frac{1}{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=\Delta ABC^2\times\frac{1}{\Delta ABC^2}\quad=1$$ 故得證。

討論：①若給予一個ΔABC ，由**定理七**知$r_3=\frac{1-r_1r_2}{r_1+r_2}$ ，因$r_3>0$ ，從而得到：以$\angle A,\angle B$形成ΔABC時，必然要符合$0<r_1r_2<1$這個條件。此時$\angle A,\angle B$可能同時為兩銳角或一銳角一鈍角。

②在**定理五**中，由於$\begin{cases}0<r_1<1\\0<r_2<1\end{cases}$，則$0<r_1r_2<1$符合形成$\Delta ABC$的條件。

③在**定理六**中，$\begin{cases}0<r_1<1\\r_2>1\end{cases}$，因此需適當選取$r_1,r_2$ ，使$0<r_1r_2<1$ ，才能符合形成ΔABC的條件。

若ΔABC的三邊比要以r_1, r_2, r_3表之，則**定理五**可轉換如下：

定理八：已知r_1, r_2, r_3，則ΔABC之三邊比為

$$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c=1-r_2r_3:1-r_1r_3:1-r_1r_2$$ 。

證明：由**定理七**$r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=1$

得$r_1=\dfrac{1-r_2r_3}{r_2+r_3}$，$r_2=\dfrac{1-r_1r_3}{r_1+r_3}$，$r_3=\dfrac{1-r_1r_2}{r_1+r_2}$ 。

再由**定理五**$a:b:c=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$

故
$$a:b:c=\frac{r_1\left(1+r_2{}^2\right)}{r_1+r_2}:\frac{r_2\left(1+r_1{}^2\right)}{r_1+r_2}:\left(1-r_1r_2\right)$$

$$=\frac{r_1+r_1r_2{}^2}{r_1+r_2}:\frac{r_2+r_2r_1{}^2}{r_1+r_2}:\left(1-r_1r_2\right)$$

$$=\frac{r_1+r_2+r_1r_2{}^2-r_2}{r_1+r_2}:\frac{r_1+r_2+r_1{}^2r_2-r_1}{r_1+r_2}:\left(1-r_1r_2\right)$$

$$=1+\frac{r_2\left(r_1r_2-1\right)}{r_1+r_2}:1+\frac{r_1\left(r_1r_2-1\right)}{r_1+r_2}:\left(1-r_1r_2\right)$$

$$=1-\frac{r_2\left(1-r_1r_2\right)}{r_1+r_2}:1-\frac{r_1\left(1-r_1r_2\right)}{r_1+r_2}:\left(1-r_1r_2\right) \qquad 【\because r_3=\frac{1-r_1r_2}{r_1+r_2}】$$

$$=\left(1-r_2r_3\right):\left(1-r_1r_3\right):\left(1-r_1r_2\right)$$

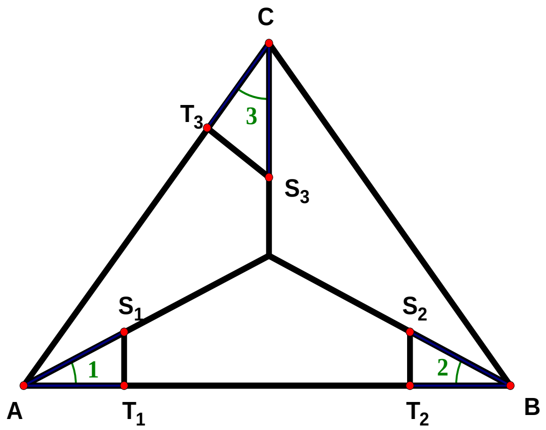
由上面的探討中，我利用r_1, r_2, r_3可形成任一三角形的三邊比，依邊長可將其分類為正三角形、等腰三角形或不等邊三角形。依內角角度則可分類為銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形。因此如果要得到這些三角形的三邊比，需更精確的選取r_1, r_2, r_3之間的關係，才可判斷出三角形的種類，底下將r_1, r_2, r_3之間的關係整理如下：

定理九：已知r_1,r_2,r_3（見圖十二）。

（1）若$r_1=r_2=r_3$，則$r_1=r_2=r_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$，且$\Delta ABC$爲正三角形。

（2）若$r_1=r_2$或$r_2=r_3$或$r_1=r_3$則ΔABC爲等腰三角形。

（3）若$r_1\neq r_2\neq r_3$則ΔABC爲不等邊三角形。



$$r_1=\frac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}$$

$$r_2=\frac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}$$

$$r_3=\frac{\overline{S_3T_3}}{\overline{CT_3}}$$

(圖十二)

證明：（1）因$r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=1$，又$r_1=r_2=r_3$，所以$3r_1^{\ 2}=3r_2^{\ 2}=3r_3^{\ 2}=1$

得$r_1=r_2=r_3=\frac{1}{\sqrt{3}}$，代入**定理八**知$a:b:c=1:1:1$

即ΔABC爲正三角形。

（2）若$r_1=r_2$，代入**定理八**得$a=b$，故ΔABC爲等腰三角形。

其他情況$r_2=r_3$或$r_1=r_3$也是如此。

（3）若$r_1\neq r_2\neq r_3$，代入**定理八**得$a\neq b\neq c$，故ΔABC爲不等邊三角形。

定理十：已知r_1,r_2,r_3

（1）若$r_1<1,\ r_2<1,\ r_3<1$，則ΔABC爲銳角三角形。

（2）若$r_1=1$或$r_2=1$或$r_3=1$，則ΔABC爲直角三角形。

（3）若$r_1>1$或$r_2>1$或$r_3>1$，則ΔABC爲鈍角三角形。

證明：（1）若$r_1<1,\ r_2<1,\ r_3<1$

則$\angle S_1AT_1<45°$，$\angle S_2BT_2<45°$，$\angle S_3CT_3<45°$

又$\angle A=2\angle S_1AT_1$，$\angle B=2\angle S_2BT_2$，$\angle C=2\angle S_3CT_3$

故$\angle A<90°$，$\angle B<90°$，$\angle C<90°$

即ΔABC爲銳角三角形。

（2）若$r_1=1$，則$\angle S_1AT_1=45°$

又$\angle A=2\angle S_1AT_1$，則$\angle A=90°$，故ΔABC爲直角三角形。

其他情況$r_2=1$或$r_3=1$也是如此。

（3）若$r_1>1$，則$\angle S_1AT_1>45°$

又$\angle A=2\angle S_1AT_1$，則$\angle A>90°$

故ΔABC爲鈍角三角形。

其他情況$r_2>1$或$r_3>1$也是如此。

研究目的三：從一般三角形出發，發展出等差三角形、倍角三角形、海倫三角形。

在既有的子直角三角形理論下，將r_1，r_2，r_3的關係進一步擴展，孕育出三種特殊的三角形的作圖方法。

第一種是三邊爲等差的三角形。

第二種是三角形三內角中有兩內角的比爲$1:n$，與有兩內角的比爲$m:n$之兩種情形，其中m、n爲正整數。

第三種是海倫三角形。

下面針對這三種特殊的三角形分別討論：

1.如何運用兩個子直角三角形，建構出一個等差三角形：

定理十一：當ΔABC滿足$r_1r_2=\dfrac{1}{3}$，則ΔABC爲三邊長爲等差的三角形，其中$\overline{AB}$爲等差中項，$\angle A,\angle B$可爲兩銳角或一銳角一鈍角。

證明：在ΔABC中，取$r_1r_2=\dfrac{1}{3}$時

$\because r_1r_2=\dfrac{1}{3}$，$\therefore 1=3r_1r_2$（等式兩邊同乘$r_1+r_2$）得

$r_1+r_2=3r_1r_2(r_1+r_2)\Rightarrow r_1+r_2=3r_1{}^2r_2+3r_1r_2{}^2\cdots\cdots\cdots$①

（①式兩邊同時加上r_1+r_2）得

$2r_1+2r_2=r_1+r_2+3r_1^2r_2+3r_1r_2^2$（移項）得

$2r_1+2r_2-2r_1^2r_2-2r_1r_2^2=r_1+r_2+r_1^2r_2+r_1r_2^2$（分組提公因式）得

$2(r_1+r_2)-2r_1r_2(r_1+r_2)=r_1(1+r_2^2)+r_2(1+r_1^2)$

即$2(r_1+r_2)(1-r_1r_2)=r_1(1+r_2^2)+r_2(1+r_1^2)$

利用**定理五**、**定理六**即可得：$2c=a+b$。

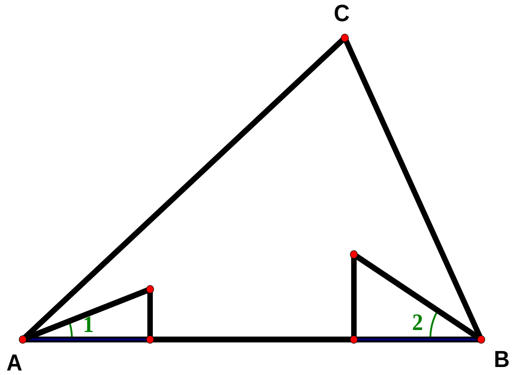
討論：①在ΔABC中，當$\overline{BC}$為等差中項時，便可以$\angle B$與$\angle C$上的兩的子直角三角形的兩股比r_2,r_3，建構出原來的ΔABC，且$r_2r_3=\frac{1}{3}$。同理，以$\overline{AC}$為等差中項時，r_1與r_3也會得到$r_1r_3=\frac{1}{3}$。

②因此，以$r_1r_2=\frac{1}{3}$時，不失一般性，可得到所有的等差三角形。

2.如何運用二個子直角三角形，建構出一角為θ，另一角為$n\theta$的倍角三角形：

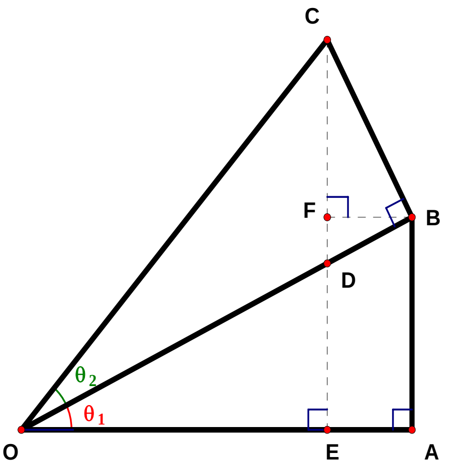
我的想法是若二個子直角三角形其兩股比為r_1,r_2，只要能使$\angle 2=n\angle 1$，則在ΔABC中，必然會使得$\angle B=n\angle A$，其中$\angle 1=\frac{\angle A}{2},\angle 2=\frac{\angle B}{2}$（如圖十三）。

那麼要如何使$\angle 2=n\angle 1$，請看下面的定理：



(圖十三)

定理十二：已知θ_1,θ_2所形成的直角三角形如圖十四，其中$\angle OAB$與$\angle OBC$為$90°$，求證：$r_{\theta_1+\theta_2}=\dfrac{r_{\theta_1}+r_{\theta_2}}{1-r_{\theta_1}r_{\theta_2}}$



(圖十四)

證明：過 C 作$\overline{CE}$垂直$\overline{OA}$於 E，$\overline{BF}$垂直$\overline{CE}$於 F，

$$\text{則}\ r_{\theta_1+\theta_2}=\frac{\overline{CE}}{\overline{OE}}=\frac{\overline{EF}+\overline{CF}}{\overline{OA}-\overline{AE}}=\frac{\overline{AB}+\overline{CF}}{\overline{OA}-\overline{BF}}=\frac{\overline{AB}+\dfrac{\overline{CF}}{\overline{BC}}\times\overline{BC}}{\overline{OA}-\dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}}\times\overline{BC}}=\frac{\overline{AB}+\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\times\overline{BC}}{\overline{OA}-\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OB}}\times\overline{BC}}$$

$$=\frac{\overline{OB}\times\overline{AB}+\overline{OA}\times\overline{BC}}{\overline{OA}\times\overline{OB}-\overline{AB}\times\overline{BC}}=\frac{\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}+\dfrac{\overline{BC}}{\overline{OB}}}{1-\dfrac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\times\dfrac{\overline{BC}}{\overline{OB}}}=\frac{r_{\theta_1}+r_{\theta_2}}{1-r_{\theta_1}r_{\theta_2}}$$

討論：①當$\theta_1=\theta_2=\angle 1$，我們可以得到$r_{2*1}=\dfrac{2r_1}{1-r_1{}^2}$

②當$\theta_1=2\angle 1,\theta_2=\angle 1$，我們可以得到$r_{3*1}=\dfrac{r_{2*1}r_1}{1-r_{2*1}r_1}$

依此可推得$r_{n*1}=\dfrac{r_{(n-1)*1}r_1}{1-r_{(n-1)*1}r_1}$，其中$r_{n*1}$代表由$n$倍$\angle 1$所形成之直角三角形兩股比值。

③由結果得知，若$0°<\theta_1+\theta_2<90°$，則$r_{\theta_1+\theta_2}>0$此與$0<r_{\theta_1}r_{\theta_2}<1$同義，這也就呼應了**定理五**、**定理六**$r_1,r_2$所做之限制。

有了上述的定理，若要使得ΔABC中，$\angle B = n\angle A$，則依下列步驟進行：

①先求得$\angle 1$這個子直角三角形的r_1

②依**定理十二**再求得$2\angle 1$的子直角三角形的$r_{2*1} = \dfrac{2r_1}{1-{r_1}^2}$

③依**定理十二**再求得$3\angle 1$的子直角三角形的$r_{3*1} = \dfrac{r_{2*1}r_1}{1-r_{2*1}r_1}$

④依此進行下去最後求得$n\angle 1$的子直角三角形的$r_{n*1} = \dfrac{r_{(n-1)*1}r_1}{1-r_{(n-1)*1}r_1}$

有了上述四個步驟，令$r_2 = r_{n*1}$，則所做出來的ΔABC中，$\angle B$一定等於$n\angle A$（為了要使ΔABC有意義，此處的$\angle 1, \angle 2$一定要符合$0 < r_1 r_2 < 1$）。

3.如何用兩個子直角三角形建構出兩內角比為$m:n$的倍角三角形：

仿 2.若要使得ΔABC中兩內角比為$m:n$，則可先任取一角度θ，且θ角所形成之兩股比值為r_θ，令$\angle 1 = m\theta, \angle 2 = n\theta$，再取$r_1 = r_{m*\theta}, r_2 = r_{n*\theta}$，其中$\angle 1 = \dfrac{1}{2}\angle A, \angle 2 = \dfrac{1}{2}\angle B$，且$\theta, r_\theta$為一已知數，則所做出來的$\Delta ABC$必符合所求。

4.如何用兩個子直角三角形建構出海倫三角形：

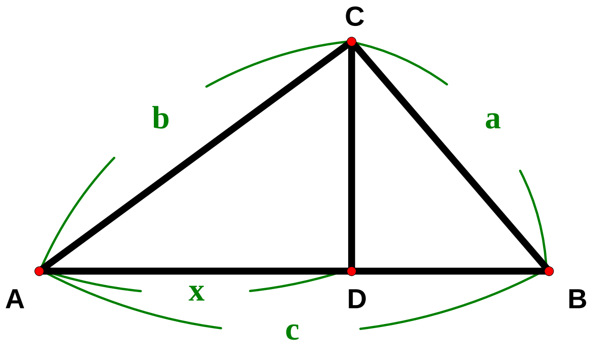
針對這個主題，必須先知道海倫三角形的幾何性質：「海倫三角形的高把海倫三角形分為兩個有理數邊的直角三角形」證明如下：

定理十三：已知ΔABC為海倫三角形，$\angle A, \angle B$為銳角，$\overline{CD}$為$\overline{AB}$邊上的高。則ΔACD與ΔBCD兩個直角三角形的邊長為有理數。

證明：已知ΔABC為海倫三角形（如圖十五）：

①因$\overline{CD} = \dfrac{2\Delta ABC}{\overline{AB}}$，又$\Delta ABC$為正整數，$\overline{AB}$為正整數，所以$\overline{CD}$為有理數。

②令$\overline{AD}=x$，則$b^2-x^2=a^2-(c-x)^2$化簡得$x=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2c}$，所以$\overline{AD}$爲有理數，故$\begin{cases}\Delta ACD\text{三邊長爲有理數}\\ \Delta BCD\text{三邊長爲有理數}\end{cases}$。



(圖十五)

既然海倫三角形它的任一高把它分成兩個邊長爲有理數的直角三角形，而每一個有理數直角三角形可由兩股長比值爲有理數的子直角三角形決定。因此在**定理五**中取r_1,r_2爲有理數，則r_1,r_2所形成的三角形必爲海倫三角形，其三邊比可寫成如下：

定理十四：分別由ΔAS_1T_1與ΔBS_2T_2這兩個子直角三角形所形成的海倫三角形ΔABC其三邊比爲：

$$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c$$
$$=\alpha_1\beta_1(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2):\alpha_2\beta_2(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2):(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1)(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2)$$

其中$r_1=\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{\overline{AT_1}}$，$r_2=\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{BT_2}}$且$\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$爲正整數，

$\beta_1<\alpha_1,\beta_2<\alpha_2,(\alpha_1,\beta_1)=1,(\alpha_2,\beta_2)=1$。

證明：由**定理五**得知

$$\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=a:b:c=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)\ ,$$

今把 $r_1=\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$，$r_2=\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}$ 代入上式得到

$$\begin{aligned}\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}&=a:b:c\\&=\frac{\beta_1}{\alpha_1}\left(1+\frac{\beta_2{}^2}{\alpha_2{}^2}\right):\frac{\beta_2}{\alpha_2}\left(1+\frac{\beta_1{}^2}{\alpha_1{}^2}\right):\left(\frac{\beta_1}{\alpha_1}+\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)\left(1-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\times\frac{\beta_2}{\alpha_2}\right)\\&=\frac{\beta_1}{\alpha_1}\times\frac{\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2}{\alpha_2{}^2}:\frac{\beta_2}{\alpha_2}\times\frac{\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2}{\alpha_1{}^2}:\frac{\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2}\times\frac{\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2}\\&=\alpha_1\beta_1\left(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2\right):\alpha_2\beta_2\left(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2\right):\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)\left(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\right)\end{aligned}$$

故得證。

討論：

一、 當我們取 $\alpha_1=1$ 、 $\beta_1=1$ 時，簡化定理十四即可得到勾股三角形的比 例解型態

$$\begin{aligned}\overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}&=\alpha_1\beta_1\left(\alpha_2{}^2+\beta_2{}^2\right):\alpha_2\beta_2\left(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2\right):\left(\alpha_1\beta_2+\alpha_2\beta_1\right)\left(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\right)\\&=\left(\alpha_1^2+\beta_1^2\right):2\alpha_1\beta_1:\left(\alpha_1^2-\beta_1^2\right)\end{aligned}$$

二、爲了讓定理十四公式型態看起來較爲簡潔，我們在的推衍過程，做了在比例式上同乘 $\alpha_1^2\alpha_2^2$，無形中將三角形的邊長與面積放大了。利用圖形與放大或縮小，所得的圖形皆與原圖形相似。因此我們可以取「相似圖形中的『一個圖』來代表這一整個族群」。

三、以上述觀念爲基礎，配合「一組有理數對 $\left(\dfrac{\beta_1}{\alpha_1},\dfrac{\beta_2}{\alpha_2}\right)$，對應到一個海倫三角形」，可看出定理十四即爲海倫三角形的一種『比例通式解』的型態，透過放大或縮小即可的出同一族群的海倫三角形。

下面列舉幾個實例，並表列如下：

α_1	2	3	3	3	3	3
β_1	1	1	2	1	2	2
α_2	2	2	2	3	3	3
β_2	1	1	1	1	1	2
三邊長 (化簡)	10,10,12 (5,5,6)	15,20,25 (3,4,5)	30,26,28 (15,13,14)	30,30,48 (5,5,8)	60,39,63 (20,13,21)	78,78,60 (13,13,10)
面積	48	150	336	432	1134	2160

上述例子中的三邊長並不互質，因此若要找到三邊爲互值的海倫三角形也只有用實際的數字帶入再作約分了。

研究目的四：如何運用多個子直角三角形的兩股比，建構出任何多邊形的邊長比，並探討出完美海倫多邊形的比例解。

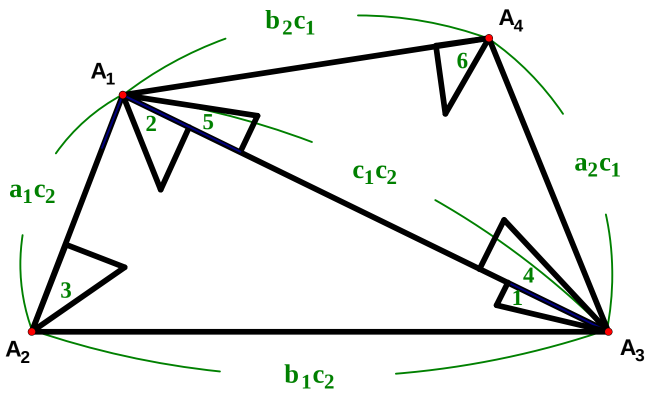
1.四邊形的探討：

定理十五：任取四邊形的一對角線把四邊形分成兩個三角形（如圖十六），建構這兩個三角形的四個子直角三角形的兩股比分別爲 r_1, r_2, r_4, r_5。則：$\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_3A_4} : \overline{A_1A_4}$

$$= r_1(1+r_2^{\,2})(r_5+r_4)(1-r_5r_4) : r_2(1+r_1^{\,2})(r_5+r_4)(1-r_5r_4)$$
$$: r_5(1+r_4^{\,2})(r_1+r_2)(1-r_1r_2) : r_4(1+r_5^{\,2})(r_1+r_2)(1-r_1r_2) \quad \cdots\cdots\cdots ①$$

其中 $0<r_1\times r_2<1,\ 0<r_5\times r_4<1,\ 0<r_1\times r_4<1,\ 0<r_2\times r_5<1$

且 $r_1>0,\ r_2>0,\ r_4>0,\ r_5>0$



(圖十六)

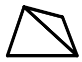
證明：令$\begin{cases}\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_1A_3}=a_1:b_1:c_1\\ \overline{A_3A_4}:\overline{A_1A_4}:\overline{A_1A_3}=a_2:b_2:c_2\end{cases}$利用連比得 $\begin{cases}a_1c_2:b_1c_2:c_1c_2\\ a_2c_1:b_2c_1:c_1c_2\end{cases}$

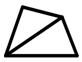
同時依**定理五、六**

$$a_1:b_1:c_1=r_1\left(1+r_2{}^2\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right):\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$$
$$a_2:b_2:c_2=r_5\left(1+r_4{}^2\right):r_4\left(1+r_5{}^2\right):\left(r_5+r_4\right)\left(1-r_5r_4\right)$$

則$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}:\overline{A_1A_4}=a_1c_2:b_1c_2:a_2c_1:b_2c_1$

$$=r_1\left(1+r_2{}^2\right)\left(r_5+r_4\right)\left(1-r_5r_4\right):r_2\left(1+r_1{}^2\right)\left(r_5+r_4\right)\left(1-r_5r_4\right)$$
$$:r_5\left(1+r_4{}^2\right)\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right):r_4\left(1+r_5{}^2\right)\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$$

討論：由於四邊形固定一頂點切割此平行四邊形有二種切割方式 

，再加上$(r_1,r_2),(r_5,r_4)$可交換的情況下，任一個四邊形最多有四

組(r_1,r_2,r_5,r_4)與之對應。

底下將四邊形依角度與邊長關係可分類爲梯形、等腰梯形、平行四邊形、菱形、鳶形、長方形。我將探討r_1,r_2,r_5,r_4在何種條件下，才能符合上述分類。

定理十六：已知r_1,r_2,r_5,r_4（見圖十七）

（1）若$r_1=r_5$或$r_2=r_4$，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$爲梯形。

（2）若$r_1=r_5$且$r_4=\dfrac{r_3-r_1}{1+r_1r_3}$，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$爲等腰梯形，其中

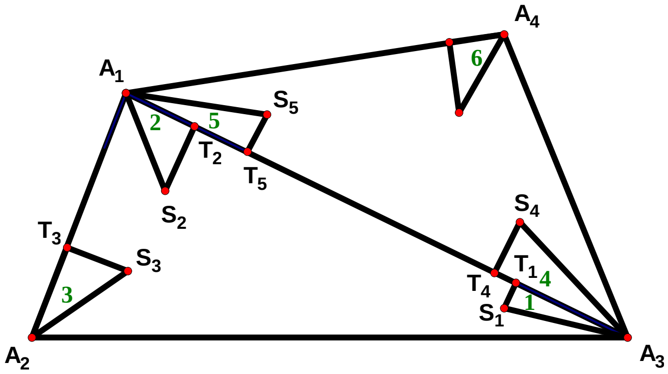
$r_1r_2+r_2r_3+r_1r_3=1,\ r_3>r_1$。

（3）若$r_1=r_5$且$r_2=r_4$，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$爲平行四邊形。

（4）若$r_1=r_2=r_5=r_4$，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$爲菱形。

（5）若$r_1=r_2$、$r_5=r_4$，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$爲鳶形。

（6）若$r_1=r_5$、$r_2=r_4$且$r_3=1$，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$爲長方形。



$r_1=\dfrac{\overline{S_1T_1}}{\overline{A_3T_1}}$　$r_2=\dfrac{\overline{S_2T_2}}{\overline{A_1T_2}}$

$r_3=\dfrac{\overline{S_3T_3}}{\overline{A_2T_3}}$

$r_4=\dfrac{\overline{S_4T_4}}{\overline{A_3T_4}}$　$r_5=\dfrac{\overline{S_5T_5}}{\overline{A_1T_5}}$

(圖十七)

證明：(1) 因 $r_1=r_5$，所以 $\angle A_1A_3A_2=\angle A_3A_1A_4$，

故 $\overline{A_1A_4}\,//\,\overline{A_2A_3}$，即四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲梯形。

同理 $r_2=r_4$ 情況也是如此。

(2) 因 $r_1=r_5$，所以依照 (1) 知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲梯形，

又 $r_4=\dfrac{r_3-r_1}{1+r_1r_3}\Rightarrow r_3-r_1=r_4(1+r_1r_3)\Rightarrow r_3-r_1r_3r_4=r_1+r_4\Rightarrow r_3=\dfrac{r_1+r_4}{1-r_1r_4}$

依定理十二 $r_{1+4}=\dfrac{r_1+r_4}{1-r_1r_4}$，所以得到 $r_{1+4}=r_3$，即 $\angle 1+\angle 4=\angle 3$

故 $\angle A_1A_2A_3=\angle A_2A_3A_4$，所以知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲等腰梯形。

(3) 因 $r_1=r_5$ 且 $r_2=r_4$，所以 $\angle A_1A_3A_2=\angle A_3A_1A_4, \angle A_3A_1A_2=\angle A_1A_3A_4$，

故 $\overline{A_1A_4}\,//\,\overline{A_2A_3}$，$\overline{A_1A_2}\,//\,\overline{A_3A_4}$，即四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲平行四邊形。

(4) 因 $r_1=r_2=r_5=r_4$，所以 $\angle A_1A_3A_2=\angle A_1A_3A_4=\angle A_3A_1A_2=\angle A_3A_1A_4$。

因 $\angle A_1A_3A_2=\angle A_3A_1A_2$，所以 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}$ ……①

因 $\angle A_1A_3A_4=\angle A_3A_1A_4$，所以 $\overline{A_1A_4}=\overline{A_3A_4}$ ……②

又 $\overline{A_1A_3}=\overline{A_1A_3}$，所以 $\Delta A_1A_2A_3\cong\Delta A_1A_4A_3$ (SSS)，

故 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_1A_4}$，$\overline{A_2A_3}=\overline{A_3A_4}$ ……③

由①②③得知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲菱形。

(5) 因 $r_1=r_2$、$r_5=r_4$，所以 $\angle A_1A_3A_2=\angle A_3A_1A_2$，$\angle A_1A_3A_4=\angle A_3A_1A_4$。

因 $\angle A_1A_3A_2=\angle A_3A_1A_2$，所以 $\overline{A_1A_2}=\overline{A_2A_3}$ ……①

因 $\angle A_1A_3A_4=\angle A_3A_1A_4$，所以 $\overline{A_1A_4}=\overline{A_3A_4}$ ……②

由①②得知四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲鳶形。

（6）因$r_1 = r_5$、$r_2 = r_4$

由（3）得四邊形$A_1A_2A_3A_4$爲平行四邊形

接著在$\Delta A_1A_2A_3$中，因$r_3 = 1$，所以$\angle A_1A_2A_3$爲直角

在$A_1A_2A_3A_4$爲平行四邊形的情況下，又知$\angle A_1A_2A_3$爲直角

故四邊形$A_1A_2A_3A_4$爲長方形。

接下來，我利用在三角形中所導出的倍角三角形與海倫三角形（等差三角形無法做延伸），類推到四邊形中而得出倍角四邊形與完美海倫四邊形。

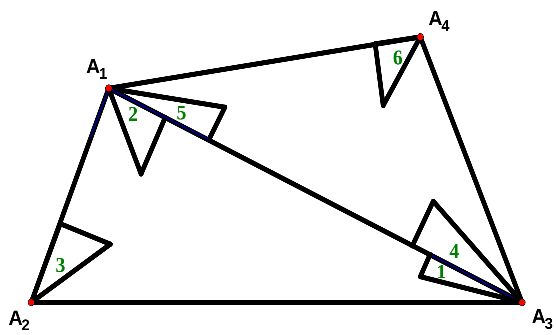
針對這兩種四邊形簡述如下：

（1）如何從等差三角形延伸到完美等差四邊形

如圖十八，利用三角形的等差理論，取r_1, r_2, r_4, r_5符合下列的不等式

$$\begin{cases} r_1r_2 = \dfrac{1}{3} \\ r_4r_5 = \dfrac{1}{3} \\ 0 < r_1r_4 < 1 \\ 0 < r_2r_5 < 1 \end{cases}$$

即可得出我們所要的完美等差四邊形。



(圖十八)

（2）如何從倍角三角形延伸到倍角四邊形

①四邊形的對角形成倍角關係

如圖十八，利用三角形的倍角理論，取r_1, r_2, r_4, r_5符合下列的不等式

$$\begin{cases} r_{1+4} = r_{m*\theta} \\ r_{2+5} = r_{n*\theta} \\ 0 < r_1r_2 < 1,\ 0 < r_4r_5 < 1 \\ 0 < r_1r_4 < 1,\ 0 < r_2r_5 < 1 \end{cases}$$

其中θ爲某個已知角，θ所形成的子直角三角形的兩股比爲r_θ

則四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，$\angle A_2A_3A_4 : \angle A_2A_1A_4 = m:n$ 。

②四邊形的鄰角形成倍角關係

如圖十八，利用三角形的倍角理論，取r_1, r_2, r_4, r_5 符合下列的不等式

$$\begin{cases} r_3 = r_{n*\theta} \\ r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = 1 \\ r_{1+4} = r_{m*\theta} \\ 0 < r_1r_4 < 1,\ 0 < r_2r_5 < 1 \\ 0 < r_1r_2 < 1, 0 < r_4r_5 < 1 \end{cases}$$

其中θ爲某個已知角，θ所形成的子直角三角形的兩股比爲r_θ

則四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，$\angle A_2A_3A_4 : \angle A_1A_2A_3 = m:n$ 。

（3）如何從海倫三角形延伸到完美海倫四邊形

如圖十八只需要取r_1, r_2, r_4, r_5 爲**有理數**，即$\Delta A_1A_2A_3, \Delta A_1A_3A_4$爲海倫三角形，則四邊形$A_1A_2A_3A_4$必爲完美海倫四邊形。

2.五邊形的探索：

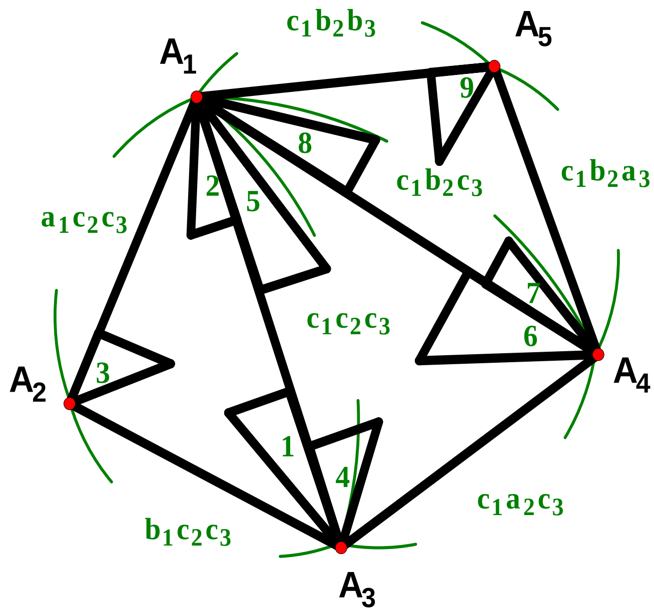
從五邊形任一頂點開始，可做兩條對角線把五邊形分成三個三角形，而建構這三個三角形的六個子直角三角形的兩股比爲$r_1, r_2, r_4, r_5, r_7, r_8$ ，

$$令\begin{cases} \overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_1A_3} = a_1 : b_1 : c_1 \\ \overline{A_3A_4} : \overline{A_1A_4} : \overline{A_1A_3} = a_2 : b_2 : c_2 \\ \overline{A_4A_5} : \overline{A_1A_5} : \overline{A_1A_4} = a_3 : b_3 : c_3 \end{cases} \overset{連比爲}{\Rightarrow} \begin{cases} a_1c_2c_3 : b_1c_2c_3 : c_1c_2c_3 \\ a_2c_1c_3 : b_2c_1c_3 : c_1c_2c_3 \\ a_3b_2c_1 : b_2b_3c_1 : b_2c_1c_3 \end{cases}$$

$$則\overline{A_1A_2} : \overline{A_2A_3} : \overline{A_3A_4} : \overline{A_4A_5} : \overline{A_1A_5} = a_1c_2c_3 : b_1c_2c_3 : a_2c_1c_3 : a_3b_2c_1 : b_2b_3c_1$$

$$其中\begin{cases} a_1 : b_1 : c_1 = r_1\left(1+r_2^2\right) : r_2\left(1+r_1^2\right) : (r_1+r_2)(1-r_1r_2) \\ a_2 : b_2 : c_2 = r_5\left(1+r_4^2\right) : r_4\left(1+r_5^2\right) : (r_5+r_4)(1-r_5r_4) \\ a_3 : b_3 : c_3 = r_8\left(1+r_7^2\right) : r_7\left(1+r_8^2\right) : (r_8+r_7)(1-r_8r_7) \\ 0 < r_1r_2 < 1, 0 < r_4r_5 < 1, 0 < r_7r_8 < 1 \\ 0 < r_{2+5+8} < 1, 0 < r_1r_4 < 1,\ 0 < r_6r_7 < 1 \end{cases}$$

而$\angle 6$之求法可以先利用r_5, r_4與$r_5r_4+r_4r_6+r_5r_6=1$即可求出r_6，因此也就可估計$\angle 6$之角度（如圖十九）。



(圖十九)

（1）如何從等差三角形延伸到完美等差五邊形

如圖十九，利用三角形的等差理論，取r_1,r_2,r_4,r_5,r_7,r_8符合下列的不等式

$$\begin{cases} r_1r_2=\dfrac{1}{3} \\ r_4r_5=\dfrac{1}{3} \\ r_7r_8=\dfrac{1}{3} \\ 0<r_1r_4<1 \\ 0<r_6r_7<1 \\ 0<r_{2+5+8}<1 \end{cases}$$

即可得出我們所要的完美等差四邊形。

（2）如何從倍角三角形延伸到倍角五邊形

仿四邊形的作法即可。

（3）如何從海倫三角形延伸到完美海倫五邊形

取$r_1, r_2, r_4, r_5, r_7, r_8$爲有理數時，即$\Delta A_1A_2A_3, \Delta A_1A_3A_4, \Delta A_1A_4A_5$爲海倫三角形，此五邊形就形成完美海倫五邊形。

3. n邊形的探索：

依四邊形、五邊形的方法推展到一般式得

$$\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}:\overline{A_4A_5}:\overline{A_5A_6}:\ldots\ldots:\overline{A_1A_n}$$

$$=a_1\times\prod_{i=2}^{n-2}c_i:b_1\times\prod_{i=2}^{n-2}c_i:a_2c_1\times\prod_{i=3}^{n-2}c_i:a_3b_2c_1\times\prod_{i=4}^{n-2}c_i:a_4b_3b_2c_1\times\prod_{i=5}^{n-2}c_i:\ldots\ldots$$

$$:a_{n-3}b_{n-4}b_{n-5}\times\ldots\ldots\times b_2c_1c_{n-2}:a_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}\times\ldots\ldots\times b_2c_1:b_{n-2}b_{n-3}b_{n-4}\times\ldots\ldots\times b_2c_1$$

其中 $a_1:b_1:c_1=r_1\left(1+r_2^{\,2}\right):r_2\left(1+r_1^{\,2}\right):\left(r_1+r_2\right)\left(1-r_1r_2\right)$

$a_2:b_2:c_2=r_5\left(1+r_4^{\,2}\right):r_4\left(1+r_5^{\,2}\right):\left(r_5+r_4\right)\left(1-r_5r_4\right)$

$\vdots$

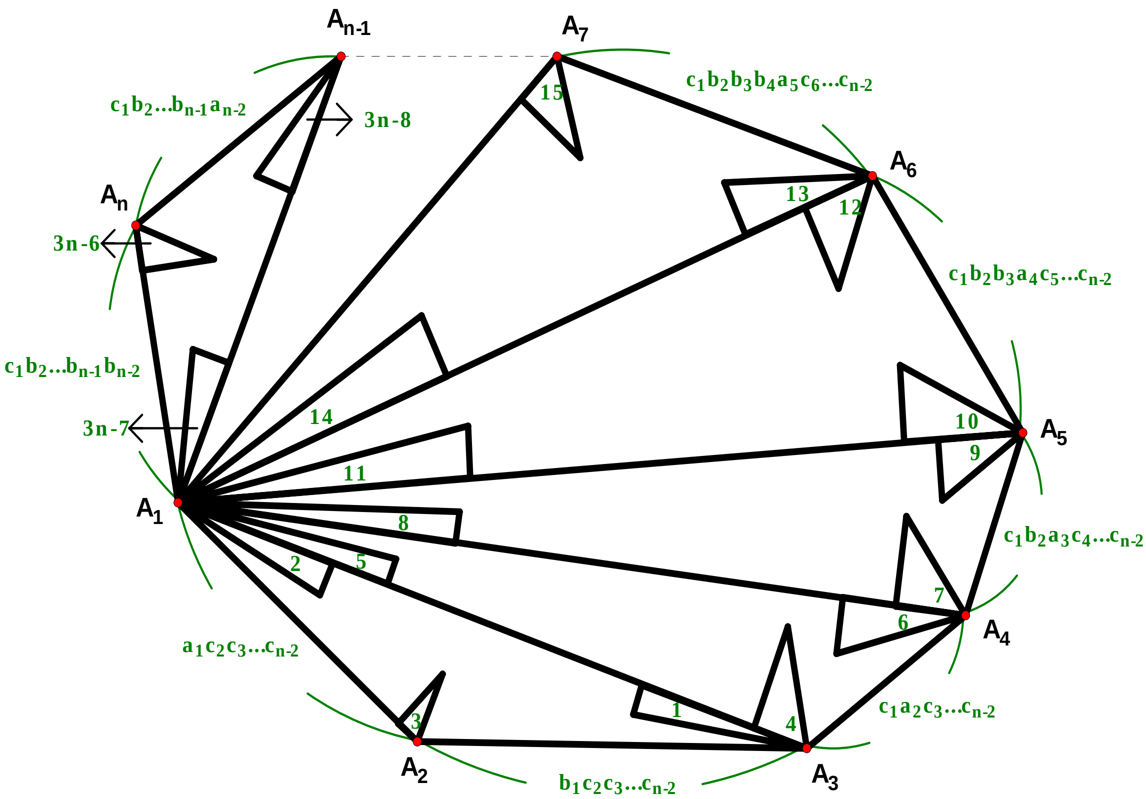
$\vdots$

$a_{n-2}:b_{n-2}:c_{n-2}=r_{3n-7}\left(1+r_{3n-8}^{\,2}\right):r_{3n-8}\left(1+r_{3n-7}^{\,2}\right):\left(r_{3n-7}+r_{3n-8}\right)\left(1-r_{3n-7}r_{3n-8}\right)$

且必須滿足下列的不等式

$$\begin{cases}0<r_1r_2<1,\ 0<r_4r_5<1,\ \ldots\ldots,\ 0<r_{3n-7}r_{3n-8}<1\\0<r_1r_4<1,\ 0<r_6r_7<1,\ \ldots\ldots,\ 0<r_{3n-9}r_{3n-8}<1\\0<r_{2+5+8+\ldots+(3n-7)}<1\end{cases}$$

（如圖二十）

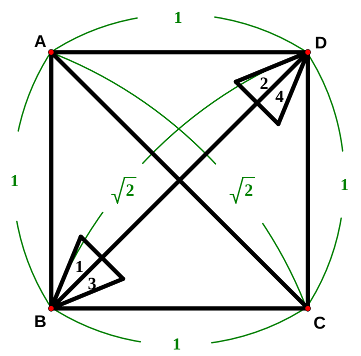


(圖二十)

應用：在建構多邊形時，若取$r_1, r_2, r_3, r_4, \ldots\ldots, r_{3n-6}$爲有理數時，即 $\Delta A_1A_2A_3, \Delta A_1A_3A_4, \ldots\ldots, \Delta A_1A_{n-1}A_n$ 爲海倫三角形，此多邊形就形成完美海倫 n 邊形。

至於等差與倍角仿前的作法即可，在此就不再贅述。

討論：以海倫多邊形的觀點（非完美）來看，上述內容所求的邊長比 $\overline{A_1A_2}:\overline{A_2A_3}:\overline{A_3A_4}:\ldots\ldots:\overline{A_1A_n}$ 不是通式解，只是部分解。原因在於海倫多邊形的對角線不一定爲有理數，如圖二十的 $ABCD$ 爲正方形，邊長爲 1，面積爲 1，爲海倫四邊形。但兩條對角線等長，其值爲 $\sqrt{2}$，不是有理數。（如圖二十一）



(圖二十一)

因此，用子直角三角形建構多邊形時，若取子直角三角形的兩股比爲有理數時，此多邊形必爲海倫多邊形，但若取兩股比爲無理數時，也可能形成海倫多邊形。如圖二十一，取 $r_1 = \sqrt{2}-1, r_2 = \sqrt{2}-1, r_3 = \sqrt{2}-1, r_4 = \sqrt{2}-1$，則 $\angle 1, \angle 2, \angle 3, \angle 4$ 所造出正方形 $ABCD$ 爲海倫四邊形。

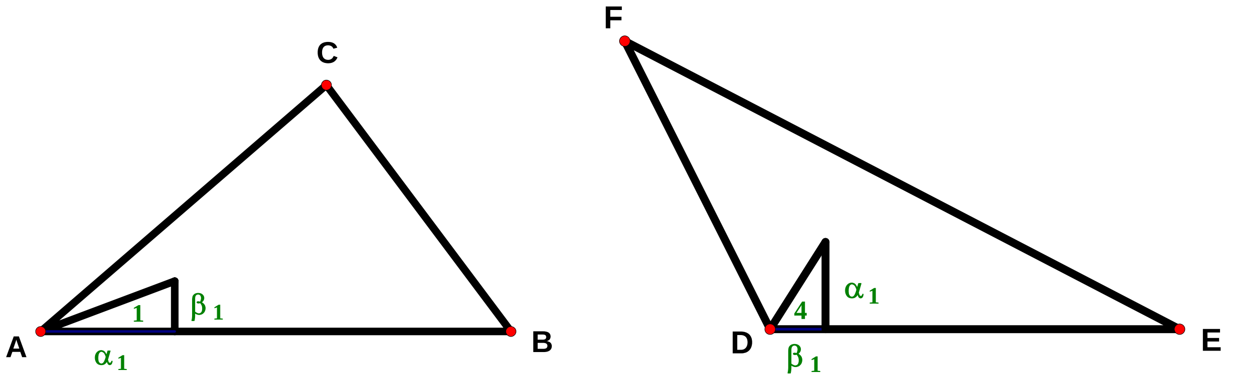
研究目的五：如何運用構造法，結合多個子直角三角形的兩股比，造出超完美海倫多邊形

1.四邊形的探討

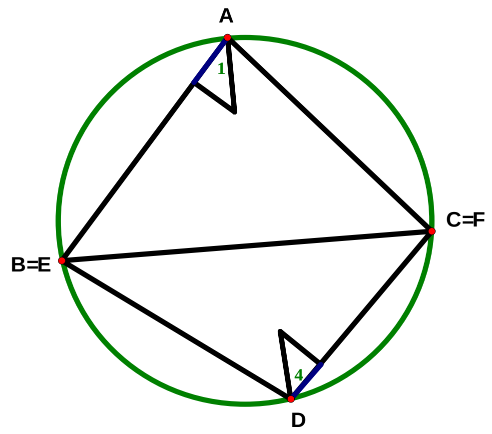
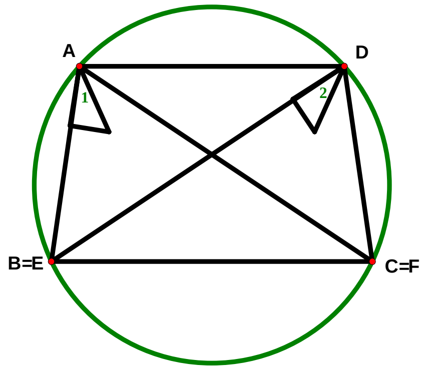
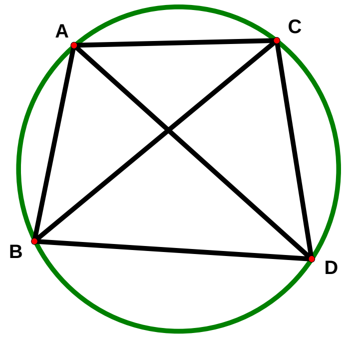
在進入構造法以前，先簡述幾個幾何已知的性質

如圖二十二，在 ΔABC 與 ΔDEF 中，取 $r_1 = \dfrac{\beta_1}{\alpha_1}, r_4 = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$ (即 $r_1 \times r_4 = 1$)，則

$$\angle \mathrm{CAB} + \angle \mathrm{FDE} = 180^\circ$$



(圖二十二)

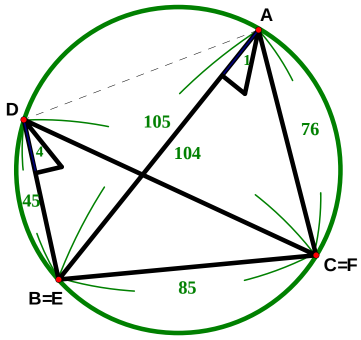
（1）因此，若取$r_1=\dfrac{\beta_1}{\alpha_1},r_4=\dfrac{\alpha_1}{\beta_1}$，則四邊形 ABCD 四點共圓，如圖二十三	 (圖二十三)
（2）在ΔABC與ΔDEF中，取$r_1=r_4$，則 ABCD 四點共圓，如圖二十四	 (圖二十四)
（3）托勒密幾何性質（Ptolemy's theorem） 圓內接四邊形兩雙對邊乘積的和，等於兩條對角線的乘積 $\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AC}\times\overline{BD}=\overline{AD}\times\overline{BC}$（如圖二十五）	 (圖二十五)

底下利用上面性質，並結合海倫多邊形之子直角三角形兩股比必爲有理數的特性，採取構造法，造出超完美海倫四邊形，其方法有二：

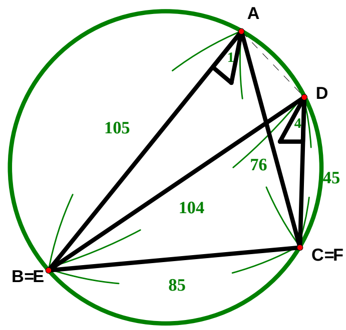
方法一：步驟①先取出兩個海倫三角形ΔABC與ΔDEF

②令$r_1 = r_4$(共圓)，且$\angle A$與$\angle D$的對邊長度相等

則利用兩種連接方式，即可構造出超完美海倫四邊形，如圖二十六



$$r_1 = r_4 = \frac{1}{2}$$



(圖二十六)

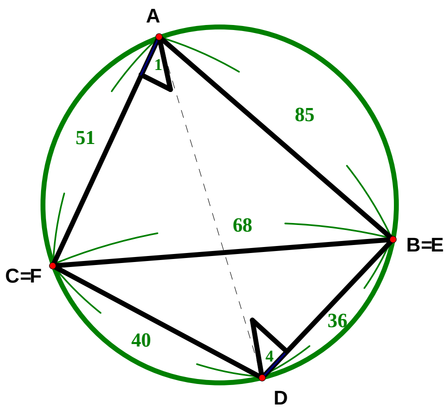
其中：a.圖二十六的部份，利用托勒密幾何性質，可求出$\overline{AD} = \dfrac{1500}{17}$，因此把圖形放大 17 倍，即可得到超完美海倫多邊形。

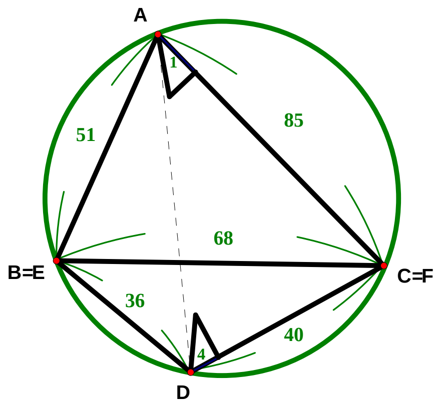
b.圖二十六的部份，仿 a 的部份得$\overline{AD} = \dfrac{187}{5}$，此時只需放大 5 倍即可。

方法二：步驟①先取出兩個海倫三角形ΔABC與ΔDEF

②令$r_1 \times r_4 = 1$(共圓)，且$\angle A$與$\angle D$的對邊長度相等

則利用兩種連接方式，即可構造出超完美海倫四邊形，如圖二十七





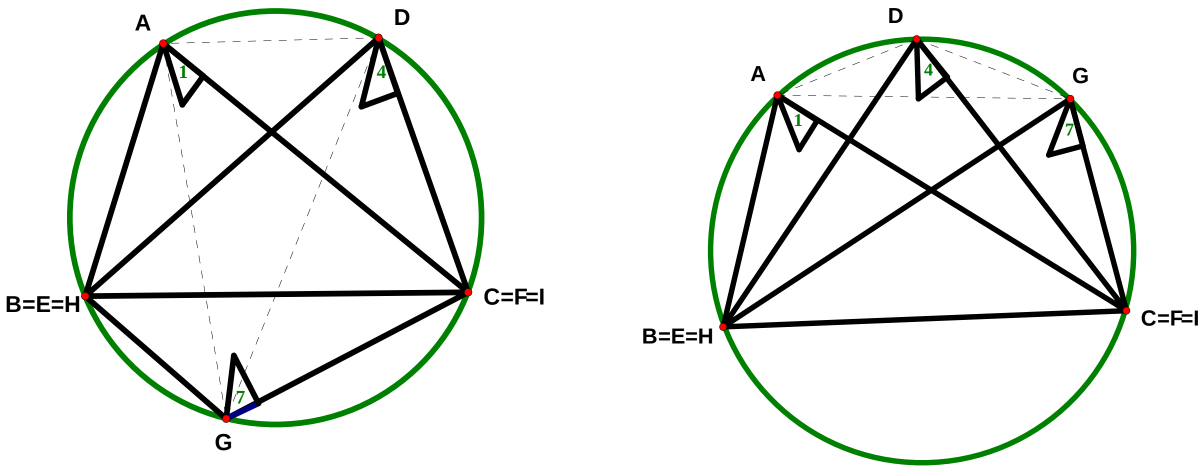
$$r_1 = \frac{1}{2}, r_4 = \frac{2}{1}, r_1 \times r_4 = 1 \qquad r_1 = \frac{1}{2}, r_4 = \frac{2}{1}, r_1 \times r_4 = 1$$

(圖二十七)

2.五邊形的探討

先取出三個海倫三角形$\Delta ABC,\Delta DEF,\Delta GHI$，則可取$\begin{cases} r_1 = r_4 = r_7 (共圓) \\ 或 r_1 = r_4, r_1 \times r_7 = 1 (共圓) \end{cases}$

任取一種，再利用不同的連接方式，即可建構出超完美海倫五邊形。以下舉兩例，如圖二十八：



$r_1 = r_4, r_1 \times r_7 = 1$ $\qquad$ $r_1 = r_4 = r_7$

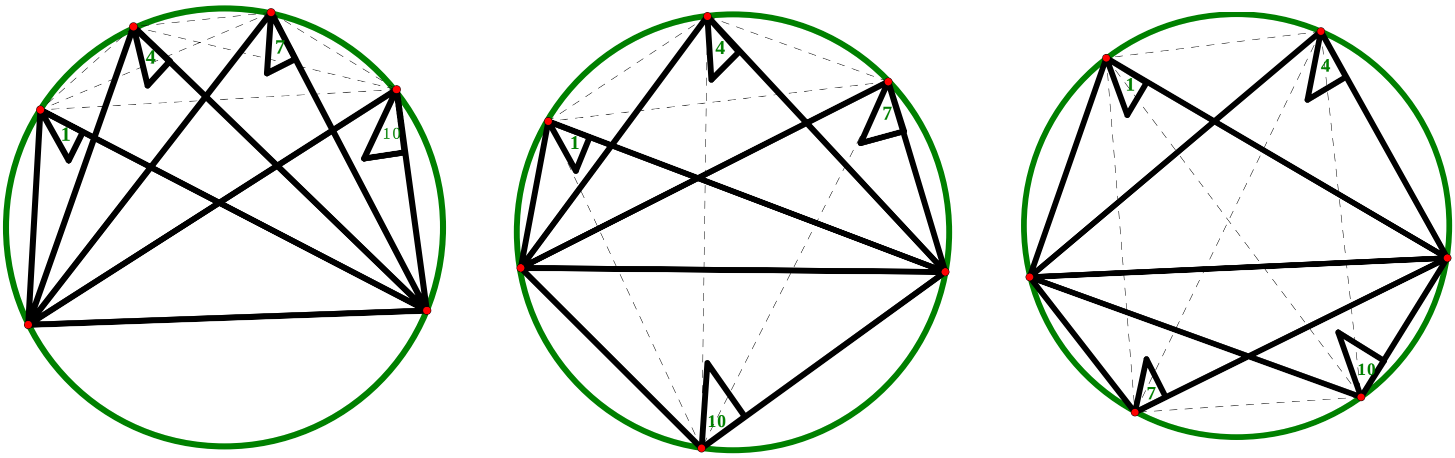
(圖二十八)

至於$\overline{AD}$與$\overline{DG}$都可用托勒密幾何性質求得。

3.六邊形的探討

仿五邊形的方式，取$\begin{cases} r_1 = r_4 = r_7 = r_{10} (共圓) \\ 或 r_1 = r_4 = r_7, r_1 \times r_{10} = 1 (共圓) \\ 或 r_1 = r_4, r_7 = r_{10}, r_1 \times r_7 = 1 (共圓) \end{cases}$

任取一種，再利用不同的連接方式，即可建構出超完美海倫六邊形。



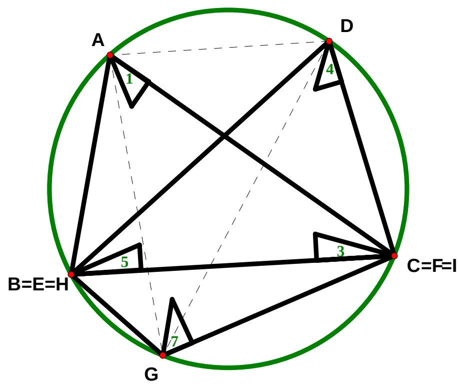
$r_1 = r_4 = r_7 = r_{10}$　　　$r_1 = r_4 = r_7, r_1 \times r_{10} = 1$　　　$r_1 = r_4, r_7 = r_{10}, r_1 \times r_7 = 1$

(圖二十九)

4.n 邊形的探討

取 n-2 個海倫三角形，當中有 k 個海倫三角形符合 $r_1 = r_2 = \ldots = r_k$ ，有 j 個海倫三角形符合 $r_{k+1} = r_{k+2} = \ldots = r_{k+j}$ ，其中 $r_1 \times r_{k+1} = 1$ 且 $k + j = n - 2$ ，用這兩組三角形做適當的連接方式，即可得到超完美海倫 n 邊形。

最後，在上面很多圖形中，選取一個五邊形，來說明此五邊形（經放大後）爲何是超完美海倫五邊形，其他圖形的證明同理可得。



(圖三十)

如圖三十， $\Delta ABC, \Delta DEF, \Delta GHI$ 是海倫三角形，且 $r_1 = r_4, r_1 \times r_7 = 1$ 。

現說明 ABGCD 是超完美海倫五邊形，說明如下：

（1）連結 $\overline{AD}, \overline{AG}, \overline{DG}$ 。

（2）因 $r_1 = r_4, r_1 \times r_7 = 1$ ，所以 ABGCD 五點共圓。

（3）因 ABCD 四點共圓，依托勒密性質 $\overline{AB}\times\overline{CD}+\overline{AD}\times\overline{BC}=\overline{AC}\times\overline{BD}$，

又 $\overline{AB},\overline{CD},\overline{BC},\overline{AC},\overline{BD}$ 爲正整數，所以得出 $\overline{AD}$ 爲有理數。

同理得 $\overline{AG},\overline{DG}$ 爲有理數。

（4）

①因 $\Delta DEF(\Delta DBC)$ 爲海倫三角形，故 r_5 爲有理數。

因 ABCD 四點共圓，所以 $\angle DAC=\angle DBC=\frac{1}{2}CD$弧，

又 $\angle 5=\frac{1}{2}\angle DBC=\frac{1}{2}\angle DAC$，從而 $r_{\frac{1}{2}\angle DAC}$ 爲有理數，

又 r_1 爲有理數，因此 $r_{1+\frac{1}{2}\angle DAC}$ 爲有理數。

②因 ΔABC 爲海倫三角形，故 r_3 爲有理數。

因 ABCD 四點共圓，所以 $\angle ADB=\angle ACB=\frac{1}{2}AB$弧，

又 $\angle 3=\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}\angle ADB$，從而 $r_{\frac{1}{2}\angle ADB}$ 爲有理數。

（5）結合 $r_{1+\frac{1}{2}\angle DAC},r_{\frac{1}{2}\angle ADB}$ 爲有理數，所以 ΔABD 爲海倫三角形。因 ΔABD，$\Delta DEF(\Delta DBC)$ 及 $\Delta GHI(\Delta BGC)$ 爲海倫三角形，且 $\overline{AD},\overline{AG},\overline{DG}$ 爲有理數，經放大正整數倍後即可得出邊長、對角線與面積均是正整數的五邊形，故 ABGCD 是超完美海倫五邊形。

研究目的六：求出特殊海倫三角形（等差、倍角）、特殊完美海倫四邊形（梯形、平行四邊形、菱形、鳶形、長方形）的比例解。

底下，把前面內容中有關三角形與四邊形有關海倫、等差、倍角的部份加以統整，而推導出海倫等差三角形、海倫倍角三角形、完美海倫梯形、完美海倫平行四邊形、完美海倫菱形、完美海倫鳶形、完美海倫長方形的比例公式。由於在演算的過程中過於繁瑣，因此只列出最後結果，列表如下：

圖形名稱	邊長比	α,β條件限制
海倫等差三角形	$\alpha^2+9\beta^2:2\alpha^2+6\beta^2:3\alpha^2+3\beta^2$	①α,β 為正整數 ②（α,β）=1 ③$\frac{\beta}{\alpha}<1$
海倫三角形二內角比 2:1	$\alpha^4+2\alpha^2\beta^2:2\alpha^4-2\beta^4:3\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+3\beta^4$	①α,β 為正整數 ②（α,β）=1 ③$\frac{\beta}{\alpha}<\frac{1}{\sqrt{3}}$
海倫三角形二內角比 2:3	$2\alpha^2(\alpha^2-\beta^2)(\alpha^6+3\alpha^4\beta^2+3\alpha^2\beta^4+\beta^6)$: $(3\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+3\beta^4)(\alpha^6+2\alpha^4\beta^2+\alpha^2\beta^4)$: $(5\alpha^4-10\alpha^2\beta^2+\beta^4)(\alpha^6+10\alpha^4\beta^2+5\alpha^2\beta^4)$	①α,β 為正整數 ②（α,β）=1 ③α,β 兩股所形成的θ角，必符合$\theta<18°$

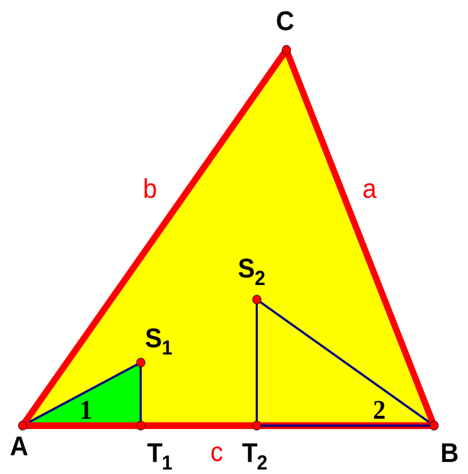
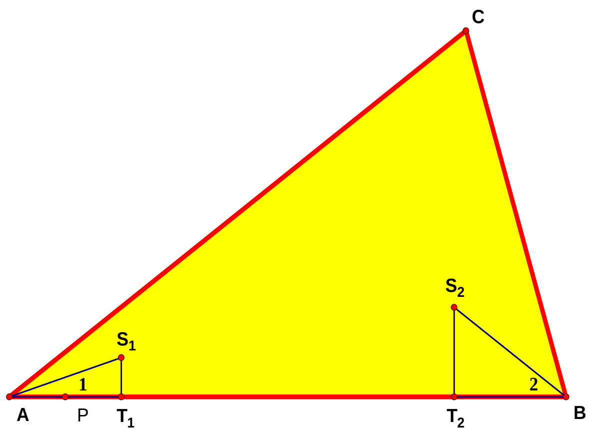
完美海倫 梯形	$\alpha_1\beta_1\left(\alpha_2^{\ 2}+\beta_2^{\ 2}\right)\left(\alpha_1\beta_4+\alpha_4\beta_1\right)\left(\alpha_4\alpha_1-\beta_4\beta_1\right):$ $\alpha_2\beta_2\left(\alpha_1^{\ 2}+\beta_1^{\ 2}\right)\left(\alpha_1\beta_4+\alpha_4\beta_1\right)\left(\alpha_4\alpha_1-\beta_4\beta_1\right):$ $\alpha_4\beta_4\left(\alpha_1^{\ 2}+\beta_1^{\ 2}\right)\left(\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2\right)\left(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\right):$ $\alpha_1\beta_1\left(\alpha_4^{\ 2}+\beta_4^{\ 2}\right)\left(\alpha_2\beta_1+\alpha_1\beta_2\right)\left(\alpha_1\alpha_2-\beta_1\beta_2\right)$	① $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_{4,}\beta_1,\beta_2,\beta_4$ 爲正整數 ②（α_1,β_1）=1,（α_2,β_2）=1, （α_4,β_4）=1 ③ $0<\frac{\beta_1}{\alpha_1}\times\frac{\beta_2}{\alpha_2}<1$ 、 $0<\frac{\beta_1}{\alpha_1}\times\frac{\beta_4}{\alpha_4}<1$ ④ $\angle A_1A_2A_3=180°-2(\angle 1+\angle 2)$ $\angle A_2A_3A_4=2(\angle 1+\angle 4)$ $\angle A_3A_4A_2=180°-2(\angle 1+\angle 4)$ $\angle A_4A_1A_2=2(\angle 1+\angle 2)$
完美海倫 平行四邊形	$\alpha_1\beta_1\left(\alpha_1^{\ 2}+\beta_1^{\ 2}\right):\alpha_2\beta_2\left(\alpha_1^{\ 2}+\beta_1^{\ 2}\right):$ $\alpha_1\beta_1\left(\alpha_1^{\ 2}+\beta_1^{\ 2}\right):\alpha_2\beta_2\left(\alpha_1^{\ 2}+\beta_1^{\ 2}\right)$	① $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 爲正整數 ②（α_1,β_1）=1，（α_2,β_2）=1 ③ $0<\frac{\beta_1}{\alpha_1}\times\frac{\beta_2}{\alpha_2}<1$ ④ $\angle A_1A_2A_3=180°-2(\angle 1+\angle 2)$ $\angle A_2A_3A_4=2(\angle 1+\angle 2)$ $\angle A_3A_4A_1=180°-2(\angle 1+\angle 2)$ $\angle A_4A_1A_2=2(\angle 1+\angle 2)$
完美海倫 菱形	1:1:1:1	① $\angle A_1A_2A_3=180°-4\angle 1$ $\angle A_2A_3A_4=4\angle 1$ $\angle A_3A_4A_1=180°-4\angle 1$ $\angle A_4A_1A_2=4\angle 1$ 其中 $\angle 1<45°$

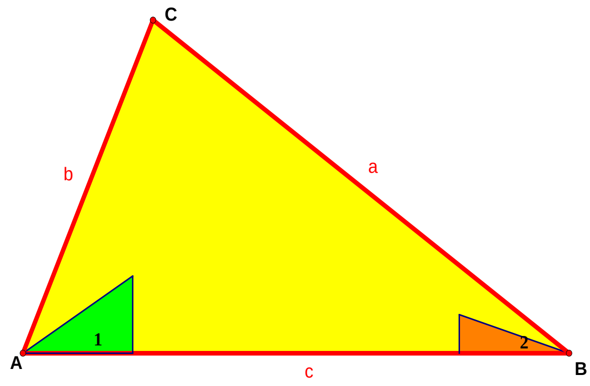
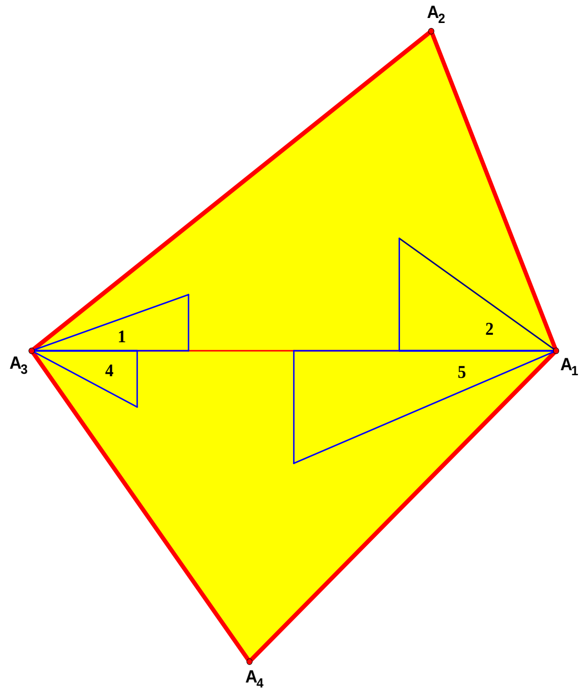
完美海倫 鳶形	$\left(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2\right)\left(\alpha_4{}^2-\beta_4{}^2\right):\left(\alpha_1{}^2+\beta_1{}^2\right)\left(\alpha_4{}^2-\beta_4{}^2\right):$ $\left(\alpha_4{}^2+\beta_4{}^2\right)\left(\alpha_1{}^2-\beta_1{}^2\right):\left(\alpha_4{}^2+\beta_4{}^2\right)\left(\alpha_1{}^2-\beta_1{}^2\right)$	① $\alpha_1,\alpha_4,\beta_1,\beta_4$ 為正整數 ② (α_1,β_1) =1，(α_4,β_4) =1 ③ $0<\frac{\beta_1}{\alpha_1}<1$ ， $0<\frac{\beta_4}{\alpha_4}<1$ ④ $\angle A_1A_2A_3=180^\circ-4\angle 1$ $\angle A_2A_3A_4=2(\angle 1+\angle 4)$ $\angle A_3A_4A_1=180^\circ-4\angle 4$ $\angle A_4A_1A_2=2(\angle 1+\angle 4)$
完美海倫 長方形	$2\alpha_1\beta_1:\alpha_1{}^2-\beta_1{}^2:2\alpha_1\beta_1:\alpha_1{}^2-\beta_1{}^2$	① α_1,β_1 為正整數 ② (α_1,β_1) =1 ③ $0<\frac{\beta_1}{\alpha_1}<1$ ④ $\angle A_1A_2A_3=\angle A_2A_3A_4$ $=\angle A_3A_4A_1$ $=\angle A_4A_1A_2=90^\circ$

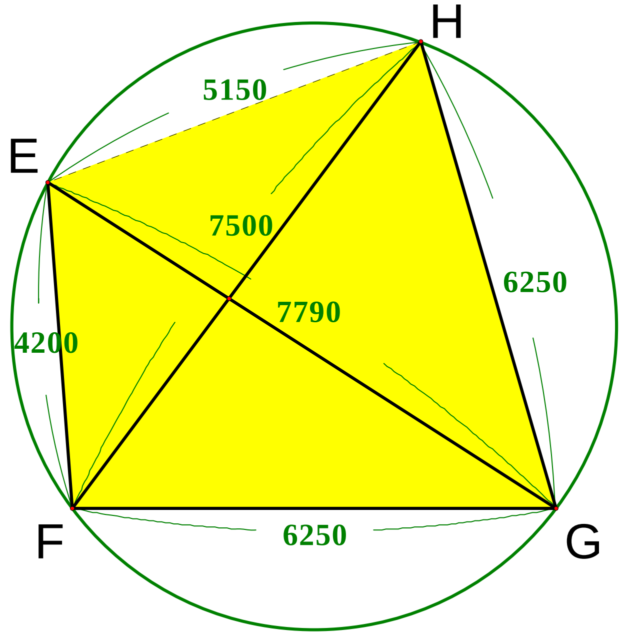
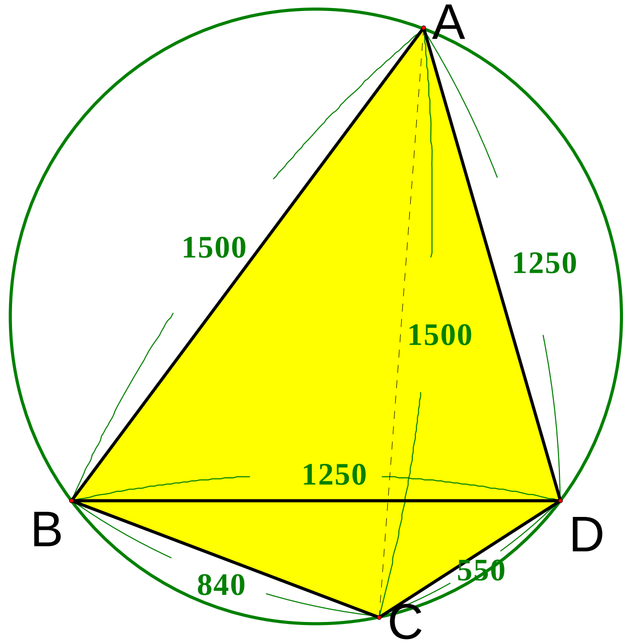
研究目的七：子直角三角形理論在作圖上的應用

在實際作圖的操作上，一般要繪製等差三角形時，可直接透過三角形三邊長的關係來直接作圖，而在製作倍角三角形時，則可直接透過角度的選取來形成倍角的關係，然而在繪製海倫三角形的圖形時，就非輕易所能達成。往往控制了面積的大小時，就無法控制三邊長使其皆爲正整數；控制了邊長後，則無法控制面積使其爲正整數，而產生了顧此失彼的窘境。然而，透過子直角三角形的理論，經由角度的控制，就能順利得到海倫三角形的圖形。

底下透過 GSP 的作圖方式，對於本文所提出的一些定理加以驗證之，表列如下：

圖形名稱		GSP 呈現圖形
等差三角形	$\alpha_1 = 2, \beta_1 = 1, r_1 = \frac{1}{2}$ $\alpha_2 = 3, \beta_2 = 2, r_2 = \frac{2}{3}$ $\overline{BC} = a = 6.5$ $\overline{AC} = b = 7.5$ $\overline{AB} = c = 7$ 2c = b + a	
兩倍角三角形	$\alpha_1 = 3, \beta_1 = 1, r_1 = \frac{1}{3}$ $\alpha_2 = 8, \beta_2 = 6, r_2 = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ $m\angle S_1AT_1 = 18.435°$ $m\angle S_2BT_2 = 36.870°$	

海倫三角形	$\alpha_1=3, \beta_1=2, r_1=\frac{2}{3}$ $\alpha_2=3, \beta_2=1, r_2=\frac{1}{3}$ $\overline{BC}=a=60$ $\overline{AC}=b=39$ $\overline{AB}=c=63$ 面積=1134	
海倫四邊形	$\alpha_1=3, \beta_1=1, r_1=\frac{1}{3}$ $\alpha_2=3, \beta_2=2, r_2=\frac{2}{3}$ $\alpha_4=2, \beta_4=1, r_4=\frac{1}{2}$ $\alpha_5=5, \beta_5=2, r_5=\frac{2}{5}$ $\overline{A_1A_2}=2808$ $\overline{A_2A_3}=4320$ $\overline{A_3A_4}=3150$ $\overline{A_4A_1}=3654$ 面積=11594000	

超完美 海倫四邊形	$\overline{EF}=4200$ $\overline{FG}=5150$ $\overline{EG}=7790$ $\overline{EH}=5150$ $\overline{HG}=6250$ $\overline{HF}=7500$ 面積=29128368	
超完美 海倫四邊形	$\overline{AB}=1500$ $\overline{BC}=840$ $\overline{CD}=550$ $\overline{AD}=1250$ $\overline{AC}=1500$ $\overline{BD}=1250$ 面積=934800	

伍、結論：

（1）利用一個子直角三角形的 r 值作出所有的直角三角形，若 r 值取有理數，則所作的直角三角形會形成勾股三角形。

（2）利用兩個子直角三角形作出所有的三角形，並推展出等差、倍角及海倫三角形，其邊長的關係如內容所示。

（3）利用 $2(n-2)$ 個子直角三角形的 r 值作出所有的 n 邊形，並推展出等差、倍角，其邊長比如內容所示。

（4）利用$n-2$個海倫三角形，做出完美海倫 n 邊形。

（5）利用$n-2$個海倫三角形，做出超完美海倫 n 邊形。

（6）求出特殊海倫三角形（等差、倍角），特殊完美海倫四邊形（梯形、平行四邊形、菱形、鳶形、長方形）的邊長比。

（7）透過 GSP 的作圖，以驗證本文所推導出定理之正確性。

陸、心得感想：

本文的靈感，來自數學傳播中的一篇文章，透過從中所獲得的啓發，再配合國中所學的幾何來重新加以詮釋，賦予新的生命，推展出許多有趣的內容。

真的沒想到，只用角平分線的比例性質，再加上國中所學到的商高定理、相似三角形性質、海倫面積公式與內切圓半徑求法等幾何知識，創造出子直角三角形的理論，從而就揭開了多邊形的神秘結構。欣喜之餘，我反思，在探討一個數學題目的求解過程中，常常會受到傳統經驗和思想所侷限，而無法得到有效的突破，然而，一但換個角度時，往往能得到意想不到的收穫，本文即是如此，期待將來有機會能做更進一步的研究，以發現多邊形更多神奇的奧秘。

柒、參考資料：

一、蔡聰明，數學拾貝，三民書局

二、盛立人、嚴鎮軍，從勾股定理談起，九章出版社

三、張澄清，托勒密幾何定理的運用，凡異出版社

四、數學傳播 第 101 期

五、國中數學課本第五冊　康軒出版社

評語

作者十分努力，在研究考慮到的層面也很廣，唯，在定理的陳述仍可改善，定理所設的已知條件是否可以放鬆，值得深入探討。