臺灣二００七年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：費曼三角形的推廣

得 獎 獎 項：佳作

學校／作者：國立臺南女子高級中學　　江羽凡
國立臺南女子高級中學　　蔡幸倍

作者簡介

江羽凡

　　現就讀國立台南女中，平常喜歡看書、彈琴、運動，因為偶然的機會下遇到了費曼三角形，開始了我們往後的研究，一開始覺得有點枯燥乏味，可是到後來竟也樂在其中，享受那推出規律的樂趣，這次很幸運的能夠得到黃哲男老師以及左太政教授的指導，不只是數學，在一些小事上也從兩位身上學到許多，很高興能夠參加這次的展覽，希望藉這次的機會能夠大大增加自己人生的閱歷。

作者簡介

蔡幸倍

現就讀國立台南女子高級中學二年級，平常喜歡看書、上網、吸收新知識。因爲很喜歡做數學時的成就感，所以決定當作興趣來發展。研究過程中，雖不乏沮喪和懊惱，但一有成果時卻會非常的開心、有成就感。有老師和教授的指導，也讓我們獲益良多。雖然現在轉到了社會組，但是還是做的很開心，希望可以當作自己一次人生中的歷練。

Abstract

We inferred the original Feynman triangle theorem from equilateral triangle into common triangle and from same ratios of dividing points into different ones. The conclusions are below：

1.Suppose that A', B' and C' are dividing points on ΔABC`s edges $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, and $\overline{AB}$. $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, and $\overline{AB}$ surround the area ΔGHI （A_{GHI}）. This way, the ratios of A_{GHI} and A_{ABC} is below :

（1）The edges are divided into same ratios： $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$ ＝ $\overline{BE}$ ： $\overline{EC}$ ＝ $\overline{CF}$ ： $\overline{FA}$ ＝1：p,

$$\frac{A_{GHI}}{A_{ABC}} = 1-\frac{3p}{1+p(1+p)}.$$

（2）The edges are divided into different ratios： $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$ ＝1：p，$\overline{BE}$ ： $\overline{EC}$ ＝1：q，

$\overline{CF}$ ： $\overline{FA}$ ＝1：r ，
$$\frac{A_{GHI}}{A_{ABC}} = 1-\frac{p}{1+p\left(1+r\right)}-\frac{q}{1+q\left(1+p\right)}-\frac{r}{1+r\left(1+q\right)}.$$

2. E,F,G and H are dividing points on ABCD`s edges $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ and $\overline{DA}$. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ and $\overline{DA}$ surround the area IJKL（A_{IJKL}）：

（1）The edges are divided into same ratios： $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{DG}}{\overline{GA}}$ ＝1：p,

$$\frac{A_{IJKL}}{A_{ABCD}} = 1-\frac{1}{2}\times\frac{4(1+p)}{(1+p)(1+p)+1}.$$

（2）The edges are divided into different ratios： $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$ ＝1：p，$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$ ＝1：q ，$\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}$ ＝1：r ，

$\frac{\overline{DG}}{\overline{GA}}$ ＝1：s，

$$\frac{A_{IJKL}}{A_{ABCD}} = 1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1+c}{(1+b)(1+c)+1}+\frac{1+d}{(1+c)(1+d)+1}+\frac{1+b}{(1+a)(1+b)+1}+\frac{1+a}{(1+d)(1+a)+1}\right).$$

3. After inferred, the result of a regular polygon whose edges are divided into same ratio by dividing points is：

$$1-\frac{np}{\frac{2}{n}\cos^2\theta'(p+q)}+\frac{np^3\sin(180^\circ-\frac{(n-2)180^\circ}{n}-\theta)}{\frac{2}{n}\cos^2\theta'(n+p)^2\sin(\frac{(n-2)180^\circ}{n})\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}}$$

（when $\sin\theta=\frac{p\sin(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}{\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}}$，$\theta'=\left[\frac{90(n-2)}{n}\right]^\circ$）.

中文摘要

由原始費曼三角形原理中的正三角形等比例分點問題，推廣至一般三角形的分點等比例及不相同之比例，得到如下之結論：

1.設 D、E、F 爲任意三角形 ΔABC 上之分點，其中 $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{CD}$ 所圍出 ΔGHI 的面積（ A_{GHI} ）與 A_{ABC} 比值如下:

（1）分點等比例：若 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$ ＝ $\overline{BE}$ ： $\overline{EC}$ ＝ $\overline{CF}$ ： $\overline{FA}$ ＝1：p，

$$\frac{A_{GHI}}{A_{ABC}}=1-\frac{3p}{1+p(1+p)}$$

（2）分點不同比例：若 $\overline{AD}$ ： $\overline{DB}$ ＝1：p， $\overline{BE}$ ： $\overline{EC}$ ＝1：q， $\overline{CF}$ ： $\overline{FA}$ ＝1：r，

$$\frac{A_{GHI}}{A_{ABC}}=1-\frac{p}{1+p\left(1+r\right)}-\frac{q}{1+q\left(1+p\right)}-\frac{r}{1+r\left(1+q\right)}$$ 。

2.平行四邊形 ABCD，E、F、G、H 爲四邊之分點， $\overline{AE}$ 、 $\overline{BF}$ 、 $\overline{CG}$ 、 $\overline{DH}$ 所圍成的四邊形面積（ A_{IJKL} ）與 A_{ABCD} 比值

（1）平行四邊形分點等比例：當 $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}=\frac{\overline{DG}}{\overline{GA}}$ ＝1：p，

$$\frac{A_{IJKL}}{A_{ABCD}}=1-\frac{1}{2}\times\frac{4(1+p)}{(1+p)(1+p)+1}$$

（2）平行四邊形分點不同比例：當 $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$ ＝1：p， $\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$ ＝1：q ， $\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}$ ＝1：r ， $\frac{\overline{DG}}{\overline{GA}}$ ＝1：s 時，

$$\frac{A_{IJKL}}{A_{ABCD}}=1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1+c}{(1+b)(1+c)+1}+\frac{1+d}{(1+c)(1+d)+1}+\frac{1+b}{(1+a)(1+b)+1}+\frac{1+a}{(1+d)(1+a)+1}\right)$$ 。

3.經由推倒得知正 n 邊形分點等比例一般式爲

$$1-\frac{np}{\frac{4}{n}\cos^2\theta'(p+q)}+\frac{np^3\sin(180^\circ-\frac{(n-2)180^\circ}{n}-\theta)}{\frac{4}{n}\cos^2\theta'(p+q)^2\sin(\frac{(n-2)180^\circ}{n})\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}}$$

且 $\sin\theta=\dfrac{p\sin(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}{\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}}$ ， $\theta'=\left[\dfrac{90(n-2)}{n}\right]^\circ$

費曼三角形的推廣

Feynman Triangle's Inference

壹、研究動機

在費曼的自傳中曾經提到，其小時候曾經研究過一種特殊的三角形（後人稱之爲費曼三角形），我們發現，利用正弦、餘弦定理、有向線段的比，以及 GSP 的動態模擬與計算功能等工具，可以有效地解決問題。

貳、研究目的

我們除了希望研究一般形式的費曼三角形之外，也希望探討一般四邊形以同樣的方式所導出的公式，並且推廣至 n 邊形，進而討論其幾何性質。

參、研究問題

1. 當 P、Q、R 爲 ΔABC 之三邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 上分點，且 $\overline{AP}$ ： $\overline{PB}$ =1：p， $\overline{BQ}$ ： $\overline{QC}$ =1：q， $\overline{CR}$ ： $\overline{RA}$ =1：r（圖 1-1），則 $\overline{AQ}$ 、 $\overline{BR}$ 、 $\overline{CP}$ 三線段所構成之 ΔDEF 面積與 ΔABC 面積之幾何關係爲何？

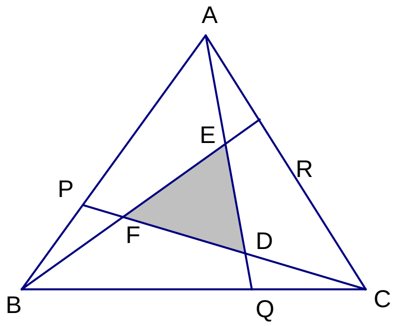

圖1-1

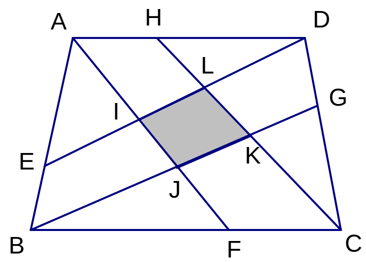

圖1-2

2. 當 E、F、G、H 爲平行四邊形之四邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 上之分點，且 $\overline{AE}$ ： $\overline{EB}$ ＝1：p， $\overline{BF}$ ： $\overline{FC}$ ＝1：q， $\overline{CG}$ ： $\overline{GD}$ ＝1：r， $\overline{DH}$ ： $\overline{HA}$ ＝1：s（圖 1-2），則 $\overline{AF}$ 、 $\overline{BG}$ 、 $\overline{CH}$ 、 $\overline{DE}$ 所構成之平行四邊形面積 A_{IJKL} 與 A_{ABCD} 之幾何關係爲何？

3. 當 F、G、H、I、J 爲正五邊形之五邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EA}$ 上之分點，且 $\overline{AF}$ ： $\overline{FB}$ ＝1：a， $\overline{BG}$ ： $\overline{GC}$ ＝1：b， $\overline{CH}$ ： $\overline{HD}$ ＝1：c， $\overline{DI}$ ： $\overline{IE}$ ＝1：d， $\overline{EJ}$ ： $\overline{JA}$ ＝1：e（圖 1-3），則 $\overline{AG}$ 、 $\overline{BH}$ 、 $\overline{CI}$ 、 $\overline{DJ}$ 、 $\overline{EF}$ 所構成之五邊形面積 A_{KLMNO} 與 A_{ABCDE} 之幾何關係爲何？

4. 當延伸至正 n 邊形時，各頂點與鄰邊分點之連線所構成之正 n 邊形面積與原正 n 邊形的幾何關係爲何？

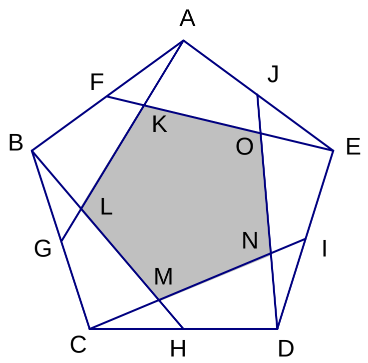

圖1-3

肆、研究過程

費曼三角形的性質如下：

（圖 2-1）正三角形 ΔABC 中， A' 、 B' 、 C' 爲 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CA}$ 、 $\overline{AB}$ 三邊上之分點，且 $\overline{AB'}:\overline{AC}=\overline{CA'}:\overline{CB}=\overline{BC'}:\overline{BA}=1:p$，則 $\overline{AA'}$ 、 $\overline{BB'}$ 、 $\overline{CC'}$ 所圍成之正三角形 ΔDEF 與 ΔABC 的比值爲 $\dfrac{(p-2)^2}{p^2-p+1}$

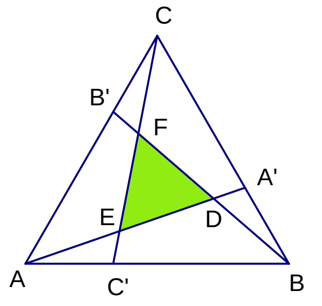

圖2-1

爲了討論方便，我們將以上頂點到分點與分點到頂點的比原爲 1：(p-1) 令成

1：p，也就是 $\overline{AB'}:\overline{B'C}=\overline{CA'}:\overline{A'B}=\overline{BC'}:\overline{C'A}=1:p$，

則 $\dfrac{\Delta DEF}{\Delta ABC}=\dfrac{p^2-2p+1}{p^2+p+1}$ ……①

當延伸到正三角形分點與頂點不同比例（如圖 2-2），當 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:p$，$\overline{CE}:\overline{EA}=1:q$，$\overline{AF}:\overline{FB}=1:r$，在 ΔABD 與一外分點 C 中，我們利用到孟式定理（Menelaus Theorem），求得 $\dfrac{\overline{DM}}{\overline{MA}}=\dfrac{rp}{1+p}$ ，所以 $\dfrac{\Delta AMC}{\Delta ABC}=1\times\dfrac{p}{1+p}\times\dfrac{1+p}{1+p+rp}=\dfrac{p}{1+p(1+r)}$ ，同理可求出 $\dfrac{\Delta ANB}{\Delta ABC}=\dfrac{q}{1+q(1+p)}$ ，$\dfrac{\Delta BOC}{\Delta ABC}=\dfrac{r}{1+r(1+q)}$ ，則

$$\frac{\Delta MNO}{\Delta ABC}=1-\frac{p}{1+p\left(1+r\right)}-\frac{q}{1+q\left(1+p\right)}-\frac{r}{1+r\left(1+q\right)}\text{……②}$$

接著討論分點等比例的等腰三角形（如圖 2-3），當 $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{BE}}{\overline{EC}}=\dfrac{\overline{CF}}{\overline{FA}}=\dfrac{1}{p}$ ，在 ΔABE 與外分點 C 中，同樣依孟式定理 $\dfrac{1}{p}\times\dfrac{1+q}{q}\times\dfrac{\overline{EG}}{\overline{GA}}=1$ 可知 $\dfrac{\overline{EG}}{\overline{GA}}=\dfrac{p^2}{1+p}$ ，求出 $\dfrac{\Delta AGC}{\Delta ABC}=\dfrac{p}{1+p}\times\dfrac{1+p}{1+p+p^2}$（因比例相同）$=\dfrac{\Delta BIC}{\Delta ABC}=\dfrac{\Delta BHA}{\Delta ABC}$ ，得 $\dfrac{\Delta GHI}{\Delta ABC}=$

$$1-3\times\frac{p}{1+p+p^2}=\frac{p^2-2p+1}{p^2+p+1}\text{……③}$$

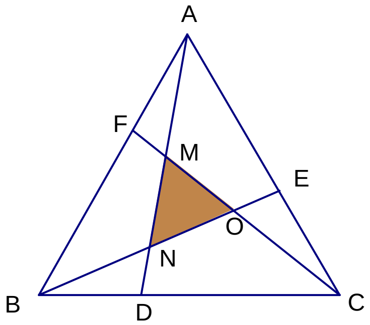

圖2-2

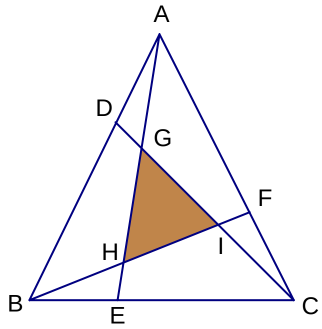

圖2-3

若是一般三角形分點不同比例的話呢？（如圖 2-4）首先$\frac{\overline{AI}}{\overline{IB}}=\frac{1}{p}$，$\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}=\frac{1}{q}$，$\frac{\overline{CH}}{\overline{HA}}=\frac{1}{r}$，在$\Delta ABG$與一外分點 C 中，$\frac{1}{p}\times\frac{1+p}{p}\times\frac{\overline{GF}}{\overline{FA}}=1$因此$\frac{\overline{GF}}{\overline{FA}}=\frac{pq}{1+q}$，可知$\frac{\Delta ACF}{\Delta ABC}=\frac{q}{1+q}\times\frac{1+q}{1+pq+q}=\frac{q}{1+q+pq}$，同理$\frac{\Delta BCE}{\Delta ABC}=\frac{p}{1+p+pr}$，$\frac{\Delta ABD}{\Delta ABC}=\frac{r}{1+r+rq}$，則可以得出

$$\frac{\Delta EFD}{\Delta ABC}=1-\frac{p}{1+p(1+r)}-\frac{q}{1+q(1+p)}-\frac{r}{1+r(1+q)}\cdots\cdots④$$

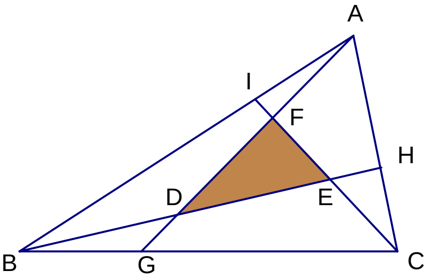

圖2-4

由上述之四個式子（①~④）可以分成三角形分點同比例與三角形分點不同比例兩個不同的公式，也就是說①（正三角形分點同比例）與③（等腰三角形分點同比例）式子相同以及②（正三角形分點不同比例）與④（一般三角形分點不同比例）式子相同，則我們可以得到

結論一

ΔABC（如圖 2-5）中，D、E、F 爲三邊$\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CA}$上之分點，$\overline{AE}$、$\overline{BF}$、$\overline{CD}$所構成之ΔGHI與ΔABC面積比爲

1. 當$\overline{AD}:\overline{DB}=\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{CF}:\overline{FA}=1:k$時，$\frac{A_{GHI}}{A_{ABC}}=1-\frac{3k}{1+k(1+k)}$

2. 當$\overline{AD}:\overline{DB}=1:p$，$\overline{BE}:\overline{EC}=1:q$，$\overline{CF}:\overline{FA}=1:r$時，

$$\frac{A_{GHI}}{A_{ABC}}=1-\frac{p}{1+p(1+r)}-\frac{q}{1+q(1+p)}-\frac{r}{1+r(1+q)}$$

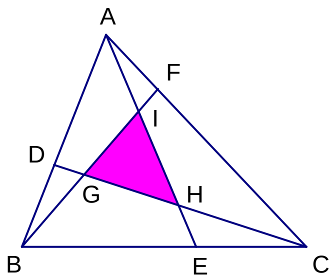

圖2-5

接著討論四邊形

分點同比例之平行四邊形（如圖 2-6），當 $\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{1}{p}$ 時，我們延長 $\overline{CH}$ 交 $\overleftrightarrow{AB}$ 於 N，因爲 $\frac{\overline{DH}}{\overline{AH}}=\frac{1}{p}$ 可知 $\frac{\overline{CD}}{\overline{AN}}=\frac{1+p}{(1+p)p}$，又 ΔCDI 與 ΔNEI 相似，知 $\frac{\overline{DI}}{\overline{EI}}=\frac{1+p}{1+p+p^2}$，則我們可以求得 $\frac{A_{CDI}}{A_{ABCD}}=\frac{1}{2}\times\frac{1+p}{(1+p)+(1+p+p^2)}=\frac{1+p}{2(2+2p+p^2)}$，同理 $\frac{A_{CDI}}{A_{ABCD}}=\frac{A_{BCL}}{A_{ABCD}}=\frac{A_{ABK}}{A_{ABCD}}$

$=\frac{A_{ADJ}}{A_{ABCD}}$，再用全部面積減去部分面積比得出

$$\frac{A_{IJKL}}{A_{ABCD}}=1-4\frac{1+p}{2(2+2p+p^2)}=1-\frac{1}{2}\times\frac{4(1+p)}{(1+p)(1+p)+1}\cdots\cdots⑤$$

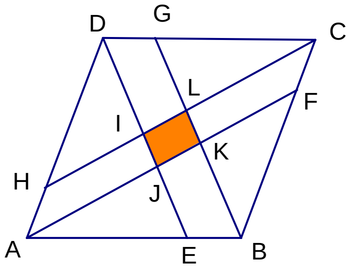

圖2-6

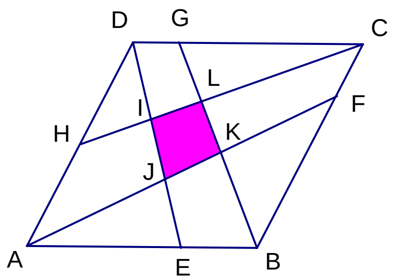

圖2-7

接著討論平行四邊形分點不同比例

（如圖 2-7）當 $\frac{\overline{DH}}{\overline{HA}}=\frac{1}{a}$、$\frac{\overline{AE}}{\overline{EB}}=\frac{1}{b}$、$\frac{\overline{BF}}{\overline{FC}}=\frac{1}{c}$、$\frac{\overline{CG}}{\overline{GD}}=\frac{1}{d}$，我們比照前述方法求得

$$\frac{A_{IJKL}}{A_{ABCD}}=1-\frac{1}{2}\times\left(\frac{1+c}{(1+b)(1+c)+1}+\frac{1+d}{(1+c)(1+d)+1}+\frac{1+b}{(1+a)(1+b)+1}\ \frac{1+a}{(1+d)(1+a)+1}\right)\cdots\cdots⑥$$

由式⑤與式⑥可以知道其一般形式相仿。

而延伸到一般四邊形分點同比例時，原本的方法因爲不可行，所以我們另外使用定座標的方法，（如圖 2-7）給定 A、B、C、D 四點座標，利用分點公式求出 E、F、G、H，接著求 $\overline{DE}$、$\overline{AF}$、$\overline{BG}$、$\overline{CH}$ 的方程式，求得四個交點，再代入面積公式即可。（因求出的面積比值極爲複雜且與前面的式子無密切關係，故在此不做討論）

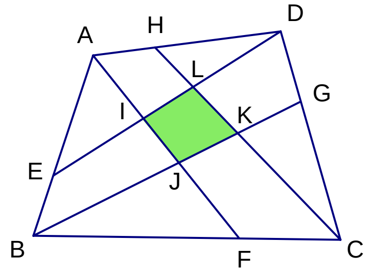

圖2-7

推廣到正五邊形

所給的條件爲$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{GC}}=\frac{\overline{CH}}{\overline{HD}}=\frac{\overline{DI}}{\overline{IE}}=\frac{\overline{EJ}}{\overline{JA}}=\frac{p}{q}$，$\angle BAG=\theta$，(註：以下圖形皆爲正 n 邊形且比例皆相同，爲了計算方便，所求式子直接以比例列出)

求 A_{KLMNO} 佔全部面積多少的比值，用餘弦定理求出$\overline{AG}=\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos 108^\circ}$，由正弦定理可得$\frac{\overline{AG}}{\sin 108^\circ}=\frac{\overline{BG}}{\sin\theta}=\frac{p}{\sin\theta}$，

因此$\sin\theta=\frac{p\cdot\sin 108^\circ}{\overline{AG}}$，在$\Delta AFK$中$\frac{\overline{AF}}{{}^*\sin 108^\circ}=\frac{\overline{AK}}{\sin(72^\circ-\theta)}$（*由相似形可知 KLMNO 爲正五邊形），所以$\overline{AK}=\frac{p\cdot sin(72^\circ-\theta)}{\sin 108^\circ}$，從正五邊形中我們可以知道$\frac{A_{ABC}}{A_{ABCDE}}=\frac{2}{5+\sqrt{5}}$，邊長被分點所分成的比爲 p：q 可知$\frac{A_{ABG}}{A_{ABCDE}}=\frac{2p}{(5+\sqrt{5})(p+q)}$與$\frac{A_{AFK}}{A_{ABCDE}}=\frac{2p}{(5+\sqrt{5})(p+q)}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{AG}}\cdot\frac{p}{(p+q)}$

$$=\frac{2p^2\sin(72^\circ-\theta)}{(5+\sqrt{5})(p+q)^2\sin 108^\circ\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos 108^\circ}}$$，則所求

$$\frac{A_{KLMNO}}{A_{ABCDE}}=1-\frac{10p}{(5+\sqrt{5})(p+q)}+\frac{10p^2\sin(72^\circ-\theta)}{(5+\sqrt{5})(p+q)^2\sin 108^\circ\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos 108^\circ}}\cdots\cdots ⑦$$

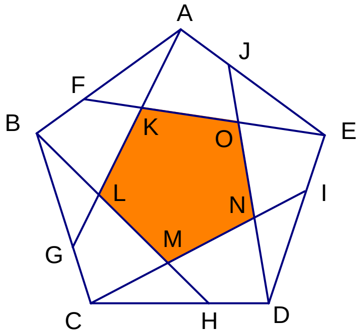

圖2-8

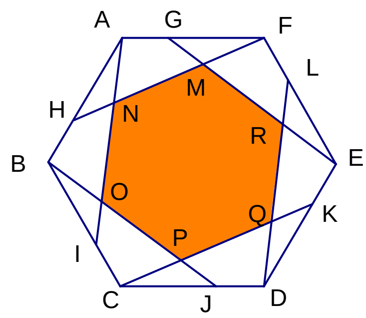

圖2-9

接著討論正六邊形

同樣地若條件爲$\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}=\frac{\overline{BI}}{\overline{IC}}=\frac{\overline{CJ}}{\overline{JD}}=\frac{\overline{DK}}{\overline{KE}}=\frac{\overline{EL}}{\overline{LF}}=\frac{\overline{FG}}{\overline{BA}}=\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{q}}$，$\angle BAI=\theta$，

透過同樣方法，由餘弦定理可得知$\overline{AI}=\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos 120^\circ}$，正弦定理可知

$\frac{\overline{AI}}{\sin 120^\circ}=\frac{\overline{BI}}{\sin\theta}=\frac{p}{\sin\theta}$，因此$\sin\theta=\frac{p\cdot\sin 120^\circ}{\overline{AG}}$，求出$\frac{A_{ABC}}{A_{ABCDEF}}=\frac{1}{6}$，邊長同樣被分點所分

成的比爲 p：q，可知 $\dfrac{A_{ABI}}{A_{ABCDEF}}=\dfrac{p}{6(p+q)}$，$\dfrac{A_{AHN}}{A_{ABCDEF}}=\dfrac{p}{6(p+q)}\cdot\dfrac{\overline{AN}}{\overline{AI}}\cdot\dfrac{p}{(p+q)}=$

$$\frac{p^3\sin(60^\circ-\theta)}{6(p+q)^2\sin120^\circ\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos120^\circ}}\text{，}$$

得到 $\dfrac{A_{MNOPQR}}{A_{ABCDEF}}=1-\dfrac{6p}{6(p+q)}+\dfrac{6p^3\sin(60^\circ-\theta)}{6(p+q)^2\sin120^\circ\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos120^\circ}}$ ……⑧

結論二

從上式可發現五邊形與六邊形使用相同方法所導出來的式子（⑦及⑧）非常類似，試著導出 n 邊形的一般式如下：

正 n 邊形分點比爲 p：q，令 θ 如（圖 2-10），由式⑦及⑧可以知道

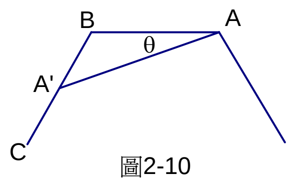

圖2-10

$$\sin\theta=\frac{p\sin(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}{\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}}$$

所求面積比＝

$$1-\frac{np}{\frac{4}{n}\cos^2\theta'(p+q)}+\frac{np^3\sin(180^\circ-\frac{(n-2)180^\circ}{n}-\theta)}{\frac{4}{n}\cos^2\theta'(p+q)^2\sin(\frac{(n-2)180^\circ}{n})\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}}$$

，且 θ' 爲正 n 邊形一內角的 $\dfrac{1}{2}=\left[\dfrac{90(n-2)}{n}\right]^\circ$

伍、研究結果

1.設 D、E、F 爲任意三角形 ΔABC 上之分點，其中 $\overline{AE}$ 、$\overline{BF}$ 、$\overline{CD}$ 所圍出 ΔGHI 的面積（A_{GHI}）

與 A_{ABC} 比值如下:

（1）分點等比例：若 $\overline{AD}$ ：$\overline{DB}$ ＝ $\overline{BE}$ ：$\overline{EC}$ ＝ $\overline{CF}$ ：$\overline{FA}$ ＝1：p，

$$\frac{A_{GHI}}{A_{ABC}} = 1 - \frac{3p}{1+p(1+p)}$$

（2）分點不同比例：若 $\overline{AD}$ ：$\overline{DB}$ ＝1：p，$\overline{BE}$ ：$\overline{EC}$ ＝1：q， $\overline{CF}$ ：$\overline{FA}$ ＝1：r，

$$\frac{A_{GHI}}{A_{ABC}} = 1 - \frac{p}{1+p\left(1+r\right)} - \frac{q}{1+q\left(1+p\right)} - \frac{r}{1+r\left(1+q\right)}\ 。$$

2.平行四邊形 ABCD，E、F、G、H 爲四邊之分點，$\overline{AE}$ 、$\overline{BF}$ 、$\overline{CG}$ 、$\overline{DH}$ 所圍成的四邊形面積

（A_{IJKL}）與 A_{ABCD} 比值：

（1） 平行四邊形分點等比例：當 $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{DG}}{\overline{GA}}$ ＝1：p，

$$\frac{A_{IJKL}}{A_{ABCD}} = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{4(1+p)}{(1+p)(1+p)+1}$$

（2）平行四邊形分點不同比例：當 $\frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$ ＝1：p，$\frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$ ＝1：q ，$\frac{\overline{CF}}{\overline{FD}}$ ＝1：r ，$\frac{\overline{DG}}{\overline{GA}}$ ＝1：s 時，

$$\frac{A_{IJKL}}{A_{ABCD}} = 1 - \frac{1}{2} \times \left(\frac{1+c}{(1+b)(1+c)+1} + \frac{1+d}{(1+c)(1+d)+1} + \frac{1+b}{(1+a)(1+b)+1} + \frac{1+a}{(1+d)(1+a)+1} \right)。$$

3．正 n 邊形分點等比例 p：q 之一般式

$$1 - \frac{np}{\frac{4}{n}\cos^2\theta'(p+q)} + \frac{np^3\sin(180^\circ - \frac{(n-2)180^\circ}{n} - \theta)}{\frac{4}{n}\cos^2\theta'(p+q)^2\sin(\frac{(n-2)180^\circ}{n})\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}}$$

$$且\ \sin\theta = \frac{p\sin(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}{\sqrt{p^2+(p+q)^2-2p(p+q)\cos(\frac{(n-2)180^\circ}{n})}}\ ，\ \theta' = \left[\frac{90(n-2)}{n}\right]^\circ$$

陸、未來展望

1.一般四邊形不使用定座標的方法，繼而觀察其否同樣具有規律。

2.在使用 GSP 的過程中，發現如下述的情形

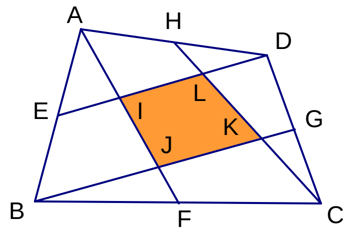

圖3-1

已知 E、F、G、H 爲各邊中點，則無論 ABCD 爲何種四邊形，$A_{ABCD}:A_{IJKL}$ 的比值會介於 5 到 6 之間，(最大値在四邊形逼近於三角形時）是否能夠進一步證明。

柒、參考資料

http://mysite.mweb.co.za/residents/profmd/feynman.pdf

評語

相關研究成果已有發表，作者所用方法或可化簡。”推廣”至平行四邊形方面，困難的地方在於任意四邊形，可朝這方面繼續發展。