

臺灣二〇〇七年國際科學展覽會

科 別：數學

作品名稱：環狀網路的拓樸性質研究

學校 / 作者：國立新竹高級中學
國立新竹高級中學

高瑋駿
鄭慕昀

作者簡介



大家好，我是高瑋駿，目前就讀新竹高中，二年級。國中時，開始深入了解數學、物理化學，覺得相當深奧，也引發我去探討的興趣及熱誠，上了高中，班上多了許多對數理具有高度興趣的同學，透過不斷的討論，也讓我對數理有更進一步的了解，而且，在我們研究過程中，他們也給了不少實用的建議。

藉由這次的專題研究，我學會了如何多方面思考、討論，以及嚴謹的解決問題，同時也非常感謝徐教授和洪老師指導，使我可以完成這份報告。

作者簡介



我是鄭慕昀，目前就讀於國立新竹高中二年級。唸國中時，開始對數學、物理產生興趣，喜歡閱讀各類科普書籍。這次參加校內數學專題研究，在洪誌陽老師的指導下，學到不少課外的知識，也從中獲得許多樂趣。很高興可以參加今年的國際科展，這是我第一次參加，讓我對數學嚴謹及求真的精神，有更多的體會。

目錄

壹、研究動機.....	P.6
貳、研究目的.....	P.6
參、定義.....	P.7-8
一. 名詞定義.....	P.7
二. 圖形定義.....	P.8
肆、研究方法、過程.....	P.9-42
一. C_3^n 爲一漢米頓圖.....	P.9
二. C_3^n 爲一漢米頓連結圖.....	P.10-12
三. C_3^n 爲一超容錯漢米頓圖.....	P.12-13
四. C_3^n 爲一超生成連結圖.....	P.13-17
五. C_3^n 之寬直徑 $D_k(C_3^n) = \begin{cases} n & 1 \leq k \leq n \\ n+1 & n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$	P.17-19
六. C_3^n 爲一泛圈圖.....	P.19-21
七. C_3^n 爲一泛連結圖.....	P.22-25
八. C_3^n 爲一泛可置性漢米頓圖.....	P.25-28
九. C_3^n 爲一互相獨立漢米頓圖.....	P.28-35
十. C_3^n 爲一互相獨立漢米頓連結圖.....	P.35-42
伍、研究結果與討論.....	P.43
陸、展望.....	P.44
柒、參考資料.....	P.45

Abstract

In any C_3^n , we prove that there exist cycles which have any length between 3 and 3^n and paths which have any length between their smallest distance and longest Hamiltonian paths in any two different nodes; for any two nodes, there exist varied Hamiltonian cycles, making the two nodes locate on any possible counterpart position (only limited by the distance between the two nodes). In C_3^n , there are $2n$ internally-disjoint spanning cycles, and $2n-1$ internally-disjoint spanning paths. Besides, we also prove C_3^n has no more than $2n$ disjoint spanning paths, and calculate its wide diameter.

摘要

本報告證明在環狀網路 C_3^n 中，存在有長度 3 到 3^n 的所有迴圈；任何相異兩點都有各種不同的長度的路徑：從最短的距離到最長的漢米頓路徑；取定任意兩點，存在有各種不同的漢米爾頓迴圈，使得兩點位於所有可能的相對位置上(僅被兩點之間的距離限制)。在 C_3^n 中，也具有 $2n$ 個彼此不相交、經過所有點的迴圈，以及 $2n-1$ 個彼此不相交、經過所有點的路徑。除此之外，也證明了，在兩相異點間，具有個數不超過 $2n$ 且互斥的路徑，且這些路徑經過所有點。我們也估算了它的寬直徑。

壹、研究動機:

在徐力行教授的著作<動物園裡的數學>中，提到 n 個電腦連成一串的平行電腦，由於這樣的平行電腦在某特殊情況下非常重要，如果一個電腦間的某一條連線壞了，將造成整個整個平電腦系統中斷，這時再每一邊都做一個備份或是連接最左右的兩點，皆可讓電腦間在某一條連線壞掉的情況下保持連通，但顯然的第二個連成一個環形網路的方法較佳，我們因此產生了興趣，並開始研究環狀網路的性質，希望能夠找到其它的特殊性質。

貳、研究目的

- 一. 證明 C_3^n 為一超生成連結圖。
- 二. 證明 C_3^n 為一泛連結圖，以及泛可置性連結圖。
- 三. 計算 C_3^n 之寬直徑。
- 四. 證明 C_3^n 為一互相獨立漢米頓圖，以及互相獨立漢米頓連結圖。

參、定義

一、名詞定義

$G=(V,E)$ 為一圖形，其中 V 為一有限集合，而 E 是 $\{(u,v) \mid (u,v)$ 為 V 中的無序組對 $\}$ 的子集合。我們說 V 為圖形 G 的頂點集合，而 E 是圖形 G 之邊集合，若 $(u,v) \in E$ ，則稱 u,v 為相鄰的二點。對任一點 u ，我們以 $N_G(u)$ 來表示 u 的鄰域，且 $N_G(u) = \{v \mid (v,u) \in E\}$ 。對 V 中任一點 x ， $degG(x)$ 表示 x 在 G 中所連接的邊數。如果 $(u,v) \in E$ ，則 u 和 v 即為相鄰點。路徑(path)是由相鄰且連續的點所組成，寫成 $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ ，其中 v_1, v_2, \dots, v_k 都是相異點，我們也可以將此路徑表示為 $\langle v_1, P, v_k \rangle$ ，且將在路徑 $P \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ 上第 i 個點表示為 $P(i)$ 。我們用 $d(u,v)$ 來表示連結 u,v 的最短距離。如果一路徑包含所有點，我們稱此路徑為漢米頓路徑，且用 $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n(G)} \rangle$ 來表示在此路徑中所有有序的點。迴圈(cycle)為一路徑，且至少含有三個內點，其中第一點和最後一點為同一點。如果一迴圈包含圖形 G 中所有的點，我們稱此迴圈為漢米頓圈，且用 $\langle u_1, u_2, \dots, u_{n(G)}, u_1 \rangle$ 來表示在此迴圈中所有有序的點。

如果一圖形 G 中含有漢米頓圈，我們稱此圖形 G 為漢米頓圖(hamiltonian graph)。如果一圖形 G 中含有漢米頓路徑，我們稱此圖形 G 為漢米頓連結圖(hamiltonian connected graph)。

在圖形 G 中有兩條漢米頓路徑 $P_1 = \langle v_1, v_2, \dots, v_{n(G)} \rangle$ 和 $P_2 = \langle u_1, u_2, \dots, u_{n(G)} \rangle$ ，若 $P_1(1) = P_2(1) = u$ ， $P_1(n(G)) = P_2(n(G)) = v$ ，且對任何 i ， $1 < i < n(G)$ ， $P_1(i) \neq P_2(i)$ ，我們稱 P_1 、 P_2 為獨立的路徑。我們說在圖形 G 中，有一個從 u 到 v 的漢米頓路徑集合 $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ ，若在此集合中任兩條漢米頓路徑都是獨立，則稱圖形 G 是互相獨立(mutually independent)。

互相獨立漢米頓連結圖的觀念是從下列應用而產生的，如果有 k 件資料需要從 u 傳送到 v ，而且這些資料要在每一個處理器上被加工(加工過程要花一段時間)，然後我們需要互相獨立漢米頓路徑，來讓每件資料在每個處理器上不會有等待的時間。

圖形 G 中的一個 k 集裝箱(k -container) $C(x,y)$ 是指在圖形 G 的內部頂點 x,y 之間的 k 條內部不相交路徑。由Menger定理[5]，在一個 k 連結圖(k -connected graph)中，任意二點間存在 k 集裝箱。而如果 $C(x,y)$ 是個 k 集裝箱，並且經過圖形 G 中所有點，則稱 $C(x,y)$ 為 k^* 集裝箱(k^* -container)。若在任意二點中存在 k^* 集裝箱的 k 正則連結圖，並且命名為完全 k^* 連結圖

(globally k^* -connected graph)。

為此，若 k 正則圖 $G=\{V \cup E\}$ 中兩相異點存在 i^* 集裝箱，且 $1 \leq i \leq k$ ，我們就稱 G 是超生成連結圖(*super spanning connected graph*)。

二、圖形定義

圖1有3個點串成一串，我們以 P_3 表示。



圖1

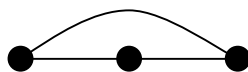


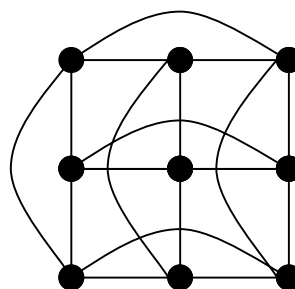
圖2

加一條邊連結最左邊和最右邊的點(圖2)，我們以 C_3 表示，可推廣至 C_m 表 m 個點連成一圓的圖形，爲了嚴格要求兩點之間只連一條邊，我們要求 $m \geq 3$ 。

利用(笛卡爾)乘積(*Cartesian Product*)，定義 C_3^n 爲 $(C_3^{n-1}) \times (C_3^1)$ 。

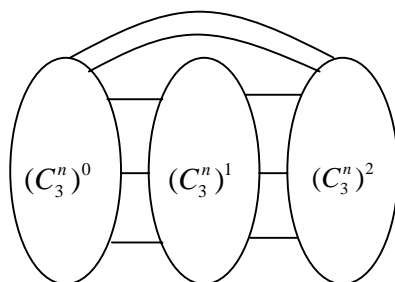


C_3^1



$C_3^2 = C_3^1 \times C_3^1$

爲了研究便利起見，我們觀察圖形的結構，可以將 C_3^n 表示成 $\{(C_3^n)^0, (C_3^n)^1, (C_3^n)^2; M\}$ ，其中 $(C_3^n)^m$ ， $m = \{0, 1, 2\}$ ，爲 C_3^n 的子圖， M 爲集合 $\{(u, v) \mid u \in (C_3^n)^i, v \in (C_3^n)^j, i, j = 0, 1, 2, i \neq j, (u, v) \in E\}$ ，很明顯的，可知 $(C_3^n)^m = C_3^{n-1}$ 。(如圖)



$$C_3^n = C_3^{n-1} \times C_3^1$$

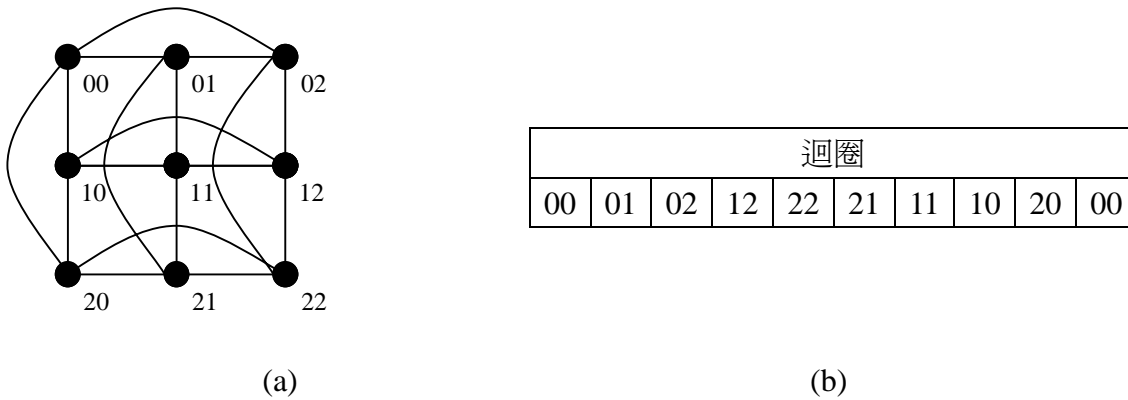
肆、研究方法、過程

一、漢米頓圖(*hamiltonian graph*)

命題 1： C_3^n 為一漢米頓圖。

(一)檢查

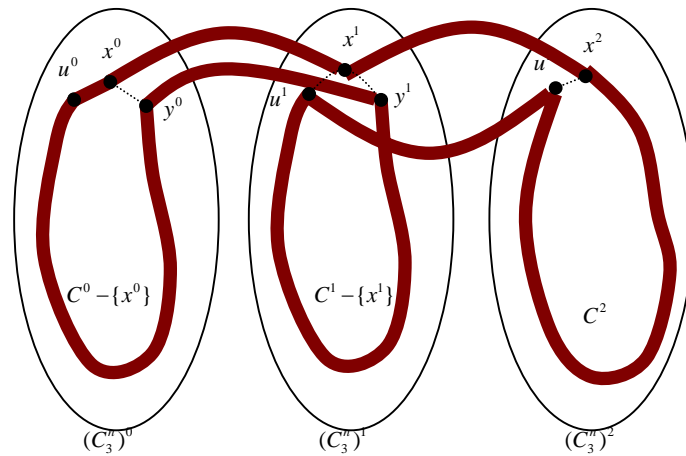
我們先檢查 $n=1$ 與 $n=2$ 時。當圖形為 C_3^1 時，很明顯地， C_3^1 是一漢米頓圖。當圖形為 C_3^2 時，也為一漢米頓圖，檢查過程如下(圖一)。



圖一(a) C_3^2 、(b)檢查過程

(二)證明

我們用數學歸納法來證明。不失一般性，我們可以令 $u = u^0$ ，由歸納法可知在 $(C_3^n)^0$ 中，有一 u^0 以為終點的漢米頓圈 C^0 ，其中 $C^0(3^{n-1} - 2) = y^0$ 、 $C^0(3^{n-1} - 1) = x^0$ 。則可畫出漢米頓圈 $C = \langle u^0, C^0 - \{x^0\}, y^0, y^1, C^1 - \{x^1\}, u^1, u^2, C^2, x^2, x^1, x^0, u^0 \rangle$ ，此命題得證。(圖二)



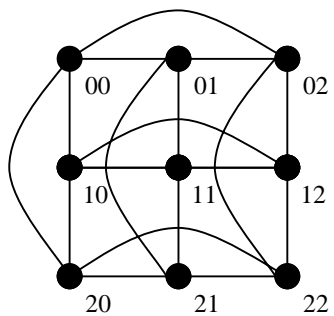
圖二

二、漢米頓連結圖(*hamiltonian connected graph*)

命題 2： C_3^n 為一漢米頓連結圖

(一)檢查

我們先檢查 $n=1$ 與 $n=2$ 時。當圖形為 C_3^1 時，很明顯地， C_3^1 是一漢米頓連結圖。當圖形為 C_3^2 時，也為一漢米頓連結圖，檢查過程如下(圖三)



(a)

(u, v)	路徑								
$(00, 22)$	00	01	02	12	11	10	20	21	22
$(00, 02)$	00	01	11	10	20	21	22	12	02

(b)

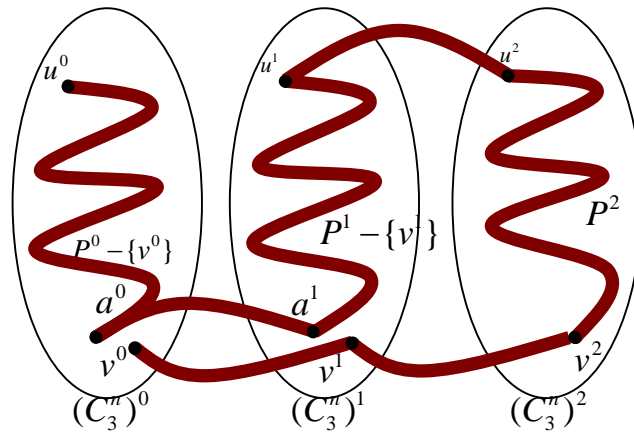
圖三(a) C_3^2 、(b)檢查過程

(二)證明

我們用數學歸納法證明。由歸納法可知，在 $(C_3^n)^j$ 中，有一以 u^j 為起點，以 v^j 為終點的漢米頓路徑 P^j ，不失一般性，我們令 $u = u^0$ 。

(1) $u, v \in (C_3^n)^j$ ，不失一般性，我們假設 $j = 0$ ， $v = v^0$ 。

在 $(C_3^n)^0$ 中，有一以 u^0 為起點，以 v^0 為終點的漢米頓路徑 P^0 ，其中 $P^0(3^{n-1} - 1) = a^0$ ，然後畫出路徑 $P = \langle u^0, P^0 - \{v^0\}, a^0, a^1, P^1 - \{v^1\}, u^1, u^2, P^2, v^2, v^1, v^0 \rangle$ 經過所有點，故此狀況得證(圖四)。

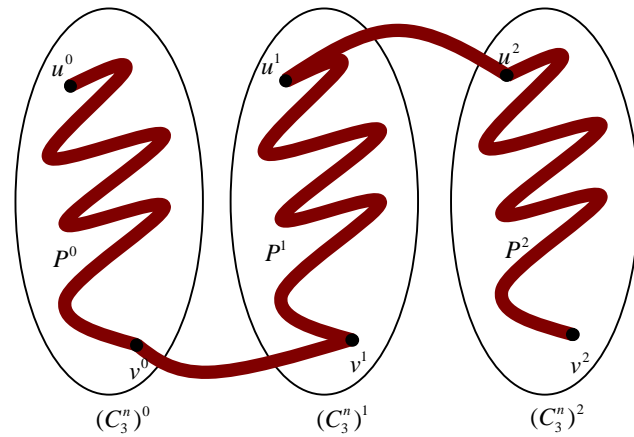


圖四

(2) $u \in (C_3^n)^i$, $v \in (C_3^n)^j$, $i \neq j$, 不失一般性, 我們假設 $j=2$, $v = v^2 \neq u^2$ 。

在 $(C_3^n)^0$ 中, 有一以 u^0 為起點, 以 v^0 為終點的漢米頓路徑 P^0 。然後畫出路徑

$P = \langle u^0, P^0, v^0, v^1, P^1, u^1, u^2, P^2, v^2 \rangle$ 經過所有點, 故此狀況得證(圖五)。

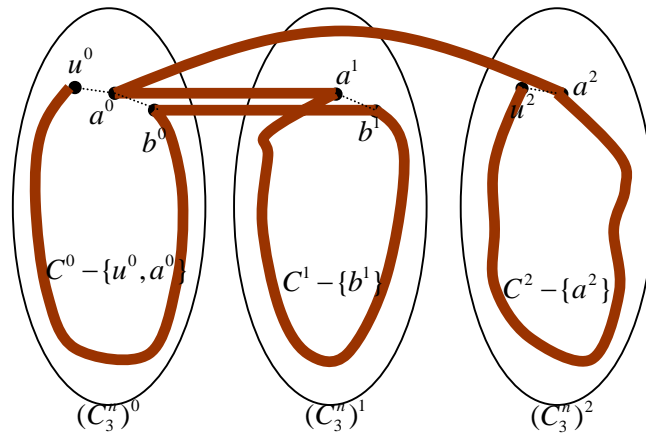


圖五

(3) $u \in (C_3^n)^i$, $v \in (C_3^n)^j$, $i \neq j$, 不失一般性, 我們假設 $j=2$, $v = v^2 = u^2$ 。

由命題 1 可知, 在 $(C_3^n)^0$ 中可取得一以 u^0 起點、終點之漢米頓圈 C^0 , 且令

$C^0(3^n - 1) = a^0$ 、 $C^0(3^n - 2) = b^0$, 然後畫出漢米頓路徑 $P = \langle u^0, C^0 - \{u^0, a^0\}, b^0, b^1, C^1 - \{b^1\}, a^1, a^0, a^2, C^2 - \{a^2\}, u^2 \rangle$ (圖六)。



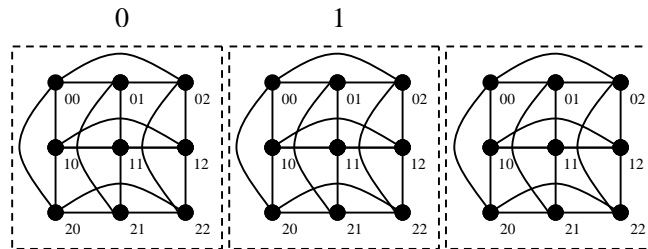
圖六

由(1)、(2)、(3)可知，此命題得證。

三、超容錯漢米頓圖(*super fault-tolerant hamiltonian graph*)[4]

對一個 k 正則的漢米頓及漢米頓連結圖 G ，若去掉最多 $k-2$ 個邊和(或)點，依然還是一個漢米頓圖，而且去掉最多 $k-3$ 個邊和(或)點，依然還是一個漢米頓連結圖，則我們稱 G 為一超容錯漢米頓圖 (*super fault-tolerant hamiltonian graph*)。

(一)檢查(圖七)



(a)

(u,v)	路徑											
(000,001)	000	001	012	010	011	021	022	020	220	221	201	211

路徑												
212	202	222	122	121	120	110	111	112	102	100	101	001

(b)

u	迴圈											
000	000	001	012	010	011	021	022	020	220	221	201	211

迴圈													
212	202	222	122	121	120	110	111	112	102	100	101	001	000

(c)

圖七(a) C_3^3 (b) $F = \{(000, 010) \in E\} \cup \{200, 210 \in V\}$

(c) $F = \{(000, 010), (111, 112) \in E\} \cup \{200, 210 \in V\}$

在參考資料[4]中，證明了下面的命題：

假設 G_1, G_2, \dots, G_n 是 n 個 k 正則超容錯漢米頓圖，而且各個 $G_i (i=1, 2, \dots, n)$ 的頂點個數相等，當 $n \geq 3$ 且 $k \geq 5$ 時， $G(G_1, G_2, \dots, G_n; C_n)$ 是一個 $(k+2)$ 正則的超容錯漢米頓圖。

利用這個定理，我們很容易有下面的結論：

命題 3： $C_3^n (n \geq 3)$ 是一 $2n$ 正則的超容錯漢米頓圖。

(二)證明：用暴力法檢查得 C_3^3 是一 4-漢米頓圖(4-hamiltonian)，且是一 3-漢米頓連結圖(3-hamiltonian connected)，即 C_3^3 是一 6 正則的超容錯漢米頓圖。

因為 C_3^n 滿足參考資料中圖形之連結，即 $C_3^n = G(C_3^{n-1}, C_3^{n-1}, C_3^{n-1}; C_3)$ ，故由其定理可推得此命題成立。事實上，用暴力法檢查亦可得， C_3^2 是一 2-漢米頓圖，且是一 1-漢米頓連結圖，即 C_3^2 是一 4 正則的超容錯漢米頓圖。可知此定理 n 值的下限可至 2。

四、超生成連結圖(super spanning connected graph)

在一圖形 $G = (V, E)$ 中，若此圖中任意相異兩點間，對任意的 $i, 1 \leq i \leq \deg(G)$ ，存在一個 i^* 集裝箱 $i^*-C(u, v)$ ，則我們稱圖形 G 是超生成連結圖。

證明此命題之前，我們須先證明一引理。

引理 1： 假設在 C_3^{n-1} 中，若任意相異兩點 u, v ，對於 $1 \leq i \leq \deg(G) = 2n - 2$ 存在集裝箱 $i^*-C(u, v) = \{P_j | 1 \leq j \leq i = 2n - 2\}$ ，則在 C_3^n 中，任意的相異 u, v ，對於 $1 \leq i \leq 2n$ ，亦存在集裝箱 $i^*-C(u, v)$ ，以及 $i+2^*-C(u, v)$ 。

證明：

(a) $i^*-C(u,v)$ 的存在性。

(1) $u, v \in (C_3^n)^j$ ，不失一般性，我們令 $j=0$ ， $u = u^0$ ， $v = v^0$ 。

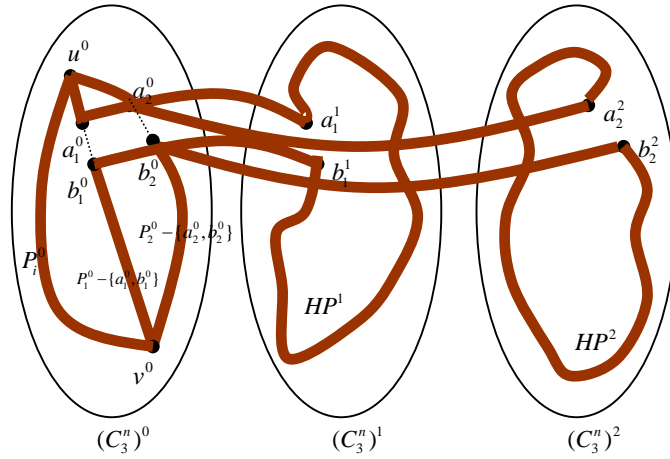
由歸納法假設， $(C_3^n)^0$ 存在有 $i^*-C(u,v) = \{P_j^0 \mid 1 \leq j \leq i\}$ ，可取得一邊集合

$\{(a_m^0, b_m^0) \mid (a_m^0, b_m^0) \in P_m^0 \cap E, m=1,2\}$ ，並在 $(C_3^n)^1$ 、 $(C_3^n)^2$ 中，可取得以 a_1^1 、 b_1^1 及 a_2^2 、 b_2^2 為起終

點之漢米頓路徑 HP^1 及 HP^2 。對 $i=1,2$ ， $P_1 = \langle u^0, a_1^0, a_1^1, HP^1, b_1^1, b_1^0, P_1^0 - \{a_1^0, b_1^0\}, v^0 \rangle$ 、 $P_2 = \langle u^0,$

$a_2^0, a_2^2, HP^2, b_2^2, b_2^0, P_2^0 - \{a_2^0, b_2^0\}, v^0 \rangle$ ；對 $3 \leq i \leq \deg((C_3^n)^0)$ ， $P_i = P_i^0$ ，經過圖中所有點，故此

狀況得證(圖八)。



圖八

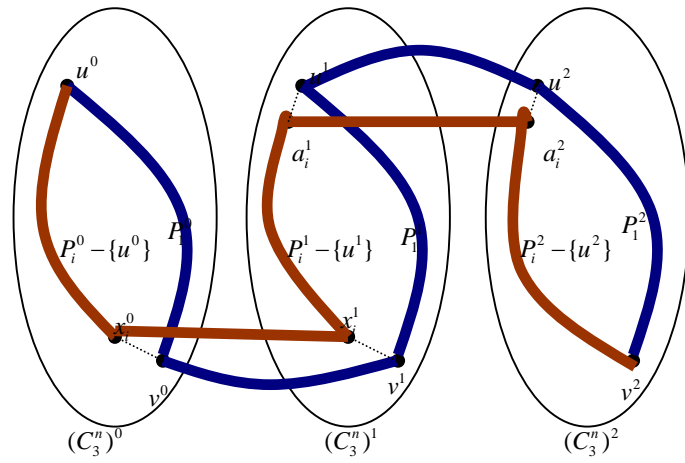
(2) $u \in (C_3^n)^i$ ， $v \in (C_3^n)^j$ ，其中 $i \neq j$ ，則可令 $j=2$ ， $v = v^2$ 。

可取得點集合 $\{a_m^0 \mid a_m^0 \in P_m^0 \cap N(u^0) \cap E, 2 \leq m \leq \deg((C_3^n)^0)\}$ 、

$\{x_m^0 \mid x_m^0 \in P_m^0 \cap N(v^0) \cap E, 2 \leq m \leq \deg((C_3^n)^0)\}$ 。對 $i=1$ ， $P_1 = \langle u^0, P_1^0, v^0, v^1, P_1^1, u^1, u^2, P_1^2, v^2 \rangle$ ；對

$2 \leq i \leq \deg((C_3^n)^0)$ ， $P_i = \langle u^0, P_i^0 - \{u^0\}, x_i^0, x_i^1, P_i^1 - \{u^1\}, a_i^1, a_i^2, P_i^2 - \{u^2\}, v^2 \rangle$ ，經過圖中所有

點，故此狀況得證(圖九)。

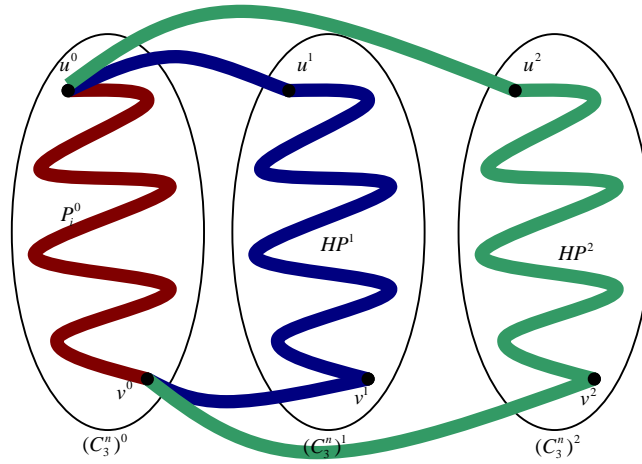


圖九

(b) $i+2^*-C(u,v)$ 的存在性。

(1) $u, v \in (C_3^n)^j$ ，不失一般性，我們令 $j=0$ ， $u = u^0$ ， $v = v^0$ 。

由歸納法假設， $(C_3^n)^0$ 存在有 $i^*-C(u,v) = \{P_j^0 \mid 1 \leq j \leq i\}$ ，並在 $(C_3^n)^1$ 、 $(C_3^n)^2$ 中，可取得以 u^1 、 v^1 及 u^2 、 v^2 為起終點之漢米頓路徑 HP^1 及 HP^2 。對 $1 \leq i \leq \deg((C_3^n)^0)$ ， $P_i = P_i^0$ ；對 $i+2$ ， $P_{i-1} = \langle u^0, u^1, HP^1, v^1, v^0 \rangle$ 、 $P_i = \langle u^0, u^2, HP^2, v^2, v^0 \rangle$ ，經過圖中所有點，故此狀況得證。(圖十)

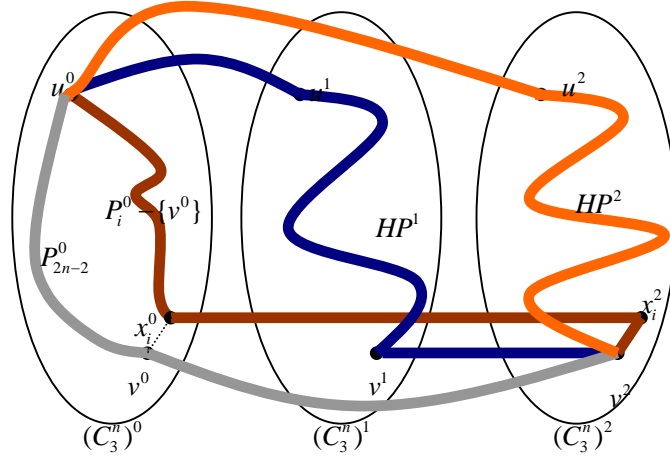


圖十

(2) $u \in (C_3^n)^i$ ， $v \in (C_3^n)^j$ ，其中 $i \neq j$ ，則可令 $j=2$ ， $v = v^2$ 。

可取得點集合 $\{x_m^0 \mid x_m^0 \in P_m^0 \cap N(v^0), 2 \leq m \leq \deg((C_3^n)^0)\}$ 。在 $(C_3^n)^1$ 中，可取得以 u^1 、 v^1 為起終點之漢米頓路徑 HP^1 ；在 $(C_3^n)^2 - \{x_m^2 \mid 1 \leq m \leq \deg((C_3^n)^2) - 1\}$ 中，由命題 3 可知，可取得以

u^2, v^2 為起終點之漢米頓路徑 HP^2 。對 $1 \leq i \leq \deg((C_3^n)^0) - 1$, $P_i = \langle u^0, P_i^0 - \{v^0\}, x_i^0, x_i^2, v^2 \rangle$;
 對 $i = \deg((C_3^n)^0)$, $P_i = \langle u^0, P_i^0, v^0, v^2 \rangle$; 對 $i+2$, $P_{i-1} = \langle u^0, u^1, HP^1, v^1, v^2 \rangle$ 、 $P_i = \langle u^0, u^2,$
 $HP^2, v^2 \rangle$, 經過圖中所有點, 故此狀況得證(圖十一)。



圖十一

由(a)、(b)可知, 此引理得證。

依此, 我們有以下的命題。

命題 4: C_3^n 是一超生成連結圖。

(一)檢查

我們先檢查 $n=1$, 檢查過程如下(圖十二)。

(u,v)	i	路徑		
(00,02)	1	00	01	02
			01	02
	2	00	02	

圖十二、檢查過程

(二)證明

因為 C_3^1 中任兩點 u, v 均有 $1^*-C(u, v)$ 的存在, 由引理可知, C_3^2 中任兩點有 $1^*-C(u, v)$ 、
 $3^*-C(u, v)$ 的存在; 同理, 由 C_3^1 任兩點 u, v 均有 $2^*-C(u, v)$ 的存在, 可推得, C_3^2 中任兩點有
 $2^*-C(u, v)$ 、 $4^*-C(u, v)$ 的存在。

由歸納法假設，已知在 C_3^{n-1} 中任兩點 u, v 均有 $1^*, 3^*, \dots, 2n-5^*, 2n-3^* - C(u, v)$ 的存在，由引理可知， C_3^n 中任兩點有 $1^*, 3^*, \dots, 2n-3^*, 2n-1^* - C(u, v)$ 的存在；同理，由 C_3^{n-1} 任兩點 u, v 均有 $2^*, 4^*, \dots, 2n-4^*, 2n-2^* - C(u, v)$ 的存在，可推得， C_3^n 中任兩點有 $2^*, 4^*, \dots, 2n-2^*, 2n^* - C(u, v)$ 的存在，故此命題得證。

五、寬直徑 (wide diameter)

在一個連結度至少為 κ 的圖形 G 中任兩點 x 與 y ，以 $C_\kappa(x, y)$ 表示 x 與 y 之間一組 κ 條點互斥路徑，亦被稱之為寬度為 κ 之 (x, y) -container。在 $C_\kappa(x, y)$ 中最長路徑的長度代表其長度，記為 $l(C_\kappa(x, y))$ 。對任兩點 x 到 y 而言， $C_\kappa(x, y)$ 可能不只一組，其中長度最小者稱為最佳路徑集，以 $C_\kappa^*(x, y)$ 表示。 $l(C_\kappa^*(x, y))$ 即代表 κ -寬距離，記作 $d_\kappa(x, y)$ 。對圖形 G 而言，選取不一樣的 x 和 y 會得到不一樣的 $d_\kappa(x, y)$ ，其中最大者稱為 κ -寬直徑，記作 $D_\kappa(G)$ 。

在估計 C_3^n 的 κ -寬直徑，即 $D_\kappa(C_3^n)$ 時，我們先證明一個引理。

引理 2：對所有的 $u, v \in C_3^n$ ， $d_\kappa(u, v) \leq d_1(u, v) + 2 \quad 1 \leq \kappa \leq 2n$

若已知 $d_1(u, v) = l$ ，不失一般性，可令 $u = \underbrace{000 \dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$ ， $v = \underbrace{11 \dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$ 。我們可以找到三類

互斥連通路徑：

(1) 第一類：恰 l 條長度為 l 的互斥路徑

$\underbrace{000 \dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000 \dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000 \dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000 \dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$
$\underbrace{1000 \dots 0}_{\text{共 } n-1 \text{ 個}}$	$0 \underbrace{1000 \dots 0}_{\text{共 } n-2 \text{ 個}}$	$00 \underbrace{1000 \dots 0}_{\text{共 } n-3 \text{ 個}}$	$\underbrace{00 \dots 0}_{\text{共 } l-1 \text{ 個}} \underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{11000 \dots 0}_{\text{共 } n-2 \text{ 個}}$	$01 \underbrace{1000 \dots 0}_{\text{共 } n-3 \text{ 個}}$	$001 \underbrace{1000 \dots 0}_{\text{共 } n-4 \text{ 個}}$	$\underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } l-2 \text{ 個}} \underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{111000 \dots 0}_{\text{共 } n-3 \text{ 個}}$	$011 \underbrace{1000 \dots 0}_{\text{共 } n-4 \text{ 個}}$	$0011 \underbrace{1000 \dots 0}_{\text{共 } n-5 \text{ 個}}$	$\underbrace{1100 \dots 0}_{\text{共 } l-3 \text{ 個}} \underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$
.....
$\underbrace{11 \dots 1}_{\text{共 } l-1 \text{ 個}} \underbrace{00 \dots 0}_{\text{共 } n-l+1 \text{ 個}}$	$0 \underbrace{11 \dots 1}_{\text{共 } l-1 \text{ 個}} \underbrace{00 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{101 \dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{00 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$		$\underbrace{11 \dots 1}_{\text{共 } l-1 \text{ 個}} \underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{11 \dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11 \dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11 \dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11 \dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{100 \dots 0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$

表(一)

(2)第二類：恰 l 條長度為 $l+1$ 的互斥路徑

$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$
$\underbrace{2000\dots 0}_{\text{共 } n-1 \text{ 個}}$	$\underbrace{02000\dots 0}_{\text{共 } n-2 \text{ 個}}$	$\underbrace{002000\dots 0}_{\text{共 } n-3 \text{ 個}}$	$\underbrace{00\dots 0200\dots 0}_{\text{共 } l-1 \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{21000\dots 0}_{\text{共 } n-2 \text{ 個}}$	$\underbrace{021000\dots 0}_{\text{共 } n-3 \text{ 個}}$	$\underbrace{0021000\dots 0}_{\text{共 } n-4 \text{ 個}}$	$\underbrace{100\dots 0200\dots 0}_{\text{共 } l-2 \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{211000\dots 0}_{\text{共 } n-3 \text{ 個}}$	$\underbrace{0211000\dots 0}_{\text{共 } n-4 \text{ 個}}$	$\underbrace{00211000\dots 0}_{\text{共 } n-5 \text{ 個}}$	$\underbrace{1100\dots 0200\dots 0}_{\text{共 } l-3 \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
.....
$2 \underbrace{1\dots 1}_{\text{共 } l-1 \text{ 個}} \underbrace{00\dots 0}_{\text{共 } n-l+1 \text{ 個}}$	$\underbrace{121\dots 100\dots 0}_{\text{共 } l-1 \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{112\dots 100\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$		$\underbrace{11\dots 11200\dots 0}_{\text{共 } l-1 \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{11\dots 100\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots 100\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots 100\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots 100\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$

表(二)

(3)第三類：恰 $2(n-l)$ 條長度為 $l+2$ 的互斥路徑

$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$
$\underbrace{00\dots 010\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{00\dots 0010\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{00\dots 0000\dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{10\dots 010\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{10\dots 0010\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{10\dots 0000\dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{110\dots 010\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{110\dots 0010\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{110\dots 0000\dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
.....
$\underbrace{11\dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{10\dots 0}_{\text{共 } n-l+1 \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots 1010\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l+1 \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots 1000\dots 1}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{11\dots 100\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots 100\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots 100\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$	$\underbrace{000\dots 0}_{\text{共 } n \text{ 個}}$
$\underbrace{00\dots 020\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{00\dots 0020\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{00\dots 0000\dots 2}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{10\dots 020\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{10\dots 0020\dots 0}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{10\dots 0000\dots 2}_{\text{共 } l \text{ 個 } \text{ 共 } n-l \text{ 個}}$

$\underbrace{110\dots0}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{20\dots0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{110\dots00}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{020\dots0}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{110\dots0000\dots2}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$
.....
$\underbrace{11\dots1}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{20\dots0}_{\text{共 } n-l+1 \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots10}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{020\dots0}_{\text{共 } n-l+1 \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots1000\dots2}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$
$\underbrace{11\dots100\dots0}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots100\dots0}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$	$\underbrace{11\dots100\dots0}_{\text{共 } l \text{ 個}} \underbrace{}_{\text{共 } n-l \text{ 個}}$

表(三)

由上的討論與 d_k 的定義可知原命題成立，即 $d_k(u,v) \leq d_1(u,v)+2 \quad 1 \leq k \leq 2n$

當有了引理 2 時，在估算 $D_k(C_3^n)$ 時，只需討論 C_3^n 中 $d_1(u,v)$ 為 n 或 $n-1$ 的點即可。而由引理 1 的列表中直接可得下面兩個結論：

引理 3：若 $u, v \in C_3^n$ 滿足 $d_1(u,v) = n-1$ ，則 $d_k(u, v) = \begin{cases} n-1 & 1 \leq k \leq n-1 \\ n & n \leq k \leq 2n-2 \\ n+1 & k = 2n-1 \text{ or } 2n \end{cases}$

引理 4：若 $u, v \in C_3^n$ 滿足 $d_1(u,v) = n$ ，則 $d_k(u, v) = \begin{cases} n & 1 \leq k \leq n \\ n+1 & n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$

現在，我們計算出 $D_k(C_3^n)$ 的值了，將之列成下面的定理。。

命題 5： $D_k(C_3^n) = \begin{cases} n & 1 \leq k \leq n \\ n+1 & n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$

六、泛圈圖(*pancyclic graph*)

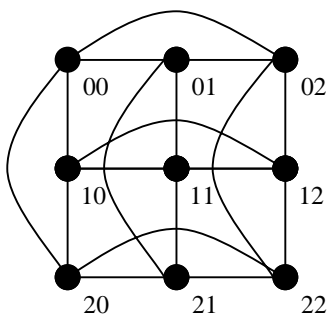
在一圖形 $G = (V, E)$ 中，可存在一以 $u \in V$ 為起點和終點的迴圈 R 。我們用 $|R|$ 來表示迴圈 R 的長度。若一圖形 G ，對所有的 $u \in V$ 均存在有長度從 3 到 $n(V)$ 的迴圈（即 $3 \leq |R| \leq n(V)$ ），則我們稱此圖形 G 為泛圈圖(*pancyclic graph*)。

命題 6： C_3^n 是一泛圈圖。

(一)檢查

我們先檢查 $n=1$ 與 $n=2$ 時。當圖形為 C_3^1 時，很明顯地， C_3^1 是一泛圈圖。當圖形為 C_3^2 時，

也為一泛圈圖，檢查過程如下(圖十三)。



(a)

$ R $	迴圈								
3		02	01	00					
4		01	11	10	00				
5		02	01	11	10	00			
6	00	20	22	21	11	01	00		
7		10	20	22	21	11	01	00	
8		10	20	21	11	12	02	01	00
9		10	20	21	11	12	22	02	01

(b)

圖十三(a) C_3^2 、(b)檢查過程

(二)證明

我們用數學歸納法來證明。不失一般性地，我們可以令 $u = u^0$ ，因為 $(C_3^n)^0$ 為一泛圈圖，所以可以在 $(C_3^n)^0$ 中找一條以 u^0 為起點和終點的迴圈 R^0 ，且 $3 \leq |R^0| \leq 3^{n-1}$ ，並令 $R^0(2) = x^0$ ， $R^0(3) = y^0$ 。

(1)證明：可取得迴圈 R 滿足 $|R| = 3^{n-1} + 1$ 。

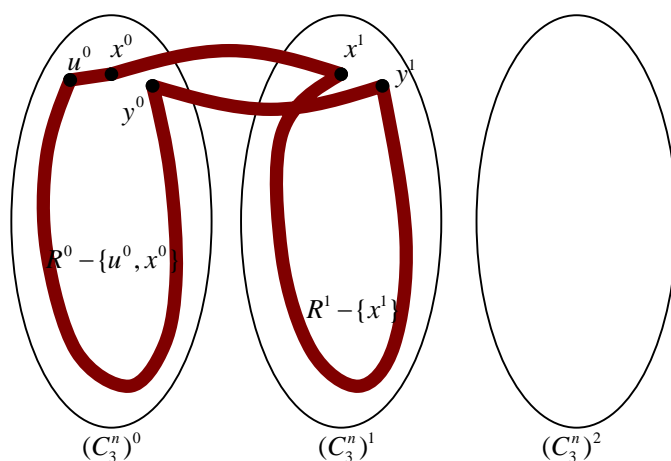
我們取 $|R^0| = 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一迴圈 $R = \langle u^0, x^0, x^1, y^1, y^0, R^0 - \{u^0, x^0\}, u^0 \rangle$ ，且 $|R| = 3^{n-1} + 1$ ，故得證。

(2)證明：可取得迴圈 R 滿足 $|R| = 3^{n-1} + 2$ 。

我們取 $|R^0| = 3^{n-1}$ ，並可以畫出一迴圈 $R = \langle u^0, x^0, x^1, y^1, y^0, R^0 - \{u^0, x^0\}, u^0 \rangle$ ，且 $|R| = 3^{n-1} + 2$ ，故得證。

(3)證明：可取得迴圈 R 滿足 $3^{n-1} + 3 \leq |R| \leq 2 * 3^{n-1}$ 。

我們取 $|R^0| = 3^{n-1}$ ， $|R^1| = i$ ， $3 \leq i \leq 3^{n-1}$ ，並可以畫出一迴圈 $R = \langle u^0, x^0, x^1, R^1 - \{x^1\}, y^1, y^0, R^0 - \{u^0, x^0\}, u^0 \rangle$ ，且 $|R| = 3^{n-1} + i$ ，因為 $3 \leq i \leq 3^{n-1}$ ，所以 $3^{n-1} + 3 \leq |R| \leq 2 * 3^{n-1}$ ，故得證。(圖十四)



圖十四

(4)證明：可取得迴圈 R 滿足 $|R| = 2 * 3^{n-1} + 1$ 。

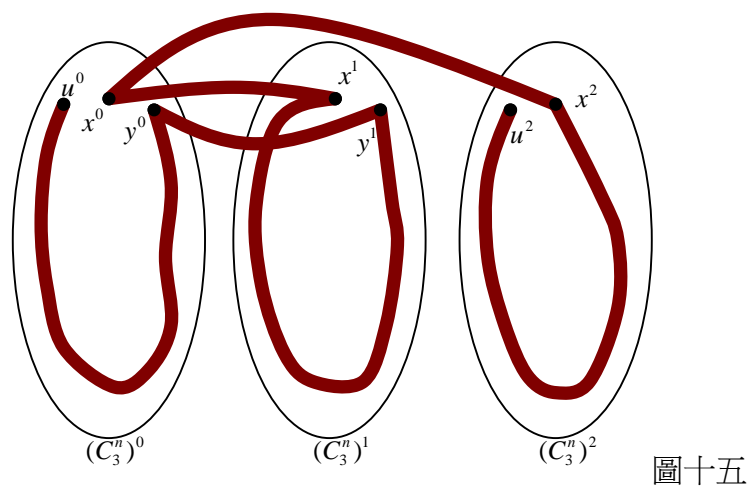
我們取 $|R^0| = 3^{n-1}$ ， $|R^1| = 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一迴圈 $R = \langle u^0, u^2, x^2, x^0, x^1, R^1 - \{x^1\}, y^1, y^0, R^0 - \{u^0, x^0\}, u^0 \rangle$ ，且 $|R| = 2 * 3^{n-1} + 1$ ，故得證。

(5)證明：可取得迴圈 R 滿足 $|R| = 2 * 3^{n-1} + 2$ 。

我們取 $|R^0| = 3^{n-1}$ ， $|R^1| = 3^{n-1}$ ，並可以畫出一迴圈 $R = \langle u^0, u^2, x^2, x^0, x^1, R^1 - \{x^1\}, y^1, y^0, R^0 - \{u^0, x^0\}, u^0 \rangle$ ，且 $|R| = 2 * 3^{n-1} + 2$ ，故得證。

(6)證明：可取得迴圈 R 滿足 $2 * 3^{n-1} + 3 \leq |R| \leq 3^n$ 。

我們取 $|R^0| = 3^{n-1}$ ， $|R^1| = 3^{n-1}$ ， $|R^2| = i$ ，並可以畫出一迴圈 $R = \langle u^0, u^2, R^2 - \{u^2\}, x^2, x^0, x^1, R^1 - \{x^1\}, y^1, y^0, R^0 - \{u^0, x^0\}, u^0 \rangle$ ，且 $|R| = 2 * 3^{n-1} + i$ ，因為 $3 \leq i \leq 3^{n-1}$ ，所以 $2 * 3^{n-1} + 3 \leq |R| \leq 3^n$ ，故得證。(圖十五)



圖十五

由(1)~(6)可知 $3 \leq |R| \leq 3^n$ ，所以 C_3^n 是泛圈圖，此命題得證。

七、泛連結圖(panconnected graph)

在一圖形 $G = (V, E)$ 中，存在一以 $u \in V$ 為起點，以 $v \in V$ 為終點的路徑 P 。我們用 $|P|$ 來表示此路徑的長度。若一圖形 G 中，對所有的 $u, v \in V$ 均存在長度從 $d(u, v)$ 到 $n(V) - 1$ 的路徑 (即 $d(u, v) \leq |P| \leq n(V) - 1$)，則我們稱此圖形 G 為泛連結圖(panconnected graph)。

命題 7： C_3^n 是一泛連結圖。

(一)檢查

我們先檢查 $n=1$ 與 $n=2$ 時。當圖形為 C_3^1 時，很明顯地， C_3^1 是一泛連結圖。當圖形為 C_3^2 時，也為一泛連結圖，檢查過程如下(圖十六)。

P	路徑							
1	01							
2	02	01						
3	10	11	01					
4	10	12	11	01				
5	10	20	21	11	01			
6	10	20	22	21	11	01		
7	10	20	22	12	11	21	01	
8	10	20	22	02	12	11	21	01

(a)

P	路徑							
2	02	22						
3	01	02	22					
4	01	02	12	22				
5	01	11	10	12	22			
6	01	02	12	11	21	22		
7	01	02	12	11	21	20	22	
8	01	02	12	11	10	20	21	22

(b)

圖十六(a) 以 $\langle 00, P, 01 \rangle$ 為例、(b)以 $\langle 00, P, 22 \rangle$ 為例

(二)證明

我們用數學歸納法來證明。不失一般性地，我們可以令 $u = u^0$ ，因為 $(C_3^n)^0$ 為一泛連結圖，所以可以在 $(C_3^n)^0$ 中找一條以 u^0 為起點和終點 v 的迴圈 P^0 ，且 $d(u^0, v) \leq |P^0| \leq 3^{n-1} - 1$ ，並令 $P^0(2) = x^0$ ， $P^0(3) = y^0$ 。

(1) $u, v \in (C_3^n)^i$ ，我們可以不失一般性地令 $v = v^0$ 。

(a)證明：可取得路徑 P 滿足 $|P| = 3^{n-1}$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 2$ ，並可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, x^0, x^1, y^1, y^0, P^0 - \{u^0, x^0\}, v^0 \rangle$ ，且

$|P| = 3^{n-1}$ ，故得證。

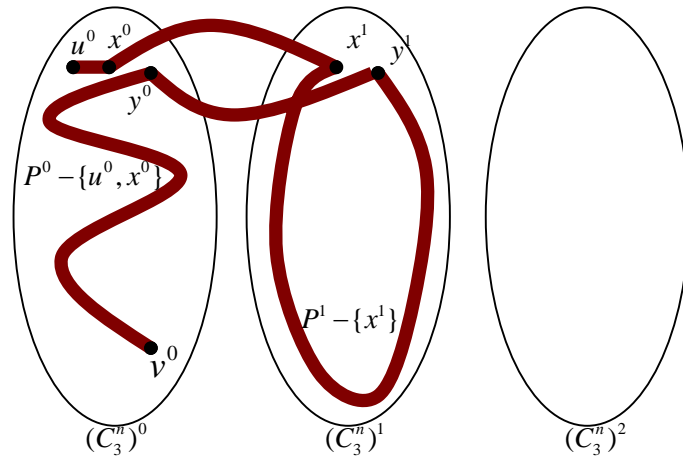
(b)證明：可取得路徑 P 滿足 $|P| = 3^{n-1} + 1$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, x^0, x^1, y^1, y^0, P^0 - \{u^0, x^0\}, v^0 \rangle$ ，且 $|P| = 3^{n-1} + 1$ ，故得證。

(c)證明：可取得路徑 P 滿足 $3^{n-1} + 2 \leq |P| \leq 2 * 3^{n-1} - 1$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1}$ ， $|P^1| = i$ ， $2 \leq i \leq 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一路徑

$P = \langle u^0, x^0, x^1, P^1 - \{x^1\}, y^1, y^0, P^0 - \{u^0, x^0\}, v^0 \rangle$ ，且 $|P| = 3^{n-1} + i$ ，因為 $2 \leq i \leq 3^{n-1} - 1$ ，所以 $3^{n-1} + 2 \leq |P| \leq 2 * 3^{n-1} - 1$ ，故得證。(圖十七)



圖十七

(d)證明：可取得路徑 P 滿足 $|P| = 2 * 3^{n-1}$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ， $|P^1| = 3^{n-1} - 2$ ，並可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, u^2, x^2, x^0, x^1, P^1 - \{x^1\}, y^1, y^0, P^0 - \{u^0, x^0\}, v^0 \rangle$ ，且 $|P| = 2 * 3^{n-1}$ ，故得證。

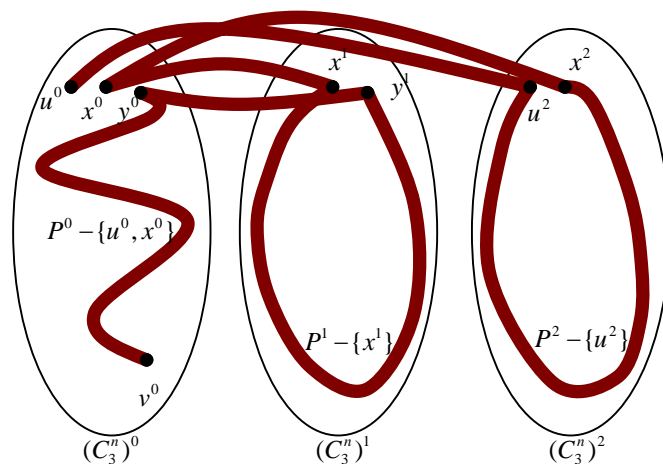
(e)證明：可取得路徑 P 滿足 $|P| = 2 * 3^{n-1} + 1$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ， $|P^1| = 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, u^2, x^2, x^0, x^1, P^1 - \{x^1\}, y^1, y^0, P^0 - \{u^0, x^0\}, v^0 \rangle$ ，且 $|P| = 2 * 3^{n-1} + 1$ ，故得證。

(f)證明：可取得路徑 P 滿足 $2 * 3^{n-1} + 2 \leq |P| \leq 3^n - 1$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ， $|P^1| = 3^{n-1} - 1$ ， $|P^2| = i$ ， $2 \leq i \leq 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出路徑 $P = \langle u^0, u^2, P^2 - \{u^2\}, x^2, x^0, x^1, P^1 - \{x^1\}, y^1, y^0, P^0 - \{u^0, x^0\}, v^0 \rangle$ ，且 $|P| = 2 * 3^{n-1} + i$ ，因為 $2 \leq i \leq 3^{n-1} - 1$ ，所以 $2 * 3^{n-1} + 2 \leq |P| \leq 3^n - 1$ ，故得證。(圖十八)

由(a)~(f)可知 $d(u = u^0, v) \leq |P| \leq 3^n - 1$ ，所以 C_3^n 是一泛連結圖，所以此狀況得證。



圖十八

(2) $u \in (C_3^n)^i$ 、 $v \in (C_3^n)^j$ ，且 $i \neq j$ ，我們可以不失一般性地令 $v = v^2$ 。

(a)證明：可取得路徑 P 滿足 $|P| = 3^{n-1}$ 。

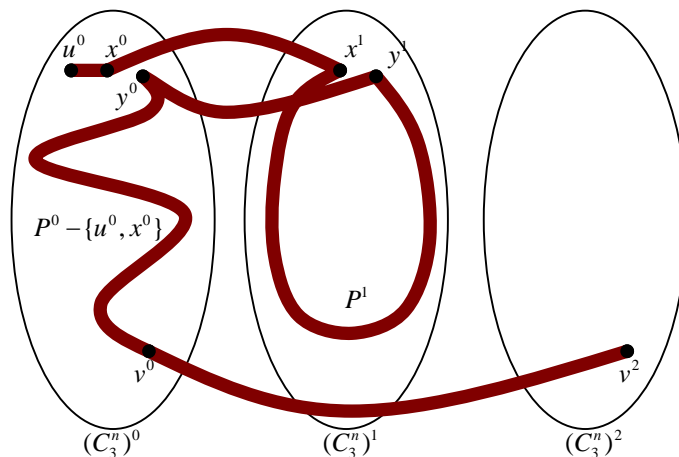
我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, P^0, v^0, v^2 \rangle$ ，且 $|P| = 3^{n-1}$ ，故得證。

(b)證明：可取得路徑 P 滿足 $|P| = 3^{n-1} + 1$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, P^0, v^0, v^1, v^2 \rangle$ ，且 $|P| = 3^{n-1} + 1$ ，故得證。

(c)證明：可取得路徑 P 滿足 $3^{n-1} + 2 \leq |P| \leq 2 * 3^{n-1} - 1$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ， $|P^1| = i$ ， $2 \leq i \leq 2 * 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, x^0, x^1, P^1, y^1, y^0, P^0 - \{u^0, x^0\}, v^0, v^2 \rangle$ ，且 $|P| = 3^{n-1} + i$ ，因為 $2 \leq i \leq 2 * 3^{n-1} - 1$ ，所以 $3^{n-1} + 2 \leq |P| \leq 2 * 3^{n-1} - 1$ ，故得證。(圖十九)



圖十九

(d)證明：可取得路徑 P 滿足 $|P| = 2 * 3^{n-1}$ 。

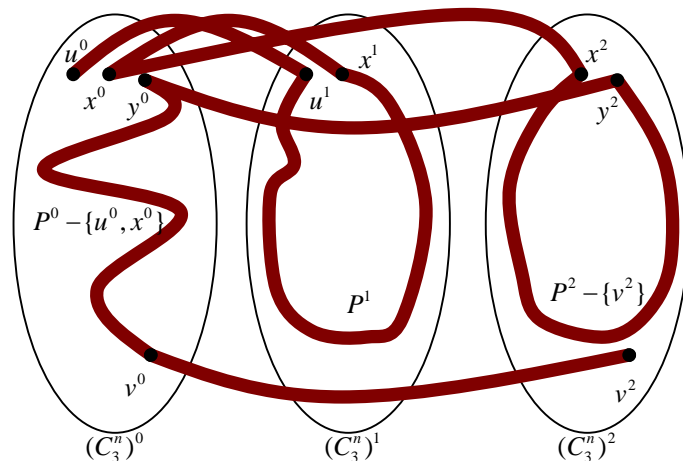
我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ， $|P^2| = 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, x^0, x^2, P^2 - \{v^2\}, y^2, y^0, P^0 - \{u^0, x^0\}, v^0, v^1, v^2 \rangle$ ，且 $|P| = 2 * 3^{n-1}$ ，故得證。

(e)證明：可取得路徑 P 滿足 $|P| = 2 * 3^{n-1} + 1$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ， $|P^2| = 3^{n-1} - 1$ ，並找一點 $a^1 \in N(v^1)$ ，然後可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, x^0, x^2, P^2 - \{v^2\}, y^2, y^0, P^0 - \{u^0, x^0, v^0\}, a^0, a^1, v^1, v^0, v^2 \rangle$ ，且 $|P| = 2 * 3^{n-1} + 1$ ，故得證。

(f)證明：可取得路徑 P 滿足 $2 * 3^{n-1} + 2 \leq |P| \leq 3^n - 1$ 。

我們取 $|P^0| = 3^{n-1} - 1$ ， $|P^2| = 3^{n-1} - 1$ ， $|P^1| = i$ ， $2 \leq i \leq 3^{n-1} - 1$ ，並可以畫出一路徑 $P = \langle u^0, u^1, P^1, x^1, x^0, x^2, P^2 - \{v^2\}, y^2, y^0, P^0 - \{u^0, x^0\}, v^0, v^2 \rangle$ ，且 $|P| = 2 * 3^{n-1} + i$ ，因為 $2 \leq i \leq 3^{n-1} - 1$ ，所以 $2 * 3^{n-1} + 2 \leq |P| \leq 3^n - 1$ ，故得證。(圖二十)



圖二十

由(a)~(f)可知 $d(u = u^0, v) \leq |P| \leq 3^n - 1$ ，所以 C_3^n 是一泛連結圖，所以此狀況得證。

由(1)、(2)可知 $d(u = u^0, v) \leq |P| \leq 3^n - 1$ ，所以 C_3^n 是一泛連結圖，所以此命題得證。

八、泛可置性漢米頓圖 (*panpositionable hamiltonian graph*)

在一圖形 G 中，若取定任意兩點 u, v ，存在各種不同的漢米頓迴圈，使兩點位於所有可能的位置上，且僅受限於兩點之最短距離；即若令 u 為迴圈 C 之起點，可指定 $C(i) = v$ ，其中 $d(u, v) + 1 \leq i \leq n(G) - d(u, v)$ ，則我們稱此圖形為泛可置性漢米頓圖。

命題 8、 C_3^n 是一泛可置性漢米頓圖。

(一)檢查

我們先檢查 $n=1$ 與 $n=2$ 時。當圖形為 C_3^1 時，很明顯地， C_3^1 是一泛可置性漢米頓圖形。

當圖形為 C_3^2 時，也為一泛可置性漢米頓圖形，檢查過程如下(圖二十一)。

$R(i)$	迴圈							
$R(3)$	02	01	11	10	12	22	21	20
$R(4)$	01	02	12	11	21	22	20	10
$R(5)$	10	12	02	01	11	21	22	20
$R(6)$	10	11	01	02	12	22	21	20
$R(7)$	20	21	22	12	02	01	11	10
$R(8)$	20	22	21	11	01	02	12	10
$R(9)$	10	20	22	21	11	12	02	01
$R(10)$	20	21	22	12	10	11	01	02

$R(i)$	迴圈							
$R(3)$	02	22	12	11	01	21	20	10
$R(4)$	01	02	22	12	11	21	20	10
$R(5)$	01	02	12	22	21	11	10	20
$R(6)$	20	10	11	21	22	12	02	01
$R(7)$	01	20	21	11	12	22	02	01
$R(8)$	10	20	21	01	11	12	22	02

(a)

(b)

圖二十一(a) 令 $R(i)=02$ 、(b)令 $R(i)=22$

(二)證明：

我們用數學歸納法來證明，不失一般性地，我們可以令 $u = u^0$ ， $d(u^0, v) = l$ ，因為漢米頓圈是一迴圈，所以證明 $HC(i) = v$ ，其中 $l+1 \leq i \leq \frac{3^n - 1}{2}$ ，就可以證明 C_3^n 是一泛可置性漢米頓圖形了。

(1) $u, v \in (C_3^n)^i$ ，我們可以不失一般性地令 $v = v^0$ 。

(a)證明：可取得漢米頓迴圈 R 且滿足 $R(i) = v$ ，其中 $l+1 \leq i \leq \frac{3^{n-1} - 1}{2}$ 。

我們在 u^0, v^0 之間取路徑 $P^0 \in R^0$ ， $l \leq |P^0| \leq \frac{3^{n-1} - 3}{2}$ ，且取點 $a^0, x^0 \in N(v^0)$ ，其中 $a^0 \neq x^0$ ，且 $R^0(i+1) = a^0$ ，然後可以畫一漢米頓圈 $R = \langle u^0, P^0, v^0, v^1, HP(v^1, x^1), x^1, x^2, HP(x^2, a^2), a^2, a^0, HC^0 - P(u^0, a^0), u^0 \rangle$ ，且 $v^0 = R(|P(u^0, v^0)| + 1)$ ，令 $|P^0| + 1 = i$ ，因為 $l+1 \leq |P(u^0, v^0)| + 1 = i \leq \frac{3^{n-1} - 1}{2}$ ，故此狀況得證。

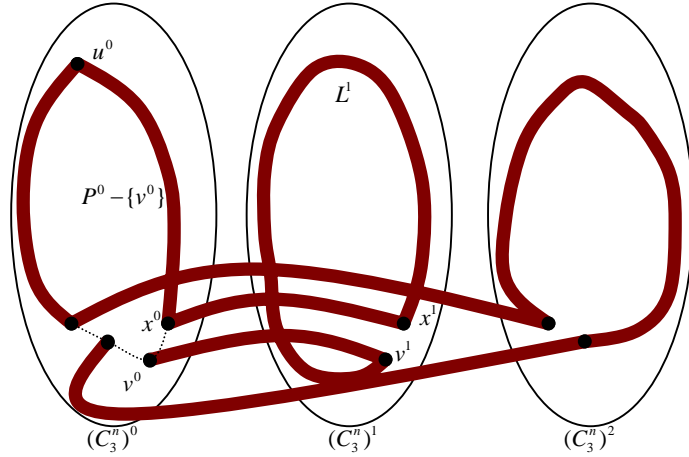
(b)證明：可取得漢米頓迴圈 R 且滿足 $R(i) = v$ ，其中 $i = \frac{3^{n-1} + 1}{2}$ 。

我們在 u^0, v^0 之間取路徑 $P^0 \in R^0$ ，且 $|P^0| = \frac{3^{n-1}-3}{2}$ ，所以 $R^0(\frac{3^{n-1}-1}{2}) = v^0$ ，我們可取得 $R^0(\frac{3^{n-1}-3}{2}) = x^0$ ， $R^0(\frac{3^{n-1}+1}{2}) = a^0$ ， $R^0(\frac{3^{n-1}+3}{2}) = b^0$ ，和 y^0 ，其中 $y^0 \notin \{u^0, v^0, x^0, a^0, b^0\}$ ；在 $(C_3^n)^1 - \{x^1, v^1\}$ 中，可取得一條從 a^1 至 y^1 的漢米頓路徑 M^1 ，然後可以畫一漢米頓圈 $R = \langle u^0, P^0 - \{v^0\}, x^0, x^1, v^1, v^0, a^0, a^1, M^1, y^1, y^2, L^2, b^2, b^0, R^0 - P^0 - \{a^0\}, u^0 \rangle$ ，且 $v^0 = R(\frac{3^{n-1}+1}{2})$ ，故得證。

(c)證明：可取得迴圈 R 滿足 $R(i) = v$ ，其中 $\frac{3^{n-1}+3}{2} \leq i \leq \frac{3^n-1}{2}$ 。

我們在 u^0, v^0 之間取路徑 $P^0 \in R^0$ ，且 $|P^0| = \frac{3^{n-1}-3}{2}$ ，所以 $R^0(\frac{3^{n-1}-1}{2}) = v^0$ ，又取 $R^0(\frac{3^{n-1}-3}{2}) = x^0$ ，可取得 $(x^1, v^1) \in E$ ，因為 $d(x^1, v^1) = 1$ ，由命題 7 可知，存在一條從 x^1 到 v^1 的路徑 $L^1 \in R^1$ ， $1 \leq |L^1| \leq 3^{n-1} - 1$ ，然後可以畫出漢米頓圈 $R = \langle u^0, P^0 - \{v^0\}, x^0, x^1, L^1, v^1, v^0, \dots, u^0 \rangle$ ，且 $v^0 = HC(\frac{3^{n-1}+1}{2} + |L^1|)$ ，又因 $1 \leq |L^1| \leq 3^{n-1} - 1$ ，所以 $\frac{3^{n-1}+3}{2} \leq \frac{3^{n-1}+1}{2} + |L^1| = i \leq \frac{3^n-1}{2}$ ，故得證。(圖二十二)

由(a)、(b)、(c)可知 $l+1 \leq i \leq \frac{3^n-1}{2}$ ，所以此狀況得證。



圖二十二

(2) $u \in (C_3^n)^i$ ， $v \in (C_3^n)^j$ ， $i \neq j$ ，我們可以不失一般性地令 $v = v^2$ 。

(a)證明：可取得迴圈 R 且滿足 $R(i) = v$ ，其中 $l+1 \leq i \leq \frac{3^{n-1}+1}{2}$ 。

我們在 u^0, v^0 之間取路徑 $P^0 \in HC^0$ ，若 $d(u^0, v^2) = l$ ，明顯地， $d(u^0, v^0) = l-1$ ，所以

$l-1 \leq |P^0| \leq \frac{3^{n-1}-3}{2}$ ，且 $v^0 = R^0(|P^0|+1)$ ，再令 $R^0(|P^0|+2) = a^0$ ， $R^0(|P^0|+3) = b^0$ ；在 a^1 、 b^1 間

可取得一漢米頓路徑 $L^1 \in (C_3^n)^1$ ；在 v^2 、 b^2 間可取得一漢米頓路徑 $M^2 \in (C_3^n)^2$ ，然後可以畫出

漢米頓圈 $R = \langle u^0, P^0, v^0, v^2, M^2, b^2, b^1, L^1, a^1, a^0, R^0 - P^0, u^0 \rangle$ ，且 $v^2 = R(|P^0|+2)$ ，

$l+1 \leq |P^0|+2 = i \leq \frac{3^{n-1}+1}{2}$ ，相當於 $l+1 \leq |P^0|+2 = i \leq \frac{3^{n-1}+1}{2}$ ，故得證。

(b)證明：可取得迴圈 R 滿足 $HC(i) = v$ ，其中 $\frac{3^{n-1}+3}{2} \leq i \leq \frac{3^n-1}{2}$ 。

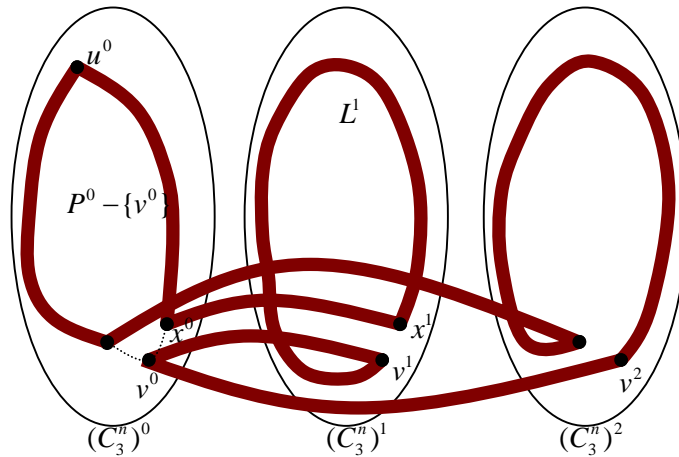
在中，取 u^0 、 v^0 間之一路徑 $P^0 \in R^0$ ，且 $|P^0| = \frac{3^{n-1}-3}{2}$ ，所以 $R^0(\frac{3^{n-1}-1}{2}) = v^0$ ，可取

$R^0(\frac{3^{n-1}-3}{2}) = x^0$ ，可取得 $(x^1, v^1) \in E$ ，因為 $d(x^1, v^1) = 1$ ，由命題 7 可知，存在一條從 x^1 至 v^1 的

路徑 $L^1 \in R^1$ ，然後可以畫出漢米頓圈 $R = \langle u^0, P^0 - \{v^0\}, x^0, x^1, L^1, v^1, v^2, \dots, u^0 \rangle$ ，且

$v^2 = R(\frac{3^{n-1}+1}{2} + |L^1|)$ ，又因 $1 \leq |L^1| \leq 3^{n-1}-1$ ，所以 $\frac{3^{n-1}+3}{2} \leq \frac{3^{n-1}+1}{2} + |L^1| = i \leq \frac{3^n-1}{2}$ ，故得證。(圖

二十三)



圖二十三

九、 k -互相獨立漢米頓圖 (k -mutually hamiltonian independent graph)

在圖形 $G(V \cup E)$ 中，有兩個漢米頓圈 C_1 、 C_2 ，滿足下列條件：

(1) $C_1(1) = C_2(1) = u$ ， $C_1(n(G)) = C_2(n(G)) = u$ 。

(2) 對每個 $1 < k < n(G)$ ， $C_1(k) \neq C_2(k)$ 。

我們稱這兩漢米頓圈為互相獨立漢米頓圈。

如果此圖形 $G(V \cup E)$ 中，有 i 個互相獨立漢米頓圈 C_i ，滿足下列條件：

(1) $C_i(1) = C_j(1) = u$, $C_i(n(G)) = C_j(n(G)) = u$, $1 \leq i < j \leq \deg(G)$ 。

(2) 對每個 $1 \leq i < j \leq \deg(G)$, $1 < k < n(G)$, 則 $C_i(k) \neq C_j(k)$ 。

我們稱此圖形為 i -互相獨立漢米頓圖(i -mutually Hamiltonian independent graph)。

我們先證明兩個引理。

引理 6、在 C_3^n 中，有 $2n-1$ 條漢米頓路徑 P_i ，滿足下列條件：

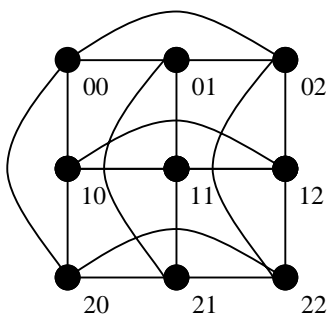
(1) P_i 是由 u_i 連到 v_i 的漢米頓路徑，其中 u_i 、 v_i 為相鄰點、且 u_i 、 $v_i \in (C_3^n)^0$, $1 \leq i \leq 2n-1$ 。

(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$, $1 \leq m < n \leq 2n-1$, $2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。

(一)檢查

我們先檢查 $n=1$ 與 $n=2$ 時。當圖形為 C_3^1 時，很明顯地， C_3^1 是一互相獨立漢滿足此引理。

當圖形為 C_3^2 時，也為滿足此引理，檢查過程如下(圖二十四)。



(a)

(u_i, v_i)	路徑								
(00,01)	00	10	20	21	11	12	22	02	01
(10,11)	10	20	00	01	21	22	00	12	11
(20,21)	20	00	10	11	01	02	12	22	21

(b)

圖二十四(a) C_3^2 、(b)檢查過程

(二)證明

我們用數學歸納法來證明，令 $r_j = |\{(x_i)^j, (y_i)^j \mid ((x_i)^j, (y_i)^j) \in (C_3^n)^j\}|$ ，其中 $1 \leq i \leq 2n-1$ ，

$0 \leq j \leq 2$ 。很明顯地， $r_0 + r_1 + r_2 = 2n-1$ 。由歸納法可知，在 $(C_3^n)^j$ 中，存在 $2n-3$ 條漢米頓路

徑 P_i^j ，滿足下列條件：(1) P_i^j 是由 $(u_i)^j$ 連到 $(v_i)^j$ 的漢米頓路徑，其中 $(u_i)^j$ 、 $(v_i)^j$ 為相鄰點，

且 $1 \leq i \leq 2n-1$ ， $0 \leq j \leq 2$ 。(2) $P_m^j(k) \neq P_n^j(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-1$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。我們取 $(a_i)^j \in P_i^j$

且 $(a_i)^j \in N((y_i)^j)$ ，其中 $1 \leq i \leq 2n-1$ ， $0 \leq j \leq 2$ 。

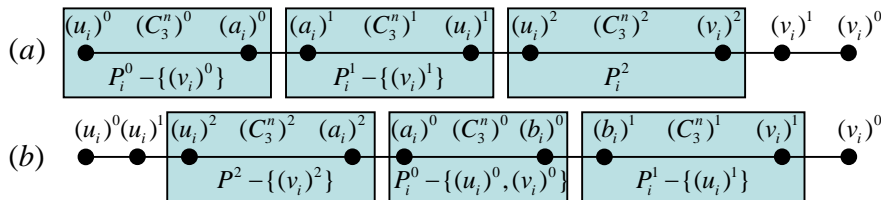
$$(1) r_0 = 2n - 1, r_1 = r_2 = 0.$$

對 $1 \leq i \leq 2n - 3$:

不失一般性地，我們可令 $u_i = (u_i)^0, v_i = (v_i)^0$ ，然後畫出路徑 $P_i = \langle (u_i)^0, P_i^0 - \{(v_i)^0\}, (a_i)^0, (a_i)^1, P_i^1 - \{(v_i)^1\}, (u_i)^1, (u_i)^2, P_i^2, (v_i)^2, (v_i)^1, (v_i)^0 \rangle$ ，滿足下列條件：(1) P_i 是由 $u_i = (u_i)^0$ 連到 $v_i = (v_i)^0$ 的漢米頓路徑，其中 $u_i = (u_i)^0, v_i = (v_i)^0$ 為相鄰點，且 $1 \leq i \leq 2n - 3$ 。(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n - 3, 2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。

對 $2n - 2 \leq i \leq 2n - 1$:

我們取 $(b_i)^j \in P_i^j$ 且 $(b_i)^j \in N((x_i)^j)$ ，其中 $2n - 2 \leq i \leq 2n - 1, 0 \leq j \leq 2$ ，然後畫出路徑 $P_i = \langle (u_i)^0, (u_i)^1, (u_i)^2, P_i^2 - \{(v_i)^2\}, (a_i)^2, (a_i)^0, P_i^0 - \{(u_i)^0, (v_i)^0\}, (b_i)^0, (b_i)^1, P_i^1 - \{(u_i)^1\}, (v_i)^1, (v_i)^0 \rangle$ ，滿足下列條件：(1) P_i 是由 $u_i = (u_i)^0$ 連到 $v_i = (v_i)^0$ 的漢米頓路徑，其中 $u_i = (u_i)^0, v_i = (v_i)^0$ 為相鄰點，且 $2n - 2 \leq i \leq 2n - 1$ 。(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $2n - 2 \leq m < n \leq 2n - 1, 2 \leq k \leq 3^n - 1$ ，此狀況得證。(圖二十五)



圖二十五(a) $1 \leq i \leq 2n - 3$ (b) $2n - 2 \leq i \leq 2n - 1$

$$(2) r_0 + r_1 = 2n - 1, r_0, r_1 < 2n - 3, r_2 = 0.$$

$$(a) r_0, r_1 \leq 2n - 3.$$

對 $1 \leq i \leq r_0$:

不失一般性，我們可以令 $u_i = (u_i)^0, v_i = (v_i)^0$ ，然後畫出路徑 $P_i = \langle (u_i)^0, P_i^0 - \{(v_i)^0\}, (a_i)^0, (a_i)^1, P_i^1 - \{(v_i)^1\}, (u_i)^1, (u_i)^2, P_i^2, (v_i)^2, (v_i)^1, (v_i)^0 \rangle$ ，滿足下列條件：(1) P_i 是由 $u_i = (u_i)^0$ 連到 $v_i = (v_i)^0$ 的漢米頓路徑，其中 $u_i = (u_i)^0, v_i = (v_i)^0$ 為相鄰點，且 $1 \leq i \leq r_0$ 。(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq r_0, 2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。

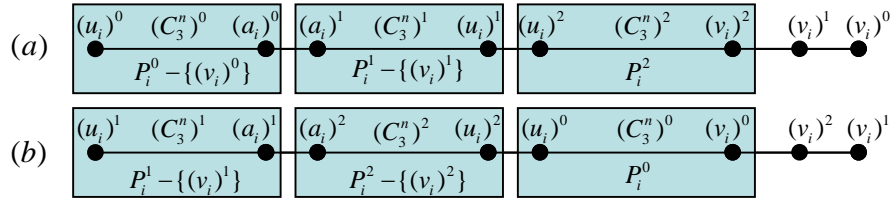
對 $r_0 + 1 \leq i \leq 2n - 1$:

不失一般性，我們可以令 $u_i = (u_i)^1$, $v_i = (v_i)^1$, 然後畫出路徑 $P_i = \langle (u_i)^1, P_i^1 - \{(v_i)^1\}, (a_i)^1,$

$(a_i)^2, P_i^2 - \{(v_i)^2\}, (u_i)^2, (u_i)^0, P_i^0, (v_i)^0, (v_i)^2, (v_i)^1 \rangle$, 滿足下列條件：(1) P_i 是由 $u_i = (u_i)^1$ 連到

$v_i = (v_i)^1$ 的漢米頓路徑，其中 $u_i = (u_i)^1$ 、 $v_i = (v_i)^1$ 為相鄰點，且 $r_0 + 1 \leq i \leq 2n - 1$ 。

(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$, $r_0 + 1 \leq m < n \leq 2n - 1$, $2 \leq k \leq 3^n - 1$, 此狀況得證。(圖二十六)



圖二十六(a) $1 \leq i \leq r_0$ (b) $r_0 + 1 \leq i \leq 2n - 1$

(b) $r_0 = 2n - 2$, $r_1 = 1$ 。

對 $1 \leq i \leq 2n - 3$:

不失一般性，我們可以令 $u_i = (u_i)^0$, $v_i = (v_i)^0$, 然後畫出路徑 $P_i = \langle (u_i)^0,$

$P_i^0 - \{(v_i)^0\}, (a_i)^0, (a_i)^1, P_i^1 - \{(v_i)^1\}, (u_i)^1, (u_i)^2, P_i^2, (v_i)^2, (v_i)^1, (v_i)^0 \rangle$, 滿足下列條件：

(1) P_i 是由 $u_i = (u_i)^0$ 連到 $v_i = (v_i)^0$ 的漢米頓路徑，其中 $u_i = (u_i)^0$ 、 $v_i = (v_i)^0$ 為相鄰點，且

$1 \leq i \leq 2n - 3$ 。

(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$, $1 \leq m < n \leq 2n - 3$, $2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。

對 $i = 2n - 2$:

我們取 $(b_{2n-2})^j \in P_{2n-2}^j$ 且 $(b_{2n-2})^j \in N((x_{2n-2})^j)$, $0 \leq j \leq 2$, 然後畫出路徑

$P_{2n-2} = \langle (u_{2n-2})^0, (u_{2n-2})^1, (u_{2n-2})^2, P_{2n-2}^2 - \{(v_{2n-2})^2\}, (a_{2n-2})^2, (a_{2n-2})^0, P_{2n-2}^0 - \{(u_{2n-2})^0, (v_{2n-2})^0\},$

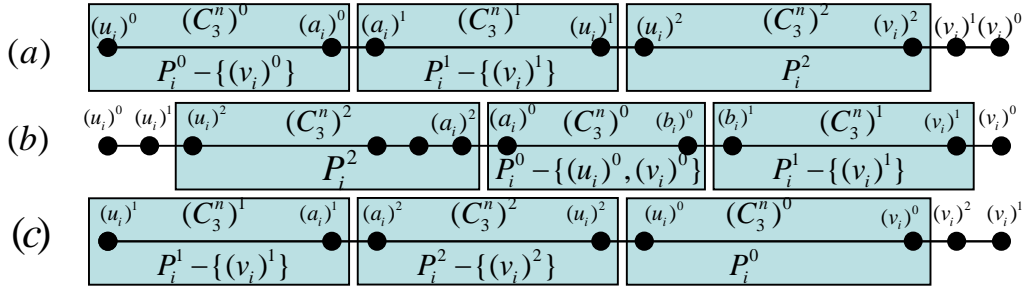
$(b_{2n-2})^0, (b_{2n-2})^1, P_{2n-2}^1 - \{(u_{2n-2})^1\}, (v_{2n-2})^2, (v_{2n-2})^0 \rangle$, 滿足下列條件：(1) P_i 是由 $u_{2n-2} = (u_{2n-2})^0$ 連

到 $v_{2n-2} = (v_{2n-2})^0$ 的漢米頓路徑，其中 $u_{2n-2} = (u_{2n-2})^0$ 、 $v_{2n-2} = (v_{2n-2})^0$ 為相鄰點。

對 $i = 2n - 1$:

不失一般性，我們可以令 $u_{2n-1} = (u_{2n-1})^0$, $v_{2n-1} = (v_{2n-1})^0$, 然後畫出路徑

$P_{2n-1} = \langle (u_{2n-1})^0, P_{2n-1}^0 - \{(v_{2n-1})^0\}, (a_{2n-1})^0, (a_{2n-1})^1, P_{2n-1}^1 - \{(v_{2n-1})^1\}, (u_{2n-1})^1, (u_{2n-1})^2, P_{2n-1}^2, (v_{2n-1})^2, (v_{2n-1})^1, (v_{2n-1})^0 \rangle$ ，滿足下列條件：(1) P_{2n-1} 是由 $u_{2n-1} = (u_{2n-1})^0$ 連到 $v_{2n-1} = (v_{2n-1})^0$ 的漢米頓路徑，其中 $u_{2n-1} = (u_{2n-1})^0$ 、 $v_{2n-1} = (v_{2n-1})^0$ 為相鄰點。(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 1$ ，此狀況得證。(圖二十七)



圖二十七(a) $1 \leq i \leq 2n-3$ (b) $i = 2n-2$ (c) $i = 2n-1$

$$(3) r_0 + r_1 + r_2 = 2n-1。$$

對 $1 \leq i \leq r_0$ 。

不失一般性地，我們可令 $u_i = (u_i)^0$ ， $v_i = (v_i)^0$ ，然後畫出路徑 $P_i = \langle (u_i)^0, P_i^0 - \{(v_i)^0\}, (a_i)^0, (a_i)^1, P_i^1 - \{(v_i)^1\}, (u_i)^1, (u_i)^2, P_i^2, (v_i)^2, (v_i)^1, (v_i)^0 \rangle$ ，滿足下列條件：(1) P_i 是由 $u_i = (u_i)^0$ 連到 $v_i = (v_i)^0$ 的漢米頓路徑，其中 $u_i = (u_i)^0$ 、 $v_i = (v_i)^0$ 為相鄰點，且 $1 \leq i \leq r_0$ 。(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq r_0$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。

對 $r_0 + 1 \leq i \leq r_0 + r_1$ 。

不失一般性地，我們可令 $u_i = (u_i)^1$ ， $v_i = (v_i)^1$ ，然後畫出路徑 $P_i = \langle (u_i)^1, P_i^1 - \{(v_i)^1\}, (a_i)^1, (a_i)^2, P_i^2 - \{(v_i)^2\}, (u_i)^2, (u_i)^0, P_i^0, (v_i)^0, (v_i)^2, (v_i)^1 \rangle$ ，滿足下列條件：(1) P_i 是由 $u_i = (u_i)^1$ 連到 $v_i = (v_i)^1$ 的漢米頓路徑，其中 $u_i = (u_i)^1$ 、 $v_i = (v_i)^1$ 為相鄰點，且 $r_0 + 1 \leq i \leq r_0 + r_1$ 。

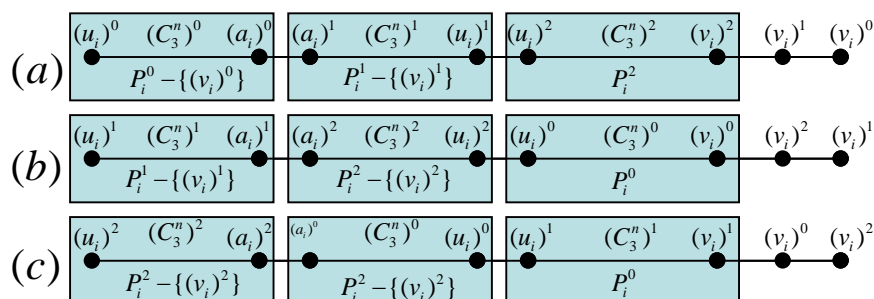
(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $r_0 + 1 \leq m < n \leq r_0 + r_1$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。

對 $r_2 + 1 \leq i \leq 2n-1$ 。

不失一般性地，我們可令 $u_i = (u_i)^2$ ， $v_i = (v_i)^2$ ，然後畫出路徑 $P_i = \langle (u_i)^2, P_i^2 - \{(v_i)^2\}, (a_i)^2,$

$(a_i)^0, P_i^0 - \{(v_i)^0\}, (u_i)^0, (u_i)^1, P_i^1, (v_i)^1, (v_i)^0, (v_i)^2 >$ ，滿足下列條件：(1) P_i 是由 $u_i = (u_i)^2$ 連到 $v_i = (v_i)^2$ 的漢米頓路徑，其中 $u_i = (u_i)^2$ 、 $v_i = (v_i)^2$ 為相鄰點，且 $r_2 + 1 \leq i \leq 2n - 1$ 。

(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $r_2 + 1 \leq m < n \leq 2n - 1$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 1$ ，此狀況得證(圖二十八)。



圖二十八(a) $1 \leq i \leq r_0$ (b) $r_0 + 1 \leq i \leq r_0 + r_1$ (c) $r_2 + 1 \leq i \leq 2n - 1$

由(1)、(2)、(3)可知，此引理得證。

引理 6: 在 $C_3^n - \{L_i\}$ 中，有 $2n-1$ 條漢米頓路徑 P_i ，其中 $L_i = \langle a_i, b_i, c_i \rangle$ ， P_i 滿足下列條件：

(1) P_i 是由 a_i 連到 c_i 的漢米頓路徑，且 $1 \leq i \leq 2n - 1$ 。(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n - 1$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 2$ 。

(一)證明

由引理 4 可知，在 C_3^n 中，有 $2n-1$ 條漢米頓路徑 P_i ，滿足下列條件：

(1) P_i 是由 a_i 連到 b_i 的漢米頓路徑，其中 a_i 、 b_i 為相鄰點，且 $1 \leq i \leq 2n - 1$ 。

(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n - 1$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。

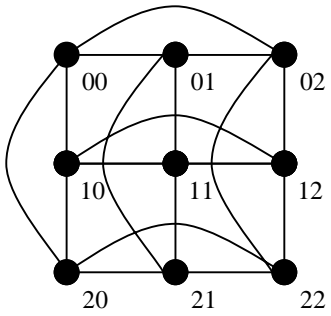
取一點 $c_i \in P_i$ ，且 $c_i \in N(b_i)$ ，然後可畫出漢米頓路徑 $R_i = \langle a_i, P_i - \{b_i\}, c_i \rangle \in C_3^n - \{b_i\}$ ，滿足下列條件：(1) P_i 是由 a_i 連到 c_i 的漢米頓路徑，且 $1 \leq i \leq 2n - 1$ 。(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n - 1$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 2$ ，此引理得證。

命題 9: C_3^n 是一 $2n$ -互相獨立漢米頓圖。

(一)檢查

我們先檢查 $n=1$ 與 $n=2$ 時。當圖形為 C_3^1 時，很明顯地， C_3^1 是一互相獨立漢米頓圖。當

圖形為 C_3^2 時，也為一互相獨立漢米頓圖，檢查過程如下(圖二十九)。



(a)

迴圈									
00	01	11	12	02	22	21	20	10	00
	02	22	21	01	11	12	10	20	
	10	12	22	20	21	11	01	02	
	20	21	11	10	12	22	02	01	

(b)

圖二十九(a) C_3^2 、(b)檢查過程

(二)證明

我們用數學歸納法來證明。由歸納法可知，在 $(C_3^n)^0$ 中，存在 $2n-2$ 條漢米頓圈

$R_i^0 = \langle u^0, P_i^0, (c_i)^0, (b_i)^0, (a_i)^0, u^0 \rangle$ ，滿足下列條件：(1) R_i^0 是以 u^0 為起點與終點的漢米頓圈，

且 $1 \leq i \leq 2n-2$ 。(2) $R_m^0(k) \neq R_n^0(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-2$ ， $2 \leq k \leq 3^{n-1}-2$ 。由引理 5 可知，在

$(C_3^n)^j - \{(b_i)^j\}$ 中，存在 $2n-3$ 條漢米頓路徑 M_i^j ，滿足下列條件：(1) M_i^j 是以 $(a_i)^j$ 為起點與 $(c_i)^j$

為終點的漢米頓圈，且 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。(2) $M_m^j(k) \neq M_n^j(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-3$ ， $1 \leq k \leq 3^{n-1}-2$ ，

$1 \leq j \leq 2$ 。不失一般性，我們令 $u = u^0$ ，然後畫出漢米頓圈 R_i

對 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。

漢米頓圈 $R_i = \langle u^0, P_i^0, (c_i)^0, (c_i)^1, M_i^1, (a_i)^1, (a_i)^2, M_i^2, (c_i)^2, (b_i)^2, (b_i)^1, (b_i)^0, (a_i)^0, u^0 \rangle$ ，

滿足下列條件：(1) R_i 是以 u^0 為起點與終點的漢米頓圈，且 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。(2) $R_m(k) \neq R_n(k)$ ，

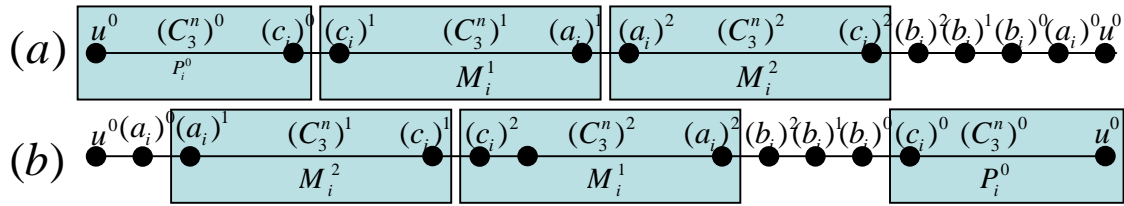
$1 \leq m < n \leq 2n-3$ ， $2 \leq k \leq 3^{n-1}-2$ 。

對 $2n-2 \leq i \leq 2n$ 。

漢米頓圈 $R_i = \langle u^0, (a_i)^0, (a_i)^1, M_i^1, (c_i)^1, (c_i)^2, M_i^2, (a_i)^2, (b_i)^2, (b_i)^1, (b_i)^0, (c_i)^0, P_i^0, u^0 \rangle$ ，

滿足下列條件：(1) R_i 是以 u^0 為起點與終點的漢米頓圈，且 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。(2) $R_m(k) \neq R_n(k)$ ，

$1 \leq m < n \leq 2n-3$, $2 \leq k \leq 3^{n-1} - 2$, 此命題得證。(圖三十')



圖三十(a) $1 \leq i \leq 2n-3$ (b) $2n-2 \leq i \leq 2n$

十、 $k-1$ -互相獨立漢米連結圖($k-1$ -mutually independent hamiltonian connected graph)

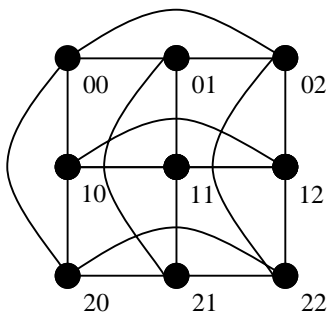
在圖形 $G(V \cup E)$ 中，有兩個漢米頓路徑 P_1 、 P_2 ，滿足下列條件：(1) $P_1(1) = P_2(1) = u$ ， $P_1(n(G)) = P_2(n(G)) = v$ 。(2) 對每個 $1 < k < n(G)$ ， $P_1(k) \neq P_2(k)$ 。我們稱這兩漢米頓圈為互相獨立漢米頓路徑。

如果此圖形 $G(V \cup E)$ 中，有 i 個互相獨立漢米頓路徑 P_i ，滿足下列條件：(1) 對每個 $1 \leq i < j \leq \deg(G)$ ， $P_i(1) = P_j(1) = u$ ， $P_i(n(G)) = P_j(n(G)) = v$ 。(2) 對每個 $1 \leq i < j \leq \deg(G)$ ， $1 < k < n(G)$ ，則 $P_i(k) \neq P_j(k)$ 。我們稱此圖形為互相獨立漢米頓連結圖。我們先證明一個引理。

引理 7：在 C_3^n 中，有 $2n$ 條漢米頓路徑 P_i ，滿足下列條件：(1) P_i 是以 u 為起點與 $a_i \in \overline{N(u)} \cap N(v)$ 為終點的漢米頓圈，其中 $1 \leq i \leq 2n$ 。(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。

(一)檢查

我們先檢查 $n=1$ 與 $n=2$ 時。當圖形為 C_3^1 時，很明顯地， C_3^1 是一滿足此引理。當圖形為 C_3^2 時，也為一滿足此引理，檢查過程如下(圖三十一)。



		路徑							
00	10	20	21	22	12	11	01	02	
	01	11	10	20	21	22	02	12	
	02	22	12	10	11	01	21	20	
	20	10	11	01	02	12	22	21	

(a)

(b)

圖三十一(a) C_3^2 、(b) $\langle 00, P, v \in N(22) \rangle$

(二)證明

我們用數學歸納法來證明。由歸納法可知，在 $(C_3^n)^0$ 中，存在 $2n-2$ 條漢米頓路徑 P_i^0 ，滿足下列條件：(1) P_i^0 是以 u^0 為起點與 $(a_i)^0 \in N(v^0)$ 為終點的漢米頓路徑，且 $1 \leq i \leq 2n-2$ 。

(2) $P_m^0(k) \neq P_n^0(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-2$ ， $2 \leq k \leq 3^{n-1}-1$ 。令漢米頓路徑 $P_i^0 = \langle u^0, M_i^0, (c_i)^0, (b_i)^0, (a_i)^0 \rangle$ 。由引理一可知，有 $2n-3$ 條漢米頓路徑 R_i^1 ，滿足下列條件：(1) R_i^1 是以 $(b_i)^1$ 為起點與 $(c_i)^1$

為終點的漢米頓路徑，且 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。(2) $R_m^1(k) \neq R_n^1(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-3$ ， $1 \leq k \leq 3^{n-1}-1$ 。

令 $R_i^1 = \langle (b_i)^1, (a_i)^1, S_i^1, (c_i)^1 \rangle$ 。有 $2n-3$ 條漢米頓路徑 R_i^2 ，滿足下列條件：(1) R_i^2 是以 $(b_i)^2$ 為起點與 $(c_i)^2$ 為終點的漢米頓路徑，且 $1 \leq i \leq 2n-3$ ，(2) $R_m^2(k) \neq R_n^2(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-3$ ，

$1 \leq k \leq 3^{n-1}-1$ 。令 $R_i^2 = \langle (b_i)^2, (c_i)^2, T_i^2, (a_i)^2 \rangle$ 。

(1) $u, v \in (C_3^n)^j$ ，不失一般性，我們令 $j=0$ ， $u = u^0$ ， $v = v^0$ 。

對 $1 \leq i \leq 2n-3$ ：

漢米頓路徑 $P_i = \langle u^0, M_i^0, (c_i)^0, (c_i)^1, S_i^1, (a_i)^1, (b_i)^1, (b_i)^0, (b_i)^2, (c_i)^2, M_i^2, (a_i)^2, (a_i)^0 \rangle$ ，滿

足下列條件：(1) P_i 是以 u^0 為起點與 $(a_i)^0 \in N(v^0)$ 為終點的漢米頓路徑，且 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。

(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-3$ ， $2 \leq k \leq 3^n-1$ 。

對 $i = 2n-2$ ：

令一條漢米頓路徑 $P_{2n-2}^0 = \langle u^0, (x_{2n-2})^0, M_{2n-2}^0 - \{(x_{2n-2})^0, (c_{2n-2})^0\}, (d_{2n-2})^0, (c_{2n-2})^0, (b_{2n-2})^0, (a_{2n-2})^0 \rangle$ ，且在 $(C_3^n)^1$ 中，有一條漢米頓路徑 $HP_{2n-2}^1 = \langle (d_{2n-2})^1, (e_{2n-2})^1, HP_{2n-2}^1 - \{(e_{2n-2})^1\}, (x_{2n-2})^1 \rangle$ ；在 $(C_3^n)^2$ 中，有一條漢米頓路 $HP_{2n-2}^2 = \langle (x_{2n-2})^2, HP_{2n-2}^2 - (c_{2n-2})^2 \rangle$ ，然後畫出漢米頓路徑 $P_{2n-2} = \langle u^0, M_{2n-2}^0 - \{(c_{2n-2})^0\}, (d_{2n-2})^0, (d_{2n-2})^1, (e_{2n-2})^1, HP_{2n-2}^1 - \{(e_{2n-2})^1\},$

$(x_{2n-2})^1, (x_{2n-2})^2, HP_{2n-2}^2, (c_{2n-2})^2, (c_{2n-2})^0, (b_{2n-2})^0, (a_{2n-2})^0 >$ 。

對 $i = 2n - 1$:

在 $(C_3^n)^2$ 中，有一條漢米頓路徑 $HP_{2n-1}^2 = \langle u^2, HP_{2n-1}^2 - \{(x_{2n-1})^2\}, (y_{2n-1})^2, (x_{2n-1})^2 \rangle$; 在

$(C_3^n)^0$ 中，有一條漢米頓路徑 $HP_{2n-1}^0 = \langle (x_{2n-1})^0, HP_{2n-1}^0 - \{(c_{2n-1})^0\}, (c_{2n-1})^0, (b_{2n-1})^0 \rangle$; 在 $(C_3^n)^1$

中，有一條漢米頓路徑 $HP_{2n-1}^1 = \langle (b_{2n-1})^1, HP_{2n-1}^1, (a_{2n-1})^1 \rangle$, 然後畫出漢米頓路徑 $P_{2n-1} = \langle u^0,$

$u^2, HP_{2n-1}^2 - \{(x_{2n-1})^2\}, (y_{2n-1})^2, (x_{2n-1})^2, (x_{2n-1})^0, HP_{2n-1}^0 - \{(c_{2n-1})^0\}, (c_{2n-1})^0, (b_{2n-1})^0, (b_{2n-1})^1, HP_{2n-1}^1,$

$(a_{2n-1})^1 \rangle$ 。

對 $i = 2n$:

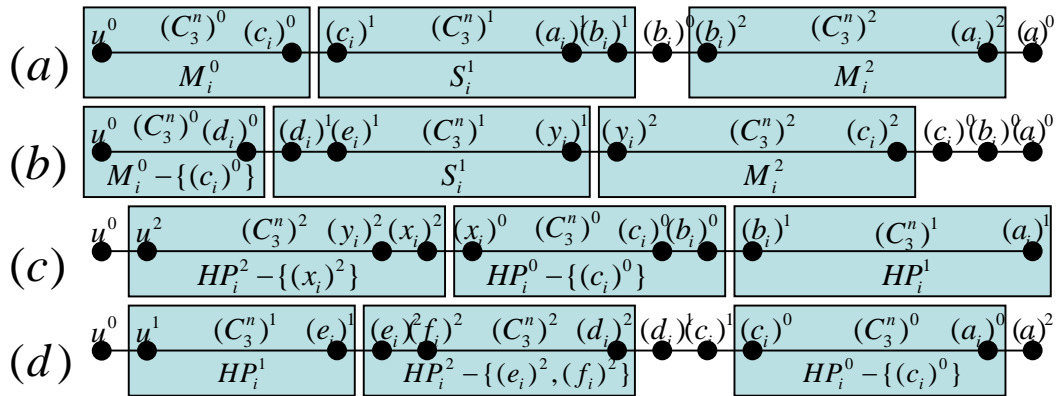
在 $(C_3^n)^1 - \{(c_{2n})^1, (d_{2n})^1\}$ 中，有一條漢米頓路徑 $HP_{2n}^1 = \langle u^1, HP_{2n}^1, (e_{2n})^1 \rangle$; 在 $(C_3^n)^2$ 中，有

一條漢米頓路徑 $HP_{2n}^2 = \langle (e_{2n})^2, (f_{2n})^2, HP_{2n}^2 - \{(e_{2n})^2, (f_{2n})^2\}, (d_{2n})^2 \rangle$; 在 $(C_3^n)^0 - \{u^0\}$ 中，有一

條漢米頓路徑 $HP_{2n}^0 = \langle (c_{2n})^0, HP_{2n}^0 - \{(c_{2n})^0\}, (a_{2n})^0 \rangle$, 然後畫出漢米頓路徑 $P_{2n} = \langle u^0, u^1,$

$HP_{2n}^1, (e_{2n})^1, (e_{2n})^2, (f_{2n})^2, HP_{2n}^2 - \{(e_{2n})^2, (f_{2n})^2\}, (d_{2n})^2, (d_{2n})^1, (c_{2n})^1, (c_{2n})^0, HP_{2n}^0 - \{(c_{2n})^0\},$

$(a_{2n})^0, (a_{2n})^2 \rangle$, 故此狀況得證(圖三十二)。



圖三十二 (a) $1 \leq i \leq 2n - 3$ (b) $i = 2n - 2$ (c) $i = 2n - 1$ (d) $i = 2n$

(2) $u \in (C_3^n)^i, v \in (C_3^n)^j, i \neq j$, 不失一般性，我們令 $u = u^0, v = v^2$ 。

對 $1 \leq i \leq 2n - 3$:

漢米頓路徑 $P_i = \langle u^0, P_i^0, (c_i)^0, (b_i)^0, (a_i)^0, (a_i)^1, R_i^1, (b_i)^1, (b_i)^2, R_i^2, (a_i)^2 \rangle$ ，滿足下列條件：

(1) P_i 是以 u^0 為起點與 $(a_i)^2 \in N(v^2)$ 為終點的漢米頓路徑，且 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。

(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-3$ ， $2 \leq k \leq 3^n - 1$ 。

對 $i = 2n-2$ ：

令一條從 $(c_{2n-2})^1$ 到 $(x_{2n-2})^1$ 的漢米頓路徑 HP_{2n-2}^1 ；一條在 $(C_3^n)^2 - \{(a_{2n-2})^2\}$ 中從 $(x_{2n-2})^2$ 到 $(b_{2n-2})^2$ 的漢米頓路徑 HP_{2n-2}^2 ，然後畫出漢米頓路徑 $P_{2n-2} = \langle u^0, P_{2n-2}^0, (c_{2n-2})^0, (c_{2n-2})^1, HP_{2n-2}^1, (x_{2n-2})^1, (x_{2n-2})^2, HP_{2n-2}^2, (b_{2n-2})^2, (b_{2n-2})^0, (a_{2n-2})^0, (a_{2n-2})^2 \rangle$ 。

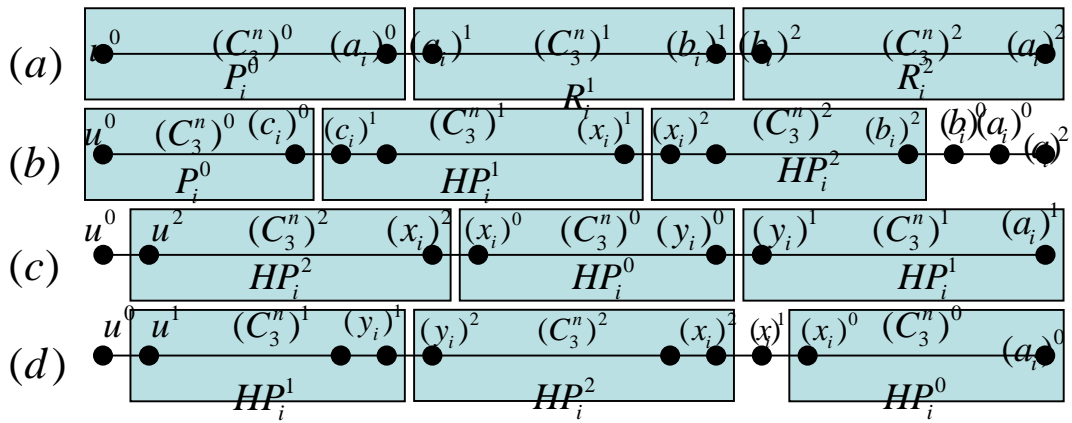
對 $i = 2n-1$ 。

在 $(C_3^n)^0 - \{u^0\}$ 中，有一條從 $(x_{2n-1})^0$ 到 $(y_{2n-1})^0$ 的漢米頓路徑 HP_{2n-1}^0 ；在 $(C_3^n)^1$ 中，有一條從 $(y_{2n-1})^1$ 到 $(a_{2n-1})^1$ 的漢米頓路徑 HP_{2n-1}^1 ；在 $(C_3^n)^2$ 中，有一條從 u^2 到 $(x_{2n-1})^2$ 的漢米頓路徑 HP_{2n-1}^2 ，然後畫出漢米頓路徑 $P_{2n-1} = \langle u^0, u^2, HP_{2n-1}^2, (x_{2n-1})^2, (x_{2n-1})^0, HP_{2n-1}^0, (y_{2n-1})^0, (y_{2n-1})^1, HP_{2n-1}^1, (a_{2n-1})^1 \rangle$ 。

對 $i = 2n$ 。

在 $(C_3^n)^0 - \{u^0\}$ 中，有一條從 $(x_{2n})^0$ 到 $(a_{2n})^0$ 的漢米頓路徑 HP_{2n}^0 ；在 $(C_3^n)^1 - \{(x_{2n})^1\}$ 中，有一條從 u^1 到 $(y_{2n})^1$ 的漢米頓路徑 HP_{2n}^1 ；在 $(C_3^n)^2$ 中，有一條從 $(y_{2n})^2$ 到 $(x_{2n})^2$ 的漢米頓路徑，然後畫出漢米頓路徑 $P_{2n} = \langle u^0, u^1, HP_{2n}^1, (y_{2n})^1, (y_{2n})^2, HP_{2n}^2, (x_{2n})^2, (x_{2n})^1, (x_{2n})^0, HP_{2n}^0, (a_{2n})^0 \rangle$ ，故此狀況得證。(圖三十三)

由(1)、(2)可知，此引理得證。



圖三十三(a) $1 \leq i \leq 2n-3$ (b) $i = 2n-2$ (c) $i = 2n-1$ (d) $i = 2n$

命題 10： C_3^n 為一 $2n-1$ -互相獨立漢米頓連結圖。

(一)檢查

我們先檢查 $n=1$ 與 $n=2$ 時。當圖形為 C_3^1 時，很明顯地， C_3^1 是一互相獨立漢米頓連結圖。

當圖形為 C_3^2 時，也為一互相獨立漢米頓連結圖，檢查過程如下(圖三十二)。

(u,v)	路徑								
$(00,22)$	00	01	02	12	11	10	20	21	22
	00	02	01	11	21	20	10	12	22
	00	10	11	12	02	01	21	20	22
$(00,01)$	00	01	21	22	20	10	11	12	02
	00	10	12	11	01	21	20	22	02
	00	20	22	12	10	11	21	01	02

圖三十二 檢查過程

(二)證明

我們用數學歸納法來證明。，不失一般性，我們令 $u = u^0$ ，然後畫出漢米頓路徑 P_i 。

(1) $u, v \in (C_3^n)^j$ ，則可令 $j = 0$ ， $v = v^0$ 。

由歸納法可知，在 $(C_3^n)^0$ 中，存在 $2n-1$ 條漢米頓路徑 $P_i^0 = \langle u^0, L_i^0, (c_i)^0, (b_i)^0, (a_i)^0, v^0 \rangle$ ，

滿足下列條件：(1) P_i^0 是以 u^0 為起點與以 v^0 為終點的漢米頓路徑，且 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。

(2) $P_m^0(k) \neq P_n^0(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-3$ ， $2 \leq k \leq 3^{n-1} - 2$ 。由引理 2 可知，在 $(C_3^n)^j - \{(b_i)^j\}$ 中，存

在 $2n-3$ 條漢米頓路徑 M_i^j ，滿足下列條件：(1) M_i^j 是以 $(a_i)^j$ 為起點與 $(c_i)^j$ 為終點的漢米頓圈，其中 $1 \leq i \leq 2n-3$ ， $1 \leq j \leq 2$ 。(2) $M_m^j(k) \neq M_n^j(k)$ ，其中 $1 \leq m < n \leq 2n-3$ ， $1 \leq k \leq 3^{n-1}-2$ ， $1 \leq j \leq 2$ 。

對每一個 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。

漢米頓路徑 $P_i = \langle u^0, P_i^0 - \{(b_i)^0, (a_i)^0, v^0\}, (c_i)^0, (c_i)^1, L_i^1, (a_i)^1, (a_i)^2, L_i^2, (c_i)^2, (b_i)^2, (b_i)^1, (b_i)^0, (a_i)^0, v^0 \rangle$ ，

滿足下列條件：(1) P_i 是以 u^0 為起點與以 v^0 為終點的漢米頓路徑，且

$1 \leq i \leq 2n-3$ 。(2) $P_m(k) \neq P_n(k)$ ， $1 \leq m < n \leq 2n-3$ ， $2 \leq k \leq 3^{n-1}-2$ 。

對 $i = 2n-2$ 。

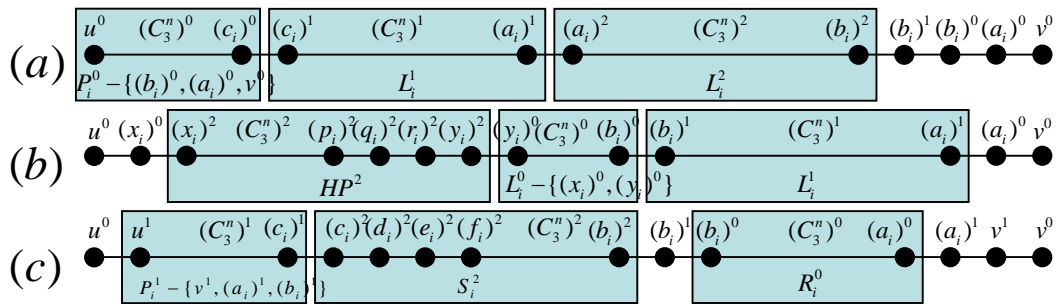
令 $P_{2n-2}^0 = \langle u^0, (x_{2n-2})^0, (y_{2n-2})^0, L_{2n-2}^0 - \{(x_{2n-2})^0, (y_{2n-2})^0\}, (c_{2n-2})^0, (b_{2n-2})^0, (a_{2n-2})^0, v^0 \rangle$ ，

然後畫出漢米頓路徑 $P_{2n-2} = \langle u^0, (x_{2n-2})^0, (x_{2n-2})^2, HP^2, (y_{2n-2})^2, (y_{2n-2})^0, L_{2n-2}^0 - \{(x_{2n-2})^0, (y_{2n-2})^0\}, (c_i)^0, (b_i)^0, (b_i)^1, L_i^1, (a_i)^1, (a_i)^0, v^0 \rangle$ 。

對 $i = 2n-1$ 。

在 $(C_3^n)^0 - \{u^0\}$ 中，可取得一條從 $(a_{2n-1})^0$ 到 $(b_{2n-1})^0$ 的漢米頓路徑 R_{2n-1}^0 ；在 $(C_3^n)^2$ 中，可取得一條從 $(b_{2n-1})^2$ 到 $(c_{2n-1})^2$ 的漢米頓路徑 S_{2n-1}^2 ，然後可以畫漢米頓路徑

$P_{2n-1} = \langle u^0, u^1, P_{2n-1}^1 - \{v^1, (a_{2n-1})^1, (b_{2n-1})^1\}, (c_{2n-1})^1, (c_{2n-1})^2, S_{2n-1}^2, (b_{2n-1})^2, (b_{2n-1})^1, (b_{2n-1})^0, R_{2n-1}^0, (a_{2n-1})^0, (a_{2n-1})^1, v^1, v^0 \rangle$ 。(圖三十三)



圖三十三(a) $1 \leq i \leq 2n-3$ (b) $i = 2n-2$ (c) $i = 2n-1$

故此狀況得證。

(2) $u \in (C_3^n)^i$, $v \in (C_3^n)^j$, 其中 $i \neq j$, 則可令 $j = 2$, $v = v^2$ 。

對每一個 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。

由命題 1 可知, 在 $(C_3^n)^2$ 中, 可取得漢米頓圈 C_i^2 , 滿足下列條件: (1) C_i^2 是以 v^0 為起點和終點的漢米頓圈, 且 $1 \leq i \leq 2n-2$ 。 (2) $C_m^2(k) \neq C_n^2(k)$, $1 \leq m < n \leq 2n-2$, $2 \leq k \leq 3^{n-1}-1$,

其中 $C_i^2(3^{n-1}-1) = (a_i)^2$ 。由引理 6 可知, 在 $(C_3^n)^0$ 中, 可取得漢米頓路徑 R_i^0 , 滿足下列條件:

(1) R_i^0 是以 u^0 為起點與以 $(a_i)^0$ 為終點的漢米頓路徑, 且 $1 \leq i \leq 2n-2$ 。 (2) $R_m^0(k) \neq R_n^0(k)$,

$1 \leq m < n \leq 2n-2$, $2 \leq k \leq 3^{n-1}-2$, 其中 $R_i^0(3^{n-1}-2) = (b_i)^0$ 。由引理 3 可知, 在 $(C_3^n)^1$ 中, 可取

得漢米頓路徑 S_i^1 , 滿足下列條件: (1) S_i^1 是以 $(a_i)^1$ 為起點與以 $(b_i)^1$ 為終點的漢米頓路徑, 且

$1 \leq i \leq 2n-3$ 。 (2) $S_m^1(k) \neq S_n^1(k)$, $1 \leq m < n \leq 2n-3$, $2 \leq k \leq 3^{n-1}-2$ 。然後畫出漢米頓路徑

$P_i = \langle u^0, R_i^0 - \{(a_i)^0\}, (b_i)^0, (b_i)^1, S_i^1, (a_i)^1, (a_i)^0, (a_i)^2, C_i^2 - \{(a_i)^2\}, v^2 \rangle$, 滿足下列條件: (1) P_i

是以 u^0 為起點與以 v^2 為終點的漢米頓路徑, 且 $1 \leq i \leq 2n-3$ 。 (2) $P_m(k) \neq P_n(k)$,

$1 \leq m < n \leq 2n-3$, $2 \leq k \leq 3^{n-1}-2$ 。

對 $i = 2n-2$ 。

在 $(C_3^n)^0$ 中, 可取一條漢米頓路徑 $P_{2n-2}^0 = \langle u^0, (x_{2n-2})^0, (y_{2n-2})^0, L_{2n-2}^0, (a_{2n-2})^0, v^0 \rangle$ 。在

$(C_3^n)^1$ 中, 可取一條從 $(a_{2n-2})^1$ 到 v^1 的漢米頓路徑 HP_{2n-2}^1 。在 $(C_3^n)^2 - \{v^2\}$ 中, 可取一條從 $(x_{2n-2})^2$

到 $(y_{2n-2})^2$ 的漢米頓路徑 HP_{2n-2}^2 , 然後畫出漢米頓路徑

$P_{2n-2} = \langle u^0, (x_{2n-2})^0, (x_{2n-2})^2, HP_{2n-2}^2, (y_{2n-2})^2, (y_{2n-2})^0, HP_{2n-2}^1, (a_{2n-2})^0, (a_{2n-2})^1, L_{2n-2}^1, v^1, v^2 \rangle$ 。

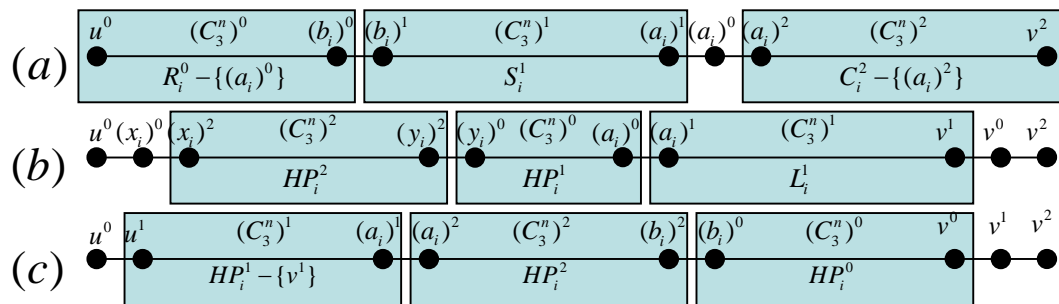
對 $i = 2n-1$ 。

在 $(C_3^n)^0 - \{u^0\}$ 中, 可取一條從 $(b_{2n-1})^0$ 到 v^0 的漢米頓路徑 HP_{2n-1}^0 。在 $(C_3^n)^1$ 中, 可取一條從

u^1 到 v^1 的漢米頓路徑 HP_{2n-1}^1 , 其中 $HP_{2n-1}^1(3^{n-1}-2) = (a_{2n-1})^1$ 。在 $(C_3^n)^2 - \{v^2\}$ 中, 可取一條從

$(a_{2n-1})^2$ 到 $(b_{2n-1})^2$ 的漢米頓路徑。然後畫出漢米頓路徑 $P_{2n-1} = \langle u^0, u^1, HP_{2n-1}^1 - \{v^1\},$

$(a_{2n-1})^1, (a_{2n-1})^2, HP_{2n-1}^2, (b_{2n-1})^2, (b_{2n-1})^0, HP_{2n-1}^0, v^0, v^1, v^2 > \circ$ (圖三十四)



圖三十四(a) $1 \leq i \leq 2n-3$ (b) $i = 2n-2$ (c) $i = 2n-1$

故此狀況得證。

由(1)、(2)可知，此命題得證。

伍、研究結果與討論：

1. C_3^n 爲一漢米頓圖
2. C_3^n 爲一漢米頓連結圖
3. C_3^n 爲一超容錯漢米頓圖
4. C_3^n 爲一超生成連結圖
5. C_3^n 之寬直徑 $D_k(C_3^n) = \begin{cases} n & 1 \leq k \leq n \\ n+1 & n+1 \leq k \leq 2n \end{cases}$
6. C_3^n 爲一泛圈圖
7. C_3^n 爲一泛連結圖
8. C_3^n 爲一泛可置性漢米頓圖
9. C_3^n 爲一互相獨立漢米頓圖
10. C_3^n 爲一互相獨立漢米頓連結圖

陸、展望

在本報告中，我們已對 C_3^n 有相當的了解，隨著越來越深入的探討，發現 C_3^n 尚有許多有趣的性質，首先我們希望能夠計算出 k -生成直徑 $D_k^*(C_3^n)$ 的值，目前我們已能討論 $k=1,2$ 之情形，期望可以得出億計算公式；接著要考慮圖上的容錯性質，例如 **IHC** 和 **IHP** 中的邊和點的容錯，以及容錯直徑的計算，目前似乎沒有這方面的研究，最後，希望能將圖形推廣為 (C_m^n) ，甚至 $C(n_1, n_2, \dots, n_k)$ 。

柒、參考資料：

- [1] 徐力行 沒有數字的數學 天下文化 2003.9.15
- [2] 徐力行 動物園裡的數學
- [3] C.M. Sun, C.K. Lin, H.M. Huang and L.H. Hsu (2006), "Mutually Independent Hamiltonian Paths and Cycles in Hypercubes," *Journal of Interconnection Networks*, Vol. 7, pp. 235-255.
- [4] Y.C. Chen, L.H. Hsu, Jimmy J.M. Tan (2006), " A Recursively Construction Scheme for Super Fault-Tolerant Hamiltonian Graphs," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 177, pp. 465-481.
- [5] S.S. Kao and L.H. Hsu (2005), "The Globally Bi-3* and Hyper Bi-3* Connectedness of the Spider Web Networks," *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 170, pp. 597-610.
- [6] C.K. Lin, H.M. Huang, D.F. Hsu, L.H. Hsu (2006), " On the Spanning w-Wide Diameter of the Star Graph," *Networks*, Vol. 48, pp. 235-249.

評語

論文題材多樣化，作者花費了很多的功夫去解決各式各樣的情況，唯，並無一整體性的結論。