臺灣二ＯＯ七年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：凸多邊形完美分割線的尋找

得 獎 獎 項：佳作

學校／作者：臺北縣立福和國民中學　　　廖文偉
臺北市立第一女子高級中學　　鄭巧君

［目錄］：

作者一：廖文偉

我是廖文偉(左一)，就讀於福和國中三年級美術資優班。興趣是玩數學問題和運動，課餘時間喜歡和老爸去打網球發洩心情。

我從國一便開始參與數學科展研究，對廣大數學領域展開探索，學到不少課本無法詳提的有趣知識。雖然就讀的是美術資優班，在老師的帶領下，卻漸漸的對數學產生了極大的興趣。參加科展，雖然得付出很多時間在研究、寫報告上，但是過程卻十分有趣也富有成就感，尤其和同學們一路共同探討數學題目，從校內初審到全國科展，或是現在參與的國際科展，都讓我印象深刻，縱使過程中有許多挫折和困難，需要有勇氣及毅力克服；儘管辛苦，但我還是受益匪淺。

作者二：鄭巧君

我是鄭巧君(右)，小時候因爲爸爸(北部教書)、媽媽(空服員)工作關係，所以學齡前由住在南部鄉下的爺爺、奶奶帶大，直到幼稚園大班才回北部與爸媽同住。

小學時，我喜歡音樂、玩玩樂器(鋼琴、長笛、吉他)，對於學科並不特別在意，遇到的老師又很好。因此，我有個快樂的童年。升上國中，情況全然不同，還好從學習中，我找到另一個興趣---數學。在浩瀚的數學領域裡，雖然所知極爲有限，但對於不懂的題目，隨時可藉著電腦上網搜尋或尋求同儕、老師的協助。因此，不至於有太大的挫折，反而因學習更活潑、更積極，良性循環的結果，讓我打好數學基礎，也讓國中生涯變得燦爛繽紛！

Finding of the Perfect Bisector Lines in Convex Polygons

[摘要]

一、英文摘要(Abstract)

1) First, we studied the properties of lines and segments that bisect a triangle's perimeter. By observing the properties, we found a "**revolving center"** what we defined**.** We employed the revolving center in the construction with ruler and compass to make "triangle's perimeter bisectors" that pass the points we desire. Later, we found out the "envelope curves'" equations of the "perimeter bisectors" on the triangle's two sides are **parabolic curves.** Moreover, the focus of this parabolic is just as same as the revolving center.

2) The curves envelope of area bisectors formed a hyperbolic curves. By similar method of constructing a "perimeter bisector", we can also construct an "area bisector"' by using the hyperbolic curve's focus. We accidentally found out that we can construct the tangent of the conic by using our method, too. Different from the information we found, It supplies a easier method to construct the tangent of a conic.

3) With the rules of constructing perimeter (area) bisectors, we can expand the method to constructing the "perimeter (or area) bisectors" of any convex polygons.

4) We call the lines that bisect the convex polygon's perimeter and area at the same time the **"perfect bisect lines".** Based on the properties of the" perimeter bisectors" and the "area bisectors" in our research, we found out that the" perfect bisect lines" pass the intersection of the" perimeter bisector's effective segment" and the hyperbolic. Thus, we can construct the "perfect bisect lines". Moreover, we proved the esistence of the "perfect bisect lines."

二、中文摘要

1. 首先我們先探討三角形等分周長線的性質，利用性質及觀察等周線的變化，我們找到可利用本研究所稱的「旋轉中心」，以尺規作圖的方式，作出「任意點的三角形等分周長線」。接著我們導出三角形兩邊上等周線所包絡而成的曲線方程式爲一條拋物線的曲線段。進而發現上述的旋轉中心，即爲等周線所包絡而成拋物線的焦點。

2. 三角形兩邊上等積線所包絡出的曲線是一條雙曲線的曲線段。利用等周線的尺規作圖，我們找到同樣可利用焦點當旋轉中心做出等分面積線。意外的發現出圓錐曲線的切線作圖，皆可利用我們的研究方式(有別於已查出的文獻上記載)，較快速的作出切線。
3. 利用三角形等周線(或等積線)的尺規作圖，可擴展到「過任意定點作出凸多邊形的等周線(或等積線)」。
4. 我們將同時分割凸多邊形等周長與等面積的分割線稱爲「**完美分割線**」。利用三角形研究出的等周線與等積線相關性質，我們找出完美分割線必通過同角的等周有效段與等積曲線段之交點。利用這結果可作出完美分割線。並進一步，我們證明出凸多邊形完美分割線的存在性。

[研究報告]

一、 前言

(一) 研究動機

在科教館歷屆的科展作品裡，我們發現關於 n 邊形面積分割的探討很多，包括過定點分割面積的尺規作圖，多邊形等面積的圖形變換；而有關等周長的分割線研究報告，數量則少很多。也許，是等周長的分割較簡單，比較不吸引人吧！我們試著以尺規作圖的方式作出三角形周長等分線，從頂點、邊上，皆輕而易舉的解決，但當通過離開周界上的一點，作等分周長分割線時，我們嘗試各種方式，仍百思不得其解，重新翻閱相關文獻，亦不能找到，顯然，沒有想像中那麼簡單。在好奇心的驅使與老師的鼓勵下，加上以前對等分面積線也有探討過。因此，我們將三角形等分周長的研究，擴充到同時分割凸 n 邊形面積與周長的直線，也就是本研究所稱的「完美分割線」尋找。

(二) 研究目的

1、探討三角形等分周長線的性質與尺規作圖的研究

2、探討三角形等分面積線的性質與尺規作圖的研究。

3、凸 n 邊形完美分割線的尋找。

4、凸 n 邊形完美分割線的存在性。

(三) 研究器材

電腦、GSP 軟體。

二、 研究過程

(一)預備知識：

包絡線的定義：某個參數曲線族 $T(x,y,t)=0$，可找到一曲線 $P(x,y)=0$ 與 $T(x,y,t)=0$ 均相切，此 $P(x,y)=0$ 稱爲 $T(x,y,t)=0$ 的包絡線。

(二)內文特有名稱介紹：

1.將等分凸 n 邊形周長的直線或線段，都簡稱爲凸 n 邊形的**等周線**。

2.將等分凸 n 邊形面積的直線或線段，都簡稱爲凸 n 邊形的**等積線**。

3.將同時等分凸 n 邊形周長與面積的直線或線段，都簡稱爲凸 n 邊形的**完美分割線**。

4.由包絡線所構成的封閉區域稱爲**包絡區**。

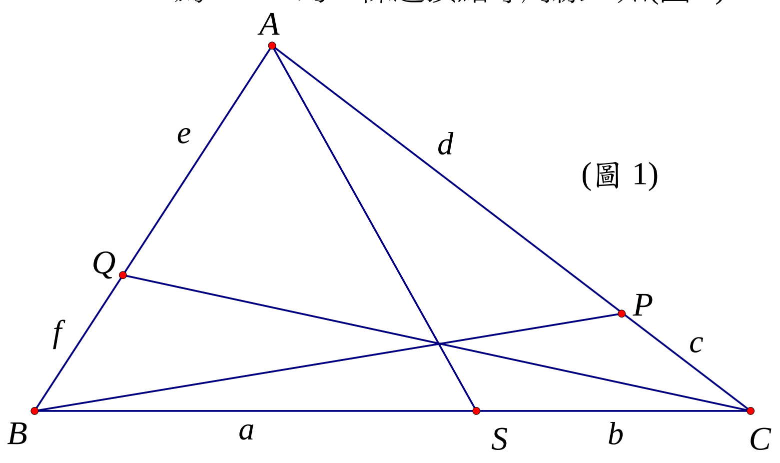
(三)探討內容：

[主題一]:三角形等周線相關性質與過定點等周線之尺規作圖研究。

首先我們過三角形的頂點作等周線(其尺規作圖很容易，在此我們省略掉)，發現三條過頂點等周線竟然交於同一點，使用 GSP 軟體把三角形的三頂點任意移動，發現三條等周線仍然交於一點。我們想是不是每一個三角形都有如此現象呢？

[主題一之 1]: 通過三角形頂點的三條等周線交於同一點嗎？

已知 $\overline{CQ}$ 、 $\overline{BP}$ 、 $\overline{AS}$ 爲 ΔABC 的三條過頂點等周線，如(圖 1)。



(圖 1)

令 $\overline{SB}=a$、$\overline{SC}=b$、$\overline{CP}=c$、$\overline{AP}=d$、$\overline{AQ}=e$、$\overline{BQ}=f$，

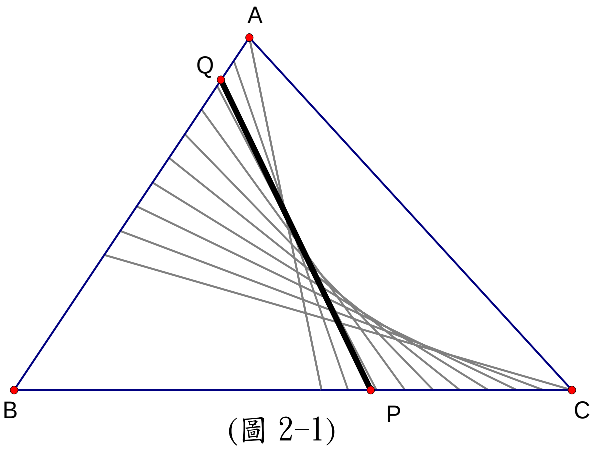
因爲 $d+c+b=\frac{1}{2}$周長，$d+c+e=\frac{1}{2}$周長，所以 $e=b$，

同理可知： $d=a$ 、 $f=c$ 。 得 $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}\times\frac{e}{f}=1$

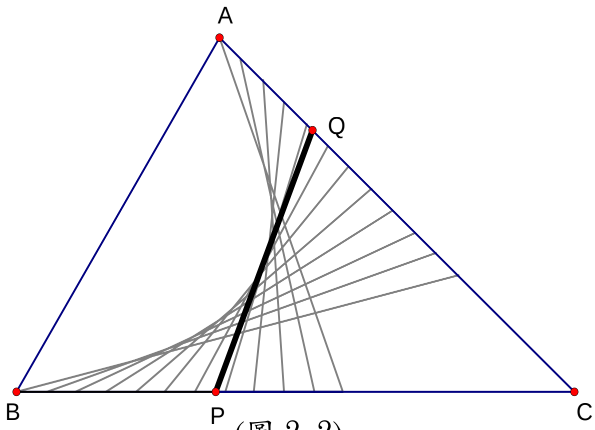
由 *Ceva* 逆定理可證得 $\overline{AS}$ 、$\overline{BP}$ 、$\overline{CQ}$ 共點。

現在如果是在三角形的邊上任意給定一點 *P*，那麼過 *P* 點的等周線又有什麼特殊性質呢？

我們作出多條通過邊上的等周線(其尺規作圖很容易，在此我們省略掉)，發現其中有一條十分特殊的等周線，如(圖 2-1)，ΔPBQ 成一個等腰三角形，此時 $\overline{BP}=\overline{BQ}=\frac{1}{4}\Delta ABC$周長，這樣的等周線 $\overline{PQ}$ 對 $\angle B$ 具有對稱性。在研究中我們把它稱之爲 $\angle B$ 的**基本等周線**或頂點 *B* 的**基本等周線**，同理，在(圖 2-2)中，$\overline{CP}=\overline{CQ}=\frac{1}{4}\Delta ABC$周長，$\overline{PQ}$ 也稱爲 $\angle C$ 的基本等周線或頂點 *C* 的基本等周線。

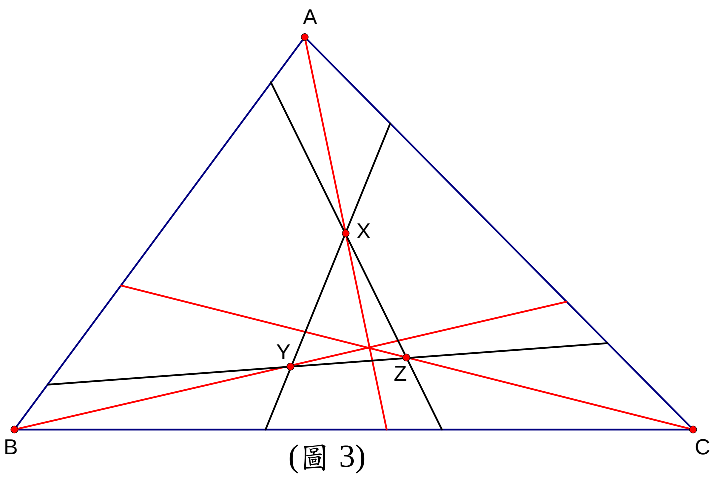


(圖 2-1)



(圖 2-2)

我們把 ΔABC 的三條基本等周線(黑色)和三條過頂點的等周線(紅色)畫在一起，如(圖 3)：



(圖 3)

發現：

(1) 過 *A* 點等周線會與 $\angle B$ 、$\angle C$ 的基本等周線，三線交於一點 *X*。
過 *B* 點等周線會與 $\angle A$ 、$\angle C$ 的基本等周線，三線交於一點 *Y*。
過 *C* 點等周線會與 $\angle B$ 、$\angle A$ 的基本等周線，三線交於一點 *Z*。

(2) 上述的交點位置，看起來很像是各頂點等周線(紅色)的中點。

(3) 利用 *GSP* 軟體把三角形三頂點隨意移動，發現上述的現象依然存在，這些現象是任意三角形都具備的性質嗎？

[主題一之 2]：基本等周線與其他等周線有何關係？

已知$\overline{PQ}$是$\angle B$的基本等周線，$\overline{AS}$是通過頂點A的等周線，$\overline{PQ}$ 、$\overline{AS}$相交於點X，$\overline{LK}$是$\angle C$的基本等周線，現在我們要證明點X是$\overline{AS}$的中點。如(圖 4-1)

因為$\overleftrightarrow{PQ}$截ΔABS三邊所在的直線於P 、X 、Q

由 Menelaus 定理知$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{BP}}\times\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{SQ}}\times\dfrac{\overline{SX}}{\overline{AX}}=1$

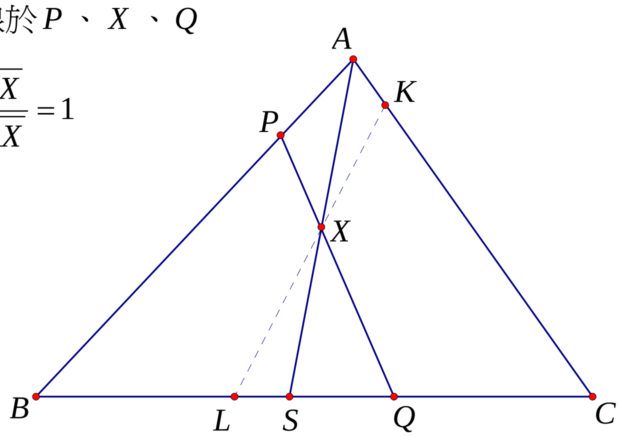
又$\overline{AP}=\overline{SQ}$ 、$\overline{BP}=\overline{BQ}$

所以$\overline{SX}=\overline{AX}$

即X為$\overline{AS}$之中點

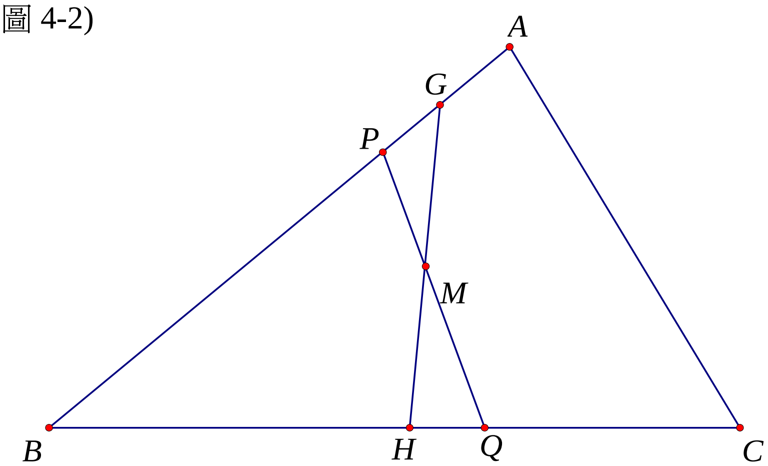
同理可證：

$\angle C$的基本等周線$\overline{LK}$，也和$\overline{AS}$交於$\overline{AS}$的中點X。



(圖 4-1)

進一步，利用上述的證明，可證出未過頂點的等周線段也會被一條基本等周線所平分。如(圖 4-2)



(圖 4-2)

反之，$\overline{GH}$被$\angle B$的基本等周線所平分，其中G、H分別在$\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$上，則$\overline{GH}$為等周線。證明如下：

由 Menelaus 定理知 $\dfrac{\overline{GP}}{\overline{PB}}\times\dfrac{\overline{BQ}}{\overline{HQ}}\times\dfrac{\overline{MH}}{\overline{GM}}=1$

$\because \overline{BP}=\overline{BQ},\overline{GM}=\overline{MH}$

$\therefore \overline{GP}=\overline{HQ}$　　　即$\overline{GH}$為等周線。

為了方便敘述，我們把ΔABC的等周線$\overline{GH}$，依其位置分成三種：

(1) 若一等周線$\overline{GH}$兩端點在$\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$上，則我們稱$\overline{GH}$為$\angle A$的等周線。

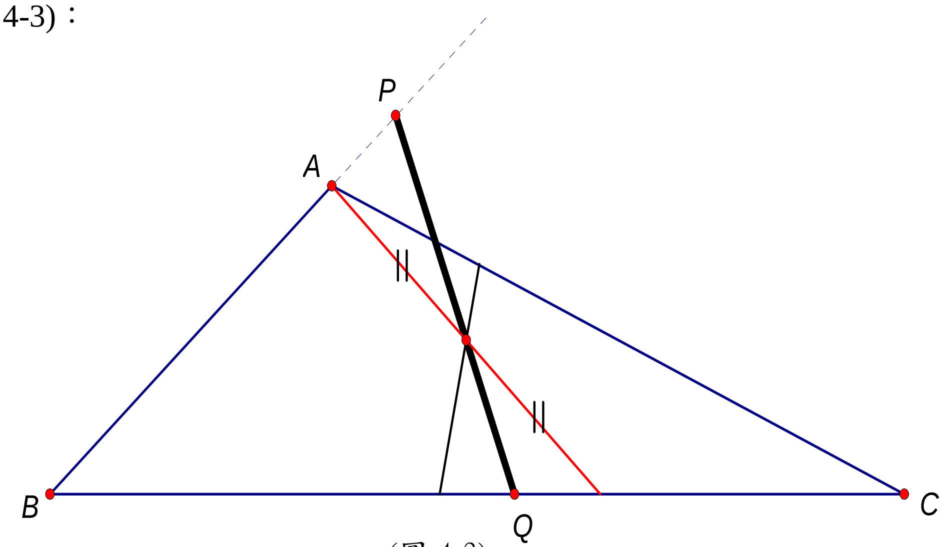
(2) 若一等周線$\overline{GH}$兩端點在$\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$上，則我們稱$\overline{GH}$為$\angle B$的等周線。

(3) 若一等周線$\overline{GH}$兩端點在$\overline{AC}$ 、$\overline{BC}$上，則我們稱$\overline{GH}$為$\angle C$的等周線。

討論：

(1) ΔABC中，同一角的等周線中點都會落在該角的基本等周線上。

(2) 基本等周線作圖時，必須在三角形的邊上各取$\frac{1}{4}\Delta ABC$周長，所以當ΔABC的某個邊長比$\frac{1}{4}$周長短的時候，就會有基本等周線跑到三角形外面的情形發生。如(圖 4-3)：



(圖 4-3)

$\overline{BP}=\overline{BQ}=\frac{1}{4}\Delta ABC$周長，因為$\overline{AB}<\frac{1}{4}\Delta ABC$周長，所以$P$點跑到$\overline{BA}$的延長線上，$\overline{PQ}$ 不再是$\angle B$的等周線。但是由 Menelaus 定理同樣可證$\overline{PQ}$仍具備$\angle B$基本等周線平分$\angle B$等周線的性質，因此當$\angle B$的基本等周線不存在時，我們就用這樣的$\overline{PQ}$來代替$\angle B$的基本等周線。

在討論完過三角形邊上任意指定一點P的等周線後，我們就要面對最困難的主題了。如果P點變成一個任意移動的點，那麼要如何畫出過P點的等周線呢？

[主題一之 3]:過任意指定點 P,如何作出等周線？這些等周線有什麼特殊的性質呢？

對於任意指定點P，可能作出不只一條的等周線，但只要用相同方法分別作出$\angle A$ 、$\angle B$ 、$\angle C$ 的等周線就可以了，而我們以下的說明都以$\angle B$為例。

1. 將 ΔABC 放在座標平面上，觀察 $\angle B$ 的等周線群

我們畫出許多條 $\angle B$ 的等周線後，爲了進一步探討它們的性質，所以就利用基本等周線的對稱性質來觀察，我們以 $\angle B$ 的基本等周線 $\overline{DE}$ 爲 x 軸，$\angle B$ 的分角線爲 y 軸。仔細觀察後，我們覺得這些等周線好像繞著一個點旋轉。爲了求證真的有那一點存在，我們作出幾條等周線的中垂線(綠色)，如(圖 5-1)。

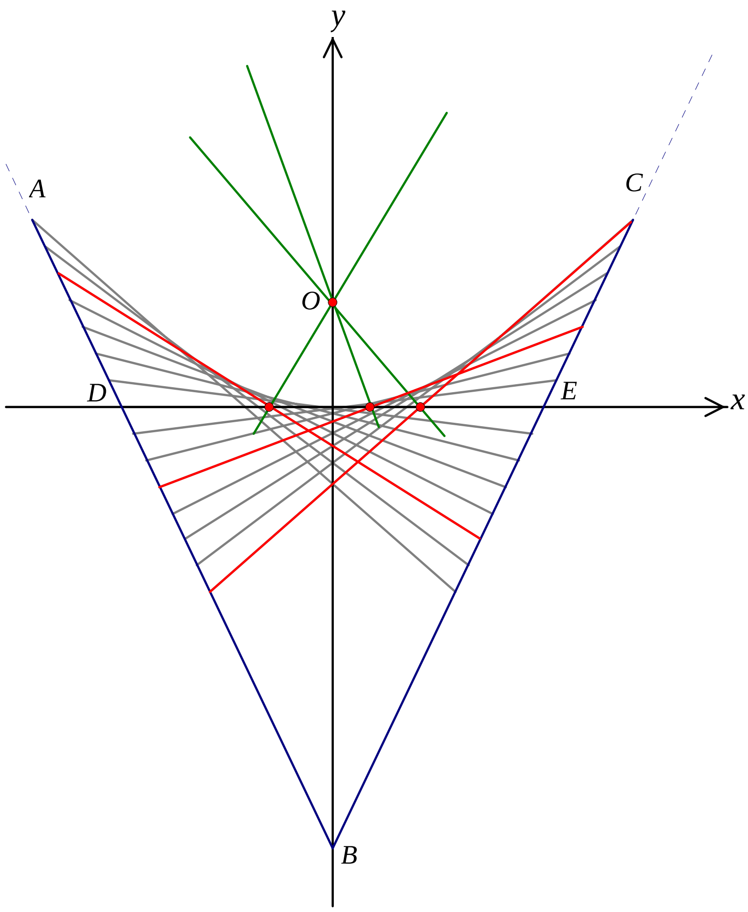
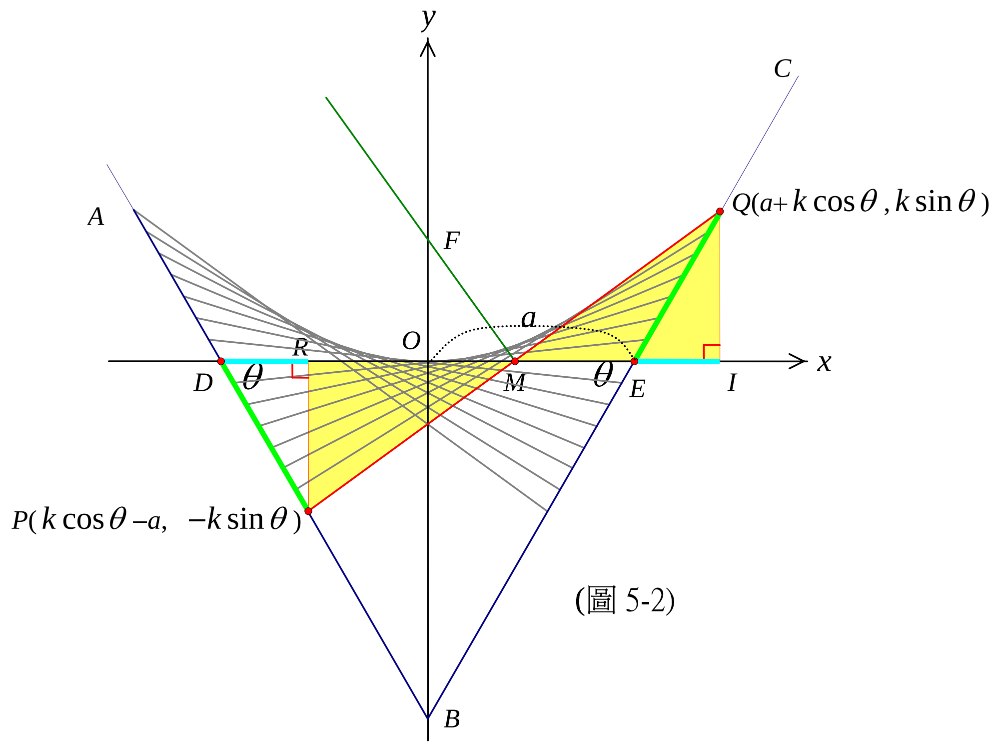


圖 5-1：等周線的中垂線交於同一點

發現：我們所畫出的三條等周線的中垂線(綠色)交於 y 軸上的同一點，如果這是等周線的普遍性質，對我們的問題＜等周線作圖＞，將會有很大的幫助。

2. $\angle B$ 的等周線段之中垂線是否皆交於同一點？

以 $\angle B$ 的等周線爲例，現在我們要證明是否等周線的中垂線與 y 軸的交點都相同。如(圖 5-2)，已知 $\overline{PQ}$ 爲 $\angle B$ 的一條等周線，$\overline{PQ}$ 交基本等周線 $\overline{DE}$ 於 M，則 M 爲 $\overline{PQ}$ 的中點，$\overline{PQ}$ 的中垂線交 y 軸於 F



(圖 5-2)

(1) 令 $\overline{OD}=\overline{OE}=a$ ，$\angle ODB=\angle OEB=\theta$ ，$\overline{PD}=\overline{QE}=k$

$\Rightarrow P(k\cos\theta-a,-k\sin\theta)$ ，$Q(a+k\cos\theta,k\sin\theta)$ ，$\therefore M(k\cos\theta,0)$ 。

(2) $\because \overleftrightarrow{PQ}$的斜率$=\dfrac{k\sin\theta-(-k\sin\theta)}{(a+k\cos\theta)-(k\cos\theta-a)}=\dfrac{k\sin\theta}{a}$ ，

又 $\overleftrightarrow{FM}\perp\overleftrightarrow{PQ}$ ，$\therefore \overleftrightarrow{FM}$的斜率$=-\dfrac{a}{k\sin\theta}$ 。得 $\overleftrightarrow{FM}: y=-\dfrac{a}{k\sin\theta}(x-k\cos\theta)$ ，

(3) 當 $x=0\Rightarrow y=a\times\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=a\cot\theta$ 為常數。

所以 F 點座標為 $(0,a\cot\theta)$ 為一固定點。

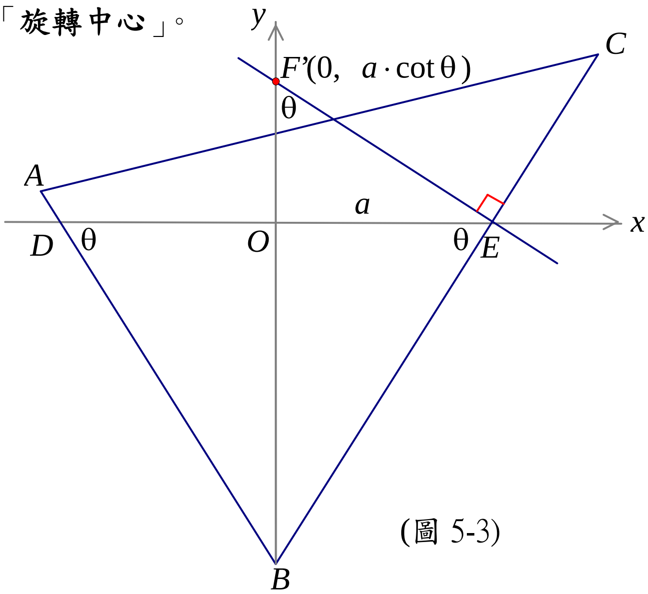
結論：$\angle B$ 的等周線之中垂線交於同一點，而這點位於 $\angle B$ 的角平分線上，即是圖中的 F 點，我們稱這個點為 $\angle B$ 等周線的「**旋轉中心**」。

後來我們猜測如果通過點 E 作與 $\overline{BC}$ 垂直的直線，交 y 軸於 F' ，是否此點和旋轉中心是同一點呢？如(圖 5-3)：

因為 $\angle EF'O=\theta$

所以 $\overline{OF'}=a\cot\theta$ ，即 $F'=F$ 。

結論：**從基本等周線端點作 $\angle B$ 兩邊的垂線與 y 軸的交點，則交**



(圖 5-3)

點和旋轉中心是同一點。在發現此結論後，對於任意指定點 P，我們便可輕易畫出過 P 點的等周線。

3. 通過三角形內部任意指定點 P，如何作出 $\angle B$ 的等周線？

作圖方法：如(圖 6)

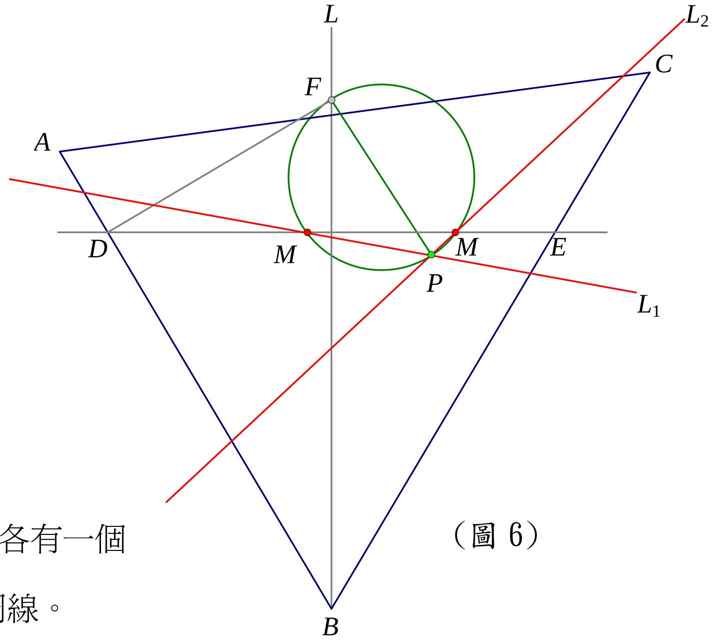
(1) 作 $\angle ABC$ 的分角線 L。

(2) 畫出 $\angle B$ 的基本等周線，交 $\angle B$ 的兩邊於 D、E 兩點。

(3) 過 D 點作 $\overline{AB}$ 的垂線交直線 L 於 F 點(旋轉中心)。

(4) 連 $\overline{PF}$，以 $\overline{PF}$ 爲直徑畫圓，交 $\overleftrightarrow{DE}$ 於 M 點。(可能一點或兩點或不存在)

(5) 作 $\overleftrightarrow{PM}$，若 $\overleftrightarrow{PM}$ 與 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 各有一個交點，則 $\overleftrightarrow{PM}$ 就是 $\angle B$ 的等周線。



（圖 6）

討論：

對於指定點 P，上面已經作出 $\angle B$ 的等周線，再用相同方法對 $\angle A$、$\angle C$ 作等周線就可作出過 P 點所有的等周線，也解決我們久懸於心中的問題。

在(圖 5-1)中，我們發現所畫出的等周線似乎構造出一個曲線，我們查閱資料，從林義雄教授所編著的「高中數學---自然數系」**P142**、**P143** 裏找到「在平面上兩條互相垂直的直線上，從交點開始各取等距離為 1 的 n 個點。將一條直線上的第 n 點跟另一條直線上第一點連成直線段，第(n−1) 點連到第 2 點……一般來講，將第(n−k+1)點連到第 k 點，$1 \le k \le n$，則這些直線段為一條”曲線”的切線，此條曲線是條拋物線，稱為這些直線族的包絡線(*envelope*)」，顯然等周線具有這樣的條件，因此我們可確定三角形等周線包絡出一條拋物線的曲線段，且等周線爲曲線段的切線。

至於此條拋物線的方程式爲何？我們推導如下：

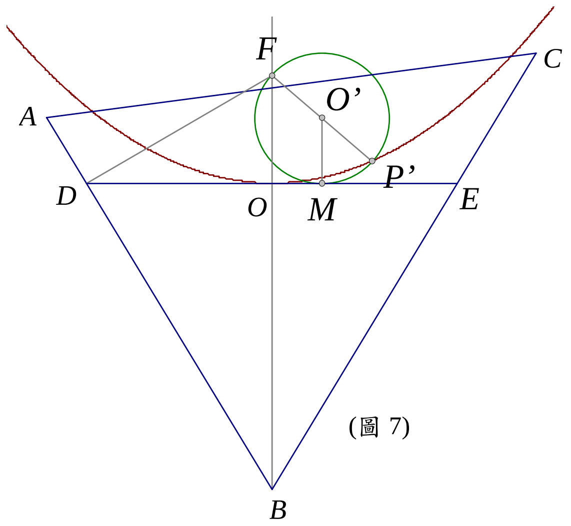
4.三角形 $\angle B$ 等周線包絡而成的拋物線方程式探討：

(1) 令 $P'(x, y)$ 在拋物線的曲線段上如(圖 7)，則因爲過 P' 曲線段的切線爲三角形的

等周線，又過P'的等周線段被其基本等周線所平分，且過P'的等周線段中垂線通過旋轉中心F，所以可得$\angle FMP'=90^0$ (M爲過P'的等周線段中點)。

(2) 令$\overline{FP'}$中點爲O'，則$O'(\frac{x}{2},\frac{a\cot\theta+y}{2})$，又因爲過$P'$只有一條$\angle B$的等周線，所以以$\overline{FP'}$爲直徑的圓僅與$\angle B$的基本等周線$\overline{DE}$交於一點。即圓$O'$與$\overline{DE}$相切。得$\overline{O'M}\perp\overline{DE}$，

所以$M(\frac{x}{2},0)$



(圖 7)

(3) 因爲$\overline{FO'}=\overline{O'M}$

$$\therefore (\frac{x}{2})^2+(\frac{y-a\cot\theta}{2})^2=(\frac{a\cot\theta+y}{2})^2$$

整理得 $y=\dfrac{1}{4a\cdot\cot\theta}x^2$

仔細一看焦點$(0,a\cot\theta)$剛好爲F點

即$\angle B$的等周線皆是$y=\dfrac{1}{4a\cdot\cot\theta}x^2$拋物線的切線

(5) 切點位置到底有何特別呢？

接下來，我們要求出等周線$\overleftrightarrow{PQ}$的方程式(座標系統同圖 5-2)：

因爲$P(k\cos\theta-a,-k\sin\theta)$，$Q(a+k\cos\theta,k\sin\theta)$

所以$\overleftrightarrow{PQ}$： $y=\dfrac{k\sin\theta}{a}(x-k\cos\theta+a)-k\sin\theta$

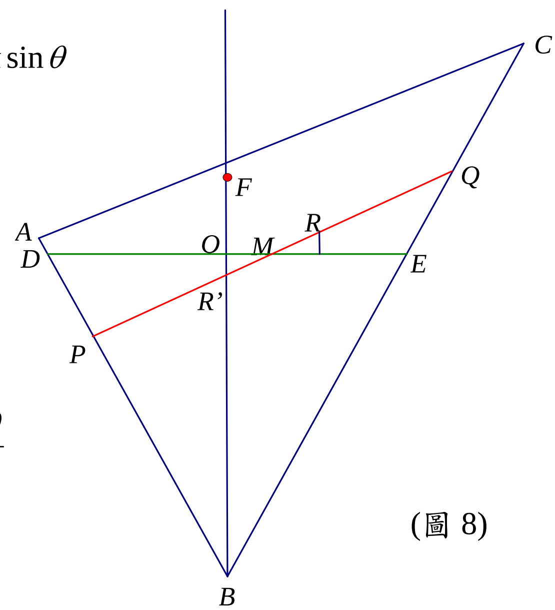
$$\Rightarrow y=\frac{k\sin\theta}{a}x-\frac{k^2\sin\theta\cdot\cos\theta}{a}$$

解$\begin{cases} y=\dfrac{1}{4a\cdot\cot\theta}x^2 \\ y=\dfrac{k\sin\theta}{a}x-\dfrac{k^2\sin\theta\cdot\cos\theta}{a} \end{cases}$

得$\dfrac{1}{4a\cdot\cot\theta}x^2=\dfrac{k\sin\theta}{a}x-\dfrac{k^2\sin\theta\cdot\cos\theta}{a}$

$$x^2-4k\cdot\cos\theta\cdot x+4k^2\cos^2\theta=0$$

$$(x-2k\cos\theta)^2=0$$



(圖 8)

所以 $x=2k\cos\theta$（重根），$y=\dfrac{k^2\sin 2\theta}{2a}$

得切點 $R(2k\cos\theta,\dfrac{k^2\sin 2\theta}{2a})$，即 $R(2k\cos\theta,\dfrac{k^2\sin 2\theta}{2a})$ 構造出一條拋物線的曲線段。

又因爲 $\overline{PQ}$ 中點 $M(k\cos\theta,0)$

令 $\overline{PQ}$ 交 $\overrightarrow{BF}$ 於 R'，可得 $\overline{MR}=\overline{MR'}$，得切點 R 在 $\overline{PQ}$ 之位置。

[主題二]:三角形等積線相關性質與過定點等積線之尺規作圖研究。

在 2006 年台灣國際科展作品裡的「凸 n 邊形等分面積線段數量之分布探索」已經寫出三角形的等積線會包絡出三條雙曲線的曲線段，並進而利用切線可判斷出過定點等積線的數量，及利用包絡區得到等積線數量分布。但整個研究過程未曾把「過任意點作凸 n 邊形等積線的尺規作圖」之作法寫出。實際上，在我們查閱的參考資料裡，使用的方法皆與「幾何辭典」所記載的方法一樣。另外，在[主題一]等周長的尺規作圖裡，給我們一個想法，是否可依樣畫葫蘆利用雙曲線的焦點當旋轉中心來快速作出等積線呢？因此，我們有必要仿照[主題一]的研究先找出雙曲線之焦點。

[主題二之 1]---三角形等分面積線形成的雙曲線方程式推導：

1. 將 ΔABC 座標化，以 B 爲原點，$\angle ABC$ 的分角線 $\overrightarrow{BT}$ 當 y 軸正向，如(圖 9)。

2. 仿等周線之研究，令 $\overline{DE}$ 爲 $\angle B$ 的**基本等積線**，其中 $\overline{BD}=\overline{BE}=l$，且

   $\Delta BDE\text{面積}=\dfrac{1}{2}\Delta ABC\text{面積}$。

3. 令 $\angle ABC=2\theta$，得 $\overleftrightarrow{BA}$ ：$y=m_1x$，$\overleftrightarrow{BC}$ ：$y=-m_1x$（由假設可得 $m_1=\cot\theta$ ）。

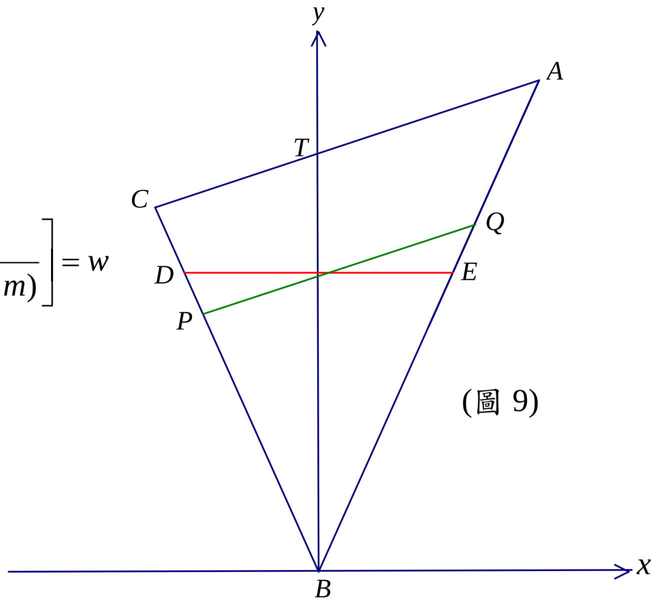
4. 令 ΔABC 的等分面積線 $\overleftrightarrow{PQ}$ ：$y=mx+k$

   則 $\begin{cases} y=mx+k \\ y=m_1x \end{cases}$ 解得交點 $Q\left(\dfrac{k}{m_1-m}\,,\,\dfrac{m_1k}{m_1-m}\right)$。

   $\begin{cases} y=mx+k \\ y=-m_1x \end{cases}$ 解得交點 $P\left(\dfrac{-k}{m_1+m}\,,\,\dfrac{m_1k}{m_1+m}\right)$。

5. $\because \Delta PBQ=\frac{1}{2}\Delta ABC$面積$=\frac{1}{2}l^2\sin 2\theta=\frac{1}{2}l^2\times 2\sin\theta\cos\theta=l^2\sin\theta\cos\theta=w$(令為 w)，

$$\therefore \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & \frac{k}{m_1-m} & \frac{-k}{m_1+m} & 0 \\ 0 & \frac{m_1k}{m_1-m} & \frac{m_1k}{m_1+m} & 0 \end{vmatrix}=w \text{ 。}$$



(圖 9)

得 $\frac{1}{2}\left[\frac{m_1k^2}{(m_1-m)(m_1+m)}+\frac{m_1k^2}{(m_1-m)(m_1+m)}\right]=w$

$m_1k^2=w(m_1{}^2-m^2)$

以 $k=y-mx$ 代入

得 $m_1(y-mx)^2=w(m_1{}^2-m^2)$

$(m_1x^2+w)m^2-2m_1xym+m_1y^2-wm_1{}^2=0$ 。

$\because$過 P 作等分 ΔABC 面積的分割直線只有一條，

$\therefore m$ 僅一解，即判別式=0

$\Rightarrow (-2m_1xy)^2-4(m_1x^2+w)(m_1y^2-wm_1{}^2)=0$

$\Rightarrow (m_1xy)^2-(m_1x^2+w)(m_1y^2-wm_1{}^2)=0$ ， $wm_1{}^3x^2-wm_1y^2+w^2m_1{}^2=0$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{wm_1}-\frac{x^2}{\frac{w}{m_1}}=1$$

將 $w=l^2\sin\theta\cos\theta$ ， $m_1=\cot\theta$ 代入得 $\frac{y^2}{l^2\cos^2\theta}-\frac{x^2}{l^2\sin^2\theta}=1$ 為一雙曲線方程式。

其中貫軸長之半為 $l\cos\theta$ ，即其中一頂點為 $(0,l\cos\theta)$

又 $l^2\cos^2\theta+l^2\sin^2\theta=l^2$ ，所以焦點為$(0,l)$。

[主題二之 2] ---三角形等積線 $\overleftrightarrow{PQ}$ 與其包絡而成的雙曲線之關係

令 $\overline{BP}=r$ ， $\overline{BQ}=t$ ，

則 $P(-r\sin\theta,r\cos\theta)$ ， $Q(t\sin\theta,t\cos\theta)$

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{PQ}:\ y=\frac{(t-r)\cos\theta}{(t+r)\sin\theta}(x-t\sin\theta)+t\cos\theta$$

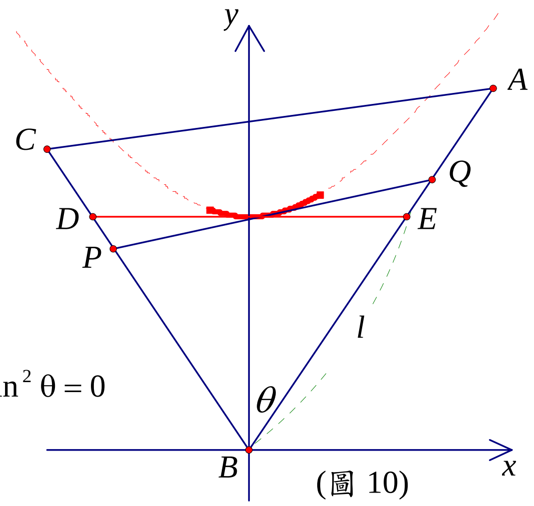
代入雙曲線方程式

$$\frac{y^2}{l^2\cos^2\theta}-\frac{x^2}{l^2\sin^2\theta}=1$$

$$\sin^2\theta\cdot y^2-\cos^2\theta\cdot x^2=l^2\cdot\sin^2\theta\cdot\cos^2\theta$$

得 $$\sin^2\theta\left[\frac{(t-r)\cos\theta}{(t+r)\sin\theta}(x-t\cdot\sin\theta)+t\cdot\cos\theta\right]^2$$

$$-\cos^2\theta\cdot x^2=l^2\sin^2\theta\cos^2\theta$$



(圖 10)

化簡得 $4trx^2-4tr(t-r)\sin\theta\cdot x+l^2(t-r)^2\sin^2\theta=0$

（又$\because \frac{1}{2}tr\sin 2\theta=\frac{1}{2}l^2\sin 2\theta \therefore tr=l^2$ ）

$\Rightarrow 4x^2-4(t-r)\sin\theta\cdot x+(t-r)^2\sin^2\theta=0$ $\Rightarrow [2x-(t-r)\sin\theta]^2=0$

代入$\overleftrightarrow{PQ}$方程式得 $\begin{cases} x=\dfrac{(t-r)\sin\theta}{2} \\ y=\dfrac{(t+r)\cos\theta}{2}\end{cases}$ （重根）

可知兩方程式圖形交於一點，即$\overleftrightarrow{PQ}$切雙曲線於$\overline{PQ}$之中點。

從等周線的研究中，視拋物線的焦點為旋轉中心可快速作出過定點的切線。那等積線所包絡出的雙曲線是否有同樣的情況呢？

[主題二之 3]---三角形過定點的等積線尺規作圖

1 .雙曲線方程式$\frac{y^2}{l^2\cos^2\theta}-\frac{x^2}{l^2\sin^2\theta}=1$

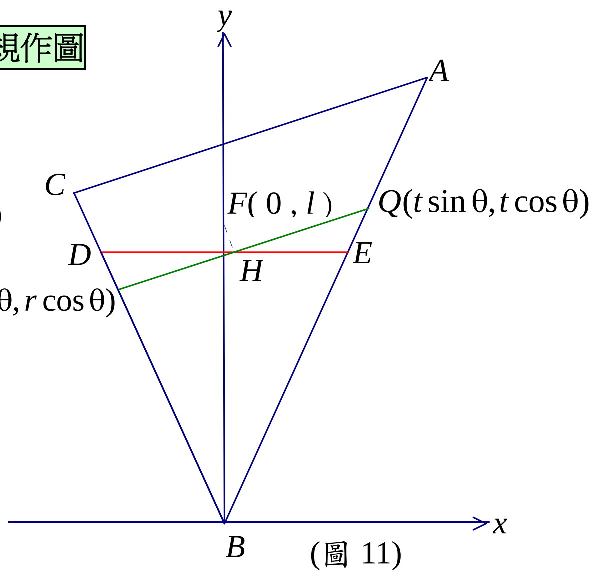
，其焦點 $F(0,l)$。又 $P(-r\sin\theta,r\cos\theta)$

，$Q(t\sin\theta,t\cos\theta)$ ，

$$\Rightarrow \overleftrightarrow{PQ}=\frac{(t-r)\cos\theta}{(t+r)\sin\theta}(x-t\sin\theta)+t\cos\theta$$

$$=\frac{(t-r)\cos\theta}{(t+r)\sin\theta}x+\frac{2tr\cos\theta}{t+r}$$ 。

令 $m=\frac{(t-r)\cos\theta}{(t+r)\sin\theta}$ ，$k=\frac{2tr\cos\theta}{t+r}$ 。



(圖 11)

2 .作$\overleftrightarrow{FH}\perp\overleftrightarrow{PQ}$於 H，則$\overleftrightarrow{FH}$ ：$y=-\frac{1}{m}x+l$

3 .解 $\begin{cases} y = mx + k \\ y = -\dfrac{1}{m}x + l \end{cases}$

得 $(x, y) = \left(\dfrac{m(l-k)}{m^2+1}, \dfrac{m^2 l + k}{m^2+1} \right)$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{m(l-k)}{m^2+1} \right)^2 + \left(\frac{m^2 l + k}{m^2+1} \right)^2$$

$$= \frac{m^2 l^2 - 2m^2 lk + m^2 k^2 + m^4 l^2 + 2m^2 lk + k^2}{(m^2+1)^2}$$

$$= \frac{(m^2 l^2 + k^2)(m^2+1)}{(m^2+1)^2} = \frac{m^2 l^2 + k^2}{m^2+1}$$

$$\because m^2 l^2 + k^2 = \frac{(t-r)^2 \cos^2\theta}{(t+r)^2 \sin^2\theta} tr + \frac{4t^2 r^2 \cos^2\theta}{(t+r)^2} = \frac{tr\cos^2\theta\left[(t-r)^2 + 4tr\sin^2\theta\right]}{(t+r)^2 \sin^2\theta}$$

$$\text{又 } m^2 + 1 = \frac{(t-r)^2 \cos^2\theta}{(t+r)^2 \sin^2\theta} + 1 = \frac{(t-r)^2\cos^2\theta + (t+r)^2 \sin^2\theta}{(t+r)^2 \sin^2\theta}$$

$$= \frac{(t-r)^2\cos^2\theta + (t-r)^2\sin^2\theta + 4tr\sin^2\theta}{(t+r)^2\sin^2\theta} = \frac{(t-r)^2 + 4tr\sin^2\theta}{(t+r)^2\sin^2\theta} \text{。}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = tr\cos^2\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = l^2\cos^2\theta \text{ 。}$$

即 $\overleftrightarrow{FH}$ 與 $\overleftrightarrow{PQ}$ 之交點軌跡爲一以原點爲圓心半徑 $l\cos\theta$ 之圓(實際上只考慮 ΔABC 之等面積分割線其交點軌跡僅爲一圓弧)。利用此結論，我們可以快速作出 ΔABC 的過定點等積線。

作法如下：

1 .作 $\angle ABC$ 之分角線 $\overline{BT}$

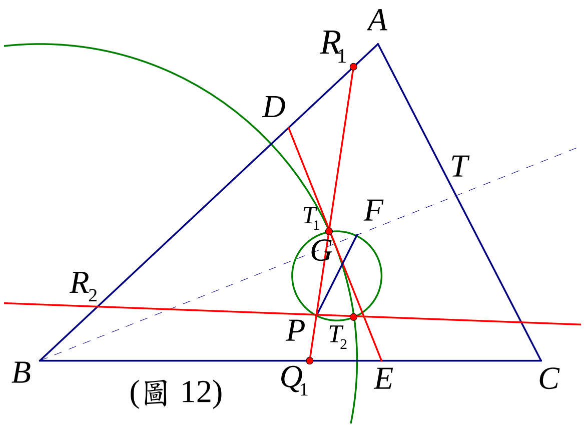
2 .作 $l = \sqrt{\dfrac{1}{2}\overline{BA} \times \overline{BC}}$

3 .以 B 爲圓心，l 爲半徑畫圓

交 $\overline{BA}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{BT}$ 於 D、E、F。

4 .作 $\overline{DE}$ 交 $\overline{BT}$ 於 G。

5 .作半徑 $\overline{BG}$ 之圓 B。(此爲垂足圓)



(圖 12)

6 .作 $\overline{PF}$ 爲直徑之圓交垂足圓於 T_1 、 T_2 。(可能僅一點或無交點)

7 .作 $\overleftrightarrow{PT_1}$ 分別交 $\overline{BA}$ 、 $\overline{BC}$ 於 R_1 、 Q_1，及作 $\overleftrightarrow{PT_2}$ 分別交 $\overline{BA}$ 、 $\overline{BC}$ 於 R_2 、 Q_2 。

8 .作 $\overline{R_1Q_1}$ 、 $\overline{R_2Q_2}$ 爲所求。(當然 $\overline{R_1Q_1}$ 或 $\overline{R_2Q_2}$ 可能不存在)

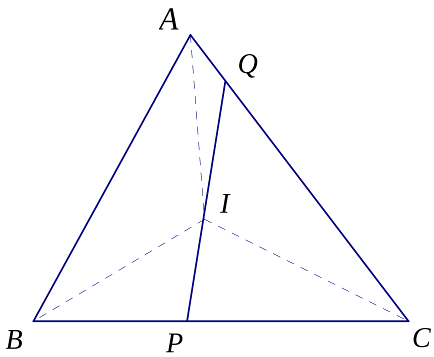
討論：上述尺規作圖可轉化爲圓錐曲線（含橢圓）外一點之切線作圖，有別於科學教育月刊，第 272 期(中華民國 93 年 9 月出刊) 圓錐曲線之切線作圖，著實令我們有意外之喜。接著，我們利用前面兩主題的研究，朝最後目標邁進。

[主題三]：凸 n 邊形完美分割線的尋找及是否有特殊意義？

[主題三之 1]：三角形完美分割線的尋找？

由於完美分割線須符合兩條件(同時是等周線與等積線)，又**因爲三角形的內心到三邊等距。所以只要過三角形的內心作等周線(或等積線)，即得完美分割線**。

證明：如(圖 13-1)，I 爲 ΔABC 內心， $\overline{PQ}$ 爲過 I 之一條等周線，



(圖 13-1)

(1) 連 $\overline{IA}$ 、 $\overline{IB}$ 、 $\overline{IC}$

(2) 四邊形 $ABPQ$ 面積 =

$$\Delta AIQ+\Delta AIB+\Delta BIP=\frac{1}{2}(\overline{AQ}+\overline{AB}+\overline{BP})\cdot h$$

(令 I 到三邊之距離= h)

$$=\frac{1}{2}(\overline{CQ}+\overline{CP})\cdot h=\Delta CIQ+\Delta CIP=\Delta CPQ \text{ 面積}$$

所以 $\overline{PQ}$ 亦爲 ΔABC 之等積線

即 $\overline{PQ}$ 爲完美分割線。

反之，當 $\overline{PQ}$ 爲過 I 之一條等積線，利用上述証明，

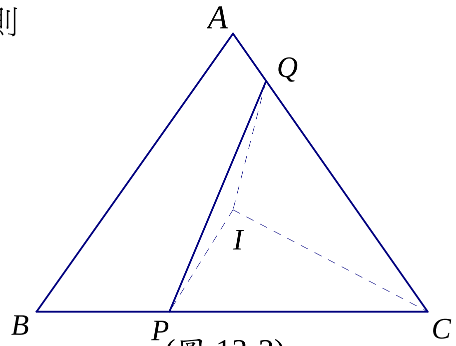
反推回去，可証出 $\overline{PQ}$ 爲完美分割線。

至於是否存在不通過 I 的完美分割線呢？

證明如下：若 I 爲 ΔABC 內心，

且存在$\overline{PQ}$爲不過 I 之完美分割線，則

(1) I 在ΔPCQ內部，如(圖 13-2)



(圖 13-2)

① 連$\overline{IP}$ 、$\overline{IQ}$ 、$\overline{IC}$

② $\because$ I到ΔABC三邊等距

$\therefore$ ΔPCQ面積 $= \Delta PIC$面積

$+ \Delta QIC$面積$+ \Delta PIQ$面積$= \frac{1}{2}\Delta ABC + \Delta PIQ$面積

$> \frac{1}{2}\Delta ABC$ 面積　($\because$ $\overline{PC} + \overline{CQ} = \frac{1}{2}\Delta ABC$ 周長)

可知$\overline{PQ}$不爲完美分割線。

(2)若 I 落在四邊形 $ABPQ$ 內部，證明方式同(1)　。

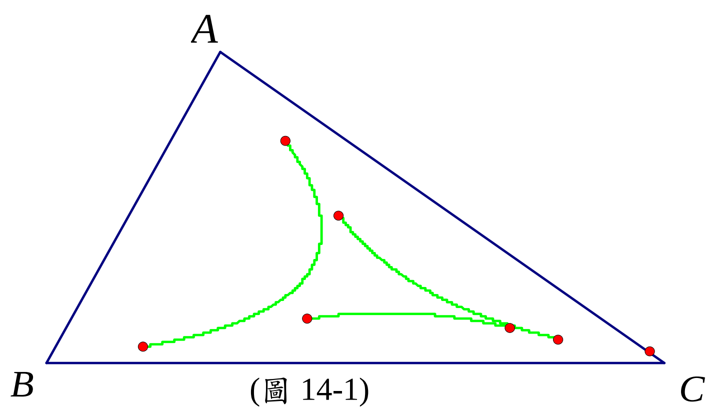
[主題三之 2]：凸 n 邊形完美分割線的尋找及是否有特殊的意義？

在[主題三之 1]的研究裏，我們很快速的找出三角形的完美分割線(必過內心)。同樣的，利用此結果，我們可得下面結論：

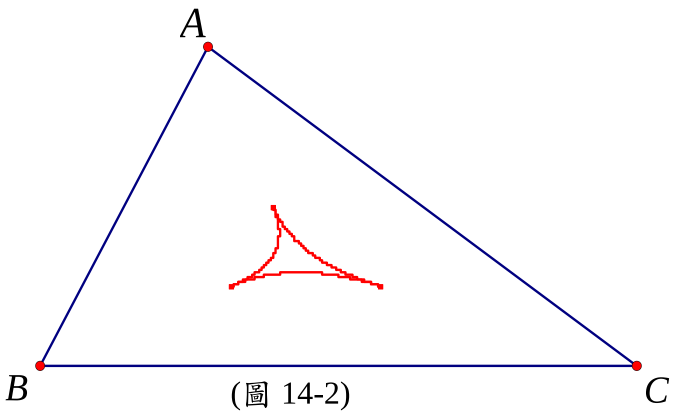
「**對於凸 n 邊形，若存在內心，則凸 n 邊形的完美分割線必過內心，且不存在不過內心的完美分割線。**」

但若凸 n 邊形不存在內心，那麼完美分割線又在哪裏？是否存在？若存在，又有何特殊的意義？

從[主題一]、[主題二]的研究結果，我們發現完美分割線即是等周及等積線所分別包絡出的曲線段之公切線。在此想法下，我們利用 *GSP* 軟體根據研究結果繪出完整包絡區如下：



(圖 14-1)



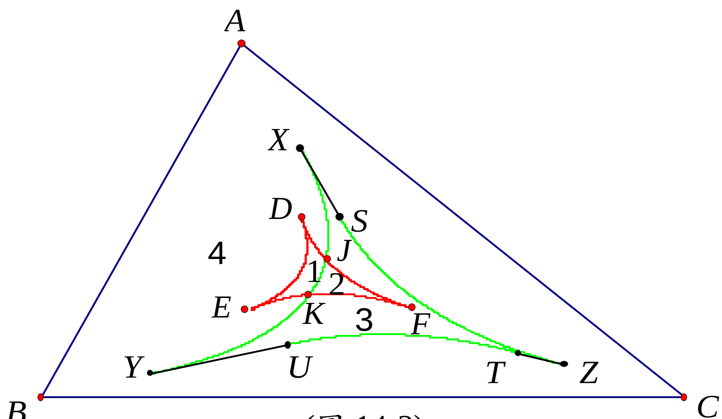
(圖 14-2)

在(圖 14-1)中，發現等周所包絡出的曲線段是分離的，(圖 14-2)卻是連續的封閉曲線。可是當等周線段的端點在三角形周界依順(或逆)時針方向移動，其等周線移動過程是連續的，所以包絡出的應該也是一條無間斷的封閉圖形。那為什麼會有此不連續的現象呢？找到原因如下：

(1) 三角形等積線所包絡而成的圖形共有三條由等積線段中點所構造出的曲線段，而曲線段的端點為過頂點等積線段的中點。因此，其圖形必為一條封閉曲線。

(2) 等周線所包絡而成的圖形是由$(2k\cos\theta, \dfrac{k^2\sin 2\theta}{2a})$ (a、k、θ之意義同圖 5-2)當切點構造而成。而特別的是過一頂點的等周線，它分屬於兩個角的等周線。因此，需考慮兩條基本等周線，當θ值不同，會得到兩個不同的點分別相切於兩曲線，且是曲線段的端點，(但若θ值相同則上述兩點重合)。因此須把兩端點連接。同理將另兩對端點連接，即得一封閉曲線。

接著，我們將此兩條封閉曲線同時畫出(圖 14-3)(為了方便說明，我們稱這二條封閉曲線所圍成的區域均稱為包絡區)。



(圖 14-3)

觀察圖中，我們想了很久，始終不能找出公切線的切點位置，但比較兩個包絡區，由於可利用曲線段的切線數量來判斷過定點等周線及等積線的數量。所以可得出下表兩種分割線的數量分布：

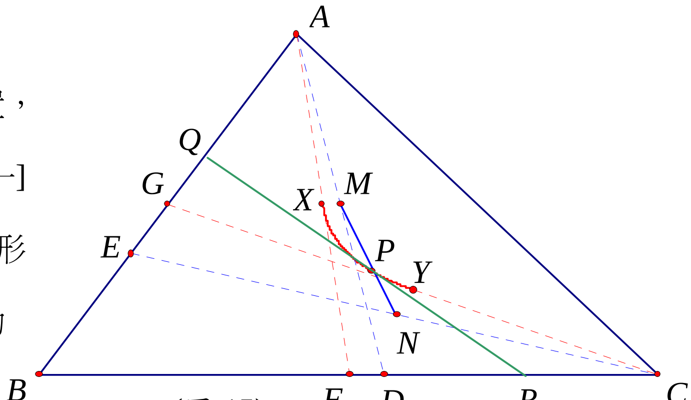
區域(不含界線與端點)	區域 1	區域 2	區域 3	區域 4	三角形外　面
等積線	3 條	3 條	1 條	1 條	1 條
等周線	1 條	3 條	3 條	1 條	1 條

曲線段&線段（不含端點）	區域 1 等周線包絡區邊界（除 J~K 段）	區域 2 J~K 段	區域 3 等積包絡區（除 K~F 和 F~J 段）	區域 4 K~F 和 F~J 段	三角形邊界
等積線	1 條	3 條	2 條	2 條	1 條
等周線	2 條	2 條	1 條	3 條	1 條

端點	S、T、U	X、Y、Z	D、E	F	J、K	A、B、C
等積線	1 條	1 條	1 條	1 條	2 條	1 條
等周線	2 條	1 條	1 條	3 條	2 條	1 條

（猜測凸 n 邊形的等周線數量分布應與「凸 n 邊形等分面積線段數量之分布探索」類似，在此我們不再深入研究。）

因此，爲了找出完美分割線位置，我們只能另闢途徑。重新檢視[主題一]、[主題二]，我們發現當考慮在三角形一個角的兩邊上等周與等積線之移動時，以 $\angle B$ 爲例 如(圖 15)。



(圖 15)

圖中，$\overline{AD}$、$\overline{CE}$ 爲過頂點等周線段，其中點分別爲 M 、N ；$\overline{AF}$ 、$\overline{CG}$ 爲過頂點等積線段，其中點分別爲 X、Y。

(1) 因爲等周線在 $\overline{AB}$ 、$\overline{BC}$ 上的移動範圍是落在 $\overline{AE}$ 、$\overline{CD}$ 之間，且根據「三角形等周線被同角的基本等周線所平分」之結論。可得 $\angle B$ 等周線段中點構成 $\overline{MN}$ ($\overline{MN}$

爲$\angle B$基本等周線上的一線段)，爲了方便說明，以下我們稱$\overline{MN}$爲$\angle B$的**等周有效段**。

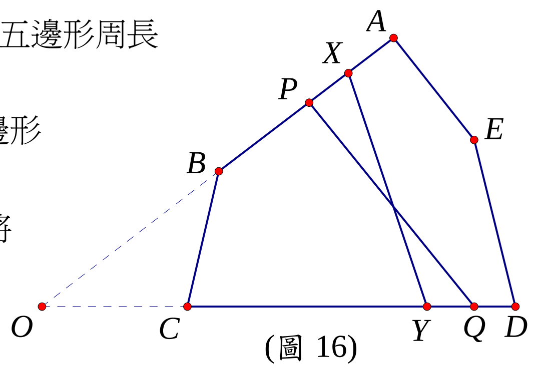
(2) 因爲等積線在$\overline{AB}$、$\overline{BC}$上的移動範圍是落在$\overline{AG}$、$\overline{CF}$之間，因此可得 X-Y 之曲線段，以下我們稱此 X-Y 曲線段爲$\angle B$的**等積曲線段**。

若$\overline{MN}$與 X-Y 曲線段之交點爲 P(可能會沒有交點，或有兩個交點)，則當過 P作等積線$\overline{QR}$如(圖 15)，因爲 P 爲$\overline{QR}$中點且 P 在有效段$\overline{MN}$上，所以$\overline{QR}$爲ΔABC的等周線。即$\overline{QR}$爲ΔABC的一條完美分割線。

以下我們把**同角的等周有效段及等積曲線段之交點稱為完美分割點**。如(圖 15)

利用這樣的發現，我們試著推廣到凸 n 邊形完美分割線的尋找。對於凸 n 邊形中，若等周線所通過的兩邊不平行，則可將此兩邊延長交於一點O。

以凸五邊形爲例，如(圖 16)，同三角形的研究，我們將圖形視爲ΔAOD，並作出$\angle O$的基本等周線$\overline{XY}$，其中$\overline{OX}=\overline{OY}=\frac{1}{4}\times$凸五邊形周長$+\frac{1}{2}(\overline{OB}+\overline{OC}-\overline{BC})$。(因爲$\overline{XY}$對於凸五邊形等周線$\overline{PQ}$仍具有對稱性，因此我們還是將$\overline{XY}$稱爲$\angle O$基本等周線。)



(圖 16)

顯然，對於ΔAOD來講，原來凸五邊形等周線$\overline{PQ}$(或$\overline{XY}$)已不是平分ΔAOD的周長，而是$1:k$的分割問題。但從<u>林義雄</u>教授所編著的「高中數學---自然數系」***P142***、***P143*** 裏查得的資料，可得知三角形$1:k$的等周線分割仍符合條件。因此我們可確定三角形$1:k$的等分周長線仍會包絡出一條拋物線的曲線段，且$\overline{PQ}$仍被$\angle O$的基本等周線$\overline{XY}$所平分。

同樣的，對於凸 n 邊形中，若等積線所通過的兩邊不平行，則可將此兩邊延長交於一點O，視同三角形$1:r$的分割。在 2006 年台灣國際科展作品裡的「凸 n 邊形等分面積線段數量之分布探索」已證出三角形$1:r$的分割線仍會包絡出一條雙曲線

的曲線段，且曲線段仍是$1:r$等積線段的中點(實際上，用[主題二]的推導仍可求出此結論)。

接著，我們作出凸 n 邊形的所有等周有效段及等積曲線段。以凸五邊形爲例，如(圖 17)

1.等周有效段作法如下：

(1) 分別作頂點等周線$\overline{A_1B_1}$、$\overline{A_2B_2}$、$\overline{A_3B_3}$、$\overline{A_4B_4}$、$\overline{A_5B_5}$及中點M_1、M_2、M_3、M_4、M_5

(2) 依序連接$\overline{M_1M_4}$、$\overline{M_4M_2}$、$\overline{M_2M_5}$、$\overline{M_5M_3}$、$\overline{M_3M_1}$得 5 條等周有效段。

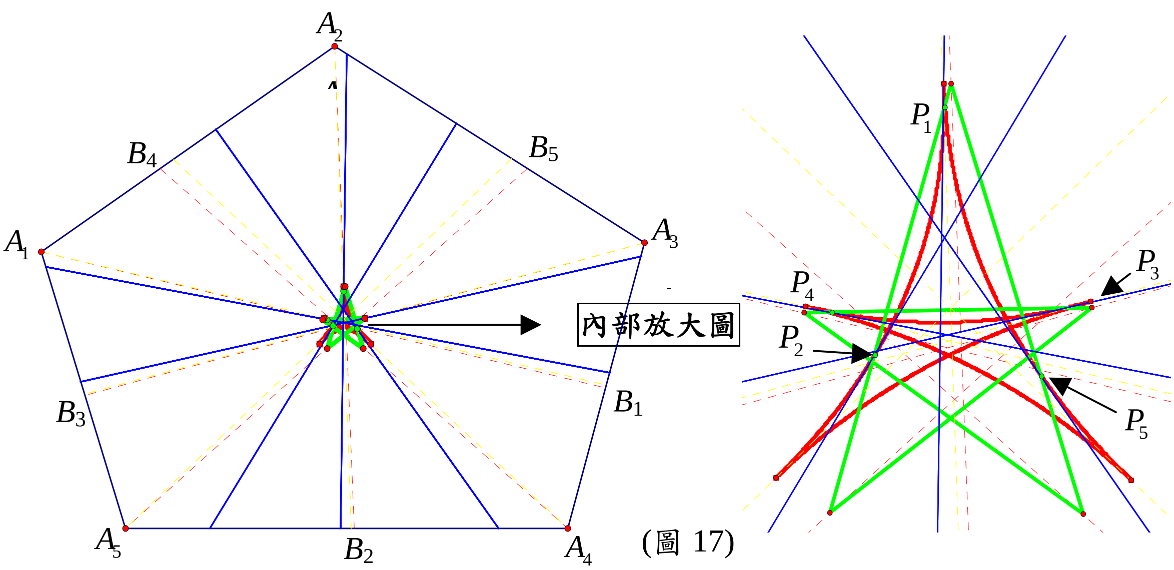
(此連接方式取決於等周線之移動通過頂點的先後順序。如圖例中，等周線從$\overline{A_1B_1}$作順時針移動時，所經過的頂點順序爲A_1、A_4、A_2、A_5、A_3、A_1)

2.等積曲線段作法如下：

(1) 分別作頂點等積線$\overline{A_1C_1}$、$\overline{A_2C_2}$、$\overline{A_3C_3}$、$\overline{A_4C_4}$、$\overline{A_5C_5}$及中點N_1、N_2、N_3、N_4、N_5

(2) 利用 G..S.P 作出 5 條曲線段。

由圖中得出有 5 個完美分割點P_1、P_2、P_3、P_4、P_5，分別過這 5 個點作出 5 條等周線，此 5 條即爲完美分割線。



(圖 17)

利用上述作法，我們可找出凸 n 邊形的完美分割線。

[主題三之 3]：凸 n 邊形完美分割線是否一定存在？

要解決這個主題，我們可以找出完美分割點是否一定存在？也就是凸 n 邊形同角的等周有效段與等積曲線段是否一定有交點？但經過我們的研究，發現到凸 n 邊形內部的等周有效段與等積包絡區變化太多，研究不易。因此，我們想如果從周界上來探討是否會比較單純。

首先，我們在凸 n 邊形 $A_1A_2\ldots A_n$ 周界上選擇一動點 P，接著過 P 分別作出等積線 $\overline{PQ}$、等周線 $\overline{PR}$。則當 P 從 A_i 沿著凸 n 邊形周界逆時針移動，此同時 Q、R 會分別以變速率及等速率在凸 n 邊形周界做逆時針移動。利用此結果，我們做出[完美分割線存在性]的證明如下：

1. (1) 假設過 A_i 的等積線為 $\overline{A_iN_i}$ （N_i 在 $\overline{A_jA_{j+1}}$ 上)。

   (2) 過 A_i 的等周線為 $\overline{A_iM_i}$ （M_i 在周界上)。

2. (1) 當 N_i 與 M_i 重合，得完美分割線存在。

   (2) 當 N_i 與 M_i 不重合，則：

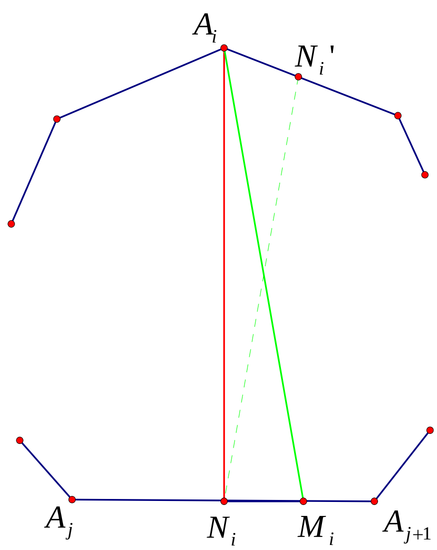
   ① 可令 M_i 在圖中 $\overline{A_iN_i}$ 之右側。

   ② 過 N_i 作等周線 $\overline{N_iN_i'}$，可得 N_i' 必在 $\overline{A_iN_i}$ 之右側，如(圖 18-1)。

   (3) 當動點 P 自 A_i 逆時針沿著周界移動到 N_i，則 Q 也從 N_i 逆時針沿著周界移動到 A_i；此同時 R 點也以逆時針沿著周界從 M_i 移動到 N_i'。上述 Q、R 的移動可視為兩質點在同一折線段作前進，且一開始 Q 在後、R 在前，如(圖 18-2)。最後 Q 抵達終點 A_i 時，R 在 N_i' 上形成 Q 超前 R 的情況，如(圖 18-3)。

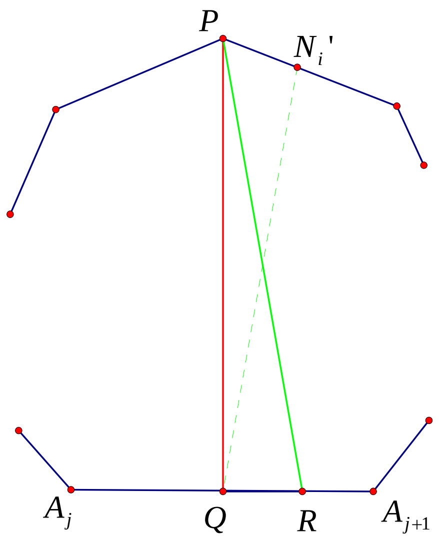
   因此，可得移動過程中，Q 與 R 至少存在一次在相同位置上。

   即 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{PR}$ 存在重合情況。

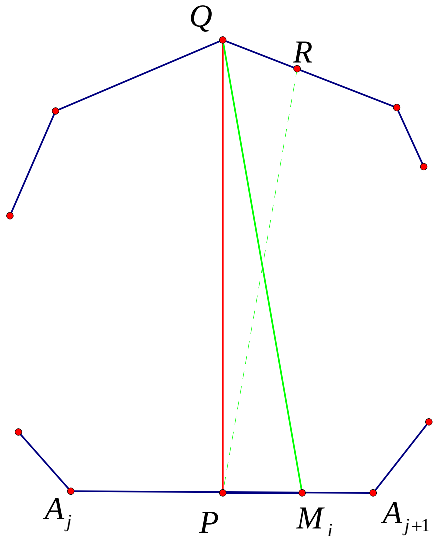


(圖 18-1)

可推得完美分割線必存在。



(圖 18-2)



(圖 18-3)

==

最後，我們把上述未討論到的點對稱圖形，與具有平行邊的凸 n 邊形稍作結論如下：

1. 點對稱圖形：所有等周線皆為完美分割線。
2. 若所在的一組平行邊有完美分割線，則過此兩平行邊的等周線皆為完美分割線。

至此，本研究告一段落。懇請同好予以指教，讓內容更臻完善。

三、結論：

1. ΔABC 中，$\angle B$ 的等周線包絡出一條拋物線曲線段(令為 α)如(圖 19)，則：

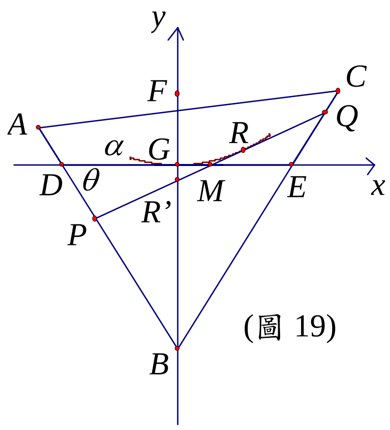
(1). α 的方程式：$y=\dfrac{1}{4a\cot\theta}x^2$ （ $\overline{DG}=a$ 、 $\angle BDG=\theta$ ）

(2). α 對稱軸為 $\angle B$ 的分角線。

(3). α 的頂點為 $\angle B$ 的基本等周線段的中點 G。

(4). α 的焦點 $F(0, a\cot\theta)$ 。

(5). 基本等周線 $\overline{DE}$ 平分 $\angle B$ 的等周線 $\overline{PQ}$ 。



(圖 19)

(6). $\overline{PQ}$ 與 α 相切於 R ，其中 $\overline{MR}=\overline{MR'}$ ，$\overline{PQ}$ 交 $\angle B$ 分角線於 R' 。

2. ΔABC 中，$\angle B$ 的等積線包絡出一條雙曲線曲線段(令為 β)如(圖 20)，則：

(1). β的方程式：$\dfrac{y^2}{l^2\cos^2\theta}-\dfrac{x^2}{l^2\sin^2\theta}=1$（$\overline{BD}=l$）

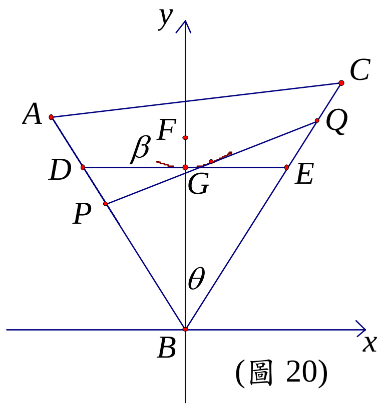
(2). β的漸近線爲$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BC}$。

(3). β對稱軸爲$\angle B$的分角線。(圖中 y 軸)

(4). β的頂點爲$\angle B$的基本等積線段的中點G。

(5). β的焦點爲$F(0,l)$。

(6). $\angle B$的等積線$\overline{PQ}$與β相切於$\overline{PQ}$的中點。



(圖 20)

3. 凸多邊形完美分割線必存在。

4. 凸多邊形完美分割線必通過同角的等周有效段與等積曲線段之交點。

5. (1). 具有內切圓的凸多邊形，其完美分割線一定通過其內心。

(2). 點對稱之圖形，等周線即爲完美分割線。

四、參考資料

(一) 全任重教授個人網站 ------ 如何指導學生做數學科展

(二) 作者：<u>林義雄</u>教授　　書名：高中數學「自然數系」*P142*、*P143*

(三) 作者：朱柏貞　　中華民國中小學第 32 屆科展高中組---圓錐曲線上包絡線之探討

(四) 作者：　世部貞布郎原著、九章編輯部譯

〔幾何學辭典〕*P*460 第 2098 題與 *P*486 第 2209 題

(五) 作者：張湘琦、鄭巧君

2006 年台灣國際科展作品 -----「凸 n 邊形等分面積線段數量之分布探索」

(六) 作者：陳旻宏

中華民國中小學第 31 屆科展高中組 ----- 三角形分割線形成的包絡線

(七) 作者：廖文偉、劉立晴、鄭慈、林士捷

中華民國中小學第 46 屆科展作品 ------三角形周長等分線的作圖與數量分布

(八) 作者：劉易青、史宜平、林彥辰、李屹

中華民國中小學第 45 屆科展 ------同時平分三角形、四邊形的周長與面積之研究

(九) 作者：劉紹正　出版年：中華民國 93 年 9 月　論文名稱：圓錐曲線之切線作圖

期刊名稱：科學教育月刊　卷期：第 272 期

評語

題目取材新鮮，表達清晰，爲一有趣的科展作品。