臺灣二ＯＯ七年國際科學展覽會

科　　　　別：數學

作 品 名 稱 ：Double Pedal Curve

學校 / 作者 ：國立臺南第一高級中學　　　　戴維佑
國立臺南第一高級中學　　　　顏廷仲

（左)我是顏廷仲，民國79年2月23日出生於高雄市，現就讀國立台南第一高級中學二年級。藝術為我最感興趣的東西，吉他、midi、模型、數學、物理等都是我的嗜好。我的數學能力是在小學時被一個很兇的老師給激出來的，也因為這位老師，讓我從此愛上數學。

（右)我是戴維佑，我來自一個平凡的家庭，父親為消防技師，母親是他的幫手，哥哥則是我的榜樣。興趣是寫文章、塗鴉和橋牌；喜歡的科目是數學和化學，成績普普，認為不應盲目追隨升學潮流而沉浮，每個人唯有在興趣與專長上努力才能最有所發展。進一中後有幸遇到導師為我開啟了數學之美，從以往的演練習題轉而專題的理論探究。不論日後身處何領域，都秉持著事務用心皆為美，虛心領悟。

Double Pedal Curve

一、摘要：

設 Γ 為一平面曲線而 P 為一定點，自 P 向 Γ 所有的切線作對稱點，則所有對稱點所成的圖形 Γ_1 稱為曲線 Γ 對定點 P 的 double pedal curve，Γ_1 對定點 P 的 double pedal curve Γ_2 稱為曲線 Γ 對定點 P 的 2-th double pedal curve，Γ_2 對定點 P 的 double pedal curve Γ_3 稱為曲線 Γ 對定點 P 的 3-th double pedal curve ,…… 。

以下是本文主要的結果：

結論 A：當 Γ 為一圓形而 P 為圓上一點時，計算其 n–th double pedal curve 的方程式。

結論 B：當 Γ 為任意平滑的參數曲線而 P 為任意一點時，Γ 的 double pedal curve 的切線性質。

結論 C：當 Γ 為任意平滑的參數曲線而 P 為(0,0)時，計算其 n–th double pedal curve 的方程式。

summary：

Given a plane curve Γ and *a* fixed point P, the locus of the reflection of P about the tangent to the curve Γ is called the double pedal curve of Γ with respect to P. We denote Γ_1 as the double pedal curve of Γ with respect to P, Γ_2 as the double pedal curve of Γ_1 with respect to P, Γ_3 as the double pedal curve of Γ_2 with respect to P, and so on, we call Γ_n the n-th double pedal curve of Γ with respect to P.

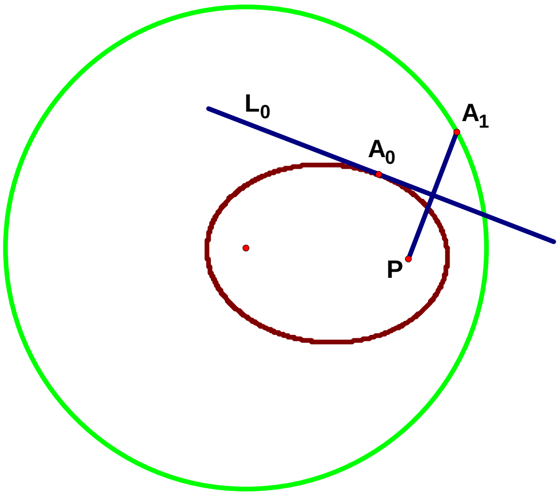
If Γ is a circle, and P is *a* point on the circle, we got the parametric equation of the n–th double pedal curve of Γ with respect to P. And, for any parametric plane curve Γ; we got the method to draw the tangent of the double pedal curve of Γ.

二、內文：

(一)、前言：

1. 研究動機：

2006 年 3 月的某一天，看見了哥哥在用 GSP 在畫橢圓，其中有一個性質：「設 P 是橢圓的焦點，L_0 是橢圓在 A_0 的切線，A_1 是 P 點關於 L_0 的對稱點，當 A_0 在橢圓上繞一圈，A_1 的軌跡為一個圓。」



我們覺得很有趣，想知道對於其他的圖形，A_1 的軌跡圖形是什麼，在好奇心所驅使之下,便開始這次研究。

2. 研究目的：

設Γ為一曲線而 P 為一定點，自 P 向Γ 的所有切線作對稱點，則所有對稱點所成的圖形Γ_1稱為曲線Γ對定點 P 的 double pedal curve，Γ_1對定點 P 的 double pedal curve Γ_2稱為曲線Γ對定點 P 的 2-th double pedal curve，Γ_2對定點 P 的 double pedal curve Γ_3稱為曲線Γ對定點 P 的 3-th double pedal curve ,…… 。取名 double pedal curve 的原因是：它是Γ對定點 P 的 pedal curve （垂足曲線），以 P 為中心，伸長 2 倍的圖形。

利用 GSP 繪圖軟體作圖，我們做出很多漂亮的 double pedal curve ,也觀察到圓形的 n–th double pedal curve 有些規則，經由辛苦的計算，證明我們的猜想是正確的。以下是主要的結果：

結論 A：當Γ為一圓形而 P 為圓上一點時，計算其 n–th double pedal curve 的方程式。

結論 B：當Γ為任意平滑的參數曲線而 P 為任意一點時，Γ的 double pedal curve 的切線性質。（研究過程(三)）

結論 C：當Γ為任意平滑的參數曲線而 P 為(0,0)時, 計算其 n–th double pedal curve 的方程式。(研究過程(三))

(二)研究方法與過程

1. 計算一些例子

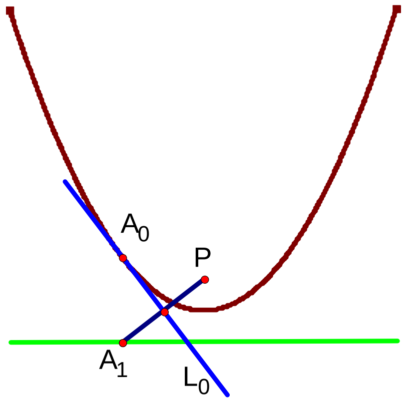
(1) Γ：拋物線、P 為拋物線焦點

令拋物線Γ之方程式為 $x^2=4y$,P 為焦點$(0,1)$,

$A_0(2t,t^2)$為Γ一點，Γ在 A_0 的切線 L_0 為 $y-t^2=t(x-2t) \Rightarrow y=t(x-t)$

設 P(0,0)關於 L_0 的對稱點為 $A_1(x_1,y_1)$, 則 $x_1=2t, y_1=-1$ 。

$\Rightarrow A_1(x_1,y_1)$的軌跡方程式為：$y=-1$, 即拋物線Γ之準線，如下圖。



(2) Γ：橢圓、P 為橢圓中心

令橢圓Γ之方程式為 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,P 為$(0,0)$,

$A_0(a\cos\theta, b\sin\theta)$為$\Gamma$一點，$\Gamma$在 A_0 的切線 L_0 為 $\frac{a\cos\theta\, x}{a^2}+\frac{b\sin\theta\, y}{b^2}=1$

$\Rightarrow L_0$：$b\cos\theta\, x + a\sin\theta\ \ y = ab$

設 P(0,0)關於 L_0 的對稱點為 $A_1(x_1,y_1)$, 則

$$x_1=-2b\cos\theta\,\frac{-ab}{(b\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}\quad\ldots\ldots①$$

$$y_1=-2a\sin\theta\,\frac{-ab}{(b\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}\ldots\ldots②$$

由①，$\frac{-ab}{(b\cos\theta)^2+(a\sin\theta)^2}=\frac{x_1}{-2b\cos\theta}$ 代入②

$$y_1=-2a\sin\theta\,\frac{x_1}{-2b\cos\theta}=\frac{a}{b}x_1\tan\theta \Rightarrow \tan\theta=\frac{by_1}{ax_1},\ \tan^2\theta+1=\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{b^2y_1^{\,2}+a^2x_1^{\,2}}{a^2x_1^{\,2}},$$

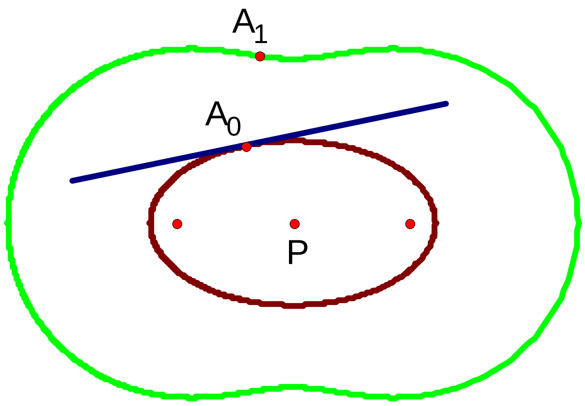
$$\Rightarrow \cos\theta=\pm\sqrt{\frac{a^2x_1^{\,2}}{b^2y_1^{\,2}+a^2x_1^{\,2}}}\text{、}\sin\theta=\pm\sqrt{\frac{b^2y_1^{\,2}}{b^2y_1^{\,2}+a^2x_1^{\,2}}}$$

由①, $x_1=\dfrac{2ab^2\cos\theta}{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}=\dfrac{2ab^2\left(\pm\sqrt{\dfrac{a^2x_1^2}{b^2y_1^2+a^2x_1^2}}\right)}{b^2\dfrac{a^2x_1^2}{b^2y_1^2+a^2x_1^2}+a^2\dfrac{b^2y_1^2}{b^2y_1^2+a^2x_1^2}}$

$\Rightarrow x_1\cdot\dfrac{a^2b^2x_1^2+a^2b^2y_1^2}{b^2y_1^2+a^2x_1^2}=2ab^2\left(\pm\sqrt{\dfrac{a^2x_1^2}{b^2y_1^2+a^2x_1^2}}\right)\Rightarrow\ (x_1^2+y_1^2)^2=4b^2y_1^2+4a^2x_1^2$

$\Rightarrow A_1(x_1,y_1)$的軌跡方程式為：$(x^2+y^2)^2=4b^2y^2+4a^2x^2$,如下圖

[極坐標方程式：$r^2=4a^2\cos^2\theta+4b^2\sin^2\theta$]



(3) Γ ：双曲線、P 為双曲線中心

令双曲線 Γ 之方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,P 為(0 , 0) ,

$A_0(a\sec\theta, b\tan\theta)$為 Γ 一點 ， Γ 在 A_0 的切線 L_0 為 $\dfrac{\sec\theta\, x}{a}-\dfrac{\tan\theta\, y}{b}=1$

$\Rightarrow L_0$：$b\sec\theta - a\tan\theta\ = ab$

設 P(0,0)關於 L_0 的對稱點為 $A_1(x_1,y_1)$, 則

$x_1=-2b\sec\theta\dfrac{-ab}{b^2\sec^2\theta+a^2\tan^2\theta}$ ……③

$y_1=2a\tan\theta\dfrac{-ab}{b^2\sec^2\theta+a^2\tan^2\theta}$ …… ④

由③, $\dfrac{-ab}{b^2\sec^2\theta+a^2\tan^2\theta}=\dfrac{x_1}{-2b\sec\theta}$ 代入④

$y_1=2a\tan\theta\dfrac{x_1}{-2b\sec\theta}\Rightarrow\dfrac{y_1}{x_1}=\dfrac{a\sin\theta}{b}$,

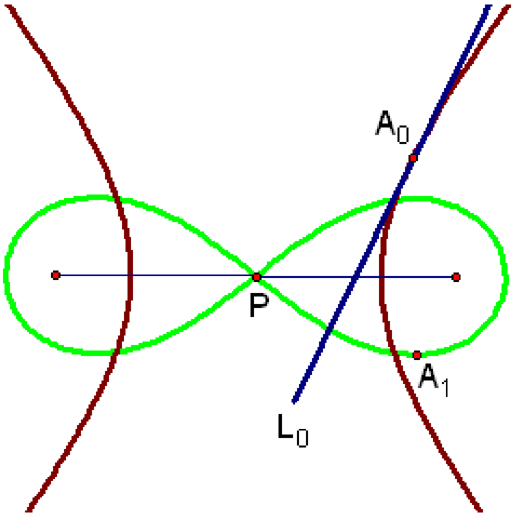
得 $\sin\theta=\dfrac{by_1}{ax_1}$, $\cos\theta=\pm\dfrac{\sqrt{a^2x_1^2-b^2y_1^2}}{ax_1}$, $\tan\theta=\pm\dfrac{by_1}{\sqrt{a^2x_1^2-b^2y_1^2}}$, $\sec\theta=\pm\dfrac{ax_1}{\sqrt{a^2x_1^2-b^2y_1^2}}$

代入④，$y_1=2a\left(\pm\dfrac{by_1}{\sqrt{a^2x_1{}^2-b^2y_1{}^2}}\right)\dfrac{-ab}{b^2\dfrac{a^2x_1{}^2}{a^2x_1{}^2-b^2y_1{}^2}+a^2\dfrac{b^2y_1{}^2}{a^2x_1{}^2-b^2y_1{}^2}}$

$\Rightarrow\dfrac{-2(a^2x^2-b^2y^2)}{x^2+y^2}=(\pm\sqrt{a^2x^2-b^2y^2})$

$\Rightarrow A_1(x_1,y_1)$的軌跡方程式為：$(x^2+y^2)^2=4(a^2x^2-b^2y^2)$,如下圖。

[極坐標方程式：$r^2=4a^2\cos^2\theta-4b^2\sin^2\theta$]



(4) Γ：三次函數 $y=x^3$、P 為(0,0)：

$A_0(t,t^3)$為Γ一點，Γ在 A_0 的切線 L_0 為 $y-t^3=2t^2(x-t)\Rightarrow 3t^2x-y-2t^3=0$

設 P(0,0)關於 L_0 的對稱點為 $A_1(x_1,y_1)$, 則

$x_1=-2(-3t^2)(\dfrac{2t^3}{9t^4+1})$ ….⑤

$y_1=-2(1)(\dfrac{2t^3}{9t^4+1})$ ……⑥

由⑤，$\dfrac{2t^3}{9t^4+1}=\dfrac{x_1}{6t^2}\Rightarrow y_1=-2(1)\dfrac{x_1}{6t^2}=\dfrac{-x_1}{3t^2}\Rightarrow t^2=-\dfrac{x_1}{3y_1}$，代入④

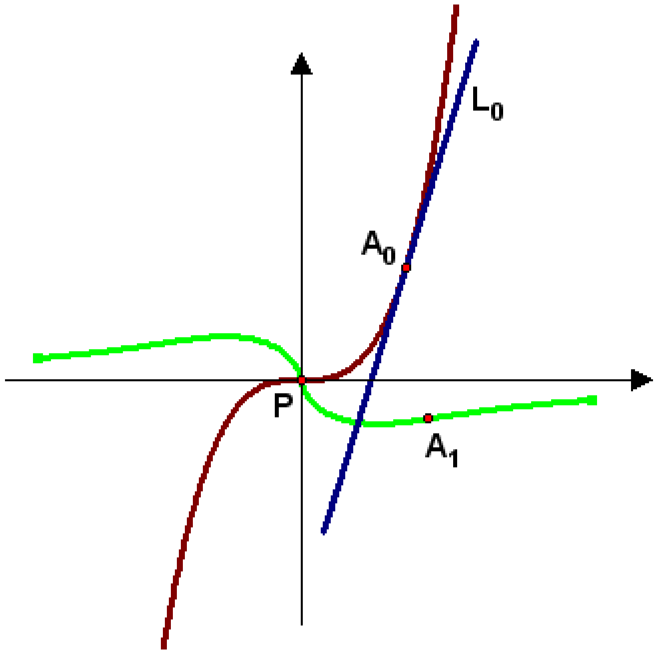
得 $y_1=-2\dfrac{2t(-\dfrac{x_1}{3y_1})}{\dfrac{x_1{}^2}{y_1{}^2}+1}=\dfrac{4t\dfrac{x_1}{3y_1}}{\dfrac{x_1{}^2}{y_1{}^2}+1}=\dfrac{4x_1y_1t}{3(x_1{}^2+y_1{}^2)}$

$\Rightarrow y_1{}^2=\dfrac{16x_1{}^2y_1{}^2-(-\dfrac{x_1}{3y_1})}{9(x_1{}^2+y_1{}^2)^2}=\dfrac{-16x_1{}^3y_1}{27(x_1{}^2+y_1{}^2)^2}$

$\Rightarrow 27x_1{}^4y_1{}^2+54x_1{}^2y_1{}^4+27y_1{}^6+16x_1{}^3y_1=0$

$\Rightarrow A_1(x_1,y_1)$的軌跡方程式為：$27x^4y^2+54x^2y^4+27y^6+16x^3y=0$，如下圖。

[極坐標方程式：$r^2=\dfrac{-16\cos^3\theta}{27\sin\theta}$]

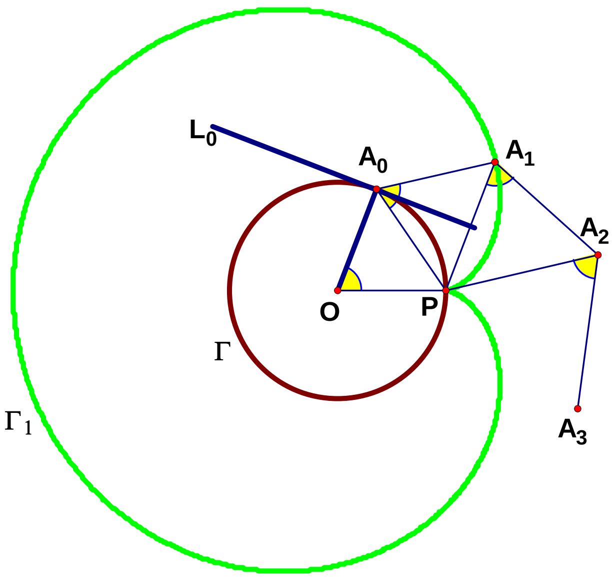


2. P 點不變的 n-th double pedal curve（以圓為例，P 是圓上一點）

令Γ：$x^2+y^2=1$、$P(1,0)$，$A_0(\cos\theta,\sin\theta)$為$\Gamma$上的動點，$\Gamma$在$A_0$的切線為

$$L_0：\cos\theta x+\sin\theta\ \ y=1。$$

設 P 點關於L_0的對稱點為$A_1(x_1,y_1)$，則有向角$\angle PA_0A_1=\angle POA_0=\theta$（弦切角性質）。以$A_1$為旋轉中心，將 P 點旋轉θ角，所得的點設為$A_2(x_2,y_2)$，以$A_2$為旋轉中心，將 P 點旋轉θ角，所得的點設為$A_3(x_3,y_3)$，依此類推，以$A_i$為旋轉中心，將 P 點旋轉θ角，所得的點設為$A_{i+1}(x_{i+1},y_{i+1})$。並且假設$A_n$的軌跡圖形為$\Gamma_n$。



引理：$\begin{cases} x_n = \cos\theta + x_{n-1}(1-\cos\theta) + y_{n-1}\sin\theta \\ y_n = \sin\theta - x_{n-1}\sin\theta + y_{n-1}(1-\cos\theta) \end{cases}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$，其中 $x_0 = \cos\theta$, $y_0 = \sin\theta$ 。

Proof：令 $z = (x_n - x_{n-1}) + (y_n - y_{n-1})i$, $w = (1 - x_{n-1}) - y_{n-1}i$

$$\Rightarrow z = w \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\Rightarrow (x_n - x_{n-1}) + (y_n - y_{n-1})i = \left[1 - x_{n-1} - y_{n-1}i\right]\left[\cos\theta + i\sin\theta\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n - x_{n-1} = (1 - x_{n-1})\cos\theta + y_{n-1}\sin\theta \\ y_n - y_{n-1} = \sin\theta(1 - x_{n-1}) - \cos\theta\, y_{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_n = \cos\theta + x_{n-1}(1-\cos\theta) + y_{n-1}\sin\theta \\ y_n = \sin\theta - x_{n-1}\sin\theta + y_{n-1}(1-\cos\theta) \end{cases}$$，得證。

性質 1：$\begin{cases} x_n = C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + C_3^{n+1}\cos 3\theta - \ldots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta \\ y_n = C_1^{n+1}\sin\theta - C_2^{n+1}\sin 2\theta + C_3^{n+1}\sin 3\theta - \ldots + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta \end{cases}$

Proof：

(1)當 $n = 1$ 時：

由引理：$\begin{cases} x_1 = \cos\theta + x_0(1-\cos\theta) + y_0\sin\theta = \cos\theta + \cos\theta(1-\cos\theta) + \sin\theta\sin\theta \\ y_1 = \sin\theta - x_0\sin\theta + y_0(1-\cos\theta) = \sin\theta - \cos\theta\sin\theta + \sin\theta(1-\cos\theta) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2\cos\theta - \cos 2\theta \\ y_1 = 2\sin\theta - \sin 2\theta \end{cases}$$，即 $n = 1$ 時成立。

(2) 設 $n-1$時成立.

$$\begin{aligned}
x_n &= x_{n-1} + \cos\theta - x_{n-1}\cos\theta + y_{n-1}\sin\theta \\
&= (C_1^n\cos\theta - C_2^n\cos 2\theta + C_3^n\cos 3\theta - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos n\theta) + \cos\theta \\
&\quad - (C_1^n\cos^2\theta - C_2^n\cos 2\theta\cos\theta + C_3^n\cos 3\theta\cos\theta - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos n\theta\cos\theta) \\
&\quad + (C_1^n\sin^2\theta - C_2^n\sin 2\theta\sin\theta + C_3^n\sin 3\theta\sin\theta - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n\sin n\theta\sin\theta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (C_1^n\cos\theta - C_2^n\cos 2\theta + C_3^n\cos 3\theta - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos n\theta) + \cos\theta \\
&\quad - (C_1^n\frac{1+\cos 2\theta}{2} - C_2^n\frac{\cos 3\theta + \cos\theta}{2} + C_3^n\frac{\cos 4\theta + \cos 2\theta}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n\frac{\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta}{2}) \\
&\quad + (C_1^n\frac{1-\cos 2\theta}{2} - C_2^n\frac{\cos\theta - \cos 3\theta}{2} + C_3^n\frac{\cos 2\theta - \cos 4\theta}{2} - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n\frac{\cos(n-1)\theta - \cos(n+1)\theta}{2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (C_1^n\cos\theta - C_2^n\cos 2\theta + C_3^n\cos 3\theta - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos n\theta) + \cos\theta \\
&\quad - (C_1^n\cos 2\theta - C_2^n\cos 3\theta + C_3^n\cos 4\theta - \ldots + (-1)^{n-1}C_n^n\cos(n+1)\theta)
\end{aligned}$$

又由巴斯卡定理: $C_r^n + C_{r+1}^n = C_{r+1}^{n+1}$

$= C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + C_3^{n+1}\cos 3\theta - C_4^{n+1}\cos 4\theta + ...$

$+(-1)^{n-1}C_n^{n+1}\cos n\theta + (-1)^n C_n^n \cos(n+1)\theta$

$= C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + C_3^{n+1}\cos 3\theta - C_4^{n+1}\cos 4\theta + ...$

$-(-1)^n C_n^{n+1}\cos n\theta + (-1)^n C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta$

y_n同理可證

由(1)(2)，得證。

性質 2：$\overline{PA_n}$ 的中垂線，即為曲線Γ_{n-1} 在 A_{n-1} 處的切線 L_{n-1}, n = 1 , 2 , 3, …..。

Proof: 設直線 PA_n 的斜率為 $m_{\overline{PA_n}}$，直線 L_{n-1} 的斜率為 $m_{L_{n-1}}$，只要證明 $m_{\overline{PA_n}} \times m_{L_{n-1}} = -1$。

(1)當 n 是奇數：

$$由A_n:\begin{cases} x_n = C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + ... - C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta \\ y_n = C_1^{n+1}\sin\theta - C_2^{n+1}\sin 2\theta + ... - C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta \end{cases}, P(1,0)$$

$$m_{\overline{PA_n}} = \frac{y_n}{x_n - 1} = \frac{C_1^{n+1}\sin\theta - C_2^{n+1}\sin 2\theta + ... - C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta}{C_1^{n+1}\cos\theta - C_2^{n+1}\cos 2\theta + ... - C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta - 1}$$

又因爲$C_r^n = C_{n-r}^n$,所以經過化簡可得

$$m_{\overline{PA_n}} = \frac{C_1^{n+1}(\sin\theta + \sin n\theta) - C_2^{n+1}(\sin 2\theta + \sin(n-1)\theta) + ... - \sin(n+1)\theta}{C_1^{n+1}(\cos\theta + \cos n\theta) - C_2^{n+1}(\cos 2\theta + \sin(n-1)\theta) - \cos(n+1)\theta - 1}$$

$$= \frac{C_1^{n+1}(2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-1)\theta}{2}) - C_2^{n+1}(2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-3)\theta}{2}) + ... - 2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{C_1^{n+1}(2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-1)\theta}{2}) - C_2^{n+1}(2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n-3)\theta}{2}) + ... - 2\cos^2\frac{(n+1)\theta}{2}}$$

$$= \tan\frac{(n+1)}{2}\theta$$

$$由\Gamma_{n-1}:\begin{cases} x_{n-1} = C_1^n\cos\theta - C_2^n\cos 2\theta + C_3^n\cos 3\theta - .... + C_n^n\cos n\theta \\ y_{n-1} = C_1^n\sin\theta - C_2^n\sin 2\theta + C_3^n\sin 3\theta - .... + C_n^n\sin n\theta \end{cases}$$

$$m_{L_{n-1}} = \frac{\frac{dy_{n-1}}{d\theta}}{\frac{dx_{n-1}}{d\theta}} = \frac{C_1^n\cos\theta - 2\cdot C_2^n\cos 2\theta + 3\cdot C_3^n\cos 3\theta - .... + n\cdot C_n^n\cos n\theta}{-C_1^n\sin\theta + 2\cdot C_2^n\sin 2\theta - 3\cdot C_3^n\sin 3\theta + ... - n\cdot C_n^n\sin n\theta}$$

$$=\frac{n\cdot C_0^{n-1}\cos\theta-n\cdot C_1^{n-1}\cos2\theta+n\cdot C_2^{n-1}\cos3\theta-....+n\cdot C_{n-1}^{n-1}\cos n\theta}{-n\cdot C_0^{n-1}\sin\theta+n\cdot C_1^{n-1}\sin2\theta-n\cdot C_2^{n-1}\sin3\theta+....-n\cdot C_{n-1}^{n-1}\sin n\theta}$$

$$=-\frac{C_0^{n-1}(\cos\theta+\cos n\theta)-C_1^{n-1}(\cos2\theta+\cos(n-1)\theta)+....+C_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}\cos\frac{n+1}{2}\theta}{C_0^{n-1}(\sin\theta+\sin n\theta)-C_1^{n-1}(\sin2\theta+\sin(n-1)\theta)+....+C_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}\sin\frac{n+1}{2}\theta}$$

$$=-\frac{C_0^{n-1}(2\cos\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n-1}{2}\theta)-C_1^{n-1}(2\cos\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n-3}{2}\theta)+....+C_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}\cos\frac{n+1}{2}\theta}{C_0^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n-1}{2}\theta)-C_1^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\cos\frac{n-3}{2}\theta)+....+C_{\frac{n-1}{2}}^{n-1}\sin\frac{n+1}{2}\theta}$$

$$=-\cot\frac{n+1}{2}\theta$$

$\Rightarrow m_{\overline{PA_n}}\times m_{L_{n-1}}=-1$ 。

(2)當 n 是偶數：

$$由A_n:\begin{cases}x_n=C_1^{n+1}\cos\theta-C_2^{n+1}\cos2\theta+....+C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta\\ y_n=C_1^{n+1}\sin\theta-C_2^{n+1}\sin2\theta+....+C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta\end{cases}$$

$$m_{\overline{PA_n}}=\frac{y_n}{x_n-1}=\frac{C_1^{n+1}\sin\theta-C_2^{n+1}\sin2\theta+....+C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta}{C_1^{n+1}\cos\theta-C_2^{n+1}\cos2\theta+....+C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta-1}$$

$$=\frac{C_1^{n+1}(\sin\theta-\sin n\theta)-C_2^{n+1}(\sin2\theta-\sin(n-1)\theta)+....+\sin(n+1)\theta}{C_1^{n+1}(\cos\theta-\cos n\theta)-C_2^{n+1}(\cos2\theta-\cos(n-1)\theta)+....+\cos(n+1)\theta-1}$$

$$=\frac{C_1^{n+1}(-2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{(n-1)\theta}{2})-C_2^{n+1}(-2\cos\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{(n-3)\theta}{2})+....+2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\cos\frac{(n+1)\theta}{2}}{C_1^{n+1}(2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{(n-1)\theta}{2})-C_2^{n+1}(2\sin\frac{(n+1)\theta}{2}\sin\frac{(n-3)\theta}{2})+....-2\sin^2\frac{n+1}{2}\theta}$$

$$=-\cot\frac{(n+1)\theta}{2}$$

$$由\Gamma_{n-1}:\begin{cases}x_{n-1}=C_1^n\cos\theta-C_2^n\cos2\theta+C_3^n\cos3\theta-....-C_n^n\cos n\theta\\ y_{n-1}=C_1^n\sin\theta-C_2^n\sin2\theta+C_3^n\sin3\theta-....-C_n^n\sin n\theta\end{cases}$$

$$m_{L_{n-1}}=\frac{\frac{dy_{n-1}}{d\theta}}{\frac{dx_{n-1}}{d\theta}}=\frac{C_1^n\cos\theta-2\cdot C_2^n\cos2\theta+3\cdot C_3^n\cos3\theta-....-n\cdot C_n^n\cos n\theta}{-C_1^n\sin\theta+2\cdot C_2^n\sin2\theta-3\cdot C_3^n\sin3\theta+....+n\cdot C_n^n\sin n\theta}$$

$$=\frac{n\cdot C_0^{n-1}\cos\theta-n\cdot C_1^{n-1}\cos2\theta+n\cdot C_2^{n-1}\cos3\theta-....-n\cdot C_{n-1}^{n-1}\cos n\theta}{-n\cdot C_0^{n-1}\sin\theta+n\cdot C_1^{n-1}\sin2\theta-n\cdot C_2^{n-1}\sin3\theta+....+n\cdot C_{n-1}^{n-1}\sin n\theta}$$

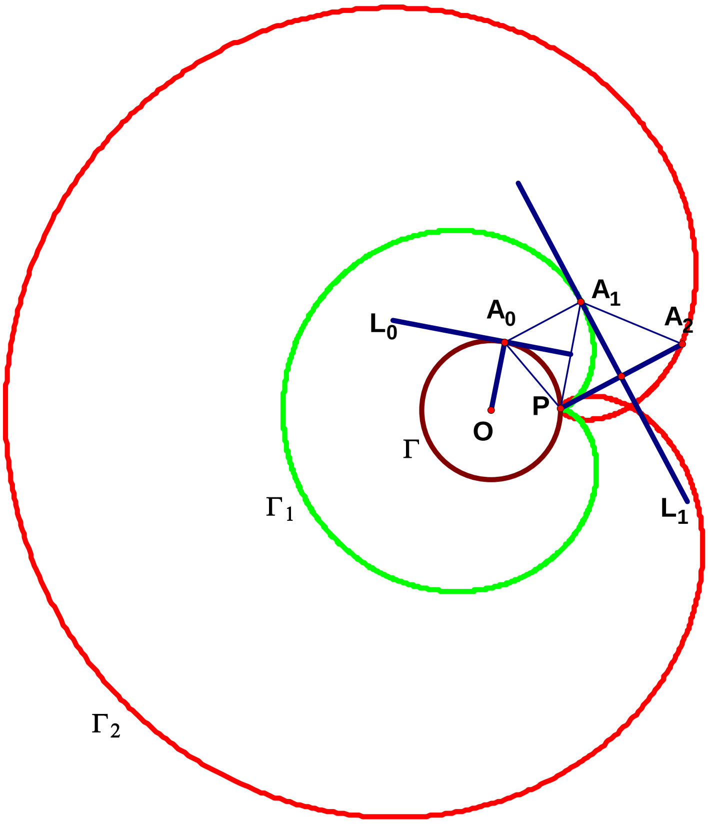
$$= -\frac{C_0^{n-1}(\cos\theta-\cos n\theta)-C_1^{n-1}(\cos 2\theta-\cos(n-1)\theta)+\dots+(-1)^{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-1}^{n-1}(\cos\frac{n}{2}\theta-\cos(\frac{n}{2}+1)\theta)}{C_0^{n-1}(\sin\theta-\sin n\theta)-C_1^{n-1}(\sin 2\theta-\sin(n-1)\theta)+\dots+(-1)^{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-1}^{n-1}(\sin\frac{n}{2}\theta-\sin(\frac{n}{2}+1)\theta)}$$

$$= -\frac{C_0^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-1}{2}\theta)-C_1^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-3}{2}\theta)+\dots+(-1)^{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-1}^{n-1}(2\sin\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta)}{C_0^{n-1}(-2\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-1}{2}\theta)-C_1^{n-1}(-2\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{n-3}{2}\theta)+\dots+(-1)^{\frac{n}{2}+1}C_{\frac{n}{2}-1}^{n-1}(-2\cos\frac{n+1}{2}\theta\sin\frac{1}{2}\theta)}$$

$$= \tan\frac{n+1}{2}\theta$$

$\Rightarrow m_{\overline{PA_n}} \times m_{L_{n-1}} = -1$。 由(1)(2)，得證。

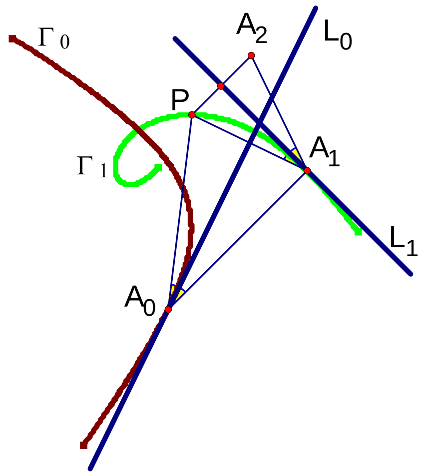
結論 A：由性質 1 與性質 2 得知 ，Γ_1是Γ_0關於 P 點的 double pedal curve，Γ_2是Γ_1關於 P 點的 double pedal curve，Γ_3是Γ_2關於 P 點的 double pedal curve ,……，而Γ_n是Γ_0關於 P 點的 n-th double pedal curve。(如下圖)



性質 2 是本篇文章的關鍵點，經由切線斜率的規律，我們發現，只要以 A_1 為旋轉中心 ，將 P 點旋轉θ角即得 A_2，而以 A_2 為旋轉中心 ，將 P 點旋轉θ角即得 A_3，進而猜測一路到底都是對的，這個觀察也使得 double pedal curve 的切線作圖變得容易。我們試著將圖形推廣到一般平面參數曲線，也得到一致的結果。

3. 推廣到一般平面參數曲線

令 $A_0(x_0(t), y_0(t))$是曲線Γ_0之上的動點 ，P 為(0 , 0)，Γ_0在 A_0 的切線為 L_0。 設 P 點關於 L_0 的對稱點為 $A_1(x_1, y_1)$, A_1 的軌跡圖形為Γ_1，Γ_1在 A_1 的切線為 L_1。令有向角 $\theta = \angle PA_0A_1$，以 A_1 為旋轉中心 ，將 P 點旋轉θ角 ，所得的點設為 $A_2(x_2, y_2)$。為了證明的方便 ，我們將參數 t 變換為有向角θ，即 $A_0(x_0(t), y_0(t)) = A_0(x_0(\theta), y_0(\theta))$。



利用複數極式相乘的旋轉意義 ，求 A_1、A_2 的坐標：

由 $(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0)i = [-x_0 - y_0 i][\cos\theta + i\sin\theta]$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_0 = -\cos\theta\, x_0 + \sin\theta\, y_0 \\ y_1 - y_0 = -\sin\theta\, x_0 - \cos\theta y_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = (1-\cos\theta)x_0 + y_0\sin\theta \\ y_1 = -\sin\theta\, x_0 + (1-\cos\theta)y_0 \end{cases}$$ 同理可得

$$\begin{cases} x_2 = (1-\cos\theta)x_1 + \sin\theta\, y_1 \\ y_2 = -\sin\theta\, x_1 + (1-\cos\theta)y_1 \end{cases}$$，將 x_1、y_1 代入化簡

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = (1-\cos\theta)[(1-\cos\theta)x_0 + y_0\sin\theta] + \sin\theta[-\sin\theta\, x_0 + (1-\cos\theta)y_0] \\ y_2 = -\sin\theta[(1-\cos\theta)x_0 + y_0\sin\theta] + (1-\cos\theta)[-\sin\theta\, x_0 + (1-\cos\theta)y_0] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = -2(1-\cos\theta)(\cos\theta\, x_0 - \sin\theta\, y_0) \\ y_2 = -2(1-\cos\theta)(\sin\theta\, x_0 + \cos\theta\, y_0) \end{cases}$$

結論 B：$\overline{PA_2}$ 的中垂線 ，即為曲線Γ_1 在 A_1 處的切線 L_1 。

Proof：

Step 1：由 $\overline{PA_1} \perp L_0 \Rightarrow \dfrac{y_0'}{x_0'} \cdot \dfrac{y_1}{x_1} = -1 \Rightarrow x_1x_0' + y_1y_0' = 0$，其中 $x_0' = \dfrac{dx_0}{d\theta}, y_0' = \dfrac{dy_0}{d\theta}$ 。

Step 2：$\begin{cases} x_1' = \sin\theta\, x_0 + \cos\theta\, y_0 + (1-\cos\theta)x_0' + \sin\theta\, y_0' \\ y_1' = -\cos\theta\, x_0 + \sin\theta\, x_0 - \sin\theta\, x_0' + (1-\cos\theta)y_0' \end{cases}$

Step 3：
$$\begin{aligned}
& x_2x_1'+y_2y_1' \\
&= -2(1-\cos\theta)(\cos\theta\, x_0-\sin\theta\, y_0)[\sin\theta\, x_0+\cos\theta\, y_0+(1-\cos\theta)x_0'+\sin\theta\, y_0'] \\
&\quad -2(1-\cos\theta)(\sin\theta\, x_0+\cos\theta\, y_0)[-\cos\theta\, x_0+\sin\theta\, x_0-\sin\theta\, x_0'+(1-\cos\theta)y_0'] \\
&= -2(1-\cos\theta)\{[-(1-\cos\theta)x_0-\sin\theta\, y_0]x_0'+[(\sin\theta\, x_0-(1-\cos\theta)\, y_0)]y_0'\} \\
&= -2(1-\cos\theta)[-x_1x_0'-y_1y_0'] \\
&= 0,\text{由Step 1.} \\
&\Rightarrow \frac{y_2}{x_2}\cdot\frac{y_1'}{x_1'}=-1 \Rightarrow \overline{PA_2}\perp L_1 \text{ ，得證。}
\end{aligned}$$

進一步化簡 $\begin{cases} x_2=-2(1-\cos\theta)(\cos\theta\, x_0-\sin\theta\, y_0) \\ y_2=-2(1-\cos\theta)(\sin\theta\, x_0+\cos\theta\, y_0) \end{cases}$ 得

$$\begin{cases} x_2=(-2\cos\theta+2\cos^2\theta)x_0+(2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)y_0=(1-2\cos\theta+\cos2\theta)x_0+(2\sin\theta-\sin2\theta)y_0 \\ y_2=-(2\sin\theta-2\sin\theta\cos\theta)\, x_0+(-2\cos\theta+2\cos^2\theta)\, y_0=-(2\sin\theta-\sin2\theta)x_0+(1-2\cos\theta+\cos2\theta)y_0 \end{cases}$$

故推測參數曲線 $\Gamma_0(x_0(\theta), y_0(\theta))$ 關於 P(0 , 0)點的 n-th double pedal curve $\Gamma_n(x_n(\theta), y_n(\theta))$ 滿足：

結論 C： $\begin{cases} x_n=[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)]x_0-[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)]y_0 \\ y_n=[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)]x_0+[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)]y_0 \end{cases}$

Proof：設 n 時成立

由 $\begin{cases} x_{n+1}=(1-\cos\theta)x_n+\sin\theta\, y_n \\ y_{n+1}=-\sin\theta\, x_n+(1-\cos\theta)y_n \end{cases}$，

$$\begin{aligned}
x_{n+1} &= (1-\cos\theta)x_n+\sin\theta\, y_n \\
&= (1-\cos\theta)\{[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)]x_0-[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)]y_0\} \\
&\quad +\sin\theta\{[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)]x_0+[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)]y_0\} \\
&= \{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n[\cos\theta\cos(k\theta)-\sin\theta\sin(k\theta)]\}x_0 \\
&\quad +\{-[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)]+[\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_k^n[\cos\theta\sin(k\theta)+\sin\theta\cos(k\theta)]\}y_0 \\
&= [\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k+1)\theta]x_0 \\
&\quad +[-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k+1)\theta]y_0
\end{aligned}$$

$$=\{[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_{k-1}^n\cos(k\theta)]-(-1)^n\cos(n+1)\theta]\}x_0$$

$$+\{[-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}C_{k-1}^n\sin(k\theta)]+(-1)^n\sin(n+1)\theta]\}y_0$$

$$=\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[C_k^n+C_{k-1}^n]\cos(k\theta)-(-1)^n\cos(n+1)\theta\}x_0$$

$$+\{-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k[C_k^n+C_{k-1}^n]\sin(k\theta)+(-1)^n\sin(n+1)\theta\}y_0$$

$$=\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{n+1}\cos(k\theta)-(-1)^n\cos(n+1)\theta\}x_0$$

$$+\{-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^{n+1}\sin(k\theta)+(-1)^n\sin(n+1)\theta\}y_0$$

$$=[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_k^{n+1}\cos(k\theta)]x_0-[\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k C_k^{n+1}\sin(k\theta)]y_0$$

y_{n+1} 同理可證。

(三)研究結果與討論

結論 A：令Γ：$x^2+y^2=1$、P(1,0)，曲線Γ對定點 P 的 n–th double pedal curve 的方程式為

$$\begin{cases}x=C_1^{n+1}\cos\theta-C_2^{n+1}\cos2\theta+C_3^{n+1}\cos3\theta-....+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}\cos(n+1)\theta\\ y=C_1^{n+1}\sin\theta-C_2^{n+1}\sin2\theta+C_3^{n+1}\sin3\theta-....+(-1)^n C_{n+1}^{n+1}\sin(n+1)\theta\end{cases}$$ 。

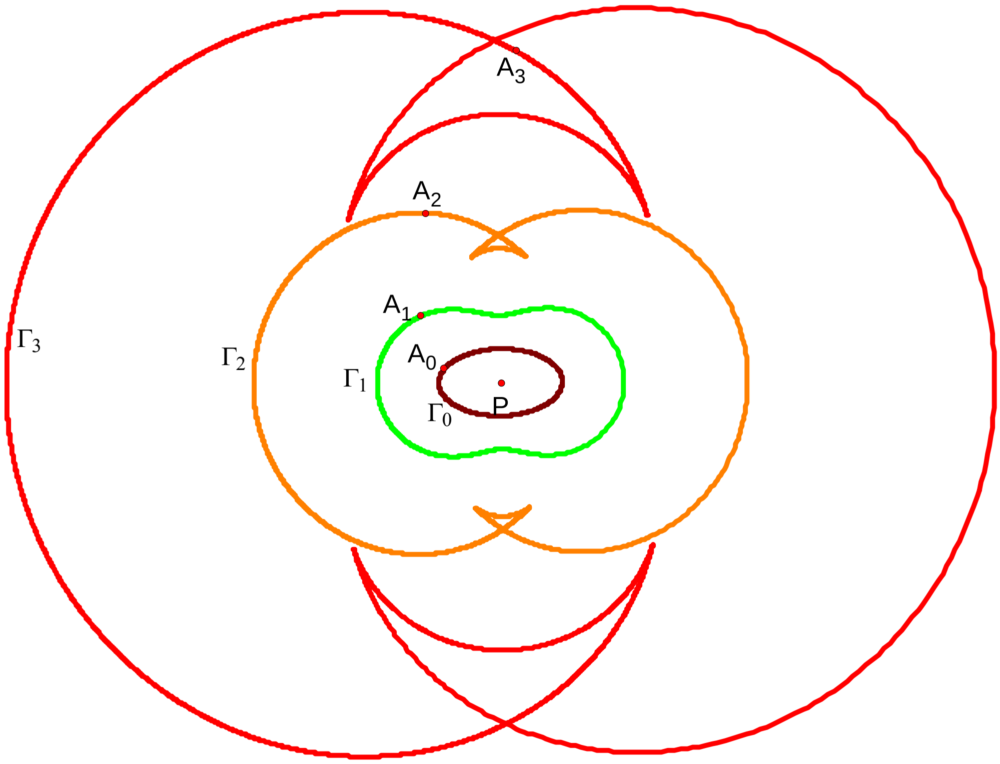
結論 B：令 A_0 是曲線 Γ_0 之上的動點，P 為(0 , 0)，Γ_0 在 A_0 的切線為 L。設 P 點關於 L 的對稱點為 A_1 , A_1 的軌跡圖形為 Γ_1。令有向角 $\theta=\angle PA_0A_1$, 以 A_1 為旋轉中心，將 P 點旋轉θ角，所得的點設為 A_2，則 $\overline{PA_2}$ 的中垂線，即為曲線 Γ_1 在 A_1 處的切線 L_1。

結論 C：如結論 B，參數曲線 $\Gamma_0(x_0(\theta), y_0(\theta))$關於 P(0 , 0)點的 n-th double pedal curve $\Gamma_n(x_n(\theta), y_n(\theta))$方程式為

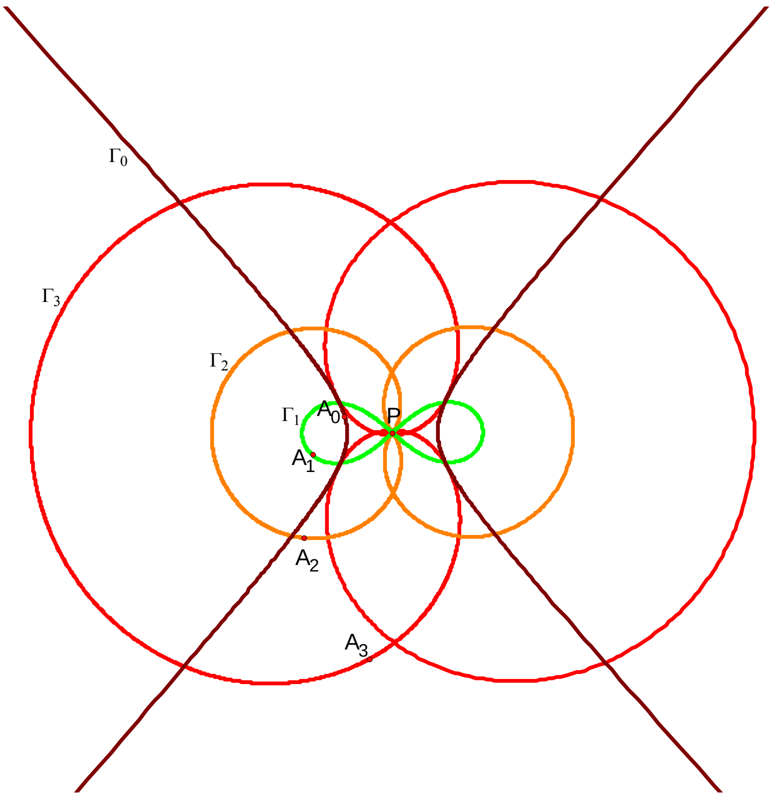
$$\begin{cases}x_n=[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)]x_0-[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)]y_0\\ y_n=[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\sin(k\theta)]x_0+[\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n\cos(k\theta)]y_0\end{cases}$$

(四)結論與應用： n-th double pedal curve 的其他例子（GSP 圖形）

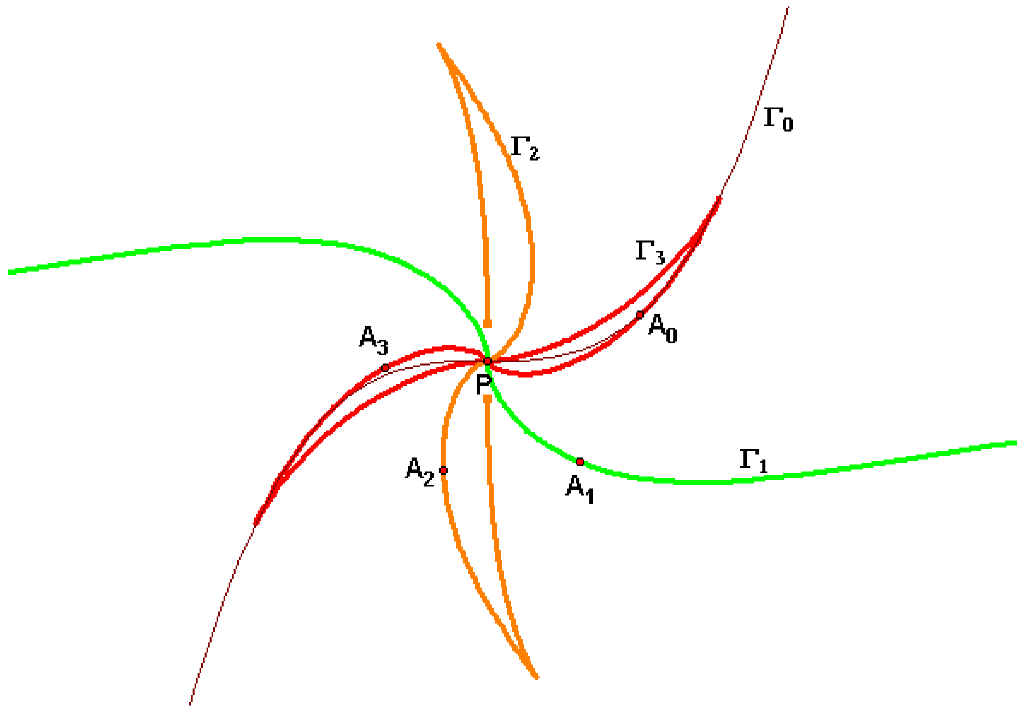
(1) Γ：橢圓、P 為橢圓中心



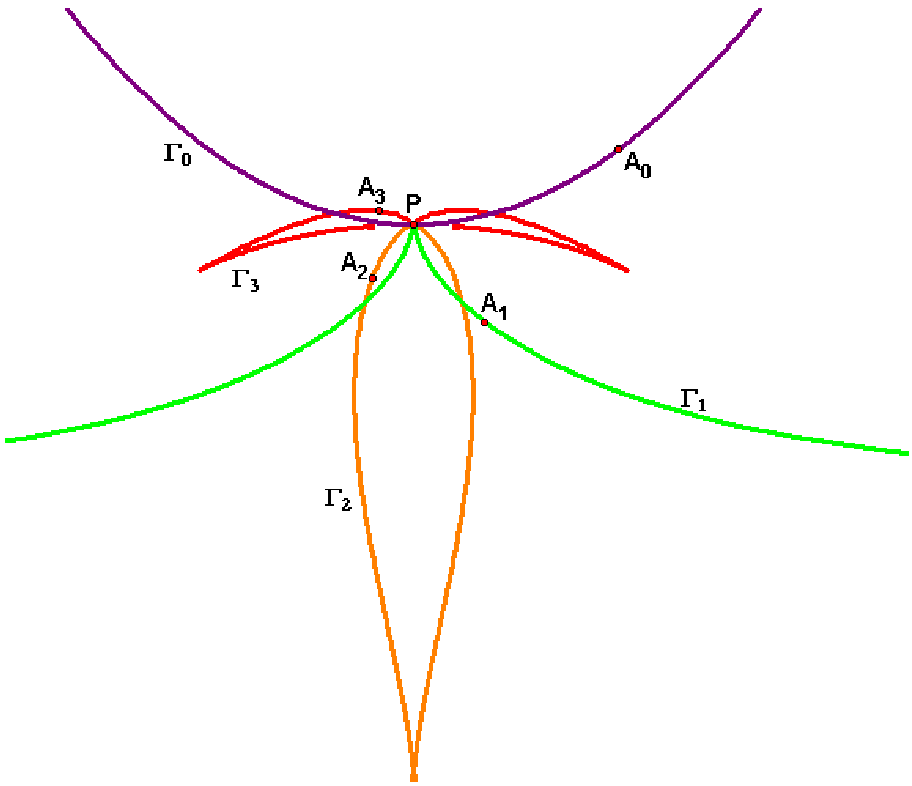
(2) Γ_0：双曲線、P 為双曲線中心



(3) Γ_0：$y=x^3$、P 為(0 , 0)



(4) Γ_0：$y=x^2$、P 為(0 , 0)



(五)參考資料：

【1】http://en.wikipedia.org/wiki/Pedal_curve

【2】趙文敏： <<等角螺線及其他 >>科學月刊第二十卷第九期、第十期

【3】趙文敏： <<心臟線 >> 科學月刊第二十一卷第五期

評語

作者認真的去分析一有趣的科展題目，唯並無整體性結論。