臺灣二ＯＯ七年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作品名稱：費氏蛇

得獎獎項：佳作

學校／作者：高雄市立高雄高級中學　張正義
高雄市立高雄高級中學　徐子翔

作者簡介

(左邊爲徐子翔，右邊爲張正義)

張正義和徐子翔，高雄中學三年級，對數理科目有強烈的興趣，會共同研討中山大學雙週一題，也在國科會南部的高中數學資優班上了兩年的課程，在 2006 年寒假，也參加了 12 所高中共同舉辦的 TRML 數學研習營，在 2005 年也參加過第 46 屆的高雄市科展。在 2006 年全國科展上，以「費氏蛇」獲得了第三名，在過程中學習到很多，最重要的是從面對問題到想出解法，以至於推出結論的那種科學精神，在全國科展獲得評審青睞後，決定報名參加國際科展。

Abstract

Snakes of Fibonacci

At the website "MathLinks EveryOne," we found a problem "Snakes on a chessboard," which was raised by Prof. Richard Stanley. The following is the problem. *A snake on the* $m \times n$ *chessboard is a nonempty subset S of the squares of the board with the following property: Start at one of the squares and continue walking one step up or to the right, stopping at any time. The squares visited are the squares of the snake. Prove that the total number of ways to cover an* $m \times n$ *chessboard with disjoint snakes is a product of Fibonacci numbers.* We call the total number of ways to cover a chessboard with disjoint snakes "the snake-covering number."

This problem hasn't been solved since it was posted on September 18, 2004, so it aroused our interest to study it. First, we used the way in which we added each block to the chessboard, and therefore we discovered some regulations about the snake-covering number of the $1 \times n$, $2 \times n$ and $3 \times n$ chessboard. Through "recursive relation" and "mathematical induction", we proved the general term of the snake-covering number of the $1 \times n$, $2 \times n$ and $3 \times n$ chessboard. In the following study, we found a key method in which we added a group of blocks to the chessboard. Finally, we proved the general term of the snake-covering number of the $m \times n$ chessboard. Also, we discovered the way to figure out the snake-covering number of the nonrectangular chessboard.

中文摘要

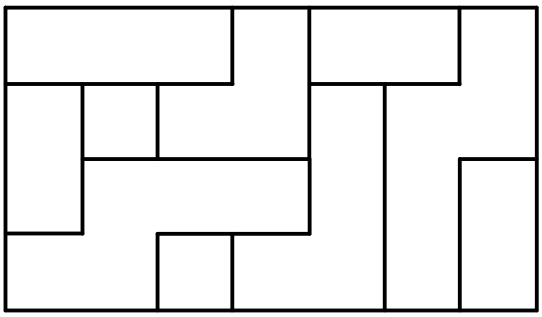
費氏蛇

在網站"MathLinks EveryOne"中，我們找到了一個有趣的問題"棋盤上的蛇"(Snakes on a chessboard)，這個問題是由教授 Richard Stanley 所提出。問題如下：在 $m \times n$ 棋盤形格子上，蛇由任意一格出發，但蛇的走法只能往右→，往上↑，或停住。若此蛇已停住，將由另一條蛇來走，且不同蛇走過的格子不可重疊。證明：將 $m \times n$ 棋盤形格子完全覆蓋的總方法數爲費氏(*Fibonacci*)數列某些項的乘積。我們將把棋盤形格子完全覆蓋的所有方法數稱之爲"蛇填充數"。

由於這個問題自從 2004 年 9 月 18 日被登在網站上後，還沒有人提出解答，於是引發了我們研究的興趣。首先，我們使用了將一個一個格子加到棋盤上的方法，並發現了$1\times n$、$2\times n$、$3\times n$棋盤形格子蛇填充數的一些規律。我們使用遞迴關係及數學歸納法來證明$1\times n$、$2\times n$、$3\times n$棋盤形格子蛇填充數的一般項。在接下來的研究中我們發現一個特別的方法，一次增加數個方塊。最後我們證明了$m\times n$棋盤形格子的蛇填充數的一般項。而且，我們也找到如何求出不規則棋盤形格子的蛇填充數。

壹、 研究動機：

在網站"MathLinks EveryOne"中，我們找到了一個有趣的問題"棋盤上的蛇"(Snakes on a chessboard)，這個問題是由教授 Richard Stanley 所提出。問題如下：在$m\times n$棋盤形格子上，蛇由任意一格出發，但蛇的走法只能往右→，往上↑，或停住。若此蛇已停住，將由另一條蛇來走，且不同蛇走過的格子不可重疊，例如右圖就是將4×7棋盤形格子完全覆蓋的一種方法。證明：將$m\times n$棋盤形格子完全覆蓋的總方法數爲費氏($Fibonacci$)數列某些項的乘積。由於這個問題自從 2004 年 9 月 18 日被登在網站上後，還沒有人提出解答，於是引發了我們研究的興趣。



貳、 研究目的：

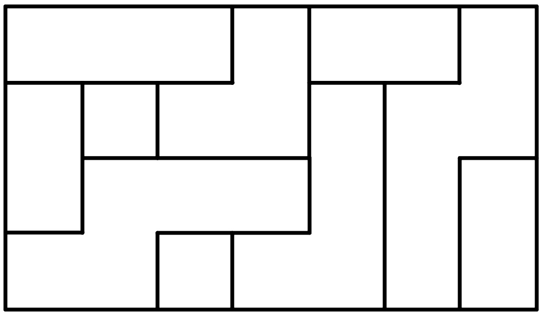
一、從最簡單的1×1、1×2、1×3等棋盤形格子〝蛇填充數〞，進而推演至3×1、3×2、3×3 等棋盤形格子〝蛇填充數〞，並利用數學歸納法得到$1\times n$、$2\times n$、$3\times n$等棋盤形格子〝蛇填充數〞的規律。

二、歸納出$m\times n$、$m\times n+k$等棋盤形格子〝蛇填充數〞的規律，並試著導出與費氏($Fibonacci$)數列的關係。

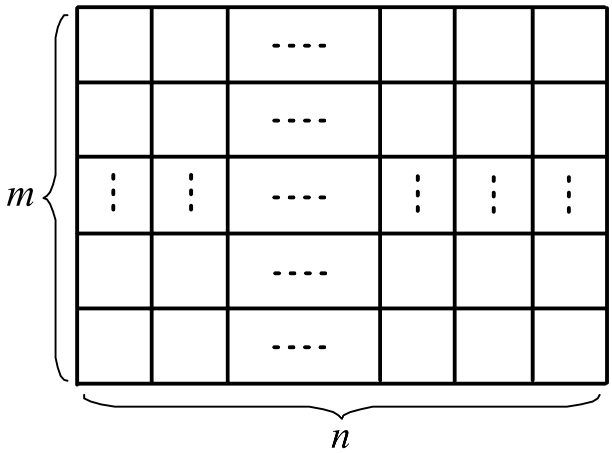
參、 研究過程：

一、名詞解釋：

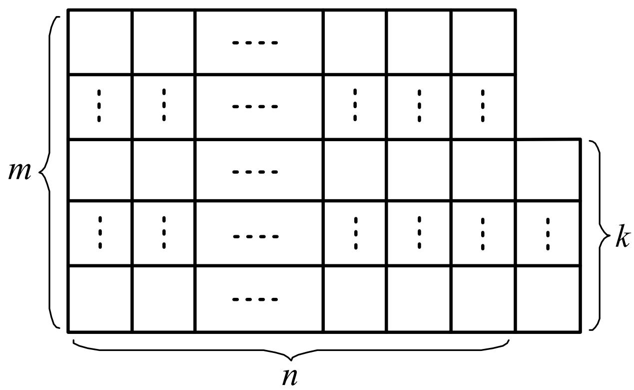
(一) 蛇填充數：在$m \times n$棋盤形格子上，蛇由任意一格出發，但蛇的走法只能往右$\rightarrow$，往上$\uparrow$，或停住。若此蛇已停住，將由另一條蛇來走，且不同蛇走過的格子不可重疊，例如下圖就是將4×7棋盤形格子完全覆蓋的一種方。而〝蛇填充數〞定義爲將此棋盤形格子完全覆蓋的所有方法數。



(二) $T_{m \times n}$：$T_{m \times n}$表示將$m \times n$棋盤形格子完全覆蓋之〝蛇填充數〞，而所謂$m \times n$棋盤形格子爲：

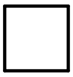


(三) $T_{m \times n+k}$：$T_{m \times n+k}$表示將$m \times n+k$棋盤形格子完全覆蓋之〝蛇填充數〞，而所謂$m \times n+k$棋盤形格子爲：



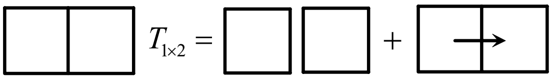
二、$1\times n$棋盤形格子之蛇填充數的推導

(一) $T_{1\times1}$：



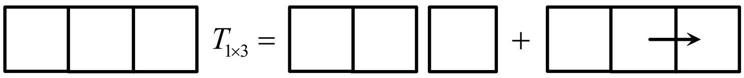
$T_{1\times1}=1$

(二) $T_{1\times2}$：



$T_{1\times2}=$ $+$ $=2T_{1\times1}=2$

(三) $T_{1\times3}$：



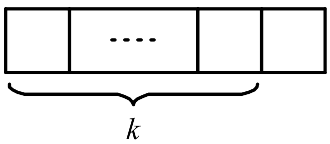
$T_{1\times3}=$ $+$ $=2T_{1\times2}=4$

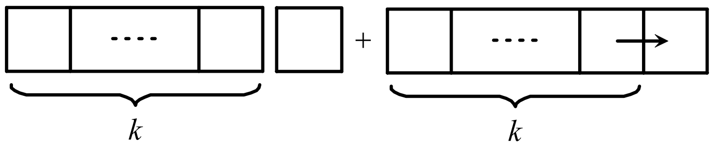
(四) $T_{1\times n}$：由(一)(二)(三)推測$T_{1\times n}=2^{n-1}$，$n\geq1$

證明：當$n=1$時，左式$=T_{1\times1}=1=2^{1-1}=$右式，$\therefore n=1$成立

假設$n=k$時成立，即$T_{1\times k}=2^{k-1}$

則$n=k+1$時，左式$=T_{1\times(k+1)}$



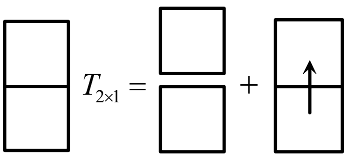


$=2T_{1\times k}=2\times2^{k-1}=2^{k}=$右式

$\therefore$由數學歸納法得知$T_{1\times n}=2^{n-1}$，$n\geq1$成立

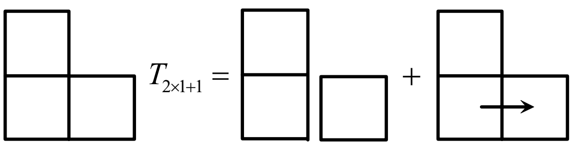
三、$2\times n$棋盤形格子之蛇填充數的推導

(一) $T_{2\times1}$：



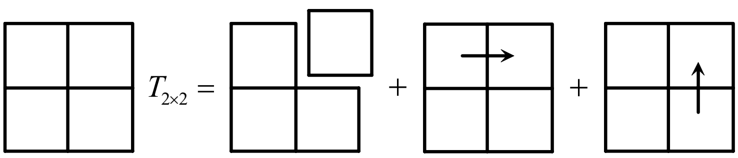
$T_{2\times1}=$ $+$ $=2T_{1\times1}=2\times1=2$

(二) $T_{2\times1+1}$：



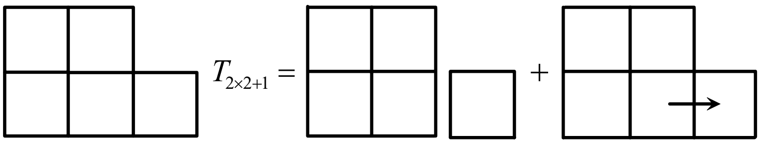
$T_{2\times1+1}=$ $+$ $=T_{2\times1}+T_{1\times1}=2+1=3$

(三) $T_{2\times2}$：



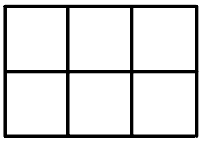
$T_{2\times2}=$ $+$ $+$ $=3T_{2\times1+1}=9$

(四) $T_{2\times2+1}$：



$$=T_{2\times2}+2T_{2\times1+1}=9+2\times3=15=5T_{2\times1+1}$$

(五) $T_{2\times3}$：



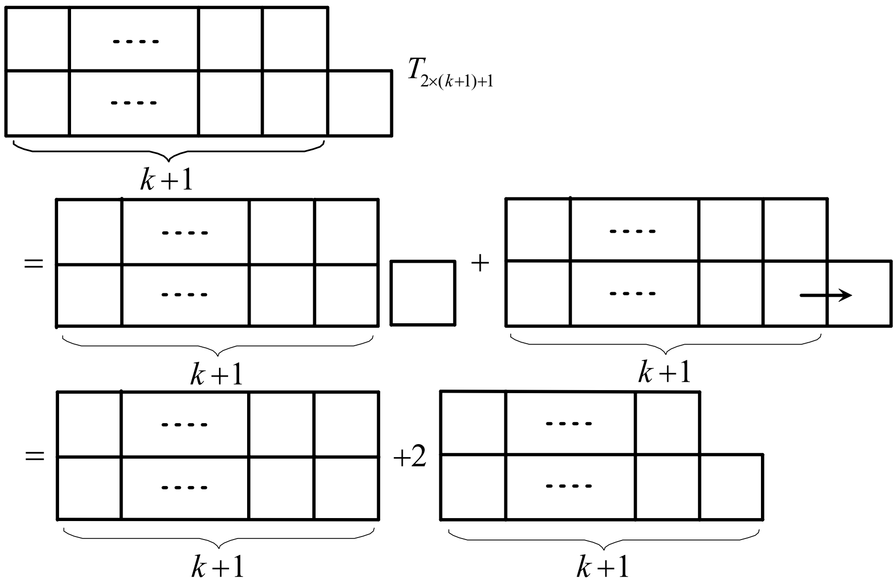
$T_{2\times3}=3T_{2\times2+1}=45=5T_{2\times2}$

(六) $T_{2\times n+1}$：由(二)(四)推測 $T_{2\times n+1}=5T_{2\times(n-1)+1}$，$n\geq2$

證明：當 $n=2$ 時，左式 $=T_{2\times2+1}=5T_{2\times1+1}=$ 右式，$\therefore n=2$ 成立

假設 $n=k$ 時成立，即 $T_{2\times k+1}=5T_{2\times(k-1)+1}$

則 $n=k+1$ 時，左式 $=T_{2\times(k+1)+1}$



$=3T_{2\times k+1}+2T_{2\times k+1}=5T_{2\times k+1}$

$\therefore$ 由數學歸納法得知 $T_{2\times n+1}=5T_{2\times(n-1)+1}$，$n\geq2$ 成立

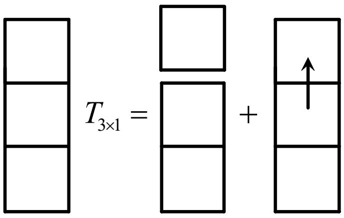
(七) $T_{2\times n}$：$T_{2\times n}=5T_{2\times(n-1)}$，$n\geq2$

$\because T_{2\times n}=3T_{2\times(n-1)+1}=3\times5T_{2\times(n-2)+1}=5\times3T_{2\times(n-2)+1}=5T_{2\times(n-1)}$，$\forall n\geq2$

$\therefore T_{2\times n}=5T_{2\times(n-1)}$，$\forall n\geq2$

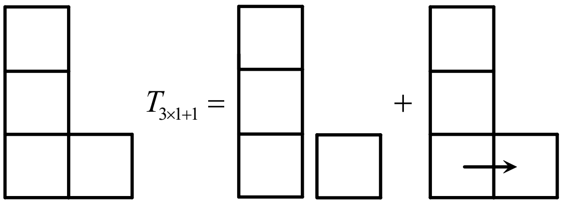
四、 $3\times n$ 棋盤形格子之蛇填充數的推導

(一) $T_{3\times1}$：



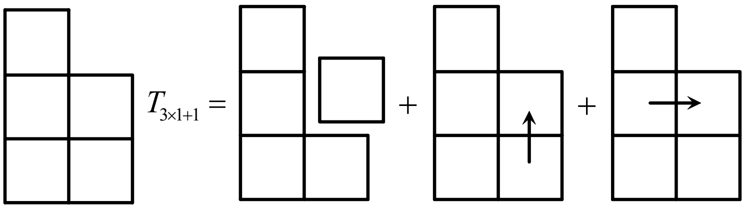
$$T_{3\times1} = \quad + \quad = 2T_{2\times1} = 2\times2 = 4$$

(二) $T_{3\times1+1}$：



$$T_{3\times1+1} = \quad + \quad = T_{3\times1} + T_{2\times1} = 2+4 = 6$$

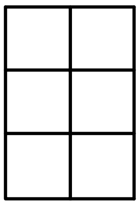
(三) $T_{3\times1+2}$：



$$T_{3\times1+1} = \quad + \quad + \quad$$

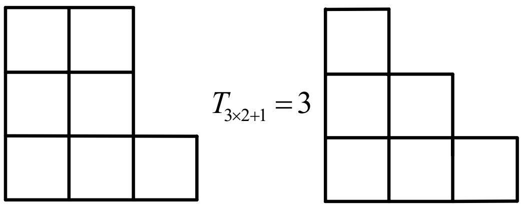
$$= T_{3\times1+1} + T_{3\times1+1} + (T_{1\times2} + T_{1\times1}) = 6+6+3 = 15$$

(四) $T_{3\times2}$：

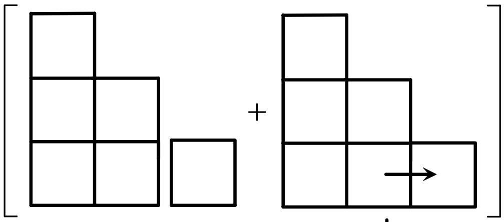


$$T_{3\times2} = 3T_{3\times1+2} = 45$$

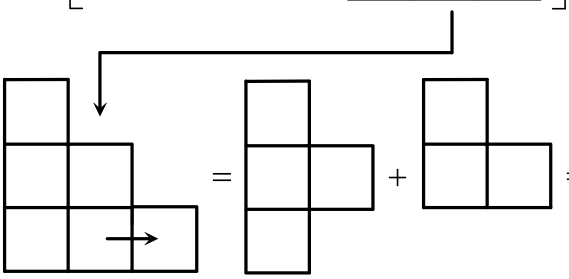
(五) $T_{3\times2+1}$：



$$T_{3\times2+1} = 3$$

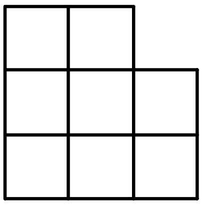


$$= 3\left[\quad + \quad\right] = 3(T_{3\times1+2} + 9) = 72$$

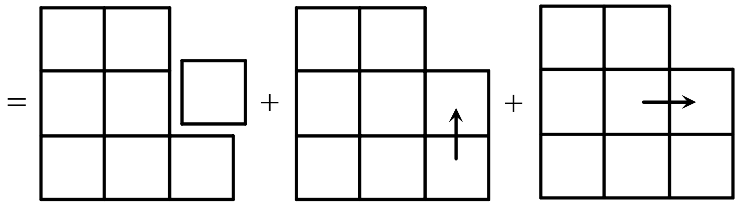


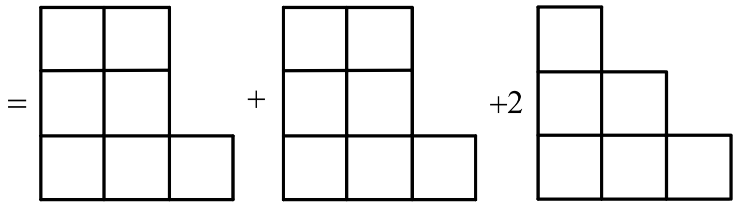
$$= \quad + \quad = 6+3 = 9$$

(六) $T_{3\times2+2}$：



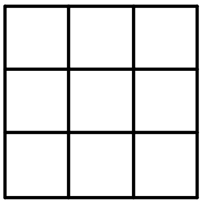
$T_{3\times2+2}$





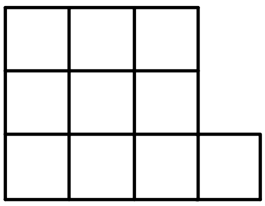
$$=T_{3\times2+1}+T_{3\times2+1}+2\times\frac{1}{3}T_{3\times2+1}=\frac{8}{3}T_{3\times2+1}=\frac{8}{3}\times72=192$$

(七) $T_{3\times3}$：

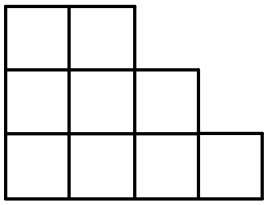


$T_{3\times3}=3T_{3\times2+2}=576$

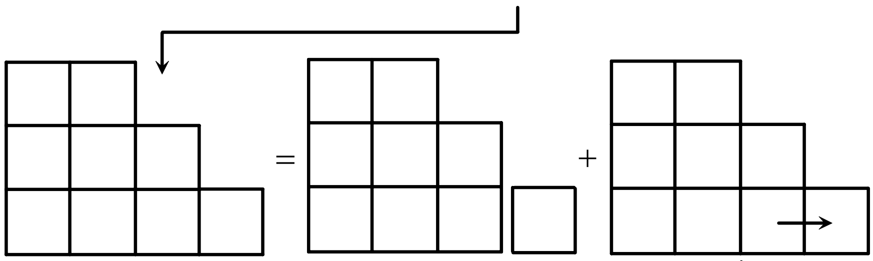
(八) $T_{3\times3+1}$：



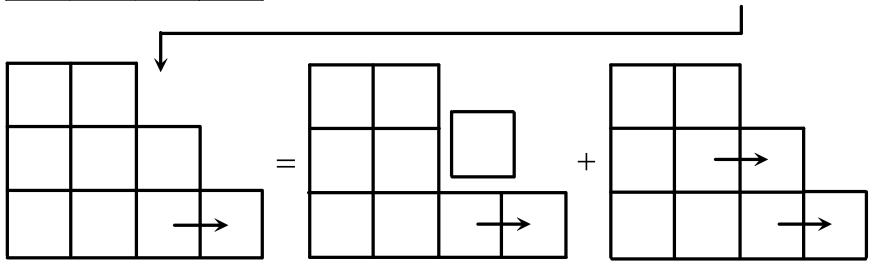
$T_{3\times3+1}=3$



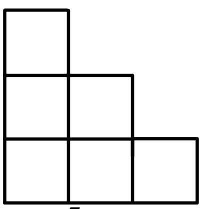
$=3\times312=936$



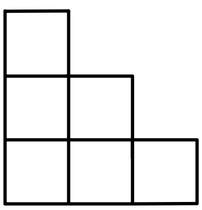
$=192+120=312$



$=3$



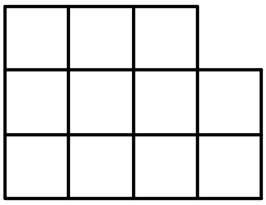
$+2$



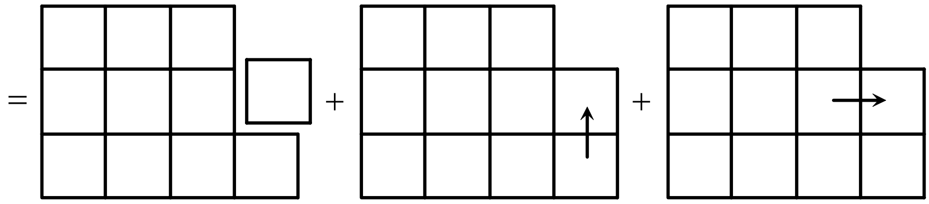
$=5\times24=120$

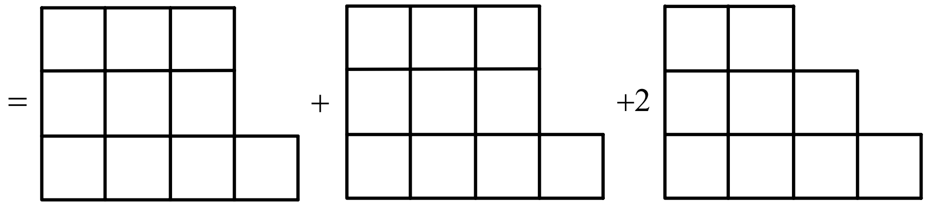
發現 $T_{3\times3+1}=13T_{3\times2+1}$

(九) $T_{3\times3+2}$：



$T_{3\times3+2}$

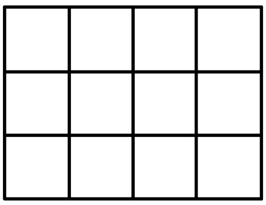




$$=T_{3\times3+1}+T_{3\times3+1}+2\times\frac{1}{3}T_{3\times3+1}=\frac{8}{3}T_{3\times3+1}=\frac{8}{3}\times936=2496$$

發現 $T_{3\times3+2}=13T_{3\times2+2}$

(十) $T_{3\times4}$：



$T_{3\times4}=3T_{3\times3+2}=7488$

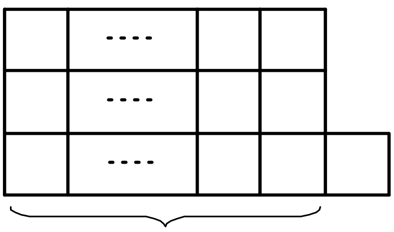
發現 $T_{3\times4}=13T_{3\times3}$

(十一) $T_{3\times n+1}$：由(五)(八)推測 $T_{3\times n+1}=13T_{3\times(n-1)+1}$，$n\geq3$

證明：當 $n=3$ 時，左式 $=T_{3\times3+1}=13T_{3\times2+1}=$ 右式，$\therefore n=3$ 成立

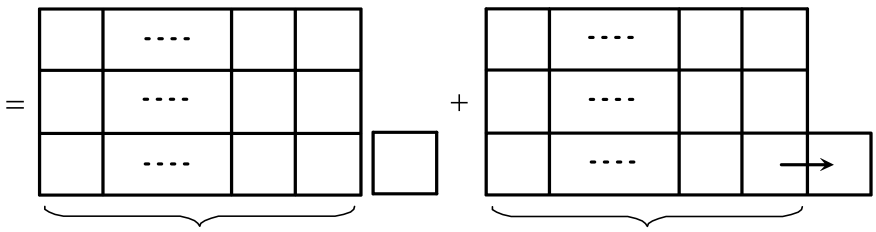
假設 $n=k$ 時成立，即 $T_{3\times k+1}=13T_{3\times(k-1)+1}$

則 $n=k+1$ 時，左式 $=T_{3\times(k+1)+1}$

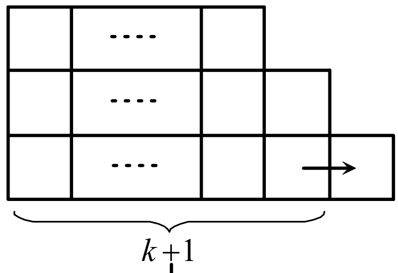


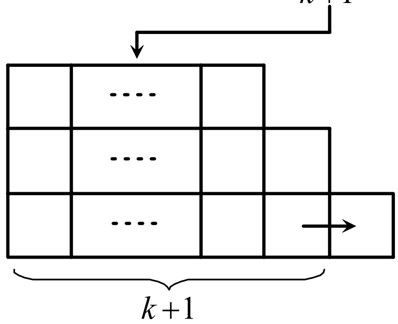
$T_{3\times(k+1)+1}$

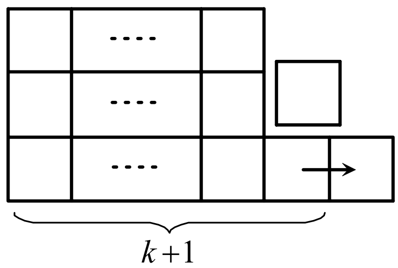
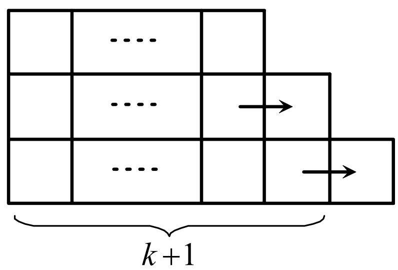
$k+1$

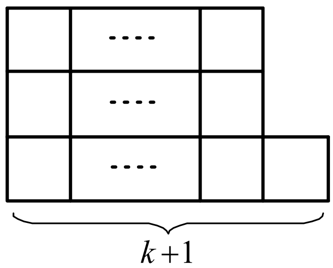
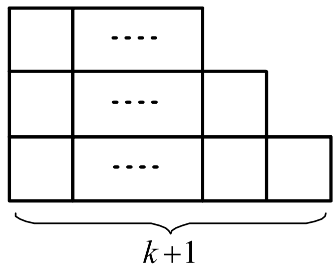


$k+1$ $k+1$

$= T_{3\times(k+1)} + 3$  $= 8T_{3\times k+1} + 3\times\frac{5}{3}T_{3\times k+1} = 13T_{3\times k+1}$



$=$  $+$ 

$=$  $+2$ 

$= (1+2\times\frac{1}{3})T_{3\times k+1} = \frac{5}{3}T_{3\times k+1}$

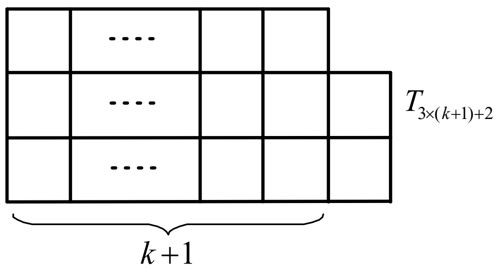
$\therefore$由數學歸納法得知$T_{3\times n+1} = 13T_{3\times(n-1)+1}$，$n \ge 3$成立

(十二) $T_{3\times n+2}$：由(六)(九)推測$T_{3\times n+2} = 13T_{3\times(n-1)+2}$，$n \ge 3$

證明：當$n=3$時，左式$=T_{3\times3+2} = 13T_{3\times2+2} =$右式，$\therefore n=3$成立

假設$n=k$時成立，即$T_{3\times k+2} = 13T_{3\times(k-1)+2}$

則$n=k+1$時，左式$=T_{3\times(k+1)+2}$



$= \frac{8}{3}T_{3\times(k+1)+1} = \frac{8}{3}\times 13T_{3\times k+1} = 13\times\frac{8}{3}T_{3\times k+1} = 13T_{3\times k+2}$

$\therefore$由數學歸納法得知$T_{3\times n+2} = 13T_{3\times(n-1)+2}$，$n \ge 3$成立

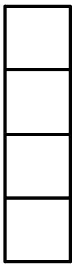
(十三) $T_{3\times n}$ ：

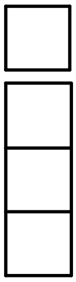
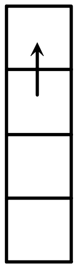
$\because T_{3\times(n+1)} = 3T_{3\times n+2} = 3\times 13T_{3\times(n-1)+2} = 13\times 3T_{3\times(n-1)+2} = 13T_{3\times n}$ ，$\forall n \geq 3$

$\therefore T_{3\times(n+1)} = 13T_{3\times n}$ ，$\forall n \geq 3$

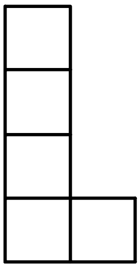
五、 $4\times n$ 棋盤形格子之蛇填充數的推導

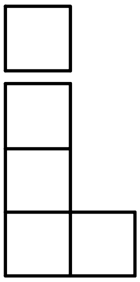
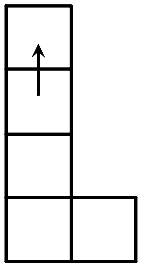
(一) $T_{4\times 1}$ ：



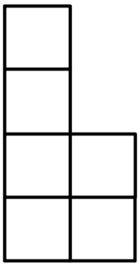
$T_{4\times 1} =$  $+$  $= 2T_{3\times 1} = 2\times 4 = 8$

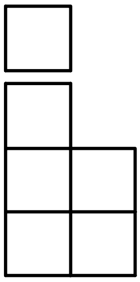
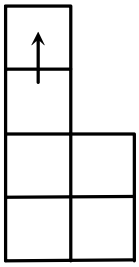
(二) $T_{4\times 1+1}$ ：



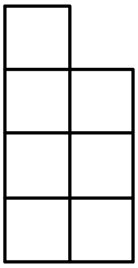
$T_{4\times 1+1} =$  $+$  $= 2T_{3\times 1+1} = 12$

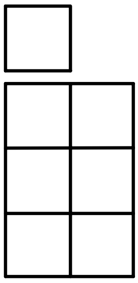
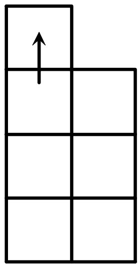
(三) $T_{4\times 1+2}$ ：



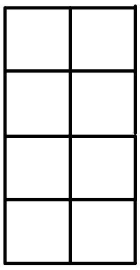
$T_{4\times 1+2} =$  $+$  $= 2T_{3\times 1+2} = 30$

(四) $T_{4\times 1+3}$ ：



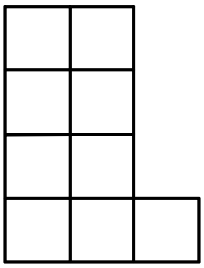
$T_{4\times 1+3} =$  $+$  $= T_{3\times 2} + 2T_{3\times 1+2} = 45 + 2\times 15 = 75$

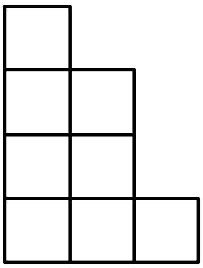
(五) $T_{4\times 2}$ ：

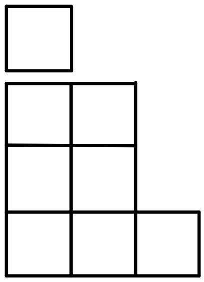
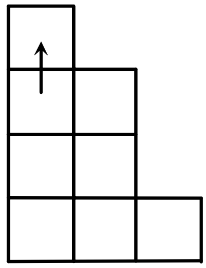


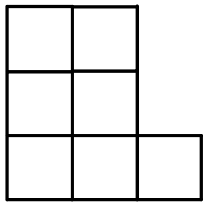
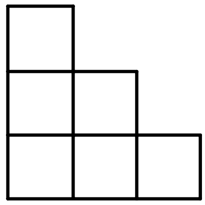
$T_{4\times 2} = 3T_{4\times 1+3} = 3\times 75 = 225$

(六) $T_{4\times 2+1}$ ：



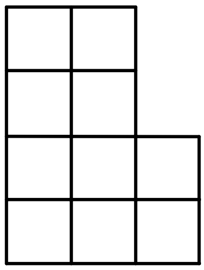
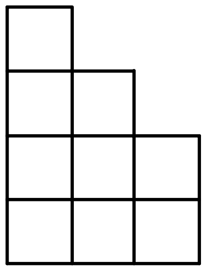
$T_{4\times 2+1} = 3$ 

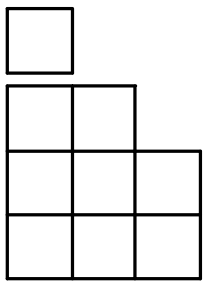
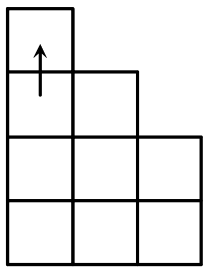
$=3\Bigg[$  $+$  $\Bigg]$

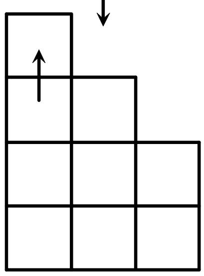
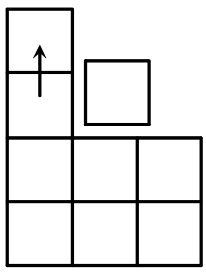
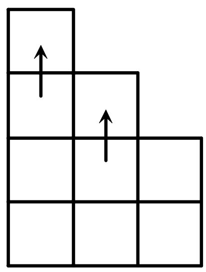
$=3\Bigg[$  $+2$  $\Bigg]$

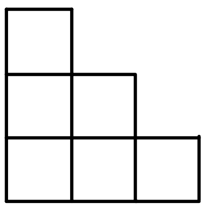
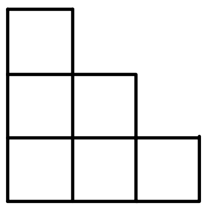
$=3(72+2\times 24)=360$

(七) $T_{4\times2+2}$ ：

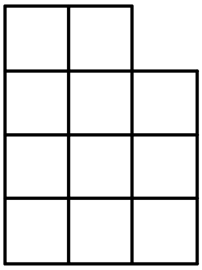
 $T_{4\times2+2}=3$ 

$=3\Bigg[$  $+$  $\Bigg]=3(192+120)=936$

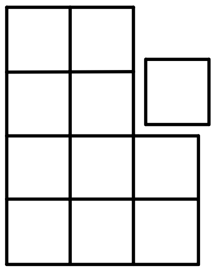
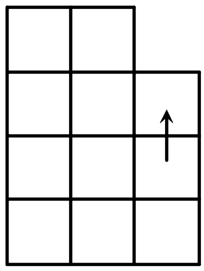
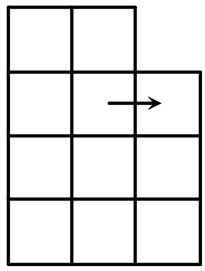
 $=$  $+$ 

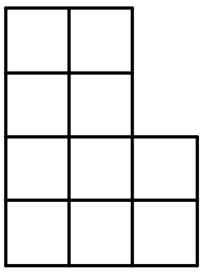
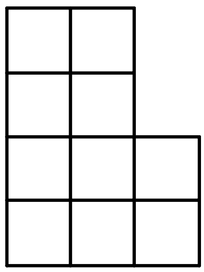
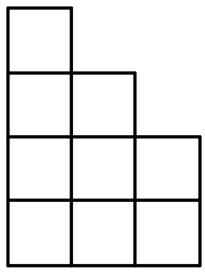
$=3$  $+2$  $=72+2\times 24=120$

(八)　$T_{4\times2+3}$：



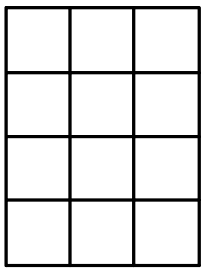
$T_{4\times2+3}$

$=$  $+$  $+$ 

$=$  $+$  $+2$ 

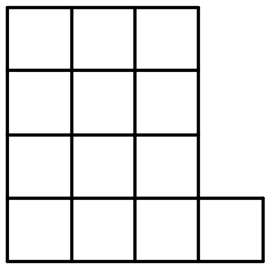
$$=T_{4\times2+2}+T_{4\times2+2}+2\times\frac{1}{3}T_{4\times2+2}=\frac{8}{3}T_{4\times2+2}=\frac{8}{3}\times936=2496$$

(九)　$T_{4\times3}$：

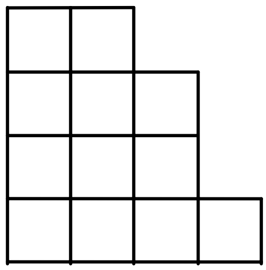


$T_{4\times3}=3T_{4\times2+3}=3\times2496=7488$

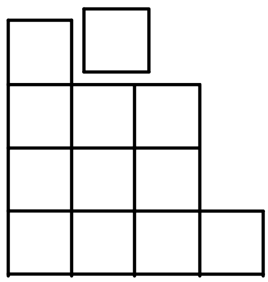
(十) $T_{4\times3+1}$：



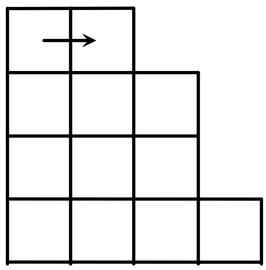
$T_{4\times3+1}=3$



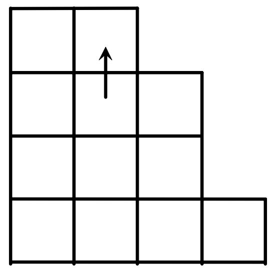
$=3\Big[$



$+$

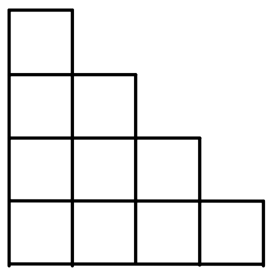


$+$

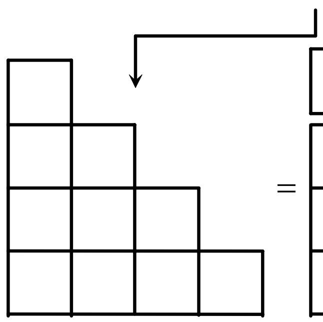


$\Big]$

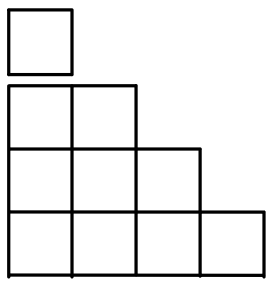
$=3(3+3+2)$



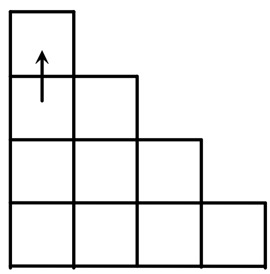
$=3\times8\times504=12096$



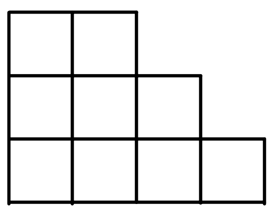
$=$



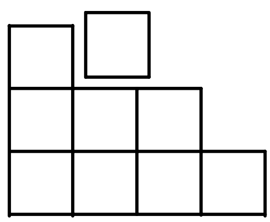
$+$



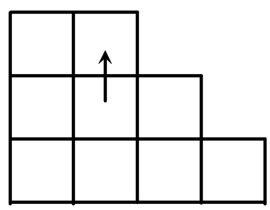
$=$



$+\Big[$

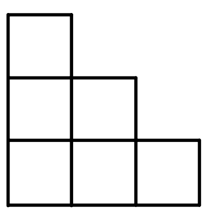


$+$

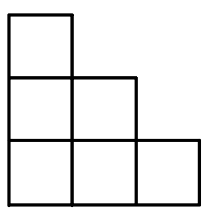


$\Big]$

$=\frac{1}{3}T_{4\times2+2}+\Big[5$

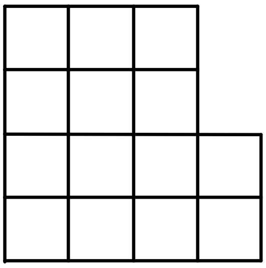


$+3$

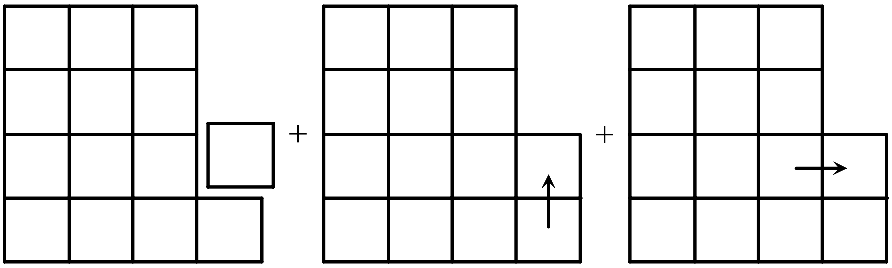


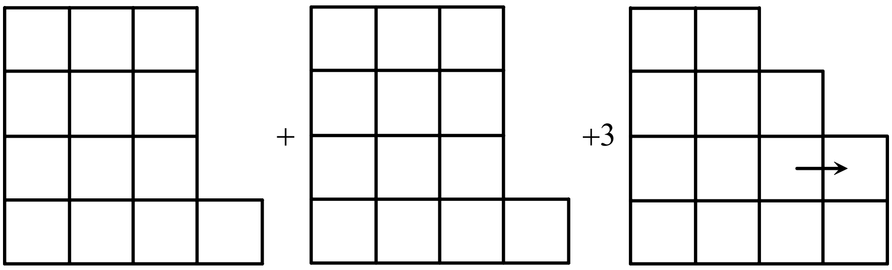
$\Big]=\frac{1}{3}\times936+8\times24=504$

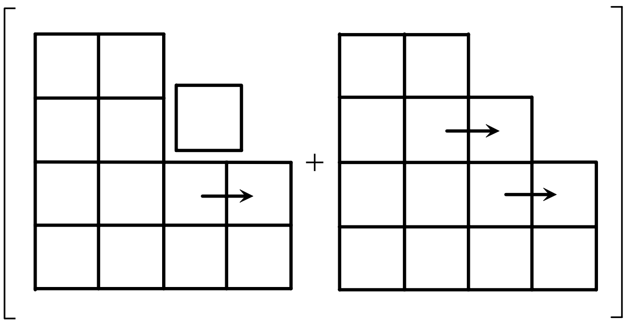
(十一) $T_{4\times3+2}$ ：

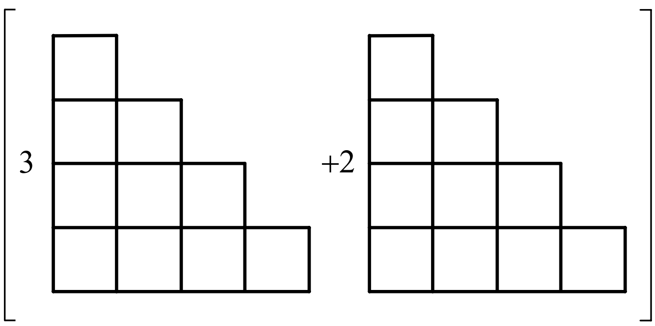


$T_{4\times3+2}$

$=$ 

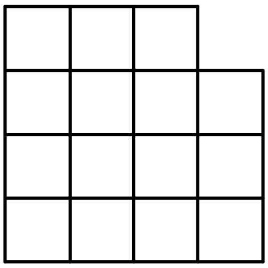
$=$ 

$=T_{4\times3+1}+T_{4\times3+1}+3$ 

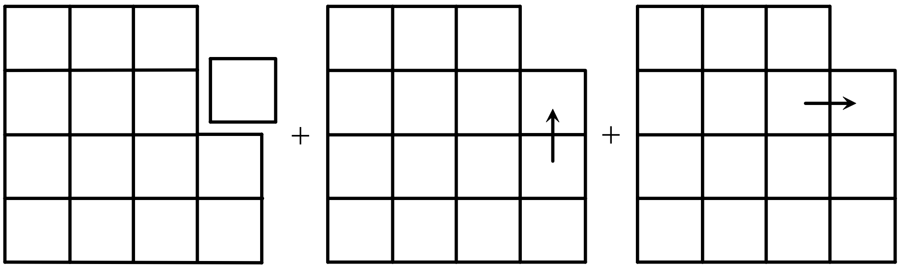
$=2T_{4\times3+1}+3$ 

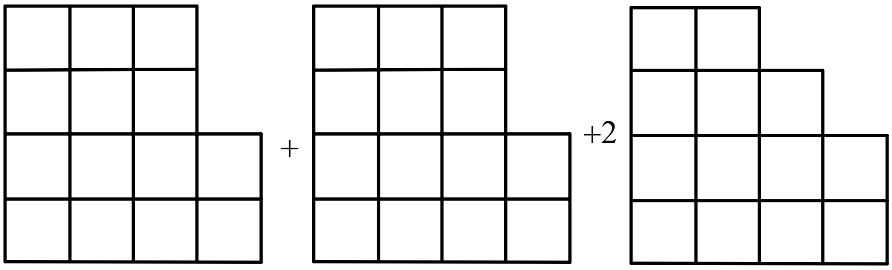
$=2\times12096+3\times5\times504=31752$

(十二) $T_{4\times3+3}$：



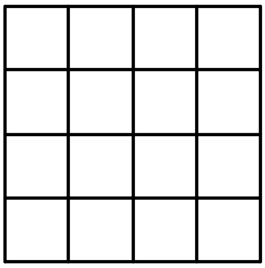
$T_{4\times3+3}$

$=$ 

$=$ 

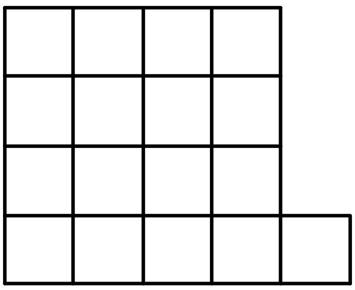
$$=T_{4\times3+2}+T_{4\times3+2}+2\times\frac{1}{3}T_{4\times3+2}=\frac{8}{3}T_{4\times3+2}=84672$$

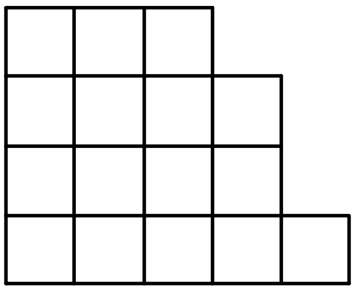
(十三) $T_{4\times4}$：

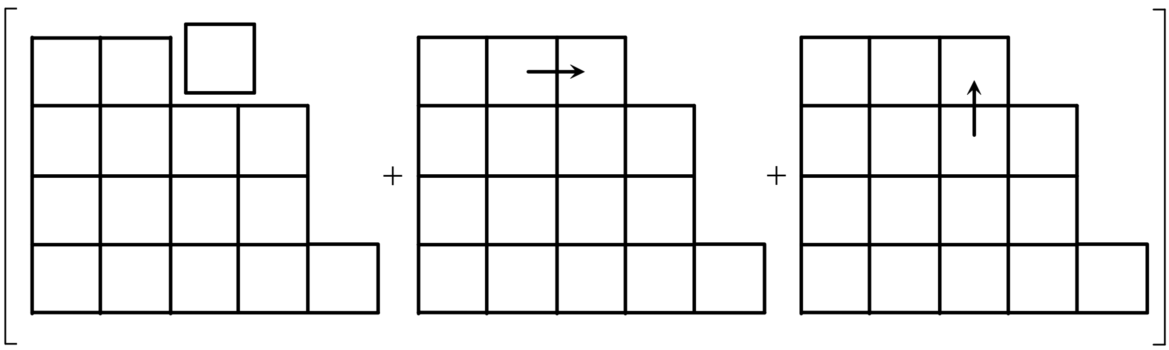


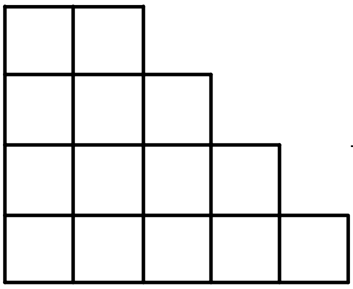
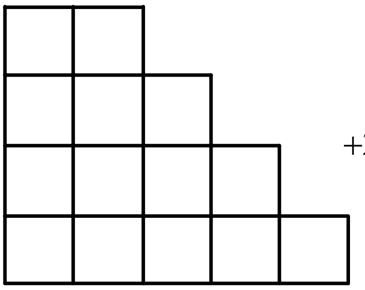
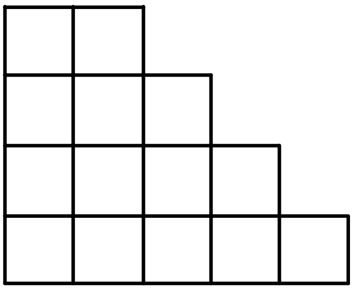
$T_{4\times4}=3T_{4\times3+3}=3\times84672=254016$

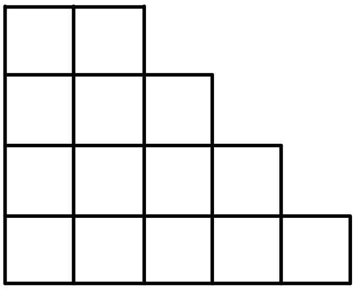
(十四) $T_{4\times4+1}$：

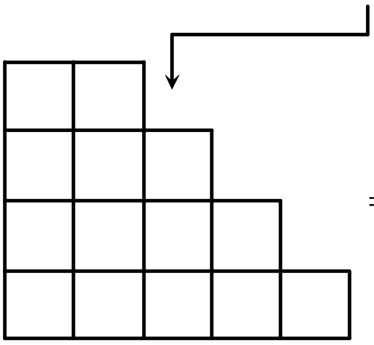
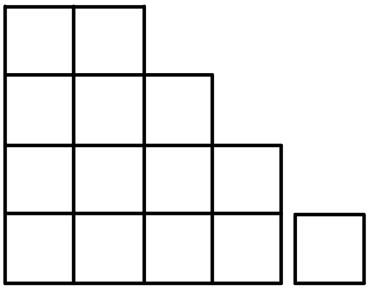
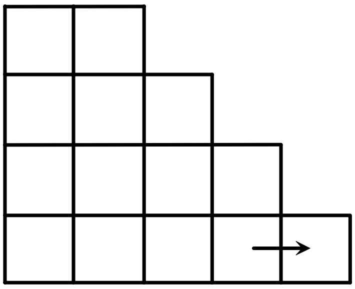


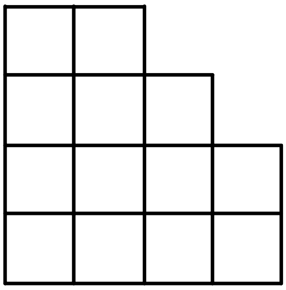
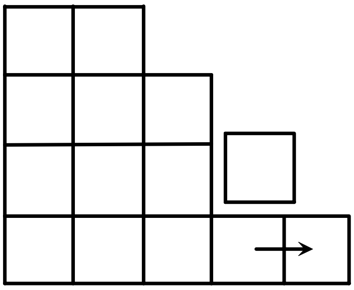
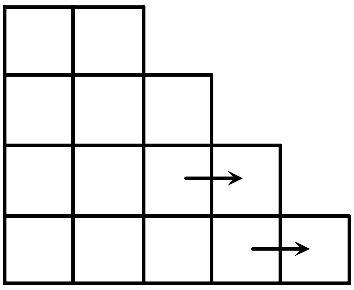
$T_{4\times4+1}=3$ 

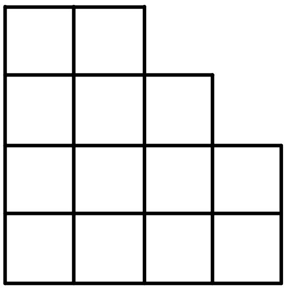
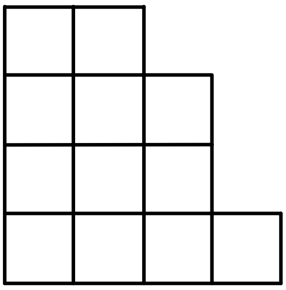
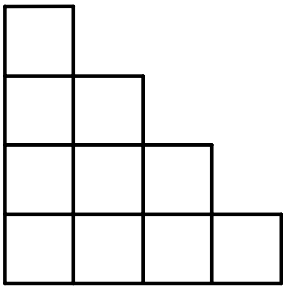
$=3$ 

= 3 [3  +3  +2 ]

$=3(3+3+2)$  $=3\times 8\times 17136=411264$

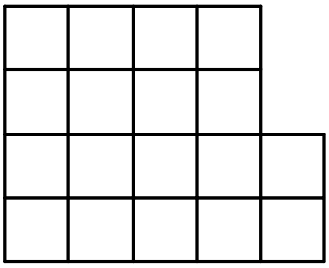
 =  + 

=  +  + 

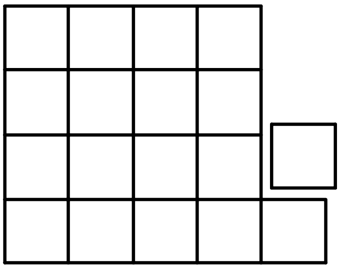
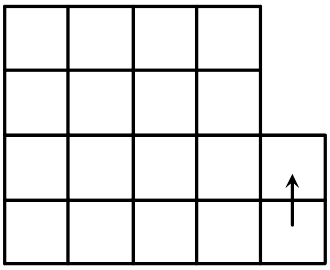
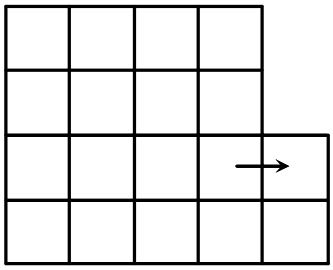
=  +  +5 

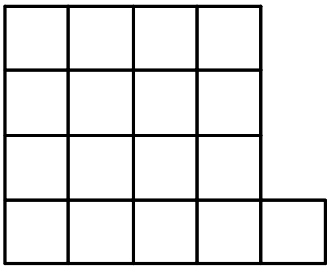
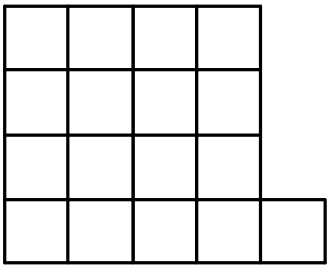
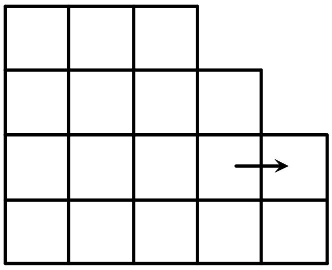
$$=\frac{1}{3}T_{4\times 3+2}+\frac{1}{3}T_{4\times 3+1}+5\times 504=\frac{1}{3}\times 31752+\frac{1}{3}\times 12096+2520=17136$$

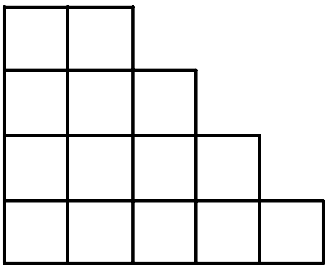
(十五) $T_{4\times4+2}$ ：



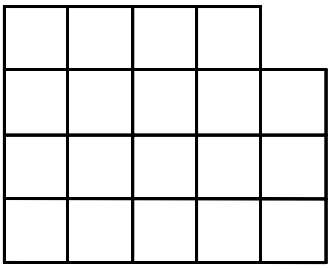
$T_{4\times4+2}$

$=$  $+$  $+$ 

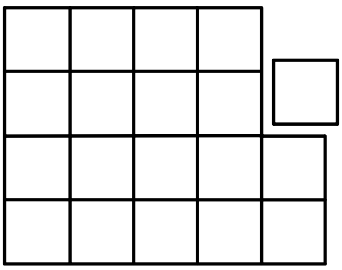
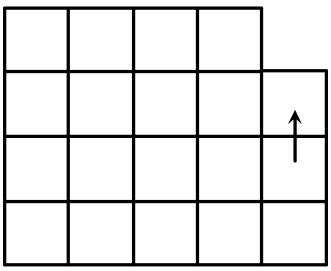
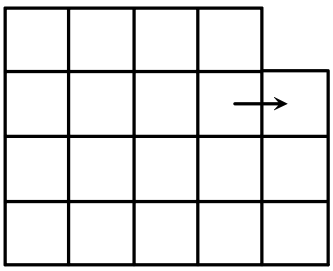
$=$  $+$  $+3$ 

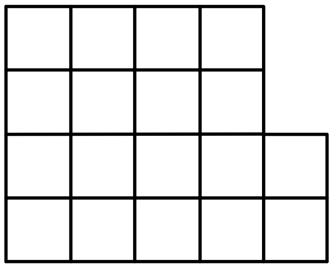
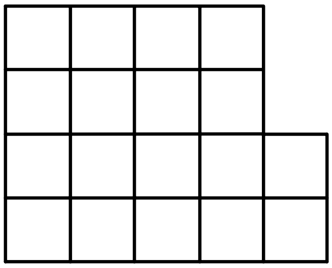
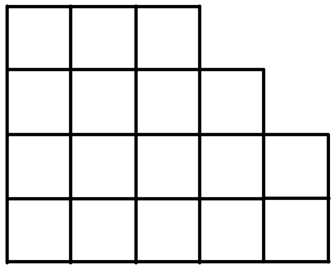
$= T_{4\times4+1} + T_{4\times4+1} + 3\times5$  $= 2\times411264 + 3\times5\times17136 = 1079568$

(十六) $T_{4\times4+3}$ ：



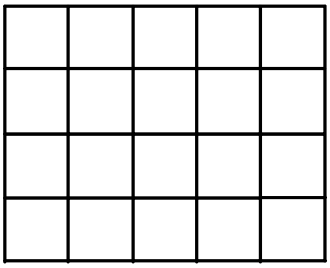
$T_{4\times4+3}$

$=$  $+$  $+$ 

$=$  $+$  $+2$ 

$$=T_{4\times4+2}+T_{4\times4+2}+2\times\frac{1}{3}T_{4\times4+2}=\frac{8}{3}T_{4\times4+2}=\frac{8}{3}\times1079568=2878848$$

(十七) $T_{4\times5}$：



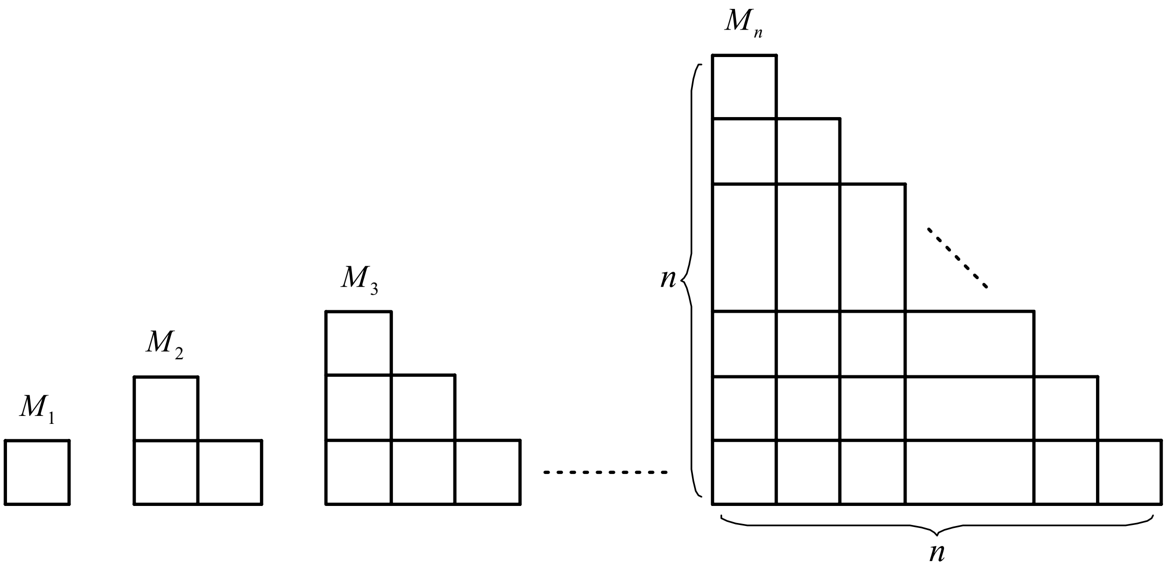
$T_{4\times5}=3T_{4\times4+3}=3\times2878848=8636544$

六、由二~五的演繹過程中，逐步發現其中的規律，以下就是研究過程：

(一) M_n：

1. 名詞解釋：

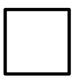
(1) M_n：將 n 層階梯格子完全覆蓋之〝蛇填充數〞，而所謂 n 層階梯格子為：



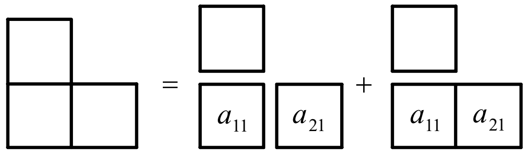
(2) a_{xy}：由左至右第 x 行，由下至上第 y 列之格子

(3) 費氏 $(Fibonacci)$ 數列 $<F_n>$：1，1，2，3，5，$\cdots$，它的遞迴關係為：$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，$n\geq1$

2. 證明：$M_n=F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2n}$，$n\geq1$

證明：M_1： $M_1=1=F_2$

M_2：



M_2 可由 M_1 加上 a_{12} 與 a_{21} 而得：

狀況甲：當 a_{11} 與 a_{21} 不相連時，a_{12} 可與 a_{11} 相連或不連

$\therefore$ 有 $(1+1)=2=F_3$ 種情形

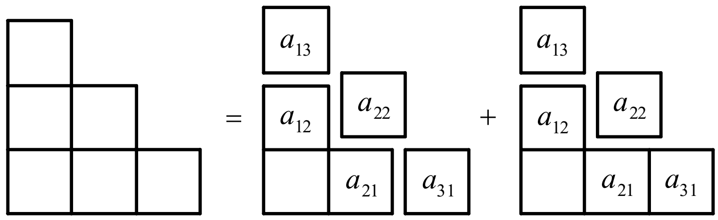
狀況乙：當 a_{11} 與 a_{21} 相連時，a_{12} 只可與 a_{11} 不相連

$\therefore$ 有 $1=F_2$ 種情形

又每一種情形之蛇填充數為 M_1

$\therefore M_2=(F_2+F_3)M_1=F_4M_1=F_2\times F_4$

M_3：



M_3 可由 M_2 加上 a_{13} 與 a_{22} 與 a_{31} 而得：

狀況甲：當 a_{21} 與 a_{31} 不相連時：

(a) a_{22} 與 a_{21} 相連，即 a_{12} 與 a_{22} 不相連即可視為與 M_2 之狀況甲相同

$\therefore$ 有 F_3 種情形

(b) a_{22} 與 a_{21} 不相連，則可視為由 a_{12} 加上 a_{13} 與 a_{22}，亦即與由 M_1 推得 M_2 之狀況相同

$\therefore$ 有 F_2+F_3 兩種情形

狀況乙：當 a_{21} 與 a_{31} 相連時，即 a_{22} 與 a_{21} 不相連，則可視為由 a_{12} 加上 a_{13} 與 a_{22}，亦即與 M_1 推得 M_2 之狀況相同

$\therefore$ 有 F_2+F_3 兩種情形

又每種情形之蛇填充數為 M_2

$\therefore M_3=\left[F_3+(F_2+F_3)\right]M_2+(F_2+F_3)M_2$

$=(F_3+F_4)M_2+F_4M_2=(F_5+F_4)M_2=F_2\times F_4\times F_6$

用數學歸納法證明其一般式($M_n=F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2n}$，$n\geq 1$)

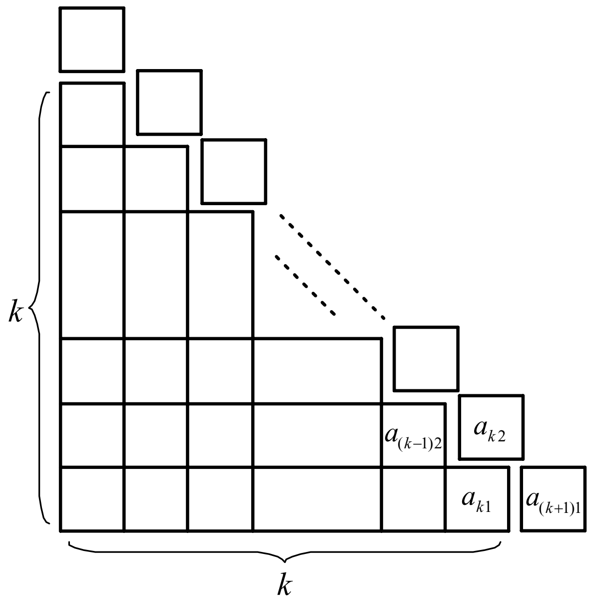
當 $n=1$ 時，$M_1=F_2$

假設 $\forall n\leq k$ 成立，即

$M_k=F_{2k-1}M_{k-1}+F_{2k-2}M_{k-1}=F_{2k}M_{k-1}=F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2k}$

則當 $n=k+1$ 時

左式 $=M_{k+1}$



狀況甲：當 $a_{(k+1)1}$ 與 a_{k1} 不相連時

(a)　a_{k2} 與 a_{k1} 相連，即 $a_{(k-1)2}$ 與 a_{k2} 不相連，可視為與 M_{k-1} 之狀況甲相同

∴有 F_{2k-1} 種情形

(b)　a_{k2} 與 a_{k1} 不相連，則與由 M_{k-1} 推得 M_k 之狀況相同

∴有 $(F_{2k-1}+F_{2k-2})$ 種情形

狀況乙：當 $a_{(k+1)1}$ 與 a_{k1} 相連時，即 a_{k2} 與 a_{k1} 不相連，則與由 M_{k-1} 推得 M_k 之狀況相同

∴有 $(F_{2k-1}+F_{2k-2})$ 種情形

又每種情形之蛇填充數為 M_k

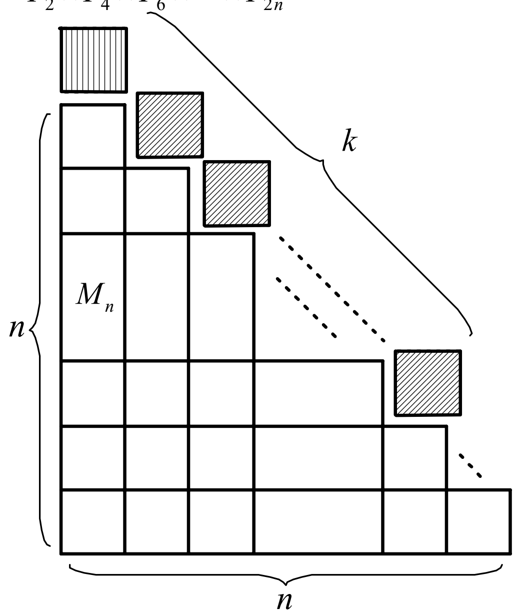
$$\begin{aligned}M_{k+1} &= \left[F_{2k-1}+(F_{2k-2}+F_{2k-1})\right]M_k+(F_{2k-2}+F_{2k-1})M_k \\ &= (F_{2k-1}+F_{2k})M_k+F_{2k}M_k=(F_{2k+1}+F_{2k})M_k \\ &= F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2k}\times F_{2k+2}\end{aligned}$$

∴由數學歸納法得證 $M_n=F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2n}$

(二)　A_k：

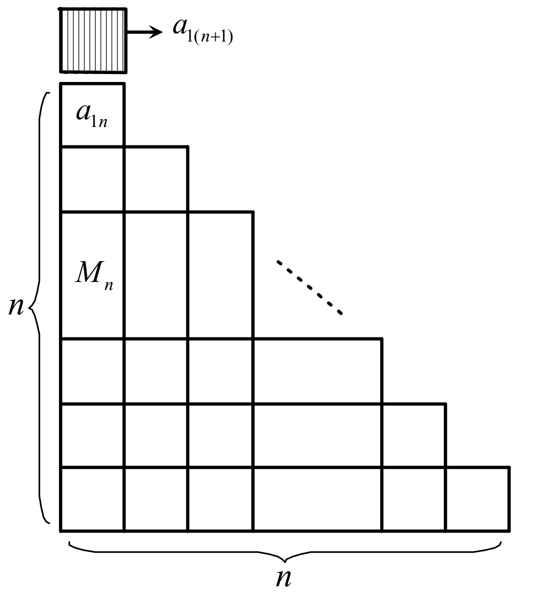
1. 名詞解釋：

A_k：在 n 層階梯格子上從第一列上方往右下增添 k 個方格數(如右圖)，且將此棋盤形格子完全覆蓋之〝蛇填充數〞。



2. 證明： $A_k = F_{2k+1}M_n$ ， $n \ge k \ge 1$

證明：當 $k=1$ 時，左式 $= A_1$



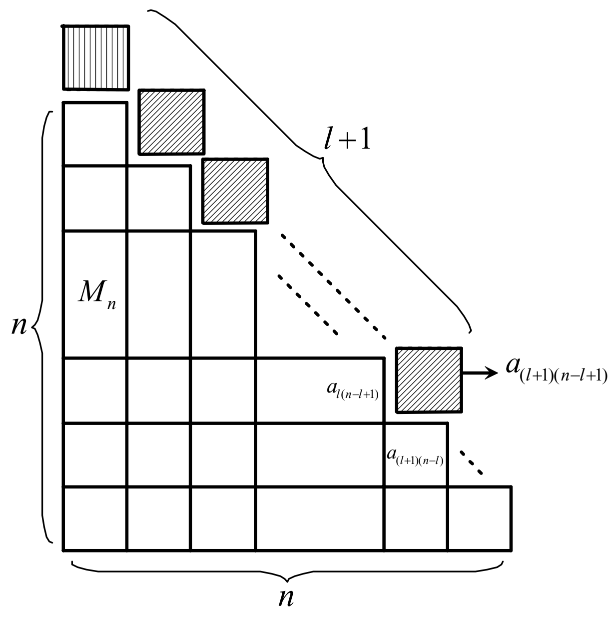
$A_1 = 2M_n = F_3 M_n$

$\therefore k=1$ 時成立

假設 $k=l$ 時成立，即 $A_l = F_{2l+1}M_n$

則當 $k=l+1$ 時

左式 $= A_{l+1}$



狀況甲： $a_{(l+1)(n-l)}$ 與 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 相連時，情況與 A_l 同，有 F_{2l+1} 種情形

狀況乙：當 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 完全不與其他相連時，則情況與 A_l 同，有 F_{2l+1} 種情形

狀況丙：當 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 與 $a_{l(n-l+1)}$ 相連時，則爲 A_l 扣掉 $a_{l(n-l+1)}$ 與 $a_{l(n-l+2)}$ 相連，有($F_{2l+1} - F_{2l-1}$)種情形

又每種情形之蛇填充數爲 M_n

$$
\begin{aligned}
A_{l+1} &= (3F_{2l+1} - F_{2l-1})M_n = (F_{2l+3} - F_{2l+3} + 3F_{2l+1} - F_{2l-1})M_n \\
&= \left[F_{2l+3} - (F_{2l+2} + F_{2l+1}) + 3F_{2l+1} - F_{2l-1}\right]M_n \\
&= \left[F_{2l+3} - (F_{2l+1} + F_{2l}) + 2F_{2l+1} - F_{2l-1}\right]M_n \\
&= \left[F_{2l+3} - (F_{2l-1} + F_{2l}) + F_{2l+1}\right]M_n = F_{2l+3}M_n
\end{aligned}
$$

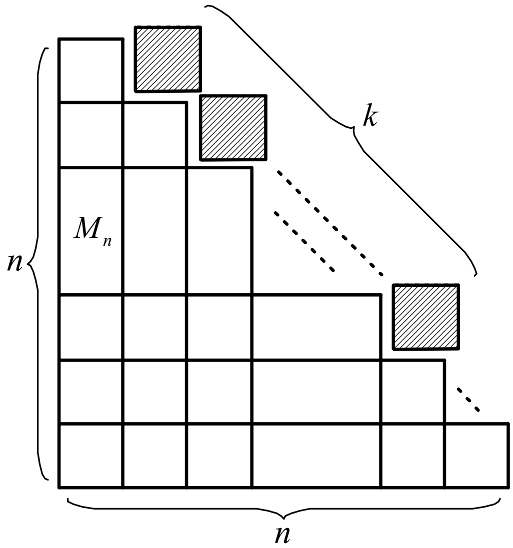
∴由數學歸納法得證 $A_k = F_{2k+1}M_n$ ， $n \ge k \ge 1$

3. 令 a_k 表示在 n 層階梯格子斜向增加 k 個格子($n \ge k \ge 1$)〔其中若 $k=1$，表示此格子不可與左方的格子相連(或左方沒有格子)；若 $k \ge 2$ ，表示左上方第一個格子不可與左方的格子相連(或左方沒有格子)，其他 $k-1$ 個格子與其他格子的關係則無限制。〕，將其完全覆蓋之蛇填充數與原來 n 層階梯格子的蛇填充數之倍數關係。由 2.可得 $a_k = F_{2k+1}$ 。

(三) B_k ：

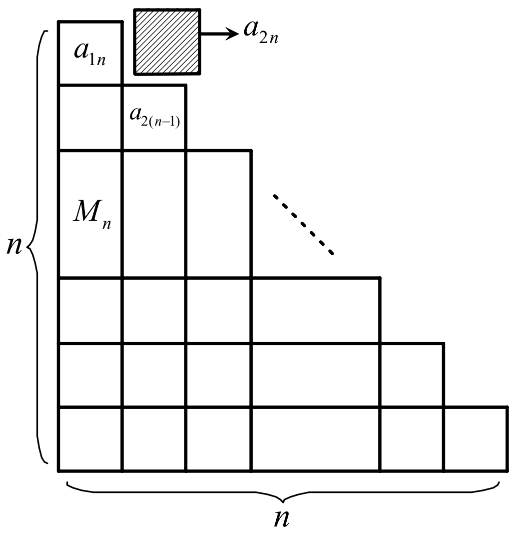
1. 名詞解釋：

B_k ：在 n 層階梯格子上從第二列上方往右下增添 k 個方格數(如右圖)，且將此棋盤形格子完全覆蓋之〝蛇填充數〞。



2. 證明： $B_k = F_{2k+2}M_n$ ， $n > k \ge 1$

證明：當 $k=1$時，左式$=B_1$



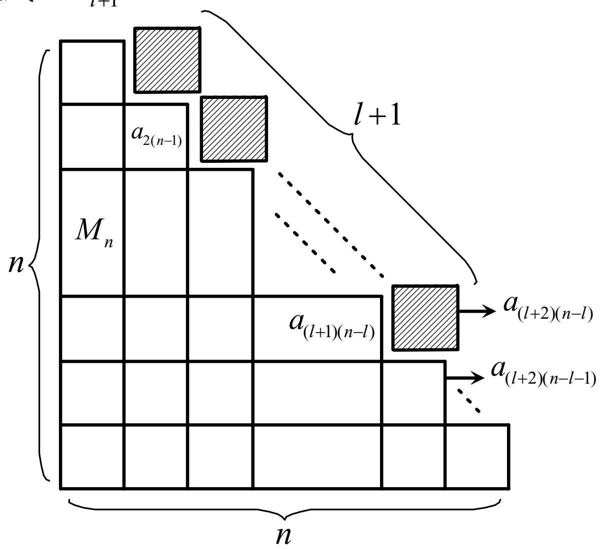
$B_1 = 3M_n = F_4M_n$

∴ $k=1$時成立

假設$k=l$時成立，即$B_l=F_{2l+2}M_n$

則當$k=l+1$時

左式$=B_{l+1}$



狀況甲：$a_{(l+2)(n-l-1)}$與$a_{(l+2)(n-l)}$相連時，情況與B_l同，有F_{2l+2}種情形

狀況乙：當$a_{(l+2)(n-l)}$完全不與其他相連時，情況與B_l同，有F_{2l+2}種情形

狀況丙：當$a_{(l+2)(n-l)}$與$a_{(l+1)(n-l)}$相連時，則爲B_l扣掉$a_{(l+1)(n-l)}$與$a_{(l+1)(n-l+1)}$相連，有($F_{2l+2}-F_{2l}$)種情形

又每種情形之蛇填充數爲M_n

$\therefore\ B_{l+1}=(3F_{2l+2}-F_{2l})M_n=F_{2l+4}M_n$

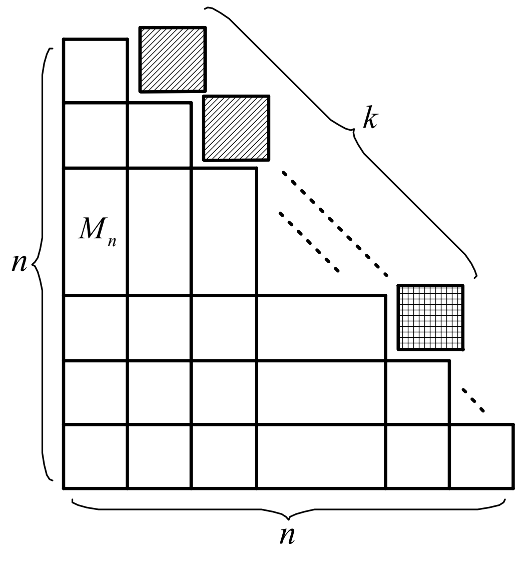
$\therefore$由數學歸納法得證$B_k=F_{2k+2}M_n$，$n>k\geq 1$

3. 令b_k表示在n層階梯格子斜向增加k個格子($n>k\geq 1$)〔其中此k個格子與其他格子的關係並無限制〕，將其完全覆蓋之蛇填充數與原來n層階梯格子的蛇填充數之倍數關係。由 2.可得$b_k=F_{2k+2}$。

(四) C_k：

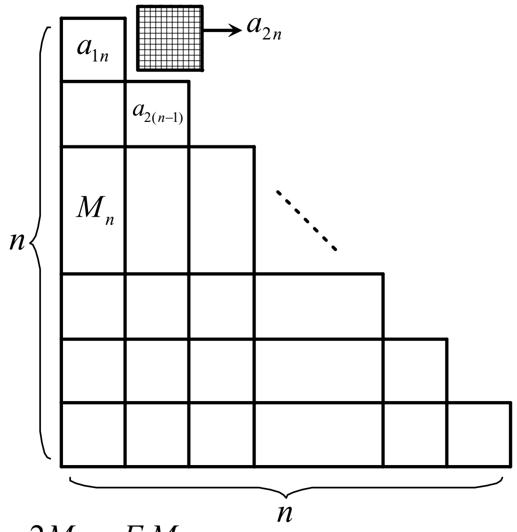
1. 名詞解釋：

C_k：在n層階梯格子上從第二列上方往右下增添k個方格數(如右圖)，但於右下最後增添的方格子不可與下方格子相連，如此將此棋盤形格子完全覆蓋之〝蛇填充數〞稱之爲C_k。



2. 證明：$C_k = F_{2k+1}M_n$ ，$n \ge k \ge 1$

證明：當$k=1$時，左式$=C_1$



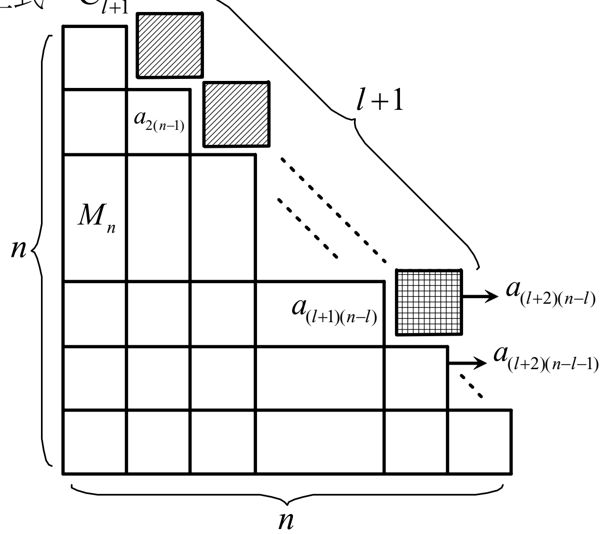
$C_1 = 2M_n = F_3 M_n$

$\therefore k=1$時成立

假設$k=l$時成立，即$C_l = F_{2l+1}M_n$

則當$k=l+1$時

左式$=C_{l+1}$



狀況甲：當$a_{(l+2)(n-l)}$完全不與其他相連時，情況與B_l同，有F_{2l+2}種情形

狀況乙：當$a_{(l+2)(n-l)}$與$a_{(l+1)(n-l)}$相連時，情況與C_l同，有F_{2l+1}種情形

又每種情形之蛇填充數爲M_n

$\therefore C_{l+1} = (F_{2l+2} + F_{2l+1})M_n = F_{2l+3}M_n$

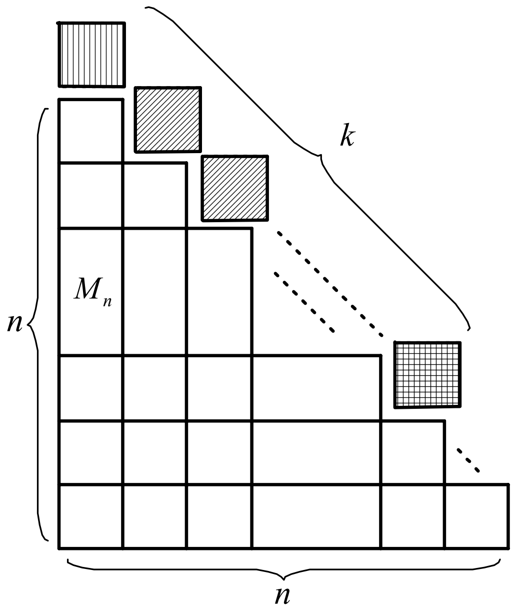
$\therefore$由數學歸納法得證$C_k = F_{2k+1}M_n$ ，$n \ge k \ge 1$

3. 令c_k表示在n層階梯格子斜向增加k個格子($n \ge k \ge 1$)〔其中若$k=1$，表示此格子不可與下方的格子相連(或下方沒有格子)；若$k \ge 2$ ，表示右下方最後一個格子不可與下方的格子相連(或下方沒有格子)，其他$k-1$個格子與其他格子的關係則無限制。〕，將其完全覆蓋之蛇填充數與原來n層階梯格子的蛇填充數之倍數關係。由 2.可得$c_k = F_{2k+1}$ 。

(五) D_k：

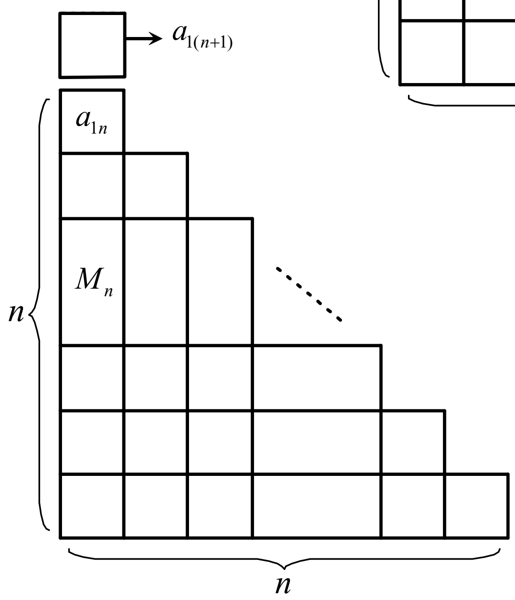
1. 名詞解釋：

D_k：在n層階梯格子上從第一列上方往右下增添k個方格數(如右圖)，但於右下最後增添的方格子不可與下方格子相連，如此將此棋盤形格子完全覆蓋之〝蛇填充數〞稱之為D_k。



2. 證明：$D_k = F_{2k}M_n$，$n+1 \geq k \geq 1$

證明：當$k=1$時，左式$=D_1$



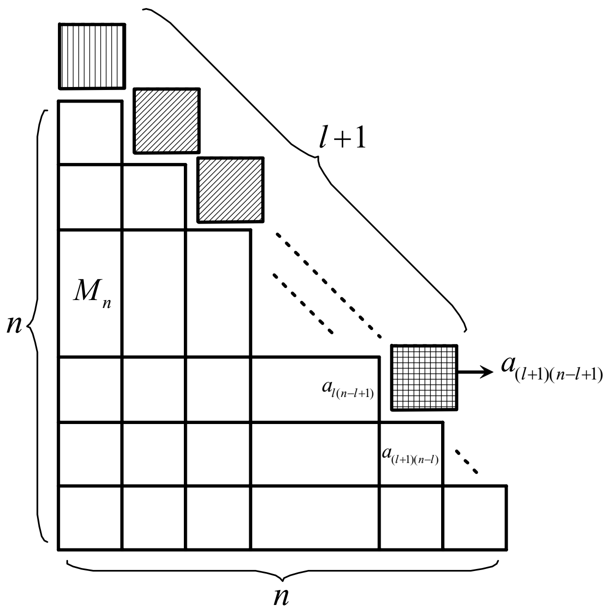
$D_1 = M_n = F_2 M_n$

$\therefore k=1$時成立

假設$k=l$時成立，即$D_l = F_{2l}M_n$

則當$k=l+1$時

左式$=D_{l+1}$



狀況甲：當 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 完全不與其他相連時，則情況與 A_l 同，有 F_{2l+1} 種情形

狀況乙：當 $a_{(l+1)(n-l+1)}$ 與 $a_{l(n-l+1)}$ 相連時，則情況與 D_l 同，有 F_{2l} 種情形

又每種情形之蛇塡充數爲 M_n

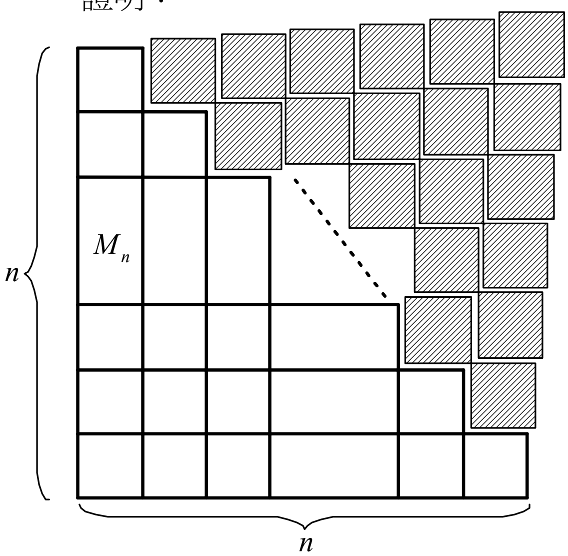
$\therefore D_l=(F_{2l+1}+F_{2l})M_n=F_{2l+2}M_n$

$\therefore$由數學歸納法得證 $D_k=F_{2k}M_n$ ， $n+1\ge k\ge 1$

3. 令 d_k 表示在 n 層階梯格子斜向增加 k 個格子($n+1\ge k\ge 1$)〔其中若 $k=1$ ，表示此格子不可與左方的格子相連(或左方沒有格子)且不可與下方的格子相連(或下方沒有格子)；若 $k\ge 2$ ，表示左上方第一個格子不可與左方的格子相連(或左方沒有格子)，右下方最後一個格子不可與下方的格子相連(或下方沒有格子)，其他 $k-2$ 個格子與其他格子的關係則無限制。〕，將其完全覆蓋之蛇塡充數與原來 n 層階梯格子的蛇塡充數之倍數關係。由 2.可得 $d_k=F_{2k}$ 。

(六) 證明： $T_{n\times n}=(M_n)^2=(F_2\times F_4\times F_6\times\cdots\times F_{2n})^2$ ， $n\ge 1$

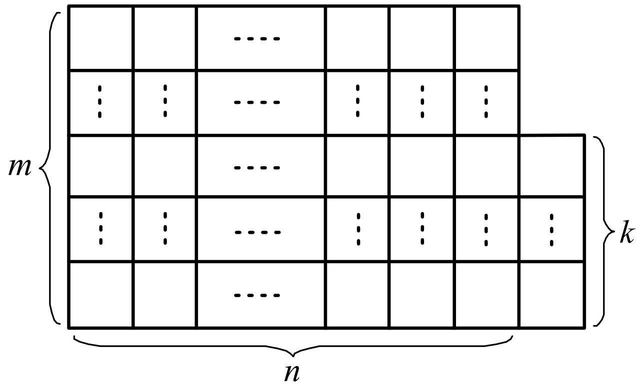
證明：



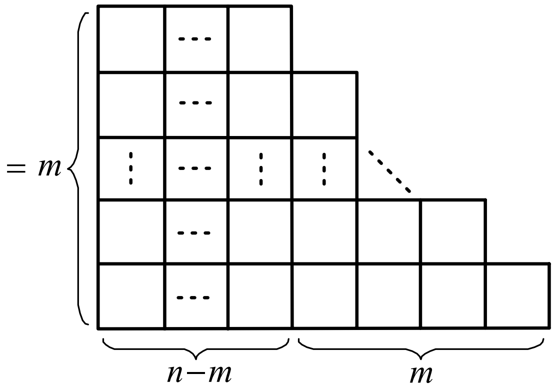
$$\begin{aligned}T_{n\times n}&=M_n(B_{n-1}B_{n-2}B_{n-3}\times\cdots\times B_1)\\&=M_n(F_{2n}F_{2n-2}F_{2n-4}\times\cdots\times F_4)\\&=(M_n)^2=(F_4F_6F_8\times\cdots\times F_{2n})^2\end{aligned}$$

(七) 證明：

證明：1. $T_{m\times n+k}=c_mT_{m\times(n-1)+k}=F_{2k+1}T_{m\times(n-1)+k}$ ， $n>m>k\ge 1$



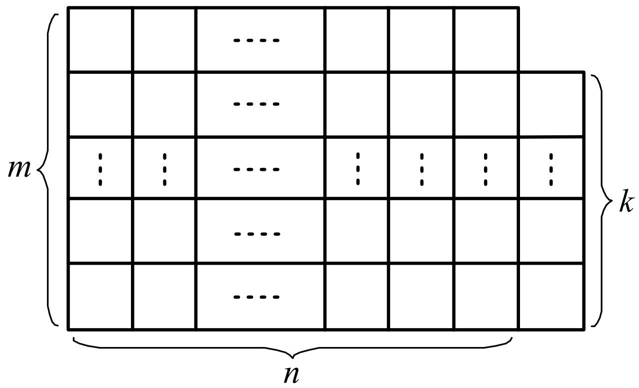
$T_{m\times n+k}$



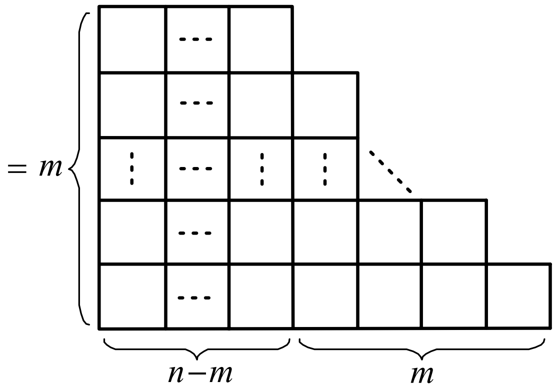
$\times c_m b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_{m-k+2} b_{m-k+1} \times b_{m-k-1} b_{m-k-2} \cdots b_2 b_1$

$= c_m T_{m\times(n-1)+k}$

1. $T_{m\times n+k} = c_m T_{m\times(n-1)+k} = F_{2k+1} T_{m\times(n-1)+k}$ ， $n > m = k+1 \ge 2$



$T_{m\times n+k}$



$\times c_m b_{m-1} b_{m-2} \cdots b_{m-k+2} b_{m-k+1} \times b_{m-k-1} b_{m-k-2} \cdots b_3 b_2$

$= c_m T_{m\times(n-1)+k}$

綜合 1.2.可得 $T_{m\times n+k} = c_m T_{m\times(n-1)+k} = F_{2k+1} T_{m\times(n-1)+k}$ ， $n > m > k \ge 1$

(八) 證明： $T_{m\times(m+1)} = c_m T_{m\times m} = F_{2m+1} T_{m\times m}$ ， $m \ge 1$

證明： $T_{m\times(m+1)} = M_m(c_m b_{m-1} b_{m-2} b_{m-3} \times \cdots \times b_1)$

$= c_m \times M_m(b_{m-1} b_{m-2} b_{m-3} \times \cdots \times b_1)$

$= c_m T_{m\times m} = F_{2m+1} T_{m\times m}$

(九) 證明： $T_{m\times n} = (c_m)^{n-m} T_{m\times m} = (F_{2m+1})^{n-m} T_{m\times m}$ ， $n > m \ge 1$

證明： $\because T_{m\times(m+1)} = c_m T_{m\times m} = F_{2m+1} T_{m\times m}$

$\therefore T_{m\times n} = c_m T_{m\times(n-1)} = c_m \times c_m T_{m\times(n-2)} = c_m \times c_m \times c_m T_{m\times(n-3)}$

$$= \cdots = (c_m)^{n-m} T_{m\times m} = (F_{2m+1})^{n-m} T_{m\times m}$$

(十) 同理欲證明：$T_{(m+1)\times m} = c_m T_{m\times m} = F_{2m+1} T_{m\times m}$ ，$m \ge 1$，

或 $T_{m\times n} = (c_n)^{m-n} T_{n\times n} = (F_{2n+1})^{m-n} T_{n\times n}$ ，$m > n \ge 1$，
可以利用圖形與(八)(九)情況對稱直線 $y = x$ 得證。

肆、 研究結果：

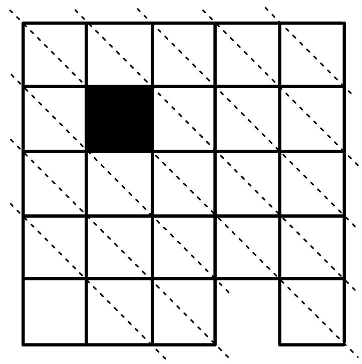
一、一開始欲用遞迴關係以及利用 *Visual Basic* 軟體(如附件)來驗證答案，但用紙筆算到 $T_{5\times 6} = 68387457600$ 時，發覺欲以電腦程式來驗證答案結果，卻花了很長的時間。我們改變一開始利用一個一個格子向上堆疊求取蛇填充數的方法，使用了一次斜向增加一至數個格子的方法(a_k ，b_k ，c_k ，d_k)，來求出蛇填充數。

二、棋盤格子形如：$T_{m\times n}$ ，$T_{m\times n+k}$ ，M_n ，A_k ，B_k ，C_k ，D_k 的蛇填充數均可表爲一些<u>費氏</u>(*Fibonacci*)數列中某些項的乘積。

伍、 討論：

一、若是棋盤不規則或有挖洞，亦可用 a_k ，b_k ，c_k ，d_k 求出答案。例如：

(一)

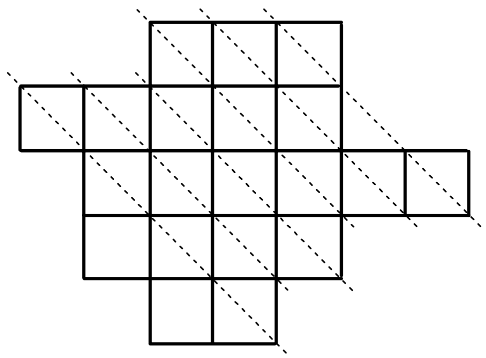


蛇填充數

$= 1\times d_2 \times d_3 \times a_3 \times (a_1 c_2 d_1) \times (c_1 a_3) \times b_3 \times b_2 \times b_1$

$= F_4 F_6 F_7 F_3 F_5 F_2 F_3 F_7 F_8 F_6 F_4 = 40884480$

(二)

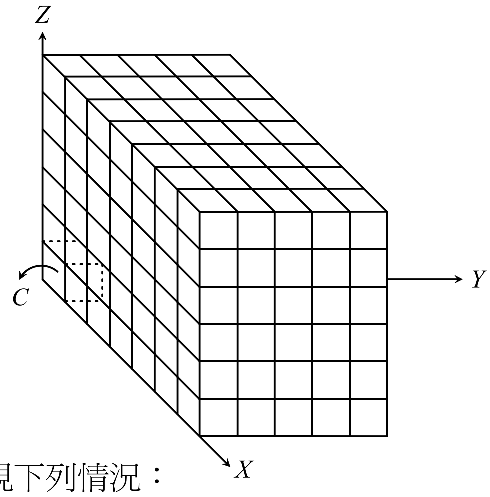


蛇填充數

$= 1\times (d_1 d_3) \times b_3 \times c_3 \times a_3 \times c_3 \times (b_1 c_1)$

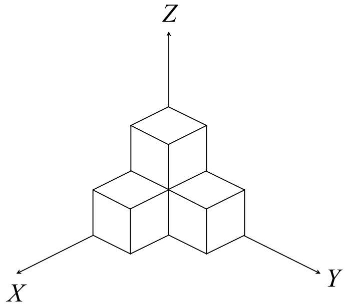
$= F_2 F_6 F_8 F_7 F_7 F_7 F_4 F_3 = 2214576$

二、若將平面棋盤形格子轉換成空間空格，如右圖，規則爲蛇由 C 格出發，但蛇的走法只能往 X 軸正向，Y 軸正向，Z 軸正向，或停住。若此蛇已停住，將由另一條蛇來走，且不同蛇走過之格子不可重疊，求將此空間空格完全覆蓋的方法數。

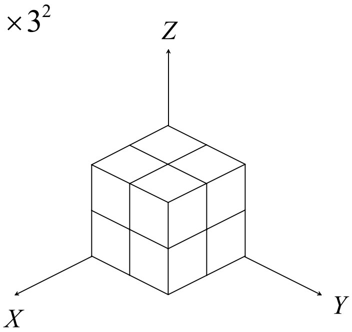


(一) 仿照平面棋盤形格子的做法，我們發現下列情況：

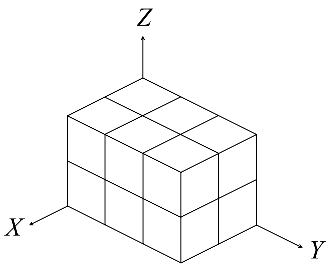
1. 蛇填充數爲 $4 = 2^2$



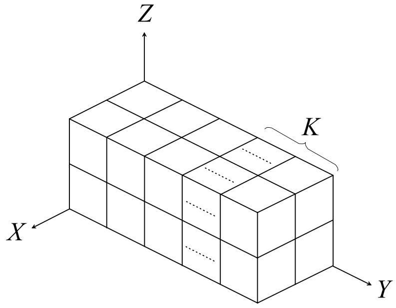
2. 蛇填充數爲 $288 = 2^5 \times 3^2$



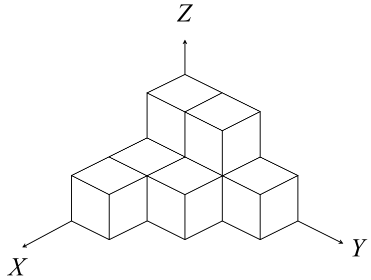
3. 蛇填充數爲 $10816 = 2^6 \times 13^2$



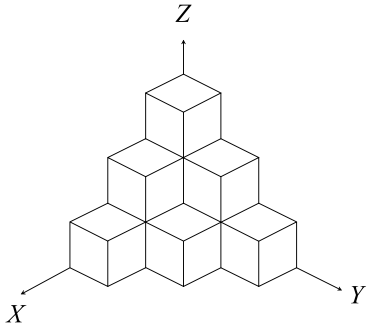
4. 蛇填充數爲 $2^6 \times 13^2 \times (2 \times 19)^K$ ，於此〝不爲〞費氏(*Fibonacci*)數列中某幾項的乘積



5. 蛇填充數爲 $76 = 2^2 \times 19$ ，於此〝不爲〞<u>費氏</u>$(Fibonacci)$ 數列中某幾項的乘積



6. 蛇填充數爲 $208 = 2^4 \times 13$



(二) 於上的討論可知，空間中的蛇填充數並不像平面棋盤形格子般與<u>費氏</u>$(Fibonacci)$ 數列中某項的乘積有關，但由(一)中之 3.4.卻又發現彼此間的關聯，而這正是我們未來研究的方向：

1. 能否找到數學模式來呈現彼此的關係。
2. 能否限制某些條件後，就與<u>費氏</u>$(Fibonacci)$ 數列有關。

陸、 結論：

棋盤格子形如：$T_{m\times n}$ ，$T_{m\times n+k}$ ，M_n ，A_k ，B_k ，C_k ，D_k 的蛇填充數均可表爲一些<u>費氏</u>$(Fibonacci)$ 數列中某幾項的乘積。

一、棋盤格子 $M_n = F_2 \times F_4 \times F_6 \times \cdots \times F_{2n}$ ，$n \ge 1$ 。

二、棋盤格子 $T_{n\times n} = (F_2 \times F_4 \times F_6 \times \cdots \times F_{2n})^2$ ，$n \ge 1$ 。

三、棋盤格子 $A_k = a_k M_n = F_{2k+1} M_n$ ，$n \ge k \ge 1$ 。

四、棋盤格子 $B_k = b_k M_n = F_{2k+2} M_n$ ，$n > k \ge 1$ 。

五、棋盤格子 $C_k = c_k M_n = F_{2k+1} M_n$ ，$n \ge k \ge 1$ 。

六、棋盤格子 $D_k = d_k M_n = F_{2k} M_n$ ，$n+1 \ge k \ge 1$ 。

七、棋盤格子 $T_{m\times n+k} = c_m T_{m\times(n-1)+k} = F_{2m+1} T_{m\times(n-1)+k}$ ，$n > m > k \ge 1$ 。

八、棋盤格子 $T_{m\times(m+1)} = T_{(m+1)\times m} = c_m T_{m\times m} = F_{2m+1} T_{m\times m}$ ，$m \ge 1$ 。

九、棋盤格子 $T_{m\times n} = T_{n\times m} = (c_m)^{n-m} T_{m\times m} = (F_{2m+1})^{n-m} (F_2 \times F_4 \times F_6 \times \cdots \times F_{2m})^2$ ，$n > m \ge 1$ 。

柒、參考文獻：

一、Richard Stanley. (2004) Snakes on a chessboard. Retrieved from http://www.mathlinks.ro/Forum/viewtopic.php?highlight=chessboard+snake&t=16856

二、Richard Stanley. (2003) The Art of Counting. Retrieved from http://ocw.mit.edu/OcwWeb/Mathematics/18-S66The-Art-of-CountingSpring2003/CourseHome/

捌、附件：

一、平面棋盤形格子（*Visual Basic* 程式碼）

```
Dim box(100), dir(100), locus(1000), m, n, a As Integer
Dim b, s, c, l, k(100) As Integer
Dim sum As Long
Private Sub Command1_Click()
Command1.Enabled = False
m = Val(Text1.Text)
n = Val(Text2.Text)
a = 0 '變數初始化
b = 0
c = 0
l = 0
sum = 0
For s = 0 To m * n - 1
box(s) = 0
dir(s) = 0
locus(s) = 0
k(s) = 0
Next s
For s = 0 To 8
If Text4(s).Text <> "" And Val(Text4(s).Text) > 0 And Val(Text4(s).Text) <= m * n - 1 Then box(Val(Text4(s).Text)) = 2
Next s
Call arrow
Text3.Text = sum
Command1.Enabled = True
End Sub
Sub arrow()
step1:
dir(a) = dir(a) + 1
Select Case dir(a)
Case 1 '停留
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    l = l + 1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
step2:
    b = b + 1
    If b = m * n Then
        sum = sum + 1
        c = c - 1
        b = locus(c)
        a = b
        GoTo step1
    End If
    If box(b) <> 0 Then GoTo step2
    a = b
    GoTo step1
Case 2 '向上走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    If a >= m * n - n Then GoTo step1
    If box(a + n) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + n
    GoTo step1
Case 3 '向右走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    If (a + 1) Mod n = 0 Then GoTo step1
    If box(a + 1) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + 1
    GoTo step1
Case 4 '無路可走，回到上一格
    If a = 0 Then Exit Sub
    c = c - 1
    l = l - 1
    b = k(l)
    box(a) = 0
    dir(a) = 0
    a = locus(c)
    GoTo step1
End Select
End Sub
```

A:當下執行動作的格子。
B:檢查格子是否空白，當循環到最後一格不空白，代表此方法結束。
C:用來當執行到第幾步驟，當此步驟的格子執行完動作則回到上一步驟。
K:代表格子連成的線的第一格。
Box:格子所成的陣列。
Dir:下一格的方向，有停留、往上、往右三種。
Locus:格子連線所成的軌跡。

二、 空間狀況（*Visual Basic* 程式碼）

```
Dim box(100), dir(100), locus(1000), m, n, a As Integer
Dim b, s, c, l, k(100), space(30), z, i As Integer
Dim sum As Currency
Private Sub Command1_Click()
Command1.Enabled = False
m = Val(Text1.Text)
n = Val(Text2.Text)
z = Val(Text7.Text)
a = 0 '變數初始化
b = 0
c = 0
l = 0
sum = 0
For s = 0 To m * n * z - 1
box(s) = 0
dir(s) = 0
locus(s) = 0
k(s) = 0
Next s
Text6.Text = ""
For s = 0 To i
If space(s) > 1 And space(s) <= m * n * z - 1 Then
    box(space(s)) = 2
    Text6.Text = Text6.Text & space(s) & " "
End If
Next s
Call arrow
Text3.Text = sum
Command1.Enabled = True
Call Form_Load
End Sub
Sub arrow()
step1:
dir(a) = dir(a) + 1
Select Case dir(a)
Case 1 '停留
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    l = l + 1
    box(a) = 1
locus(c) = a
    c = c + 1
step2:
    b = b + 1
    If b = m * n * z Then
        sum = sum + 1
        c = c - 1
        b = locus(c)
        a = b
        GoTo step1
    End If
    If box(b) <> 0 Then GoTo step2
    a = b
    GoTo step1
Case 2 '向前走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    s = a \ (m * n) + 1
    If a >= m * n * s - n Then GoTo step1
    If box(a + n) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + n
    GoTo step1
Case 3 '向右走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    If (a + 1) Mod n = 0 Then GoTo step1
    If box(a + 1) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + 1
GoTo step1
Case 4 '向上走
    If a <= k(l) Then k(l) = a
    If a >= m * n * (z - 1) Then GoTo step1
    If box(a + m * n) <> 0 Then GoTo step1
    box(a) = 1
    locus(c) = a
    c = c + 1
    a = a + m * n
    GoTo step1
Case 5 '無路可走，回到上一格
    If a = 0 Then Exit Sub
    c = c - 1
    l = l - 1
    b = k(l)
    box(a) = 0
    dir(a) = 0
    a = locus(c)
    GoTo step1
End Select
End Sub

Private Sub Command2_Click()
If Val(Text4.Text) <= 0 Then Exit Sub
space(i) = Val(Text4.Text)
i = i + 1
End Sub

Private Sub Form_Load()
i = 0
For s = 0 To 30
space(s) = 0
Next s
End Sub
```

評語

題目活潑生動有趣，爲一良好的科展題材。