

臺灣二〇〇七年國際科學展覽會

科 別：數學

作 品 名 稱：四面體體積平分面的包絡方程探討

得 獎 獎 項：佳作

學校 / 作者：國立臺中第一高級中學
國立臺中第一高級中學

劉修源
魏翊書

作者簡介



劉修源

在高二上時，一次和同學偶然的聊天讓我重新發掘到 $y = f(x)$ 的意義，頓時覺得那是最偉大的句子。而早在小學時，用 \square 代表欲求的數來求解也讓我見識了數學的威力。因此我對這一群可愛的式子有著一份特殊的情感；進一步地，想去活用他們，從他們之中汲取知識。

平時的我不常找練習的題目，所以考試中常常有未見過的。每次我都當成是一種挑戰，而冥冥中所學及挑戰成功的興奮，是無法言狀的。

這一次的研究，有挑戰、有興奮、有學習。挑戰的是，觀念及處理複雜的能力；興奮的是，漂亮的小小成果；學習的是，那些最小的紙上老師所要告訴我的最大的理論。

作者簡介



魏翊書

我就讀國立臺中第一高級中學數理資優班，今年高二，從小學開始，我就深深迷上了自然科學的簡潔卻又精確。升上高中後，我得以透過更多元方便的管道，好好充實自己的科學內涵，因此我決定選一個專題，好好研究，讓自己更親近這塊領域。在研究這份作品的過程中，我才真正領悟了它帶給人類的成就感和吸引力，同時也體認自己的不足，往後仍須繼續努力，好好珍惜這個在我一生中扮演重要角色的良師益友。

摘要

剛開始考慮平分物件時，我們從二維的多邊形部分著手，後來發現已經有人做過相關研究，並且得到類似的結論。這個部份顯現出面積平分線與其包絡曲線間的密切關係。我們將其中的方法和結果加以歸納、改善，爲了更全面地研究，我們推導出一般性的包絡方程。之後當我們推廣到三維領域時，發現四面體體積平分面與之前的結論有些相似之處，平分的情況卻也更複雜，我們將推導的結果用電腦軟體呈現出來，以便更深入地了解它。最後嘗試了相當抽象的高維積平分，結果仍具有工整的對稱性，讓我們充分領略了數學之美！

Abstract

When considering bisecting a subject, at first we focused our attention on 2-D case, polygons. But afterwards, we found there were already some similar studies conducted by other students, which indicated the close relation between the area-bisecting lines of a polygon and their envelope. We rearranged their methods and results, and then made further improvement. Moreover, in order to study the bisecting problem entirely, we derived the general envelope equation. Then when extending the generalization to the 3-D case, we came to the conclusion that tetrahedrons' volume-bisecting planes is similar to that in 2-D, but the circumstances are more complex. We tried to show our result with the aid of software, hoping to understand it fully. Finally, we tried to do the case in higher dimension, which is very abstract, and the result was clear-cut symmetrical. During the studying process, we had seen "the beauty of mathematics."

目錄

壹、研究動機	3
貳、研究目的	3
參、研究器材及設備	3
肆、研究過程及方法	4
一、符號定義	4
二、名詞定義	4
三、相關研究-平面上的多邊形面積平分	5
四、包絡線、包絡面及包絡方程	6
五、座標變換	9
六、四面體之體積平分	10
(一)嘗試	10
(二)猜想	11
(三)四面體平分曲面方程式的推導	11
1. 1-3 分平分曲面的推導	12
2. 2-2 分平分曲面的推導	13
(四)四面體平分曲面繪圖	14
(五)四面體平分曲面的性質研究	16
1. 比對推導出的曲面是否符合猜想中的性質	16
2. 相關研究中陳和平先生提出之特殊解研究	17
3. 平分曲面的邊界	19
4. 有無辦法消去 2-2 分平分曲面中的參數？	20
七、 n 維標準物件之 $1-n$ 分平分曲面	23
(一)高維物件與高維積	23
(二) S_n 的 $1-n$ 分平分方程	24
伍、結論	26
陸、參考文獻	26
柒、附錄	28
一、平面上之作圖	28
二、包絡方程中用到的引理	31
三、直四面體之 2-2 分平分曲面參數式	37
四、Maple 指令	38
五、Lagrange 乘數解包絡方程式	40
六、凸多面體的平分	43

壹、研究動機

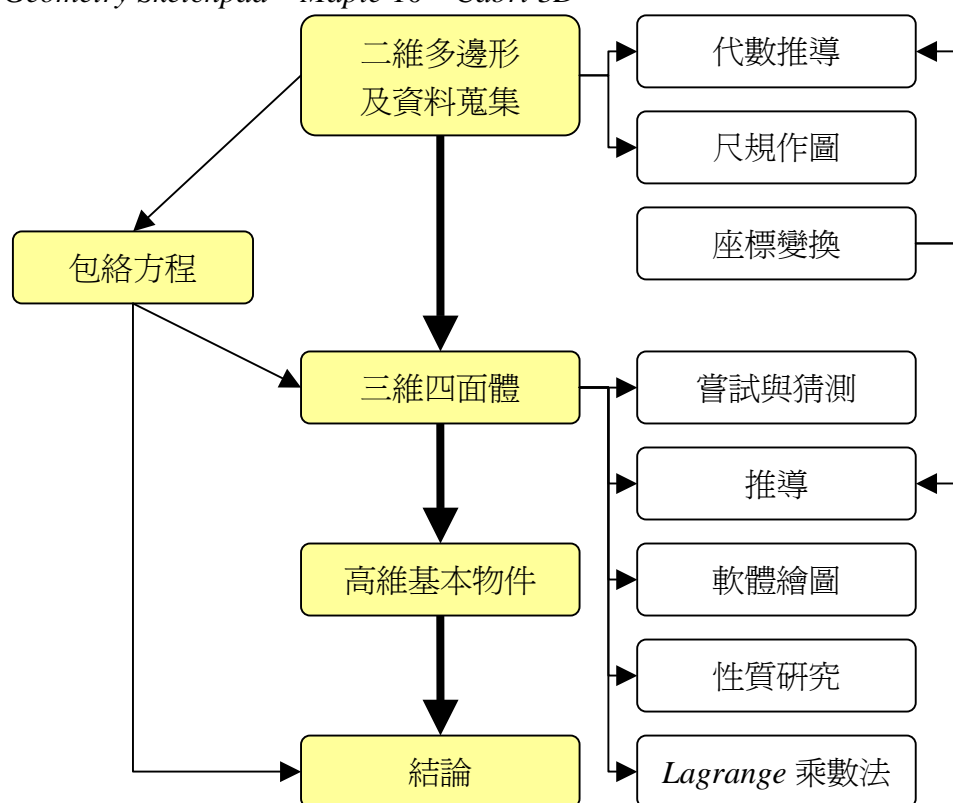
平分，是一個很有趣的事情。像在客廳的一只沙發通常是有左右一樣大的兩個部分；把紙對折可以拆成一半；用天平可以讓兩邊一樣重。很多的事物可以被平分成兩個等分。我們想找出在數學上有沒有一個通用的方法可以將圖形平分成面積相等的兩半。如果是有對稱軸的特殊圖形，很顯然的，對稱軸可以平分面積，但有沒其他可能呢？我們就從簡單的三角形開始了我們的第一步，慢慢推廣到平面上的多邊形；並希望藉由平面上研究出來的性質，推廣到空間中的四面體；再由空間中推導出的性質，延伸到更高維度的研究。

貳、研究目的

- 一、參考相關研究，綜合代數和幾何方法並利用軟體，探討二維中，凸多邊形之面積平分線與平分曲線。
- 二、延續二維中的經驗，推導出一般形式的包絡方程。
- 三、利用得出的包絡方程推導三維空間中，四面體之體積平分面與平分曲面，進行性質研究。
- 四、將以上結論推廣至 n 維空間中較簡單的情形。

參、研究器材及設備

- 一、電腦
- 二、*Geometry Sketchpad*、*Maple 10*、*Cabri 3D*



肆、研究過程及方法

一、符號定義

爲了方便後面的敘述，我們把一些算符定義如下：

(一) $|\alpha_{ij}|_n = |A| = \det(A)$, for $A = [\alpha_{ij}]_{n \times n}$

(二) $\underline{x} = \sum_{i=1}^{n-1} x_i \hat{e}_i$, $\underline{a} = \sum_{i=1}^{n-1} a_i \hat{e}_i$, 以下討論中，所有的 a 皆爲參數， \hat{e} 爲單位向量。

(三) $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i \hat{e}_i = \underline{x} + x_n \hat{e}_n$, $\bar{a} = \sum_{i=1}^n a_i \hat{e}_i = \underline{a} + a_n \hat{e}_n$

(四) $\partial_i' = \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)_{\underline{x}, \bar{a} \text{ excluding } a_i}$, $\partial_i = \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \right)_{\bar{a} \text{ excluding } a_i}$ 右下表示偏微分時視爲常數

上面(二)(三)中定義的向量，可視爲向量、有序數列或一點。

二、名詞定義

(一)平分曲線

平面上多邊形內若有一曲線，其切線平分此多邊形面積，稱之平分曲線。

(二)平分曲面

空間中多面體內若有一曲面，其切面平分此多面體體積，稱之平分曲面。

Ps.高維度的部分，我們則以「平分方程」稱之。

(三)線性方程

是型如 $\left(\sum_{i=1}^n f_i x_i \right) + \delta = 0$ 的方程式，其中 f 跟 x 爲獨立的，此爲 x 的線性方程。

(四)線性方程族

由一個以上的線性方程所構成的集合。

(五)切方程

稱一方程式爲另一方程式 $G(\bar{x}) = 0$ 在 (\bar{x}^0) 的切方程，若且唯若該方程式有如

下型式 $(x_n - x_n^0) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \cdot (x_i - x_i^0) = 0$ ，其中 $\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_i} \right)_{\bar{x} \text{ excluding } x_i}$ ，點 (\bar{x}^0) 和

$\frac{\partial x_n}{\partial x_i}$ 中的 x 爲滿足 $G(\bar{x}) = 0$ 的變數。

(六)包絡方程

稱一個方程式爲某一線性方程族的包絡方程，若且唯若該方程所有切方程形成的集合，等於該線性方程族

三、相關研究-平面上的多邊形面積平分

下面是我們參考相關研究整理出的一些性質，也就是我們已知的基礎。

(一)三角形的面積平分線

1. 三角形的面積平分線皆為三角形內部一封閉曲線(平分曲線)的切線，平分曲線為三段局部的雙曲線構成，且其端點為三角形三中線的中點。這三段雙曲線之漸近線為三角形的某兩邊。(參考文獻一，鄭再添)
2. 設三角形的面積平分線交此三角形於 P 、 Q 兩點，則 \overline{PQ} 之中點軌跡恰為平分曲線。(參考文獻一，鄭再添)
3. 過平面上任一點，作已知三角形的面積平分線數量之討論：
若此點在平分曲線外側，則只有一條面積平分線。
若此點在平分曲線上(不包括端點)，則有兩條面積平分線。
若此點為平分曲線端點之一，則只有一條面積平分線。
若此點在平分曲線內側，則有三條面積平分線。(參考文獻二，張湘琦等)

(二)凸多邊形的面積平分線

1. 凸多邊形的面積平分線皆為凸多邊形內部一封閉曲線(平分曲線)的切線，平分曲線由數段局部的雙曲線構成。這些雙曲線之漸近線為凸多邊形的某兩邊。(參考文獻二，張湘琦等)
2. 設凸多邊形的任意面積平分線交此凸多邊形於 P 、 Q 兩點，則 \overline{PQ} 之中點軌跡恰為平分曲線。
若 P 、 Q 所在的邊平行，則交這兩邊的面積平分線皆共點，該點為 \overline{PQ} 中點。
若 P 、 Q 所在的邊不平行，則 \overline{PQ} 之中點軌跡為局部雙曲線。
(參考文獻二，張湘琦等)
3. 平分曲線將凸多邊形內分成若干區，相鄰兩區中之任意點作出的面積平分線數量相差兩條。
考慮凸 m 邊形，且任二邊均不平行
若 m 為奇數，則過平面上任一點，作凸多邊形的面積平分線最多有 m 條。
若 m 為偶數，則過平面上任一點，作凸多邊形的面積平分線最多有 $m-1$ 條。
(參考文獻二，張湘琦等)

我們利用前述相關研究中提及的性質，用電腦作圖軟體 *Geometry Sketchpad* 實作了二維中三角形與凸多邊形(以凸四邊形為例)的面積平分線，如此一來我們可以從圖形觀察，更加掌握面積平分線與平分曲線的關係，對我們接下來推廣到三維中的方向也有極大的幫助。繪出的圖形及詳細作法請參閱附錄·一。

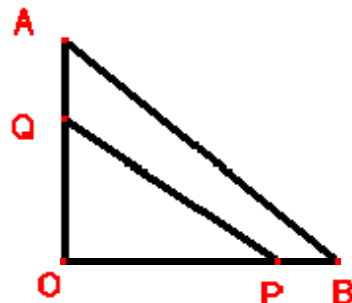
四、包絡線、包絡面及包絡方程

我們對照參考文獻一(鄭再添)中關於包絡線方程式的內容，得到偏微分找包絡方程的想法。

例：在參考文獻一(鄭再添)中，首先考慮平面上有一個三角形，假設三頂點 $O(0,0)$ 、 $A(0,1)$ 、 $B(1,0)$ ，則此三角形的面積平分線所成的包絡線為何？

分別討論此面積平分線

「交 \overline{OA} 、 \overline{OB} 」、「交 \overline{OA} 、 \overline{AB} 」、「交 \overline{OB} 、 \overline{AB} 」三種情況，而這裡我們先討論「交 \overline{OA} 、 \overline{OB} 」。



設平分線交 \overline{OB} 、 \overline{OA} 分別於 $P(p,0)$ 、 $Q(0,q)$ ，由截距式得 $\overline{PQ}: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ (四-1)

由 \overline{PQ} 平分 $\triangle OAB$ 的面積得到 $pq = \frac{1}{2}$ (四-2)

聯立(四-1)、(四-2)並消去 q 後，得 $x + 2p^2y - p = 0$ (四-3)

當 p 有些許變化 Δ 時，所得新直線和原直線的交點為包絡線上點

$$\Rightarrow \begin{cases} x + 2p^2y - p = 0 \\ x + 2(p + \Delta)^2y - (p + \Delta) = 0 \end{cases}$$

兩式相減得 $2y(2p\Delta + \Delta^2) = \Delta$ ， $\Rightarrow \lim_{\Delta \rightarrow 0} y = \frac{1}{4p}$ ，

又由 $x = p - 2p^2y$ 得 $\lim_{\Delta \rightarrow 0} x = \frac{p}{2}$

令 $x = \frac{p}{2}$ 、 $y = \frac{1}{4p}$ ，消去參數 p ，得到包絡曲線的方程式為 $xy = \frac{1}{8}$ 。

以上過程與微分類似，如果直接將(四-3)對 p 偏微分，得 $\begin{cases} x + 2p^2y - p = 0 \\ 4py - 1 = 0 \end{cases}$ ，也可

解出 $x = \frac{p}{2}$ 、 $y = \frac{1}{4p}$ 。也就是說，可以利用偏微分來找尋包絡方程。

而上面「交 \overline{OA} 、 \overline{AB} 」、「交 \overline{OB} 、 \overline{AB} 」的情況，一樣可以用這個方法討論得出結果。但我們想到，如果把新的座標放在另外兩組邊上，那應該可以用座標變換的方法來得到那一段的包絡線。我們把這部分的內容放在下一個章節中。

在三維中，若有一個平面

$F(x, y, z, p, q) = f_1(p, q)x + f_2(p, q)y + f_3(p, q)z + \delta(p, q) = 0$ ，其中 $\delta = 1$ or 0 ，視平面有無通過原點而定。我們猜想，這群平面的包絡面會是由「當只有 p 有些許變

化(Δ)所產生的新平面」、「當只有 q 有些許變化(Δ')所產生的新平面」和 $F(x, y, z, p, q) = 0$ 三平面所交的点，取 $\Delta \rightarrow 0$ 、 $\Delta' \rightarrow 0$ 所構成的。
 所以我們得到方程組

$$\begin{cases} f_1(p, q)x + f_2(p, q)y + f_3(p, q)z + \delta(p, q) = 0 \\ f_1(p + \Delta, q)x + f_2(p + \Delta, q)y + f_3(p + \Delta, q)z + \delta(p + \Delta, q) = 0 \\ f_1(p, q + \Delta')x + f_2(p, q + \Delta')y + f_3(p, q + \Delta')z + \delta(p, q + \Delta') = 0 \end{cases}$$

由二維中得到的想法，我們又看出類似偏微分的型式，因此我們將找尋包絡面的方程組寫成下面的猜測

$$\begin{cases} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial p} F(x, y, z, p, q) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q} F(x, y, z, p, q) = 0 \end{cases}$$

，將此方程組中的 p, q 消去，即可得到包絡面的方程式。

我們發現三維比二維多了一個偏微分方程式，那麼再更高維度中的「平面」，是否也會有類似的規律？二維中，包絡曲線是由有一個參數的直線所決定；三維裡，平分面是由兩個參數所決定。所以我們大膽猜測，「 n 維空間中的線性方程式，若是由 $n-1$ 個參數所決定，則會有一條 n 維的包絡方程式，使所有該線性方程式為其切方程式。其中 $n \geq 2$ 。」以下是其證明：(用到的引理請參閱附錄·二)

定理四·一 線性方程族之包絡方程定理

給定一線性方程族 $S \equiv \{F(\bar{x}, \underline{a}) = 0\}$ ，其中 $F(\bar{x}, \underline{a}) = \left(\sum_{i=1}^n f_i(\underline{a}) \cdot x_i \right) + \delta$ ， $\delta = 1$ or

$$0 \text{ (視其有無過原點而定)}，則 S 的包絡方程為 \begin{cases} F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_1' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_2' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \vdots \\ \partial_{n-1}' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \end{cases} \quad \text{(四-4)}$$

消去(\underline{a})後所得方程式。

證明：我們設包絡方程的切方程所成的集合為 T ， T 的元素 t ， S 的元素 s

先證明 $T \subset S$ ：

由引理附·二中對該聯立方程的解所做得討論，我們有

$$\frac{\partial x_n}{\partial x_i} = -\frac{f_i}{f_n}，for \quad \frac{\partial x_n}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_i} \right)_{\bar{x} \text{ excluding } x_i}，i = 1, 2, \dots, n-1，$$

則其切方程 $t: (x_n - x_n^0) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial x_n}{\partial x_i} \cdot (x_i - x_i^0) = 0$ ，切於點 (\bar{x}^0) ，可寫為

$$(x_n - x_n^0) + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{f_i}{f_n} \cdot (x_i - x_i^0) \right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^0) f_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n f_i x_i - \sum_{i=1}^n f_i x_i^0 = 0$$

因為點 (\bar{x}^0) 是由(四-4)所找出，所以它必符合 $F(\bar{x}, \underline{a}) = 0$ ，故其會使

$$\left(\sum_{i=1}^n f_i x_i^0 \right) + \delta = 0 \quad \Rightarrow \quad -\sum_{i=1}^n f_i x_i^0 = \delta$$

即 $t: \sum_{i=1}^n f_i x_i + \delta = 0 \in S$ ，故 $T \subset S$ 。

接下來證明 $S \subset T$ ：

首先給定一組 \underline{a}^0 以決定 $s: F(\bar{x}, \underline{a}^0) = 0$ 。

$$\begin{cases} F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_1' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_2' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \vdots \\ \partial_{n-1}' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \end{cases} \quad , \text{ 從隱函數定理得到，我們可以把符合前述方程組的 } \bar{x} \text{ 用 } \underline{a} \text{ 表}$$

示，故 \underline{a}^0 可決定一組 \bar{x}^0 ，因為方程組中有 $F(\bar{x}, \underline{a}) = 0$ ，所以 $\bar{x}^0 \in s$ 。

$$\text{又 } s \equiv \left(\sum_{i=1}^n f_i(\underline{a}^0) \cdot x_i \right) + \delta = 0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n \frac{f_i(\underline{a}^0)}{f_n(\underline{a}^0)} \cdot x_i \right) + \frac{\delta}{f_n(\underline{a}^0)} = 0$$

由引理附·二得知在 \underline{a}^0 決定後， $-\frac{f_i(\underline{a}^0)}{f_n(\underline{a}^0)}$ 等於由 \underline{a}^0 決定的點 \bar{x}^0 上包絡方程的 $\frac{\partial x_n}{\partial x_i}$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n -\frac{\partial x_n}{\partial x_i} \cdot x_i \right) + x_n + \frac{\delta}{f_n(\underline{a}^0)} = 0, \text{ 故得 } s \text{ 的法向量為 } \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}, \frac{\partial x_n}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}, -1 \right),$$

且 $\bar{x}^0 \in s$ ，由切方程的定義，在 \bar{x}^0 的切方程，其法向量亦為

$$\left(\frac{\partial x_n}{\partial x_1}, \frac{\partial x_n}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}, -1 \right), \text{ 故得 } s \in T \Rightarrow S \subset T$$

由 $T \subset S$ 且 $S \subset T \Rightarrow S = T$ ，證明完畢。

由此，我們證明了定理四·一，也就是說，用這一連串的偏微分的步驟，可以找出一個給定線性方程族的包絡方程。注意該線性方程族必須在 n 維中，參數有 $n-1$ 個，此定理才適用。

五、座標變換

(一)平面部份

在二維中，設一斜座標系的單位面積是由單位向量 \widehat{e}_x 、 \widehat{e}_y 所張平行四邊形的面積(令其為 $E^2 = |\widehat{e}_x \times \widehat{e}_y|$)。如果 $|\widehat{e}_x| = |\widehat{e}_y| = 1$ 且 $\widehat{e}_x \perp \widehat{e}_y$ (直角座標系)，則我們稱之為標準單位面積(令其為 $E_0^2 = |\widehat{e}_{x0} \times \widehat{e}_{y0}|$)。

今考慮一斜座標系 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ 與直角座標系 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的關係為 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$ ，其中

$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ，則單位面積 E^2 與 E_0^2 的關係為何？

因為單位向量在斜座標系座標表示為 $\widehat{e}_x = (1, 0)$ ， $\widehat{e}_y = (0, 1)$ 所以代入兩座標轉換關係得 \widehat{e}_x 、 \widehat{e}_y 在直角座標系中的表示方式 $\widehat{e}_x = t_{11}\widehat{e}_{x0} + t_{21}\widehat{e}_{y0}$ ， $\widehat{e}_y = t_{12}\widehat{e}_{x0} + t_{22}\widehat{e}_{y0}$ ，故

$$E^2 = |\widehat{e}_x \times \widehat{e}_y| = |(t_{11}\widehat{e}_{x0} + t_{21}\widehat{e}_{y0}) \times (t_{12}\widehat{e}_{x0} + t_{22}\widehat{e}_{y0})| = |(t_{11}t_{22} - t_{12}t_{21})(\widehat{e}_x \times \widehat{e}_y)| = \left\| \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \right\| E_0^2$$

由此可知，此斜座標系中某圖形的面積(以 E^2 的倍數表示)會是直角座標系中相應座標構成的圖形面積之 $\left\| \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \right\|$ 倍。既然兩者的倍率是固定的，當我們用斜座標

系算出多邊形的面積平分線後，再轉換到直角座標系中，仍是其面積平分線，這也就是為什麼之前可以設三角形頂點為 $O(0,0)$ ， $A(0,1)$ ， $B(1,0)$ 的原因。

(二)空間部份

接下來討論三維的部分，設一斜座標系的單位體積是由單位向量 \widehat{e}_x 、 \widehat{e}_y 、 \widehat{e}_z 所張平行六面體的體積(令其為 $E^3 = |\widehat{e}_x \times \widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_z|$)。如果 $|\widehat{e}_x| = |\widehat{e}_y| = |\widehat{e}_z| = 1$ 且兩兩垂直，則我們稱之為標準單位體積(令其為 $E_0^3 = |\widehat{e}_{x0} \times \widehat{e}_{y0} \cdot \widehat{e}_{z0}|$)。

今考慮一斜座標系 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ 與直角座標系 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ 的關係為 $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$ ，其中

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \text{ 與平面部份同理得 } \widehat{e}_x, \widehat{e}_y, \widehat{e}_z \text{ 在直角座標系中的表示方式}$$

$$\widehat{e}_x = t_{11}\widehat{e}_{x0} + t_{21}\widehat{e}_{y0} + t_{31}\widehat{e}_{z0}, \widehat{e}_y = t_{12}\widehat{e}_{x0} + t_{22}\widehat{e}_{y0} + t_{32}\widehat{e}_{z0}, \widehat{e}_z = t_{13}\widehat{e}_{x0} + t_{23}\widehat{e}_{y0} + t_{33}\widehat{e}_{z0}, \text{ 故可}$$

$$\text{推得 } E^3 = \left| \widehat{e}_x \times \widehat{e}_y \cdot \widehat{e}_z \right| = \left| \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} \right| E_0^3, \text{ 得到的結果與二維中類似，當我們用斜座}$$

標系算出多面體的體積平分面後，再轉換到直角座標系中，仍是其體積平分面。因此我們接下來的推導中都先假設四面體的頂點為 $O(0,0,0)$ 、 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ 而不失一般性。

六、四面體之體積平分

(一)嘗試

開始從包絡曲線下手前，我們有一個小嘗試，從相關研究出發，進行以下猜測。從相關研究中，我們得知平分曲線是數條雙曲線，對於一個兩邊落在座標軸上的直角三角形，其中一條雙曲線是 $xy = k$ 的型式(以座標軸為漸近線)。我們猜想，空間中的四面體，會不會也有類似的曲面，它的所有切面，皆為此四面體的體積平分面？在四面體 $O-ABC$ 中(其中 $A(1,0,0)$ 、 $B(0,1,0)$ 、 $C(0,0,1)$ 、 O 為原點)，這個曲面的一部份，會不會有 $(x-0)(y-0)(z-0) = k$ 的形式呢？

首先因為三個軸是等價的，所以這個曲面一定和 $x = y = z$ 這條直線有交點。此

外，這個四面體有一個體積平分面 $\frac{x}{\sqrt[3]{2}} + \frac{y}{\sqrt[3]{2}} + \frac{z}{\sqrt[3]{2}} = 1$ (由相似性質，邊比例

$\sqrt[3]{2}:1$ ，體積比為 $2:1$)。

因此將直線和該面聯立，解得一點 $x = y = z = \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}$ ，所以 $k = \frac{1}{54}$ 。

為了初步檢驗我們的猜測，我們用數據法進行試驗：

首先任找出一個屬於 $xyz = \frac{1}{54}$ 的點， $(\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}, \frac{1}{4}, \frac{2\sqrt[3]{2}}{9})$ 。

然後對原式同除 xy ，得到 $z = f(x, y) = \frac{1}{54xy}$ ，

而在該點上， $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{54x^2y} = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{1}{54xy^2} = -\frac{8\sqrt[3]{2}}{9}$ 。

代入切面方程式($\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y$): $z - \frac{2\sqrt[3]{2}}{9} = -\frac{2\sqrt[3]{4}}{3}(x - \frac{1}{3\sqrt[3]{2}}) - \frac{8\sqrt[3]{2}}{9}(y - \frac{1}{4})$

化簡之後得到 $\sqrt[3]{2}x + \frac{4}{3}y + \frac{3}{2\sqrt[3]{2}}z = 1$ ，三段截距分別為 $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}$ 都小於 1 表皆

在四面體稜上，又其相乘為 $\frac{1}{2}$ ，此平面為體積平分面。

因此我們初步推論，這個曲面 $xyz = \frac{1}{54}$ 有可能是這個四面體平分曲面的一部分。

(二)猜想

除了以上的嘗試外，我們還對四面體的平分曲面作了以下的猜測，接下來的研究，都是以這些猜測為線索，逐一驗證。

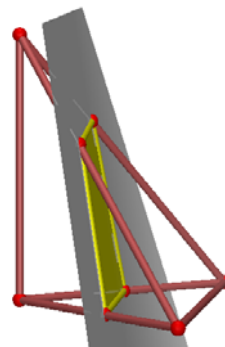
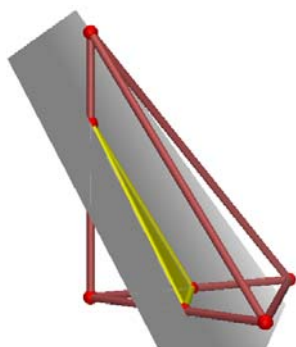
1. 封閉猜想：平分曲面構成一封閉空間
2. 雙曲面猜想：平分曲面是雙曲面，有四片
3. 漸近猜想：這些曲面以四面體的三面為漸近面
4. 重心猜想：體積平分面和四面體交點的重心軌跡即為平分曲面

(三)四面體平分曲面方程式的推導

如果體積平分面過四面體的一個頂點(不妨令過頂點 O)，則其必平分 $\triangle ABC$ ，亦即體積平分面與平面 ABC 相交的直線為 $\triangle ABC$ 的面積平分線，可以套用我們在平面部份的性質。故我們以下僅討論體積平分面不通過四面體頂點的情形。

割過四面體且不過頂點的平面有兩種可能。把四面體的四個頂點分成

1. 一邊一個，另一邊三個(以下稱之為 1-3 分)。
2. 兩邊各兩個(以下稱之為 2-2 分)。



1. 1-3 分平分曲面的推導

考慮四面體 $O-ABC$: $O(0,0,0)$, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $C(0,0,1)$

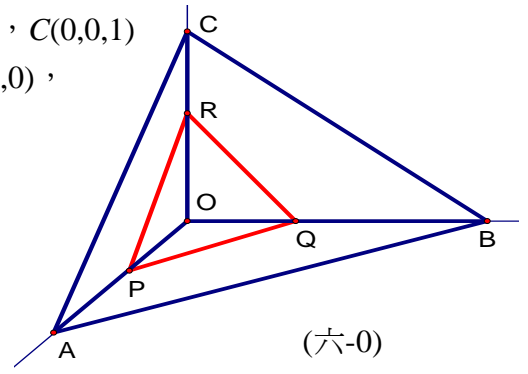
如圖，設體積平分面 E 截 \overline{OA} , \overline{OB} , \overline{OC} 三稜於 $P(p,0,0)$,

$Q(0,q,0)$, $R(0,0,r)$, 其中 $0 \leq p, q, r \leq 1$

由平面的截距式，我們得平面 E 方程式為

$$E: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0 ,$$

平面 E 平分四面體 $O-ABC$ 體積，亦即 $pqr = \frac{1}{2}$



(六-0)

$\Rightarrow E: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + 2pqz - 1 = 0$ 此時， $r = \frac{1}{2pq} \leq 1$ ，因此 $\frac{1}{2} \leq pq$ 。

$$\text{解包絡方程組} \begin{cases} E(x, y, z, p, q) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial q} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} qx + py = pq - 2p^2q^2z & \text{(六-1)} \\ y = q - 4pq^2z & \text{(六-2)} \\ x = p - 4p^2qz & \text{(六-3)} \end{cases}$$

$$\text{(六-2)} \div \text{(六-3)} \text{ 得 } \frac{y}{x} = \frac{q}{p} \quad \text{(六-4)}$$

$$\text{將 } qx = py \text{ 代回(六-1)得 } py + py = pq - 2p^2q^2z \Rightarrow 2y = q - 2pq^2z \quad \text{(六-5)}$$

$$\text{(六-5)} \times 2 - \text{(六-2)} \text{ 得 } y = \frac{q}{3} \quad \text{(六-6)}$$

$$\text{(六-6)} \text{ 代入(六-4)得 } x = \frac{p}{3} \quad \text{(六-7)}$$

$$\text{(六-6)}, \text{(六-7)} \text{ 代入(六-1)得 } z = \frac{1}{6pq} \quad \text{(六-8)}$$

(六-6), (六-7), (六-8) 消去 p, q 得 $xyz = \frac{1}{54}$ ，即包絡曲面方程式，與嘗試的結果

相同。利用座標變換，可以得到對另外每三稜分別作截面之結果：

$$\text{截 } \overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC} : xyz = \frac{1}{54}$$

$$\text{截 } \overline{AO}, \overline{AB}, \overline{AC} : (x+y+z-1)yz = \frac{-1}{54}$$

$$\text{截 } \overline{BO}, \overline{BA}, \overline{BC} : x(x+y+z-1)z = \frac{-1}{54}$$

$$\text{截 } \overline{CO}, \overline{CA}, \overline{CB} : xy(x+y+z-1) = \frac{-1}{54}$$

2. 2-2 分平分曲面的推導

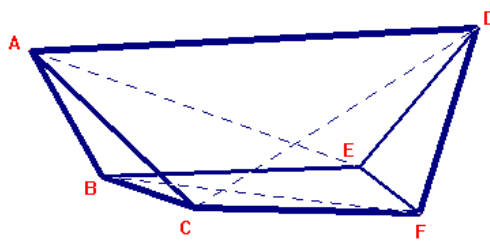
在推導 2-2 分平分曲面方程式前，得先求出如圖之五面體 $ABC-DEF$ 體積表達式。

我們把這個物件分成三個四面體， $C-ABD$ ， $C-EBD$ ， $C-DEF$ 。

$$V_{C-ABD} = \frac{1}{6} |\overline{CB} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD}| = \frac{1}{6} \overline{CB} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD}$$

$$V_{C-EBD} = \frac{1}{6} |\overline{CE} \times \overline{CB} \cdot \overline{CD}| = \frac{1}{6} \overline{CE} \times \overline{CB} \cdot \overline{CD}$$

$$V_{C-DEF} = \frac{1}{6} |\overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD}| = \frac{1}{6} \overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD}$$



因此， $ABC-DEF$ 的體積會是三個四面體的體積和： $V_{C-ABD} + V_{C-EBD} + V_{C-DEF}$

$$= \frac{1}{6} (\overline{CB} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD} + \overline{CE} \times \overline{CB} \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD})$$

$$= \frac{1}{6} (\overline{CB} \times (\overline{CA} - \overline{CE}) \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD})$$

$$= \frac{1}{6} ((\overline{CF} + \overline{FB}) \times \overline{EA} \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times \overline{CE} \cdot \overline{CD}) = \frac{1}{6} (\overline{FB} \times \overline{EA} \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times (\overline{CE} + \overline{EA}) \cdot \overline{CD})$$

$$= \frac{1}{6} (\overline{FB} \times \overline{EA} \cdot \overline{CD} + \overline{CF} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD}) \quad (\text{由 } ACFD \text{ 共平面，所以 } \overline{CF} \times \overline{CA} \cdot \overline{CD} = 0)$$

$$= \frac{1}{6} \overline{BF} \times \overline{AE} \cdot \overline{CD} \quad (\text{定理六} \cdot \text{一})$$

即此五面體體積等於三側面特定對角線向量的三重積，其絕對值的六分之一。

現在考慮四面體 $O-ABC$ ： $O(0,0,0)$ ， $A(1,0,0)$ ， $B(0,1,0)$ ， $C(0,0,1)$

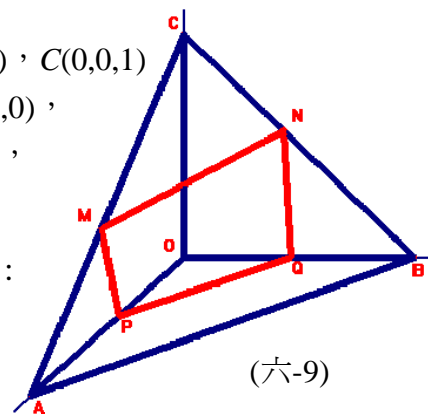
如圖，設體積平分面 E 截四稜 \overline{OA} ， \overline{OB} ， \overline{CA} ， \overline{CB} 於 $P(p,0,0)$ ，

$Q(0,q,0)$ ， $M(1-m,0,m)$ ， $N(0,1-n,n)$ 。因為 $PQNM$ 共平面，

可由共面性質消去一個變數，我們選擇消去 n ，

$$n = \frac{pqm - pm}{pq + qm - q - pm} \quad \text{，平面 } E \text{ 方程式由 } pqm \text{ 表示式為：}$$

$$qmx + pmy + (qm + pq - q)z - pqm = 0$$



(六-9)

此時 $pq \leq \frac{1}{2}$ ，因為若 $pq > \frac{1}{2}$ ，那麼存在一個點 R 屬於 \overline{OC} ，使平面 PQR 的三截

距相乘等於二分之一，如此就變回了 1-3 分的情況。

因五面體 $CMN-OPQ$ 的體積為 $O-ABC$ 體積的一半，由定理六·一得：

$$\frac{1}{6} |(\overline{MQ} \times \overline{CP}) \cdot \overline{NO}| = \frac{q(-p^2m^2 - 3pm + 2pm^2 + p - 1 + 2m - m^2 + p^2qm)}{6(-pm + pq - q + qm)} = \frac{1}{12}$$

(六-10)

(六-9) , (六-10) 聯立消去 m 得到體積平分面 $E(x, y, z, p, q) = 0$

$$\text{求其包絡面的方程組爲} \begin{cases} E(x, y, z, p, q) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial p} = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial q} = 0 \end{cases} \quad , \text{消去 } p, q \text{ 即爲所求。}$$

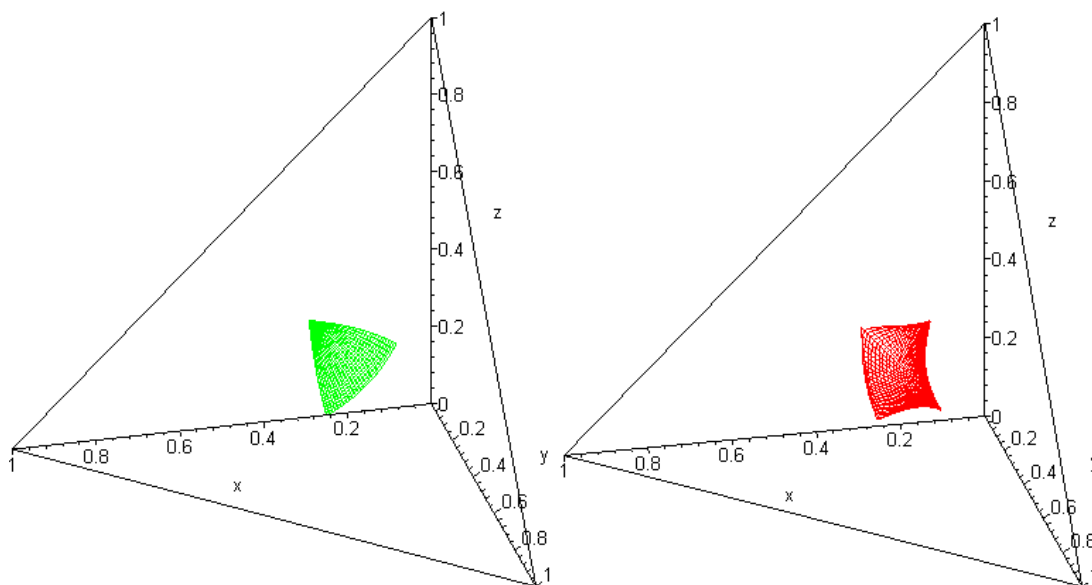
上述方程組我們尚未找到一個只含 x, y, z 的方程式，不過已找出參數式(將 x, y, z 用二個參數 p, q 表示之)，參數式繁雜，請參閱附錄·三。

(四)四面體平分曲面繪圖

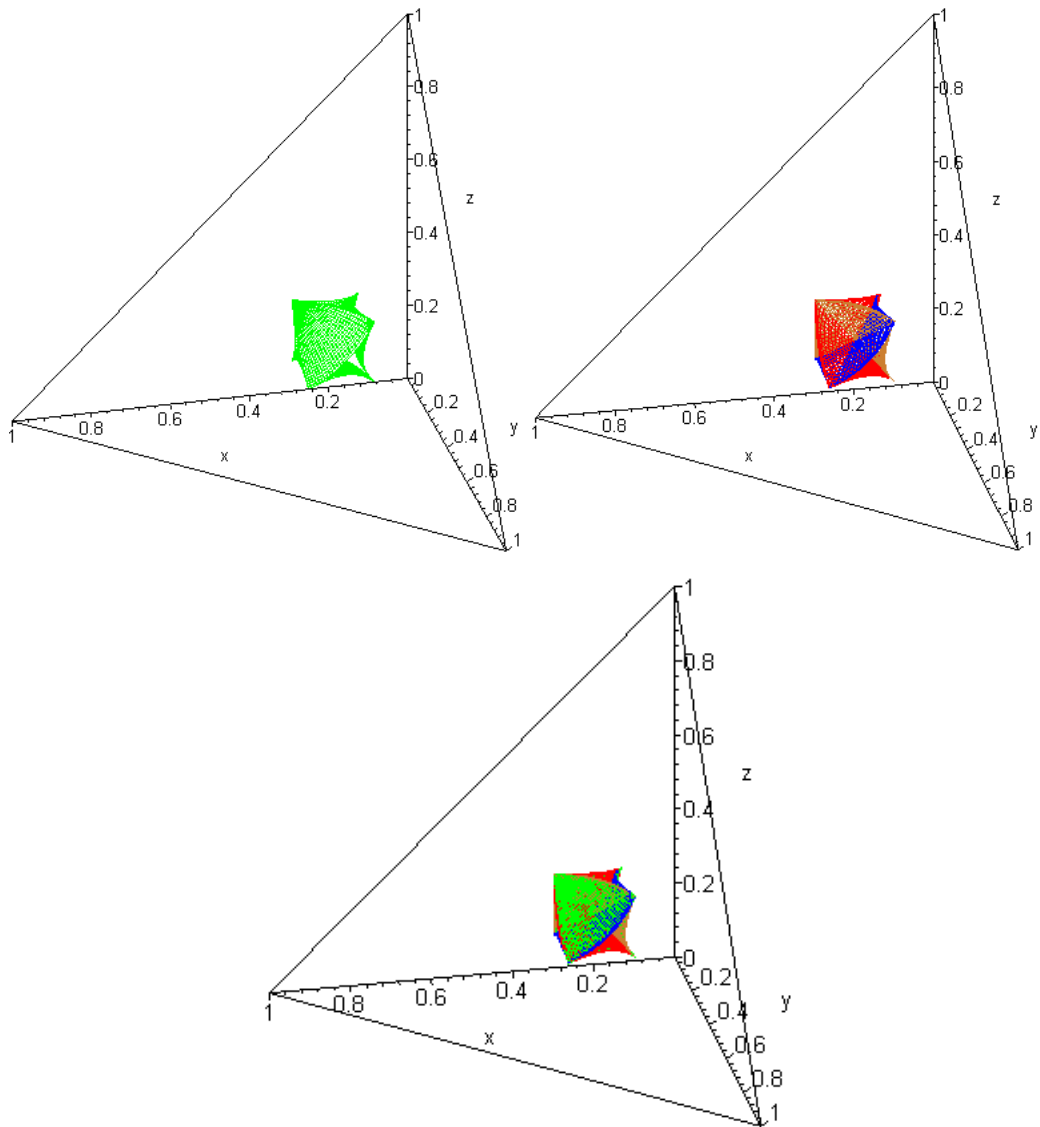
既然已知 1-3 分平分曲面的參數式(六-6) , (六-7) , (六-8)

$$\begin{cases} x = \frac{p}{3} \\ y = \frac{q}{3} \\ z = \frac{1}{6pq} \end{cases} \quad , \text{其中 } 0 \leq p, q \leq 1 \text{ 且 } \frac{1}{2} \leq pq \quad (六-11)$$

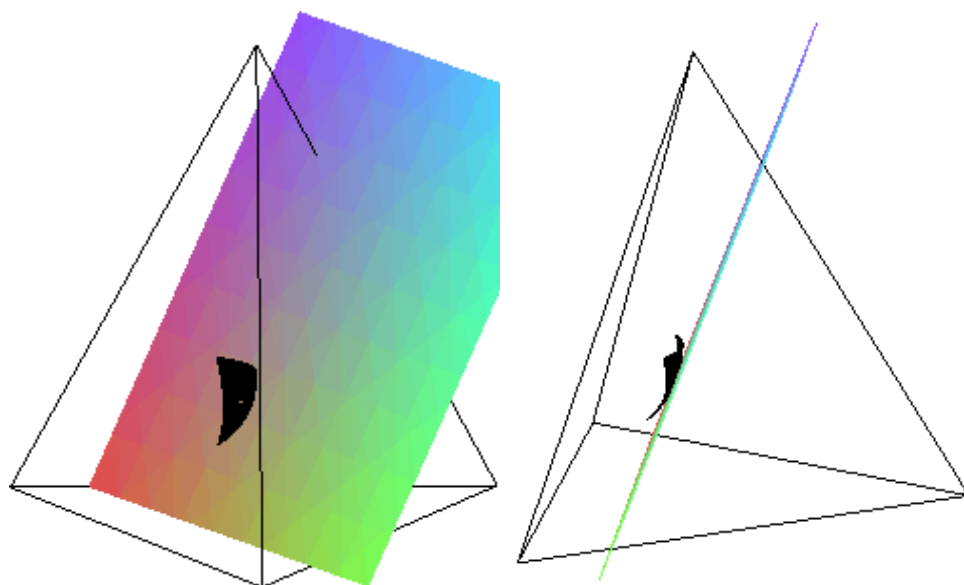
以及 2-2 分平分曲面的參數式(請參閱附錄·三)其中 $0 \leq p, q \leq 1$ 且 $pq \leq \frac{1}{2}$ ，我們可以用電腦軟體 *Maple 10* 畫出以上平分曲面的圖形。

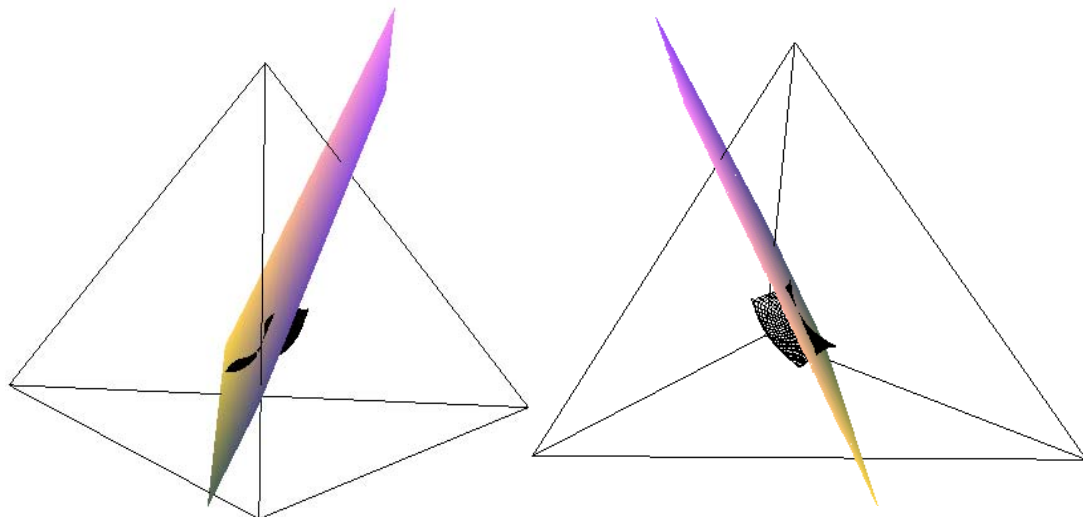


將以上之曲面加以座標變換，則可將所有平分曲面展示出來。



我們將體積平分面與平分曲面相切的情形繪出如下：





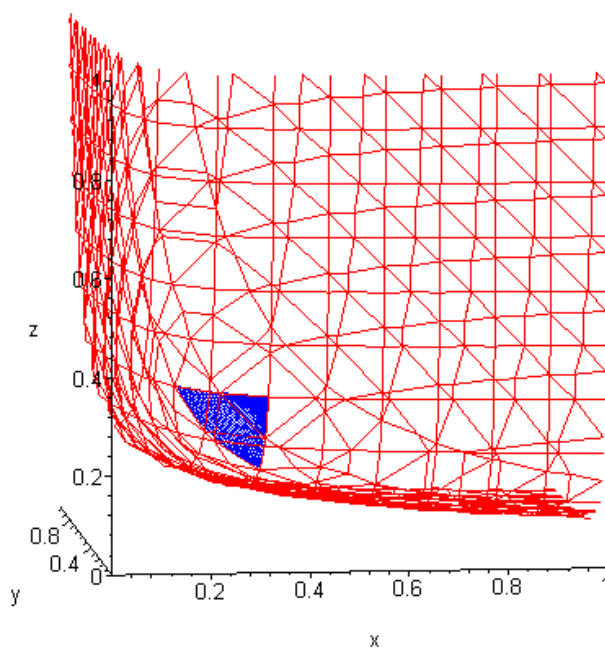
(五)四面體平分曲面的性質研究

1.比對推導出的曲面是否符合猜想中的性質

首先，封閉猜想是成功的，只需要一點點的修正，因為這個圖形不會只形成一個封閉空間，而是會由四片 1-3 分的曲面分別與 2-2 分的曲面圍成四塊封閉空間。

不過明顯地，雙曲面猜想失敗，平分曲面有七片，其中 1-3 分四片是三元三次方程式，並不是三元二次的雙曲面；而 2-2 分三片看似雙曲面，但複雜的參數式似乎也無法化簡成雙曲面的形式。

漸近猜想在 1-3 分的情況下成立，由圖形可以知道 1-3 分平分曲面以四面體的三面為漸近面；不過在 2-2 分時失敗，2-2 分平分曲面似乎沒有任何的漸近面。



最後來驗證重心猜想。在以上 1-3 分平分曲面方程式的推導中，體積平分面與四面體的交點 P 、 Q 、 R 重心座標為 $(\frac{p}{3}, \frac{q}{3}, \frac{r}{3}) = (\frac{p}{3}, \frac{q}{3}, \frac{1}{6pq})$ 正好和 1-3 分平分曲面的參數式一樣，所以重心猜想在 1-3 分時成立。在 2-2 分的情況，體積平分面與四面體的交點 P 、 Q 、 M 、 N 重心座標 $(\frac{p+(1-m)}{4}, \frac{q+(1-n)}{4}, \frac{m+n}{4})$ ，將 n 及 m 以 p, q 代換後發現它並不是之前推導出的參數式，畫出圖形也不同，所以重心猜想在 2-2 分時是錯誤的。

2. 相關研究中陳和平先生提出之特殊解研究

在參考文獻三(陳和平)中，提到通過對稜中點的所有平面都平分體積，我們對於這麼特殊的解非常有興趣，因此展開一系列的研究。

(1) 首先我們想用自己的方法推出與陳和平先生相同的結論：

已知在 2-2 分時 p, q, m 滿足(六-10)：

$$\frac{q(-p^2m^2 - 3pm^2 + 2pm^2 + p - 1 + 2m - m^2 + p^2qm)}{6(-pm + pq - q + qm)} = \frac{1}{12}, \text{ 將之展開得}$$

$$2p^2qm^2 - 4p^2m^2 + 6p^2m - 3qm^2 + q - pq + 2qm^2 - 2p^2q^2m - pm = 0 \quad \text{(六-12)}$$

已知通過對稜中點有兩個情況， $m=q=0.5$ 或 $p=n=0.5$ ，

將 $m=q=0.5$ 代入(六-12)發現左邊 $\equiv 0$ ，即 p 為任意實數皆可使方程式成立。

$$\text{當 } p=n=0.5 \text{ 時，由 } n = \frac{pqm - pm}{pq + qm - q - pm} = \frac{m(q-1)}{-q + 2qm - m} = 0.5, \text{ 解得 } m=q,$$

將 $m=q$ 及 $p=0.5$ 代入(六-12)仍得左邊 $\equiv 0$ ，故 q 為任意實數皆可使方程式成立。

這就說明了 通過對稜中點的所有平面都平分體積。

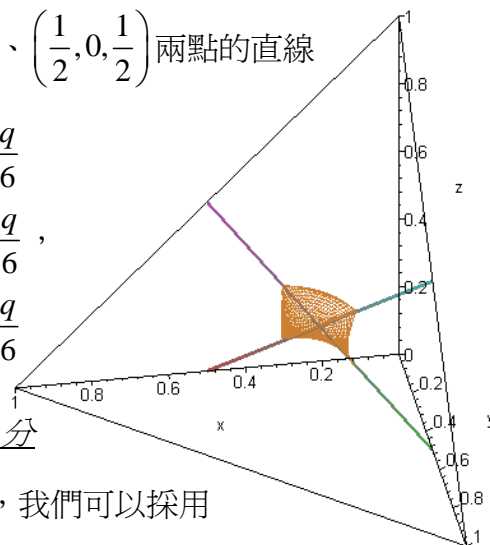
(2) 另外從圖中可以觀察到對稜中點連線似乎包含於 2-2 分平分曲面。將 2-2 分中

x, y, z 關於 p, q 的參數式以 $q=0.5$ 代入得到過 $(0, \frac{1}{2}, 0)$ 、 $(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ 兩點的直線

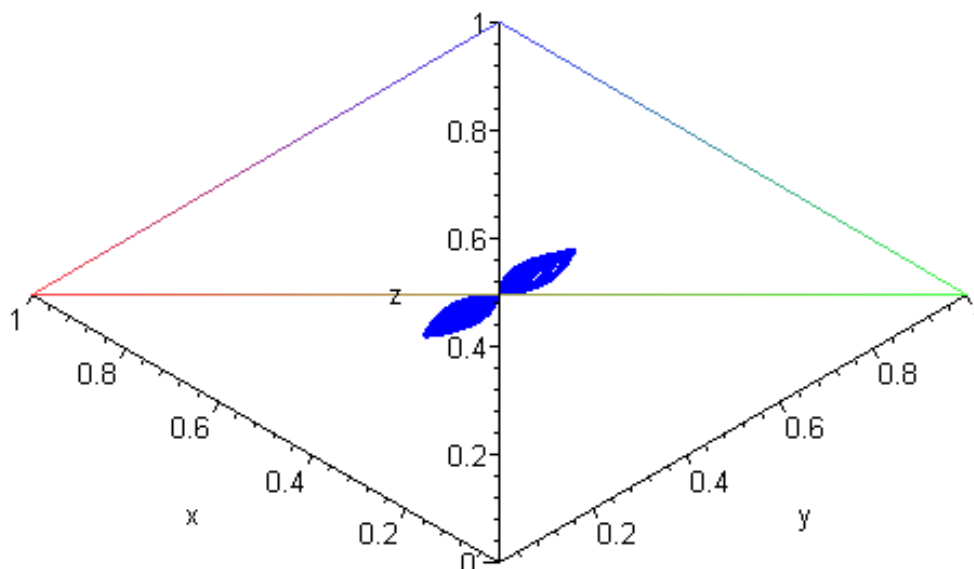
$$\begin{cases} x = \frac{1}{6} + \frac{p}{6} \\ y = \frac{1}{3} - \frac{p}{6} \end{cases}; \text{ 類似地，將 } p=0.5 \text{ 代入後得到} \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \frac{q}{6} \\ y = \frac{1}{6} + \frac{q}{6} \\ z = \frac{1}{6} + \frac{q}{6} \end{cases}$$

為一通過 $(\frac{1}{2}, 0, 0)$ 、 $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 兩點的直線，說明 2-2 分

平分曲面確實包含了通過對稜中點的連線。事實上，我們可以採用



更直觀方法驗證：如圖朝其中一稜觀之，則四面體會變成一個菱形，而對稜在圖中成爲菱形的兩對角線。其中一個 2-2 分曲面會再這個菱形中心處交會成一點，說明了此曲面在這個位置爲一條直線段，並且延長後通過對稜中點。

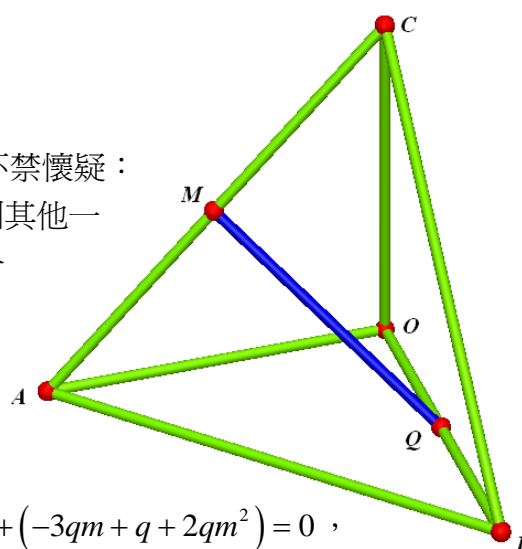


(3)此外，將上述線段利用座標變換討論其他 2-2 分平分曲面上的情形，發現得出的結果會兩兩重合爲三條直線

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} - t \\ y = \frac{1}{6} + t \\ z = \frac{1}{6} + t \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{6} + t \\ y = \frac{1}{3} - t \\ z = \frac{1}{6} + t \end{array} \right., \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{6} + t \\ y = \frac{1}{6} + t \\ z = \frac{1}{3} - t \end{array} \right., \text{這代表} \underline{\text{三片 2-2 分平分曲面兩兩的交集就是}}$$

這三條直線。

(4)當討論完陳和平文中之特殊解後，我們不禁懷疑：除了對稜中點，能不能在四面體稜上再找到其他一組點，使得通過這一組點的所有平面都平分體積？1-3 分及平分面通過頂點時，一但 p, q 確定，則 r 只有唯一解，因此並沒有如此特殊的點。而討論 2-2 分時，我們先將(六-12)整理成 p 之降冪形式，



$$(2qm^2 - 2q^2m)p^2 + (-4qm^2 + 6qm - q - m)p + (-3qm + q + 2qm^2) = 0,$$

要使 p 爲任何 0 至 1 間的實數皆成立，須有

$$\begin{cases} 2qm^2 - 2q^2m = 0 \\ -4qm^2 + 6qm - q - m = 0 \\ -3qm + q + 2qm^2 = 0 \end{cases}$$

此方程組有三組解， $\begin{cases} q_1 = 0 \\ m_1 = 0 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} q_2 = 0.5 \\ m_2 = 0.5 \end{cases}$ 、 $\begin{cases} q_3 = 1 \\ m_3 = 1 \end{cases}$ ，不過第一、三組解代表 P 、

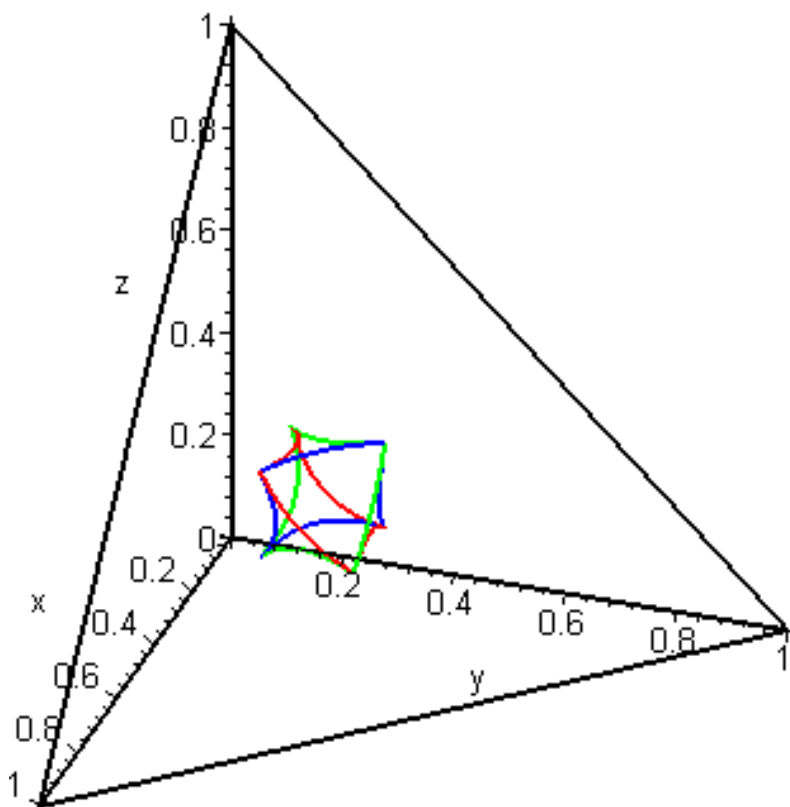
Q 、 M 共線(在四面體的一稜上)，不符合 2-2 分的情形，故應捨去，而第二組解 Q 、 M 正好在對稜終點。不過，在求對於任何 0 至 1 間的實數 q 都成立的解時，不能利用(六-12)化簡，原因是這樣會使 m 解出特定值，並不是我們所要的情況，正確的作法是一開始便以共面性質消去 m (以 p, q, n 表示)，接下來的步驟都雷同，得出符合條件的解是 $p=n=0.5$ 。因此我們證明了僅有通過歪斜對稜中點連線，才會有無限多組解，其他稜上點的連線，皆不可能有無限多組解。

3. 平分曲面的邊界

從曲面繪圖中，我們發現，1-3 分和 2-2 分平分曲面會交會於 12 條邊界曲線。因為 1-3 分的初始條件是 z 軸截距 $r \leq 1$ ，而 2-2 分的初始條件是 $r \geq 1$ ，故 1-3 分與 2-2 分平分曲面交會處就是 $r = 1$ 的時後，即為恰過一頂點 C 的情形。我們令

$r=1$ ，由(六-0)及方程組(六-11)，可以得到曲線方程式 $\begin{cases} xy = \frac{1}{18} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$ ，再經過參數 p, q

的限制，這個曲線就是其中一條邊界曲線(圖中，藍色曲線頂部)，由曲線方程式可以知道這是一條局部雙曲線；再經座標變換，可以得到其他 11 條邊界曲線(也都是局部雙曲線)。下圖是這 12 段曲線的圖形。



在這十二條局部雙曲線中，共可分為四組，每組三條在同一平面上(例如頂部之紅藍綠都在平面 $z=1/3$ 上)，且此平面平行於四面體的某一面。

圖中有六個頂點(其中之一為 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$ ，其餘類推)，分別是 4 段雙曲線的交點，通過六點之一的體積平分面會通過四面體的二頂點，亦即過四面體的一稜。此六點中對於四面體重心對稱的兩點連接會得三條共點線段，這三條線段延長後都會通過某兩對稜中點(即陳和平先生之特殊平分解)。

4. 有無辦法消去 2-2 分平分曲面中的參數？

之前推導過程中 2-2 分曲面的參數式非常複雜，我們接下來便討論，可否用比較簡單的方式來表示這個曲面。

(1) 首先從方程式的形式著手，將體積平分面以截距式

$E: \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} - 1 = 0$ 表示，則消去 r 方程式 $\frac{(r-1)^3}{(r-p)(r-q)} = \frac{2pqr-1}{2pq}$ 比較簡單，所

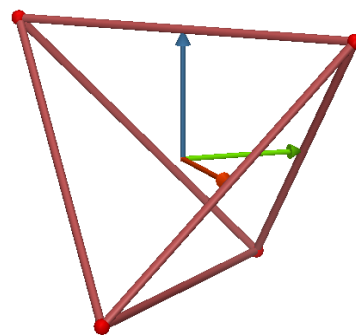
以會比較快些。但是最後得到的參數式，卻是一樣的，所以這個方法沒有辦法達到我們所想要的目的。

(2) 經過一次失敗，我們接著尋求代數上的變換，令 $pq = \alpha$ 及 $p+q = \beta$ 來試著簡化，但卻沒有更進一步的結果。

(3) 另外我們想到一個方法，就是用較有對稱性的正四面體，其四個頂點分別為 $A_1(1,1,1)$ 、 $A_2(-1,-1,1)$ 、 $A_3(1,-1,-1)$ 、 $A_4(-1,1,-1)$ 。

此節中討論皆為此正四面體。

雖然我們仍無法將其曲面參數式化簡，但在一次偶然的機會中，我們用 *Maple* 觀察其 2-2 分曲面圖形中陳和平先生的特殊解，發現到，不只是朝對稜中點連線的方向，當圖形繞著 z 軸旋轉時，也能看到細點(如圖)。這個給我們一些暗示，是不是還有其他的線段屬於這個曲面呢？於是跟這個猜測走，我們開始依此性質找尋這個曲面的方程式。



之前有談到平分曲面的邊界，我們假設：2-2 分曲面是由邊界上兩點(此兩點有相同的 z 座標)的連線所包絡出來的。由於 2-2 分的曲面和 1-3 分的曲面在邊界上相切，所以我們可以用較簡單的 1-3 分曲面，找出邊界方程式。我們將(六-11)進行兩次座標變換，得出曲面下半的兩段邊界的參數式：

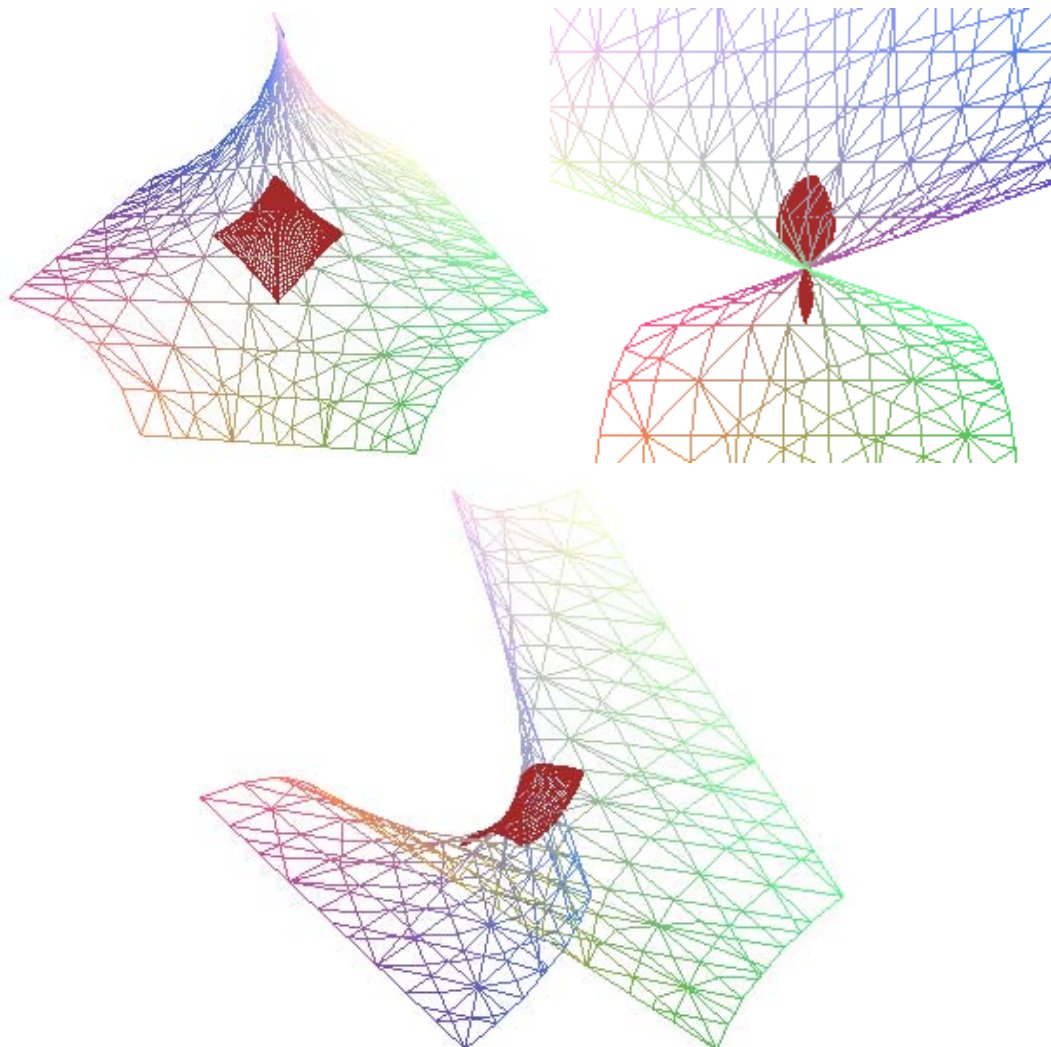
$$\left\{ \begin{array}{l} x = -\frac{2p}{3} - \frac{1}{3p} + 1 \\ y = -\frac{2p}{3} + \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3p} \end{array} \right. \text{ 及 } \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{2p'}{3} + \frac{1}{3p'} - 1 \\ y = \frac{2p'}{3} - \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3p'} \end{array} \right.$$

令它們的 z 座標相同，得 $p = p'$ ，因此兩點的 x 座標相加後等於零， y 座標亦然，故此線段與 z 軸有交點。所以這一線段上點的 x 座標和 y 座標成比例。由此我們可以得到該線段的方程式 $y_0x = x_0y$ ，其中 x_0 和 y_0 為上述參數座標所表示的點。

我們把 $\frac{1}{p}$ 用 z 表示出來： $\frac{1}{p} = 1 - 3z$ ，

然後將該線段方程式中的 p 代入並化簡後，得到 $x - 3yz = 0$ 。

下面是 2-2 分曲面和 $x - 3yz = 0$ 的比較：



在 *Maple* 上作圖發現結果高度吻合。但是當我們對這個曲面進行數值檢驗後，卻發現， $x - 3yz = 0$ 這個曲面和平分曲面並沒有完全吻合。

下面是我們的數值檢驗。

我們取(0.03, -0.1, -0.1) 這個點上的切面來測試。

由 $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{3y} = -\frac{10}{3}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{3y^2} = -1$ 得到切面方程式：

$z+0.1 = -\frac{10}{3}(x-0.03) - 1(y+0.1) \Rightarrow 10x + 3y + 3z = -0.3$ 此平面分別交：

$\overline{A_1A_2}$ 於 $H(-\frac{3.3}{13}, -\frac{3.3}{13}, 1)$,

$\overline{A_1A_4}$ 於 $I(-\frac{3.3}{13}, 1, -\frac{3.3}{13})$,

$\overline{A_2A_3}$ 於 $J(\frac{2.7}{7}, -1, -\frac{2.7}{7})$,

$\overline{A_3A_4}$ 於 $K(\frac{2.7}{7}, -\frac{2.7}{7}, -1)$.

由定理六·一，得 $A_3JK - A_1HI$ 的體積為 1.333507225...，但此四面體體積的一半應為 $1\bar{3}$ 。所以該曲面並不是 2-2 分的平分曲面，只是其近似結果。

至於這個近似解的誤差到底為多少？將之前得到的 2-2 分曲面參數式，代入 $x-3yz$ ，發現並不是永遠為零。右下圖是 $p=0.2$ 時， $x-3yz$ 對 q 的圖形。我們可以很清楚的看到，在 $q=0.5$ 附近， $x-3yz$ 似乎等於零。令 $q=0.5$ 代入得

$$x-3yz = \frac{(p+1)^2 \left(p^2 - 1 + \sqrt{(p-1)^2 (p+1)^2} \right)}{3(p-1)^2 p} \text{ 由}$$

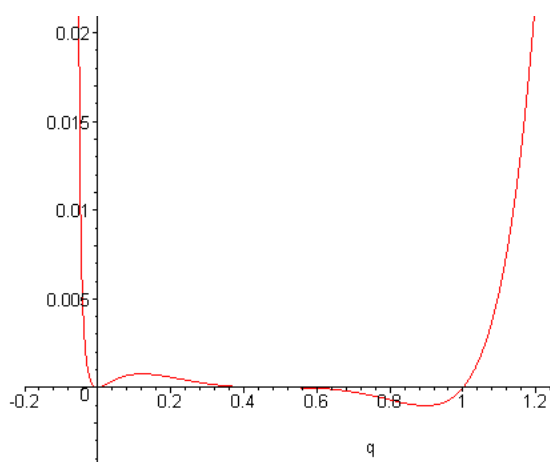
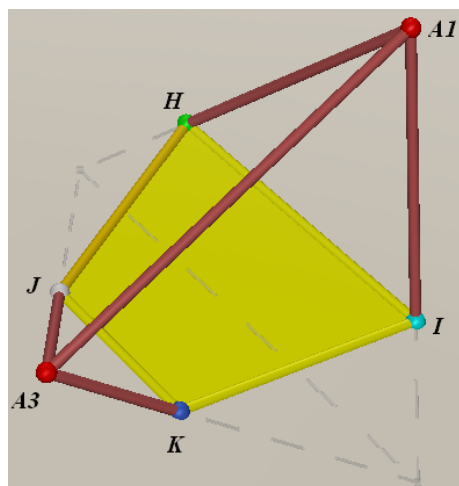
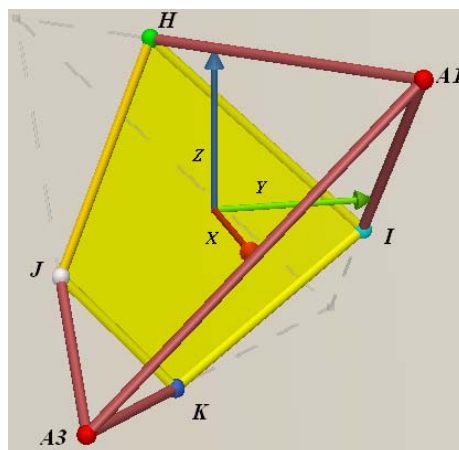
$p < 1$ ，解開根號 \Rightarrow

$$\begin{aligned} &= \frac{(p+1)^2 \left[(p+1)(p-1) - (p-1)(p+1) \right]}{3(p-1)^2 p} \\ &= \frac{(p+1)^2 [0]}{3(p-1)^2 p} = 0 \end{aligned}$$

所以可以得知，這兩個曲面在參數 $q=0.5$ 時，是重合的。因為 p 和 q 是對稱的，所以 $p=0.5$ 時，兩曲面也是重合的。

我們對於這個結果，感到非常的訝異，

竟然有這麼簡單的曲面可以近似到這種地步。但 $x-3yz=0$ 終究只是近似，它不能取代我們用包絡方程式所解出來的參數式。我們將其呈現於此，分享給大家。



七、 n 維標準物件之 $1-n$ 分平分曲面

在三維中 1-3 分的討論結果，我們希望推廣到高維的部分。

(一)高維物件與高維積

高維名詞定義：

1.高維積， n -DQ (n - dimension quantity, n -DQ)

高維積為一個高維的物件佔有該維度空間的程度。若要定量的表示，我們可以先想一個「方形」的高維物件(在平面中是矩形，在空間中是長方體)，

它所擁有的高維積為 $\prod_{i=1}^n a_i$ ，其中 a_i 為這個方形物件在各個維度的邊長。

我們把第 n 維的高維積稱為 n -DQ。例如一維中 1-DQ 是長度，平面中 2-DQ 是面積，空間中 3-DQ 是體積。

2. n -PO (n - points object)

假設 n 維直角座標軸上有 n 個點，將各點加原點兩兩相連後所成的物件為 n -PO。例：在二維中，2-PO 即為直角三角形。在三維中，3-PO 即為直四面體。

3.標準物件 S_n

由原點和各座標軸正向 1 單位的點所成之 n -PO 稱之為標準物件 S_n

由於在二維中，2-PO 的面積是兩垂直邊相乘後除以 $2(=2!)$ ，3-PO 的體積是三垂直邊相乘以除以 $6(=3!)$ ，故我們推測，一個 n -PO 的 n -DQ 可能為 $\frac{1}{n!} \cdot \prod_{i=1}^n a_i$ ，其中

a_i 為第 i 個座標軸上的長度。

各維度的邊長皆為 a 時的情況可用數學歸納法推導：

- (1) $n=2$ 時，兩軸邊長(即 1-DQ)都為 a 的 2-PO 為一等腰三角形，如圖將其分割為無數個小長方形，每個小長方形的寬為 dx_2 ，長從 a 遞減至 0，

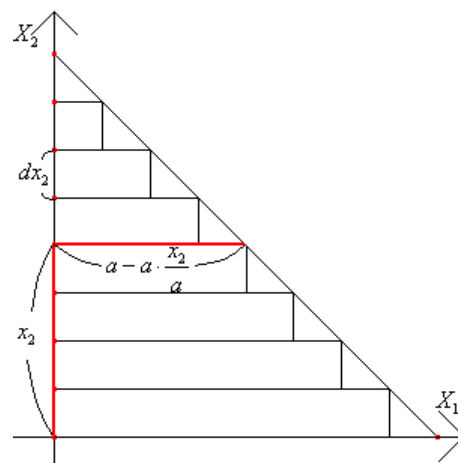
由相似形得長為 $\frac{a-x_2}{a} \cdot a$ ，故其 2-DQ 為

$$\int_0^a \frac{a-x_2}{a} \cdot a \cdot dx_2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2!}$$

- (2) 假設在 $n=k$ 的時候成立，即邊長為 a 的 k -PO 的

$$k\text{-DQ 為 } \frac{a^k}{k!}。$$

而在 $n=k+1$ 時，一個 $(k+1)$ -PO 可以分割成無數個底為 k -PO、高 dx_{k+1} 的小單位。因為每個 k -PO 的邊長為 $\frac{a-x_{k+1}}{a} \cdot a$ ，由假設得小單位的 $(k+1)$ -DQ 為



$\frac{(a-x_{k+1})^k}{k!} \cdot dx_{k+1}$ ，因此整個(k+1)-PO 的(k+1)-DQ 為

$$\int_0^a \frac{(a-x_{k+1})^k}{k!} dx_{k+1} = \int_{a-0}^{a-a} \frac{(a-x_{k+1})^k}{k!} (-d(a-x_{k+1})) = \frac{1}{k!} \left(\frac{a^{k+1}}{k+1} - \frac{0^{k+1}}{k+1} \right) = \frac{a^{k+1}}{(k+1)!}$$

所以當 $n=k+1$ 時，成立。

(3)由數學歸納法原理，我們得到一個軸上邊長都為 a 的 n -PO 的 n 維量為 $\frac{a^n}{n!}$

對所有 $n > 1, n \in N$ 皆成立。

有一個邊不為 a 的情況：

考慮 n -PO 有一邊不為 a (假設為 b)，不妨令邊長為 b 的那個維度為第 n 維。

則細分這個 n -PO 得的小單位，其其他維度之邊長皆為 $\frac{b-x_n}{b} \cdot a$ (相似形)，故該

小單位的 n -DQ 為 $\frac{\left(\frac{b-x_n}{b} \cdot a\right)^{n-1}}{(n-1)!} \cdot dx_n$ ，

$$\int_0^b \frac{\left(\frac{b-x_n}{b} \cdot a\right)^{n-1}}{(n-1)!} dx_n = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^b \left(1 - \frac{x_n}{b}\right)^{n-1} dx_n = \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \cdot b \cdot \frac{1^n - 0^n}{n} = \frac{a^{n-1}b}{n!}$$

將這個方法繼續延伸到有第三個不同於 a 、 b 的邊長，及第四個、第五個……都

可適用；這就證明了 $(n+1)$ PO 的 n 維量為 $\frac{1}{n!} \cdot \prod_{i=1}^n a_i$ 。

(二) S_n 的 1- n 分平分方程

由於高維中的物件較為抽象複雜，所以我們目前只討論把 S_n 進行 1- n 分的平分 (如三維中的 1-3 分)，而不進行其他情況(如三維中的 2-2 分等)的平分。

假設有一線性方程族 E 平分 S_n ，表為 $E = \left(\sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} \right) - 1 = 0$ ($0 < a < 1$)。則它通過點

$$P_k : \begin{cases} x_i = 0, i \neq k \\ x_i = a_i, i = k \end{cases}, (k=1 \dots n, i \text{ 為第 } i \text{ 維度的座標}, i=1 \dots n)。$$

因此，這個由 E 的截點和原點所成之 n -PO 的 n -DQ 為 $\frac{\prod_{i=1}^n a_i}{n!}$ ，而我們要平分 S_n ，

$$\text{所以 } \frac{\prod_{i=1}^n a_i}{n!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1^n}{n!}, \quad \Rightarrow \prod_{i=1}^n a_i = \frac{1}{2} \quad (\text{七-1})$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2 \prod_{i=1}^{n-1} a_i}. \quad \text{代入 } E \Rightarrow E = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{a_k} \right) + x_n \cdot 2 \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k \right) - 1 = 0 \quad (\text{七-2})$$

另外利用定理四，一找出這個線性方程族的包絡方程為

$$\begin{cases} E = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{a_k} \right) + x_n \cdot 2 \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k \right) - 1 = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial a_p} = \frac{\partial}{\partial a_p} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{a_k} + x_n \cdot 2 \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k \right) - 1 \right) = 0 \end{cases} \quad \text{的解。}$$

$$\text{上面第二式} \Rightarrow -\frac{x_p}{a_p^2} + x_n \cdot 2 \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq p}}^{n-1} a_k = 0, \quad \Rightarrow x_p = x_n \cdot 2 \cdot a_p \prod_{k=1}^{n-1} a_k \quad (\text{七-3})$$

(七-3)代入(七-2)

$$\Rightarrow E = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_n \cdot 2 \cdot a_k \cdot \prod_{l=1}^{n-1} a_l}{a_k} \right) + x_n \cdot 2 \left(\prod_{l=1}^{n-1} a_l \right) - 1 = n \cdot x_n \cdot 2 \left(\prod_{l=1}^{n-1} a_l \right) - 1 = 0$$

$$x_n = \frac{1}{2 \cdot n \left(\prod_{k=1}^{n-1} a_k \right)} \quad (\text{七-4})$$

$$(七-4) \text{代入}(七-3) \Rightarrow x_p = \frac{a_p}{n} \quad (\text{其中 } p=1 \dots n-1) \quad (\text{七-5})$$

接下來，我們要猜測這個包絡方程為何。根據我們之前在三維中的結果，對於三維的 $3-PO$ ，它的包絡方程為 $xyz=1/54$ ，這是由三個座標軸的變數相乘等於一個定值，所以我們依照 1-3 分的做法，把 n 個變數乘在一起，看看是否有相乘等於一個定值的形式。所以，由(七-4)、(七-5)

$$\prod_{p=1}^n x_p = \left(\prod_{p=1}^{n-1} x_p \right) \cdot x_n = \left(\frac{1}{n^{n-1}} \prod_{p=1}^{n-1} a_p \right) \cdot \frac{1}{2n \cdot \prod_{k=1}^{n-1} a_k} = \frac{1}{2n^n} \quad (\text{七-6})$$

因此我們得到(七-6)，就是把 n 個變數連乘等於一個定值，這樣令人振奮的結論。

如果令 $n=3$ ，則我們會得到 $x_1 x_2 x_3 = \frac{1}{2 \cdot 3^3} = \frac{1}{54}$ ，驗證了我們原本三維討論的結果。

此外，這個包絡方程也會和三維中的一樣，被參數限制在一個範圍裡。

伍、結論

一、凸多邊形的面積平分線會包絡出封閉的平分曲線，利用這個性質，可以用尺規作圖作出過平面上任一點的面積平分線。

二、線性方程族 $S \equiv \{F(\bar{x}, \underline{a}) = 0\}$ ，其中 $F(\bar{x}, \underline{a}) = \left(\sum_{i=1}^n f_i(\underline{a}) \cdot x_i \right) + \delta$ ， $\delta = 1$ or 0 (視

$$\text{其有無過原點而定)，其包絡方程爲 } \begin{cases} F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_1' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_2' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \vdots \\ \partial_{n-1}' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \end{cases} \text{ 消去 } (\underline{a}) \text{ 後所得方程式。}$$

三、四面體的體積平分面也會包絡出平分曲面，可分為七片，圍成四個封閉空間，邊界為十二段局部雙曲線及六個交點，平分曲面可分為 1-3 分及 2-2 分，前者性質類似二維中的平分曲線，後者則否，但包含特殊平分解——過歪斜對稜中點連線的所有平面均為體積平分面。直四面體之 1-3 分平分曲面方程式為 $xyz = \frac{1}{54}$ 而正四面體的 2-2 分平分曲面近似於 $x - 3yz = 0$ 。

四、 n 維度的標準物件之 1- n 分包絡方程為 $\prod_{p=1}^n x_p = \frac{1}{2n^n}$ 。

陸、參考文獻

- 一、鄭再添，「三角形面積平分線探討」，數學傳播，第 11 卷第 4 期，73-83 頁，中央研究院數學研究所，1987
- 二、張湘琦、潘雅柔、鄭巧君、廖文偉，「凸 n 邊形等面積線段數量之分布探索」，中華民國第 45 屆中小學科展數學科國中組，2005
- 三、陳和平，「平分四面體體積的截面」，數學通訊，第 17 期，4-5 頁，華中師範大學，2004
- 四、張景中，平面幾何新路，九章出版社，台北，1990
- 五、庫蘭特、羅賓士，數學導論(What's Mathematics)，水牛出版社，台北，1992
- 六、莊焜安、許威德、黃浚柏、董晏均，「面積平分線知多少」，嘉義市中小學科展數學科國中組，2005
- 七、黃柏瑋、方大瑋、房暉宸、張乃文，「過定點的直線如何平分三角形面積」，中華民國第 44 屆中小學科展數學科國中組，2004
- 八、陳省吾、劉又瑋、吳玟叡、侯佑霖，「過多邊形內外一定點的面積平分線作法(尺規作圖)」，中華民國第 42 屆中小學科展數學科高中組，2002
- 九、陳閔宏，「三角形分割線的包絡線」，中華民國第 30 屆中小學科展數學科高

中組，1990

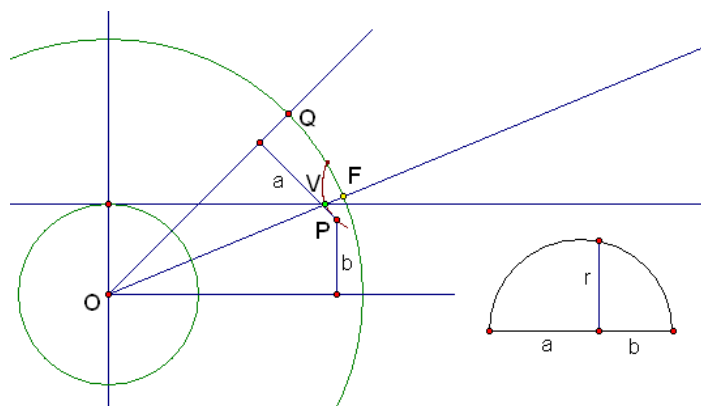
- 十、劉任昌，「從用直線平分凸五邊形的面積談起」，數學傳播，第 25 卷第 4 期，73-78 頁，中央研究院數學研究所，2001
- 十一、Robert A. Adam, Calculus: A Complete Course, 4th Edition, Addison Wesley, Boston, 2003
- 十二、David I. Schwartz & David L. Schwartz, Introduction to MAPLE 8, Prentice Hall, New Jersey, 2003
- 十三、MathWorld, <http://mathworld.wolfram.com/Envelope.html>, 2006

柒、附錄

一、平面上之作圖

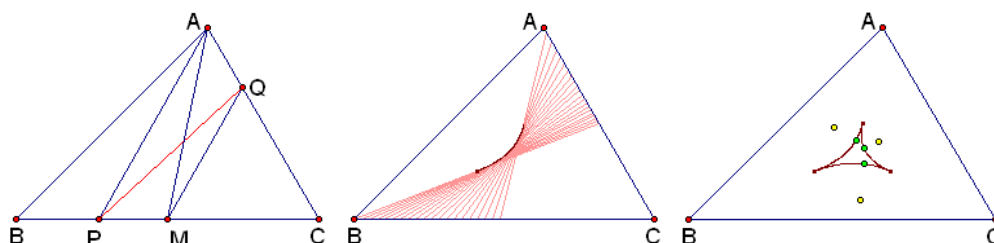
(一)已知雙曲線之兩漸近線，作此雙曲線的頂點與焦點

- 1.取雙曲線上一點 P ，過 P 作兩漸近線的垂直線。
- 2.作出 P 到兩漸近線距離的幾何平均，假設為 r 。
- 3.以雙曲線中心 O (即兩漸近線交點)為圓心畫一半徑為 r 的圓 O 。
- 4.作一圓 O 的切線平行兩漸近線其中之一。
- 5.作兩漸近線的角平分線，則上述切線與角平分線的交點即為頂點 V 。
- 6.過頂點作角平分線的垂直線，交其中一漸近線於 Q 。
- 7.以 O 為圓心畫一圓通過 Q ，則此圓與角平分線的交點即為焦點 F 。



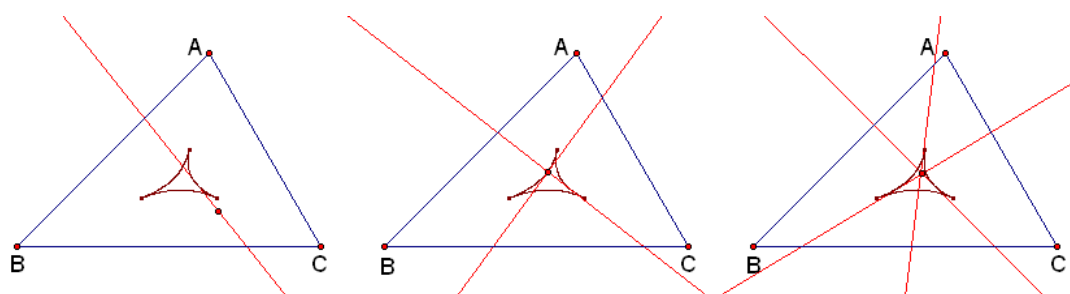
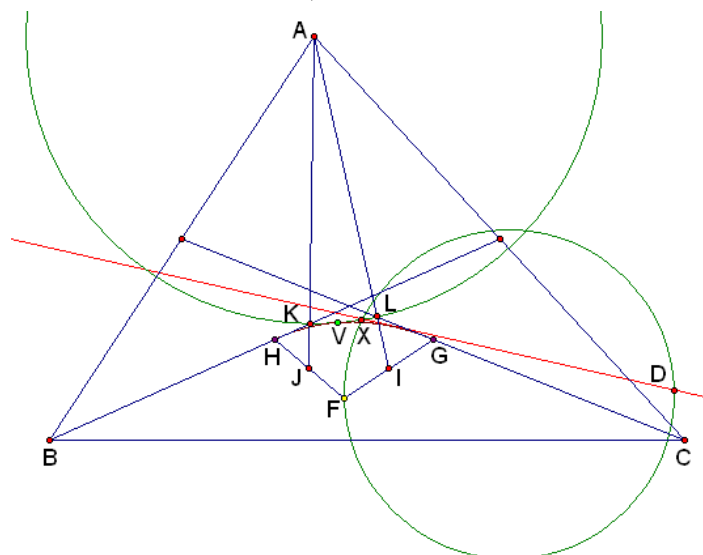
(二)作三角形過邊上一點的面積平分線及其平分曲線

- 1.先以 \overline{BC} 上之動點 P 為例。連 \overline{AP} 。
- 2.作 \overline{BC} 上的中線 \overline{AM} 。
- 3.過 M 作一直線平行 \overline{AP} 交 \overline{AB} 或 \overline{AC} 於 Q ，則 \overline{PQ} 是 $\triangle ABC$ 之面積平分線。
- 4.仿上亦可作出當 P 在 \overline{AB} 、 \overline{CA} 上時的面積平分線。
- 5.由相關研究知，平分曲線即為 \overline{PQ} 之中點軌跡，又因為構成平分曲線的雙曲線之漸近線為三角形的某兩邊，故可以求出其頂點 V 、焦點 F 。



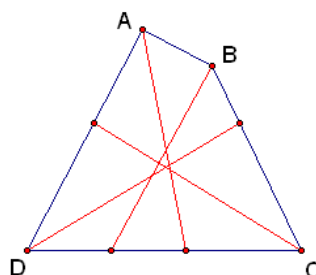
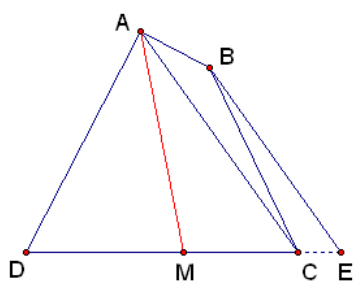
(三)作三角形過平面上任一點 D 的面積平分線

- 1.先以中心為 A 的雙曲線段為例。以 A 為圓心畫一通過 V 的圓 A 。
- 3.作 \overline{AB} 、 \overline{AC} 上之中線的中點 G 、 H
- 4.作 \overline{GF} 、 \overline{HF} 的中點 I 、 J
- 5.連接 \overline{IA} 、 \overline{JA} 交圓 A 於 K 、 L
- 6.以 \overline{DF} 為直徑畫圓，交圓弧 KL 於 X ，則 \overline{DX} 為一面積平分線(可能會交於兩點 X 、 Y ，則 \overline{DX} 、 \overline{DY} 皆為面積平分線)



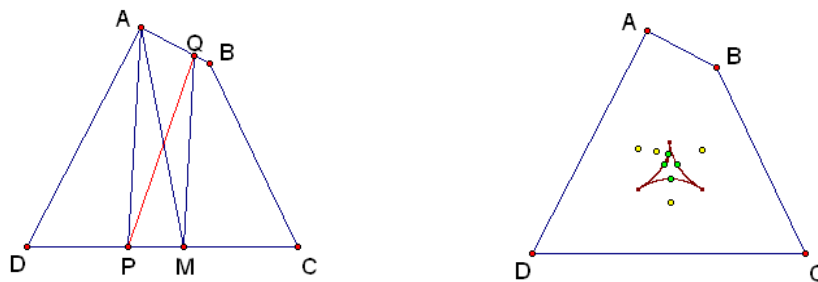
(四)作四邊形過頂點的面積平分線 (類似三角形的中線)

- 1.先以頂點 A 為例。連 \overline{AC} 。
- 2.過 B 作 \overline{AC} 的平行線，交 \overline{DC} 的延長線於 E 。
- 3.作 \overline{DE} 的中點 M ，則 \overline{AM} 是四邊形 $ABCD$ 之面積平分線。
- 4.仿上亦可作出過 B 、 C 、 D 的面積平分線。



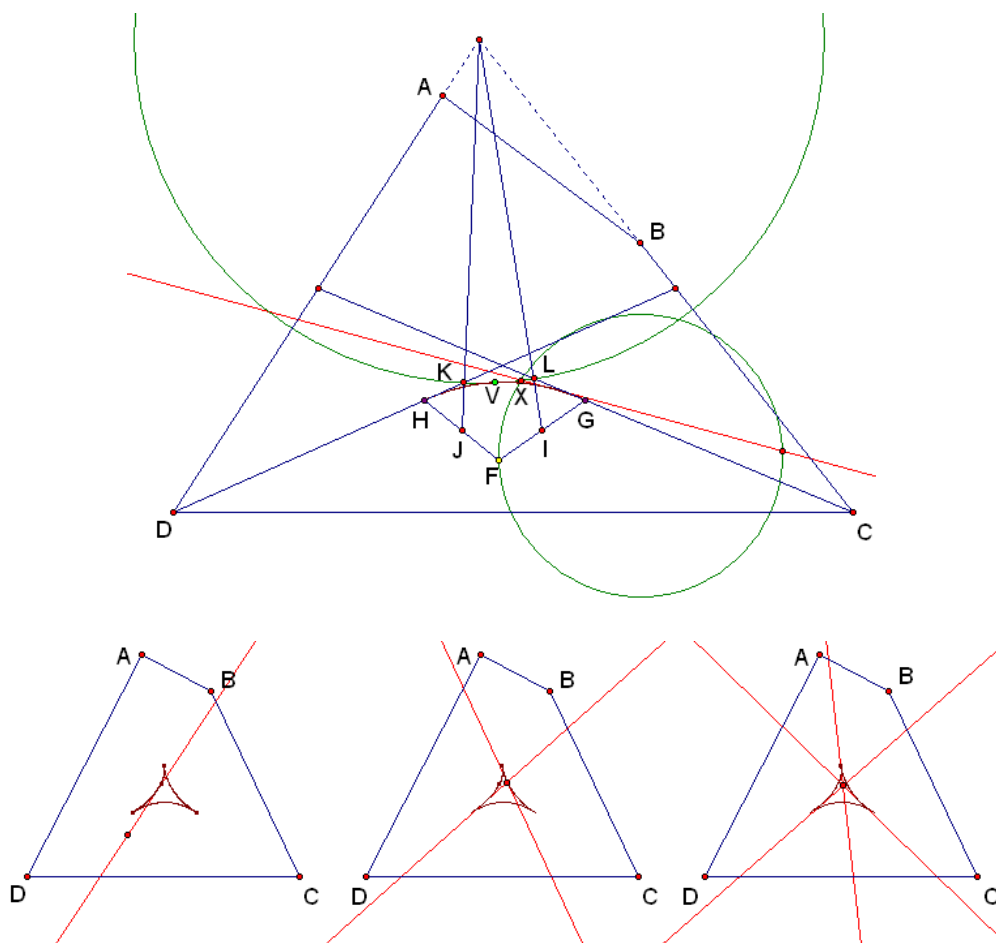
(五)作四邊形過邊上一點的面積平分線及其平分曲線

類似三角形的作法，只是把三角形的「中線」改為「過頂點的面積平分線」。



(六)作四邊形過平面上任一點的面積平分線

類似三角形的作法，只是三角形的平分線由三段雙曲線構成而四邊形為四段，且雙曲線中心可能不是四邊形頂點而是對邊延長後的交點。



二、包絡方程中用到的引理

(一)引理附·一

$$\text{令 } A = [a_{ij}]_{n \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_n \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \delta_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \delta_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \delta_n \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n & \beta_{n+1} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}, \quad s_{ij} = \begin{cases} \beta_j, & \text{for } i = n+1 \\ a_{ij}, & \text{for } i < n+1, j < n+1 \\ \delta_i, & \text{for } i < n+1, j = n+1 \end{cases}.$$

那麼，如果 $AX + \Delta = O$ ，則 $\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_n x_n + \beta_{n+1} = \beta_{n+1} + \sum_{i=1}^n \beta_i x_i = \frac{|S|}{|A|}$

$$\text{證明：令 } B_k = [b_{ij}]_{n \times n}, \quad b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{for } j \neq k \\ \delta_i, & \text{for } j = k \end{cases}, \quad C_k = [c_{ij}]_{n \times n}, \quad c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & \text{for } j < k \\ a_{i(j+1)}, & \text{for } k \leq j < n \\ \delta_i, & \text{for } j = n \end{cases}$$

由克拉瑪法則，解聯立方程組 $AX + \Delta = O$ 得到其解為 $x_k = -\frac{|B_k|}{|A|}$ (附-1)

有負號是因為 Δ 在等號的左邊，和 AX 在同側。

而經由行列式的性質，若行列式中，相鄰的兩行對調或相鄰的兩列對調，其值必須乘上 (-1) ，故 $|C_k| = (-1)^{n-k} \cdot |B_k|$ (附-2)

現在我們用 *Laplace* 法展開 $|S|$ ，沿著第 $n+1$ 列

$$\Rightarrow |S| = \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{(n+1)+j} \cdot \beta_j |C_j| \right) + (-1)^{(n+1)+(n+1)} \cdot \beta_{n+1} |A| \quad (\text{附-3})$$

上式中， $|C_j|$ 和 $|A|$ 皆由觀察 S 之定義得之。

將(附-2)代入(附-3)

$$\Rightarrow |S| = \left(\sum_{j=1}^n (-1)^{n+j+1} \cdot \beta_j \cdot (-1)^{n-j} |B_j| \right) + \beta_{n+1} |A| = \left(\sum_{j=1}^n \beta_j \cdot (-|B_j|) \right) + \beta_{n+1} |A| \quad (\text{附-4})$$

(附-1)代入(附-4)

$$\Rightarrow |S| = \left(\sum_{j=1}^n \beta_j x_j |A| \right) + \beta_{n+1} |A| = |A| \cdot \left[\left(\sum_{j=1}^n \beta_j x_j \right) + \beta_{n+1} \right]$$

$$\text{故得到} \left(\sum_{i=1}^n \beta_i x_i \right) + \beta_{n+1} = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n + \beta_{n+1} = \frac{|S|}{|A|}$$

(二)引理附·二

給定一個線性方程族 $S \equiv \{F(\bar{x}, \underline{a}) = 0\}$ ，其中 $F(\bar{x}, \underline{a}) = \left(\sum_{i=1}^n f_i(\underline{a}) x_i \right) + \delta_i$ ，

$\delta = 1$ or 0 (視有沒有通過原點而定)。則因為隱函數定理，聯立方程組

$$\begin{cases} F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_1' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_2' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \vdots \\ \partial_{n-1}' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \end{cases} \text{的解 } \bar{x} \text{ 可用 } \underline{a} \text{ 的函數來表示，且在以 } \underline{a} \text{ 表示的點上，隱函數的 } \frac{\partial x_p}{\partial x_q}$$

有 $\frac{\partial x_p}{\partial x_q} = -\frac{f_q(\underline{a})}{f_p(\underline{a})}$ 的關係，其中 $\frac{\partial x_p}{\partial x_q} = \left(\frac{\partial x_p}{\partial x_q} \right)_{\bar{x} \text{ excluding } x_p, x_q}$

說明：這是在證明定理四·一中會用到的引理。如果令 $\left(\frac{\partial F}{\partial x_p} \right)_{\bar{a}, \bar{x} \text{ excluding } x_p, x_q} = 0$ ，

即可推出 $\frac{\partial x_p}{\partial x_q} = -\frac{f_q(\underline{a})}{f_p(\underline{a})}$ ，但是此時的 \underline{a} 是固定不變的，但隱函數在取偏微的時

候，參數 \underline{a} 並非不變的，所以這個方法不行。因此展開了下面的證明。

證明：

1.換成全微分的討論

由隱函數定理，我們知道存在可以用 \underline{a} 來表示 \bar{x} 值的函數。

$$\Rightarrow x_i = x_i(\underline{a}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{附-5})$$

而在我們討論的情況，只有 x_p 和 x_q 兩特定的 x 是不固定的，其他的 x 皆為固定

的，也就是說，是有給定一定值的，所以(附-5)中，除了 $x_p = x_p(\underline{a})$ 和 $x_q = x_q(\underline{a})$ 為

\underline{a} 的函數外，其他的 $n-2$ 條方程式，皆為 \underline{a} 的限制方程式。

再由隱函數定理，現在我們有 $n-2$ 條不相依的方程式和 $n-1$ 個變數 $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$

，我們可以將其中的 $n-2$ 個變數(應變數)，以剩下的那一個變數的函數表示出來，不妨令 a_{n-1} 為剩下的那個變數(自變數)。故在我們的討論中，只剩下一個自變數，也就是說，對該自變數微分，皆可寫成全微分的型式。

$$\text{所以} \left(\frac{\partial x_p}{\partial x_q} \right)_{\bar{x} \text{ excluding } x_p, x_q} = \frac{dx_p}{dx_q} = \frac{dx_p}{da_{n-1}} \cdot \frac{da_{n-1}}{dx_q} = \left(\frac{dx_p}{da_{n-1}} \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx_q}{da_{n-1}} \right)} \quad (\text{附-6})$$

2.由引理附·一，求 $\left(\frac{dx_p}{da_{n-1}} \right)$ 及 $\left(\frac{dx_q}{da_{n-1}} \right)$

$$\text{由微分鎖鏈律，我們有} \frac{dx_p}{da_{n-1}} = \sum_j^{n-1} \left(\partial_j x_p \cdot \frac{da_j}{da_{n-1}} \right) \quad (\text{附-7})$$

$$\text{及} \frac{dx_q}{da_{n-1}} = \sum_j^{n-1} \left(\partial_j x_q \cdot \frac{da_j}{da_{n-1}} \right) \quad (\text{附-8})$$

其中的 $\frac{da_j}{da_{n-1}}$ ($j=1,2,\dots,n-2$ ， \because 顯然 $\frac{da_{n-1}}{da_{n-1}}=1$) 等 $n-2$ 項可以由將(附-5)對 a_{n-1} 微分後

的方程組扣掉 $\left(\frac{dx_p}{da_{n-1}} \right)$ 和 $\left(\frac{dx_q}{da_{n-1}} \right)$ 兩個方程式而得到

$$\Rightarrow \frac{dx_i}{da_{n-1}} = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\partial_j x_i \cdot \frac{da_j}{da_{n-1}} \right) = 0, \quad i=1,2,\dots,n \wedge i \neq p,q$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n-2} \left(\partial_j x_i \cdot \frac{da_j}{da_{n-1}} \right) + \partial_{n-1} x_i = 0, \quad i=1,2,\dots,n \wedge i \neq p,q \quad (\text{附-9})$$

令爲了方便起見，我們令 $\min(p,q) = m$, $\max(p,q) = M$

$$A = [u_{ij}]_{(n-2)(n-2)} = \begin{bmatrix} \partial_1 x_1 & \partial_2 x_1 & \cdots & \partial_{n-2} x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 x_{m-1} & \partial_2 x_{m-1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{m-1} \\ \partial_1 x_{m+1} & \partial_2 x_{m+1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 x_{M-1} & \partial_2 x_{M-1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{M-1} \\ \partial_1 x_{M+1} & \partial_2 x_{M+1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 x_n & \partial_2 x_n & \cdots & \partial_{n-2} x_n \end{bmatrix}, u_{ij} = \begin{cases} \partial_j x_i, & \text{for } i \leq m-1 \\ \partial_j x_{(i+1)}, & \text{for } m \leq i \leq M-2 \\ \partial_j x_{(i+2)}, & \text{for } M-1 \leq i \end{cases}$$

$$X = [y_i]_{(n-2)1}, y_i = \frac{da_i}{da_{n-1}}$$

$$\Delta = [\varepsilon_i]_{(n-2)1}, \varepsilon_i = \begin{cases} \partial_{n-1}x_i, & \text{for } i \leq m-1 \\ \partial_{n-1}x_{i+1}, & \text{for } m \leq i \leq M-2 \\ \partial_{n-1}x_{i+2}, & \text{for } M-1 \leq i \end{cases}, O = [0]_{(n-2)1}$$

故方程組(附-9)可表為 $AX + \Delta = O$ ，若我們給 $\beta_j = \partial_j x_p$ ，則由引理附·一，我們可以將(附-7)表為兩個行列式的商值。今討論表示(附-7)的情況。依引理附·一，我們設計一個矩陣 S^p

$$S^p = [s^p_{ij}]_{(n-1)(n-1)} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n'} & \varepsilon_1 \\ u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2n'} & \varepsilon_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{n'1} & u_{n'2} & \cdots & u_{n'n'} & \varepsilon_{n'} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n'} & \beta_{n'+1} \end{bmatrix}_{(n'+1)(n'+1)}$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_1 x_1 & \partial_2 x_1 & \cdots & \partial_{n-2} x_1 & \varepsilon_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 x_{m-1} & \partial_2 x_{m-1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{m-1} & \varepsilon_{m-1} \\ \partial_1 x_{m+1} & \partial_2 x_{m+1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{m+1} & \varepsilon_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 x_{M-1} & \partial_2 x_{M-1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{M-1} & \varepsilon_{M-2} \\ \partial_1 x_{M+1} & \partial_2 x_{M+1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{M+1} & \varepsilon_{M-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 x_n & \partial_2 x_n & \cdots & \partial_{n-2} x_n & \varepsilon_{n-2} \\ \beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_{n-2} & \beta_{n-1} \end{bmatrix}_{(n-1)(n-1)}$$

$$= \begin{bmatrix} \partial_1 x_1 & \partial_2 x_1 & \cdots & \partial_{n-2} x_1 & \partial_{n-1} x_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 x_{m-1} & \partial_2 x_{m-1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{m-1} & \partial_{n-1} x_{m-1} \\ \partial_1 x_{m+1} & \partial_2 x_{m+1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{m+1} & \partial_{n-1} x_{m+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 x_{M-1} & \partial_2 x_{M-1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{M-1} & \partial_{n-1} x_{M-1} \\ \partial_1 x_{M+1} & \partial_2 x_{M+1} & \cdots & \partial_{n-2} x_{M+1} & \partial_{n-1} x_{M+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \partial_1 x_n & \partial_2 x_n & \cdots & \partial_{n-2} x_n & \partial_{n-1} x_n \\ \partial_1 x_p & \partial_2 x_p & \cdots & \partial_{n-2} x_p & \partial_{n-1} x_p \end{bmatrix}_{(n-1)(n-1)}$$

$$\Rightarrow s^p_{ij} = \begin{cases} \partial_j x_i, & \text{for } i \leq m-1 \\ \partial_j x_{(i+1)}, & \text{for } m \leq i \leq M-2 \\ \partial_j x_{(i+2)}, & \text{for } M-1 \leq i \leq n-2 \\ \partial_j x_p, & \text{for } i = n-1 \end{cases}$$

由(附-7)及引理附·一的結論

$$\Rightarrow \frac{dx_p}{da_{n-1}} = \sum_j^{n-1} \left(\partial_j x_p \cdot \frac{da_j}{da_{n-1}} \right) = \frac{|S^p|}{|A|}$$

同理若給 $\beta_j = \partial_j x_q$ ，由引理附·一，我們也可將(附-8)表為另一組行列式的商值。

$$\frac{dx_q}{da_{n-1}} = \sum_j^{n-1} \left(\partial_j x_q \cdot \frac{da_j}{da_{n-1}} \right) = \frac{|S^q|}{|A|}$$

$$\text{其中 } S^q = [s^q_{ij}]_{(n-1)(n-1)}, s^q_{ij} = \begin{cases} \partial_j x_i, & \text{for } i \leq m-1 \\ \partial_j x_{(i+1)}, & \text{for } m \leq i \leq M-2 \\ \partial_j x_{(i+2)}, & \text{for } M-1 \leq i \leq n-2 \\ \partial_j x_q, & \text{for } i = n-1 \end{cases}, \text{ 跟 } S^p \text{ 類似。}$$

3.將所得結果代入(附-6)得

$$\begin{aligned} \frac{dx_p}{dx_q} &= \frac{|S^p|}{|A|} \cdot \frac{|A|}{|S^q|} = \frac{|S^p|}{|S^q|} = \frac{|S^p_{ij}|_{n-1}}{|S^q_{ij}|_{n-1}} = \frac{|S^p_{ij}|_{n-1}}{|S^q_{ij}|_{n-1}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^n f_i}{\prod_{i=1}^n f_i} \\ &= \frac{|(fs)^p_{ij}|_{n-1}}{|(fs)^q_{ij}|_{n-1}} \cdot \frac{f_q}{f_p}, \text{ 其中 } \mu = p, q, (fs)^\mu_{ij} = \begin{cases} f_i(\partial_j x_i), & \text{for } i \leq m-1 \\ f_{i+1}(\partial_j x_{i+1}), & \text{for } m \leq i \leq M-2 \\ f_{i+2}(\partial_j x_{i+2}), & \text{for } M-1 \leq i \leq n-2 \\ f_\mu(\partial_j x_\mu), & \text{for } i = n-1 \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{附-10})$$

4.討論 $|(fs)^p_{ij}|_{n-1}$ 和 $|(fs)^q_{ij}|_{n-1}$ 的關係。

由微分的積法則，我們有 $f_i(\partial_j x_i) = \partial_j(f_i x_i) - x_i(\partial_j f_i)$

再由行列式性質，原行列式中的一列乘上一數後加至其他列，不改變行列式之值

$$\Rightarrow |(fs)^q_{ij}|_{n-1} = |(fs')^q_{ij}|_{n-1} \quad (\text{附-11})$$

$$\text{其中 } (fs')^q_{ij} = \begin{cases} (fs)^q_{ij}, & \text{for } i \neq n-1 \\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n [\partial_j(f_i x_i) - x_i(\partial_j f_i)], & \text{for } i = n-1 \end{cases}$$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n [\partial_j (f_i x_i) - x_i (\partial_j f_i)] = \partial_j \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n f_i x_i \right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n (x_i \partial_j f_i) \quad (\text{附-12})$$

$$\text{由 } F(\bar{x}, \underline{a}) = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n f_i x_i \right) + \delta_i = 0 \Rightarrow \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n f_i x_i \right) = -\delta_i - f_p x_p \quad (\text{附-13})$$

$$\text{又由 } \partial_j ' F(\bar{x}, \underline{a}) = \partial_j ' \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n f_i x_i \right) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n [x_i (\partial_j f_i)] = 0 \Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n [x_i (\partial_j f_i)] + x_p (\partial_j f_p) = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n [x_i (\partial_j f_i)] = -x_p (\partial_j f_p) \quad (\text{附-14})$$

(附-13)、(附-14)代入(附-12)

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n [\partial_j (f_i x_i) - x_i (\partial_j f_i)] = \partial_j \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n f_i x_i \right) - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n (x_i \partial_j f_i) = \partial_j (-\delta_i - f_p x_p) - (-x_p \partial_j f_p)$$

因爲 δ_i 是視線性方程有無通過原點而定，值只有 1 和 0，所以對 \bar{a} 微分爲零。

$$\Rightarrow \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^n [\partial_j (f_i x_i) - x_i (\partial_j f_i)] = -\partial_j f_p x_p + x_p (\partial_j f_p) = -[\partial_j f_p x_p - x_p (\partial_j f_p)]$$

$$= -f_p \partial_j x_p \quad (\text{附-15})$$

$$\text{將(附-15)代入 } (fs)'_{ij}^q, \text{ 得 } (fs)'_{ij}^q = \begin{cases} (fs)_{ij}^q, & \text{for } i \neq n-1 \\ -f_p \partial_j x_p, & \text{for } i = n-1 \end{cases} \quad (\text{附-16})$$

又根據 $(fs)''_{ij}$ 的定義，在 $i \neq n+1$ 的時候， $(fs)''_{ij} = (fs)''_{ij}$ ，代入(附-16)

$$\Rightarrow (fs)'_{ij}^q = \begin{cases} (fs)''_{ij}, & \text{for } i \neq n-1 \\ -f_p \partial_j x_p, & \text{for } i = n-1 \end{cases}$$

而由(附-10)，for $i=n-1$ ， $(fs)''_{ij} = f_p (\partial_j x_p)$

$$\Rightarrow \text{行列式 } \left| (fs)''_{ij} \right|_{n-1} = - \left| (fs)'_{ij}^q \right|_{n-1} = - \left| (fs)''_{ij} \right|_{n-1}$$

$$(\text{由(附-11)定義得知 } \left| (fs)''_{ij} \right|_{n-1} = \left| (fs)'_{ij}^q \right|_{n-1})$$

$$\Rightarrow \frac{\left| (fs)_{ij}^p \right|_{n-1}}{\left| (fs)_{ij}^q \right|_{n-1}} = -1 \quad (\text{附-17})$$

5.由(附-17)及(附-12)得到引理的證明

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial x_p}{\partial x_q} \right)_{\bar{x} \text{ excluding } x_p, x_q} = \frac{dx_p}{dx_q} = \frac{\left| (fs)_{ij}^p \right|_{n-1}}{\left| (fs)_{ij}^q \right|_{n-1}} \cdot \frac{f_q}{f_p} = -\frac{f_q}{f_p} \quad \text{得證}$$

三、直四面體之 2-2 分平分曲面參數式

$$x := \frac{-(4q^3p^4 + 4q^2p^3 - 8q^2p^4 - 4q^2p^2 + 2qp^3 + 4qp^2 + q - 2pq - 2q\sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} p^2 - p + \sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4})}{(p^2 - 2p + 1)(2pq - 1)q}$$

$$y := \frac{-(4q^4p^3 - 8p^2q^4 + 2q^3p + 4q^3p^2 - 4q^2p^2 + 4pq^2 - 2pq^2\sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} - 2pq - q + p + \sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4})}{(2pq - 4pq^2 + 2q^3p - 1 + 2q - q^2)p}$$

$$z := \frac{(12qp^2 - 2pq\sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} - 3pq^2\sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} - 3q\sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} p^2 + 8q^2\sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} p^2 + q\sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} - p^2 - 6q^2p^2 - 6pq - q^2 + 12pq^2 - 24q^3p^2 - 24q^2p^3 + 36p^3q^3 - 28q^4p^4 + p\sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} + q^3p + 12q^4p^3 + qp^3 + 12q^3p^4 + 4p^5q^5 - 2q^3\sqrt{q^2 + 6pq - 12pq^2 + 12q^3p^2 + p^2 - 12qp^2 + 12q^2p^3 + 12q^2p^2 - 24p^3q^3 + 4q^4p^4} p^3)}{(12qp(2pq - 4pq^2 + 2q^3p - 1 + 2q - q^2)(p^2 - 2p + 1))}$$

四、Maple 指令

(一)直四面體 1-3 平分曲面推導與繪圖

```
restart:
with(plots):
eq1:=x/p+y/q+z/r=1;
phi:=p*q*r=1/2;
r:=solve(phi,r);
eq1;
eq2:=diff(eq1,p):
eq3:=diff(eq1,q):
sol1:=solve({eq1,eq2,eq3},{x,y,z}):
x:=eval(x,sol1);
y:=eval(y,sol1);
z:=eval(z,sol1);
plot1:=plot3d([x,y,z],p=0.5..1,q=1/(2*p)..1,color=green,1
abels=["x","y","z"],view=[0..1,0..1,0..1]):
display3d({plot1});
```

(二)直四面體 2-2 分平分曲面推導與繪圖

```
restart:
with(plots):with(LinearAlgebra):
A1:=<1,0,0>;
A2:=<0,1,0>;
A3:=<0,0,1>;
P:=<p,0,0>;
M:=<1-m,0,m>;
Q:=<0,q,0>;
N:=<0,1-n,n>;
par1:=<<1,x,y,z>|<1,p,0,0>|<1,1-m,0,m>|<1,0,q,0>>;
par2:=Determinant(par1):
planeMPQ:=%=0;
par3:=solve({planeMPQ,x=0,x+y+z=1},{x,y,z});
N:=<eval(x,par3),eval(y,par3),eval(z,par3)>;
MQ:=Q-M;
A3P:=P-A3;
NO:=-N;
phi:=DotProduct(MQ &x A3P , NO,conjugate=false)=1/2;
```

```

par4:=solve(phi,m):
m:=par4[2];
par5:=diff(planeMPQ,p):
par6:=diff(planeMPQ,q):
par7:=solve({planeMPQ,par5,par6},{x,y,z}):
x:=eval(x,par7);
y:=eval(y,par7);
z:=eval(z,par7);
plot1:=plot3d([x,y,z],p=0..0.5,q=0.1..1,view=[0..1,0..1,0
..1],labels=["x","y","z"]);
plot2:=plot3d([x,y,z],p=0.5..0.99,q=0.1..1/(2.001*p),view
=[0..1,0..1,0..1],labels=["x","y","z"]);
display3d({plot1,plot2});

```

(三)座標變換(其中的 $P1$ 、 $P2$ 、 $P3$ 、 $P4$ 的值必需先輸入)

```

restart:
with(plots):with(LinearAlgebra):with(VectorCalculus):
P:=<x,y,z>;
#P1 is new origin, P2,P3,P4 are (1,0,0)(0,1,0)(0,0,1)
#in new coordinate.
P1:=<p11,p12,p13>;
P2:=<p21,p22,p23>;
P3:=<p31,p32,p33>;
P4:=<p41,p42,p43>;
X:=P3-P1;
Y:=P4-P1;
Z:=P2-P1;
test:=DotProduct(X &x Y,Z):
#To test wheather its right hand coordinate or left hand one.
#Then make sure it is right hand coordinate.
if(test<0) then
X:=P4-P1;
Y:=P3-P1;
end if;
TM:=<X|Y|Z>;
P_prime:=TM.P+P1;

```

五、Lagrange 乘數解包絡方程式

在〈研究過程及方法·四〉的討論，我們知道要解出由 $n-1$ 個參數決定的一族 n

維線性方程，我們需要解聯立方程組(四-4)
$$\begin{cases} F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_i' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}。$$

但在我們之前遇到的平分的問題中，是用三個參數設一平面，再使這個平面平分多面體的體積，因而消去一個參數，來找包絡面。然而，在某些情況，用以消去一個參數的方程式(限制方程式)的型式大多很複雜，使得工作變得很困難。

從另一個角度來思考，有沒有什麼辦法可以直接跳過解這個方程式呢？而偏微分等於零的方程式出現在方程組裡，不禁讓我們聯想到「極值問題」。可不可以把這個問題看成是找極值呢？

於是我們開始去查書。結果在參考文獻十一(Adam)中，發現了一種方法可以求某條件限制下的極值，就是所謂「Lagrange 乘數法」。我們把結果整理如下。

(一)根據 Lagrange 的研究，

定理附·三

我們求一個連續的多變數函數 $G(\bar{u})$ 在有 $\Phi(\bar{u}) = 0$ 的限制下，可以令

$$H(\bar{u}, \lambda) = G(\bar{u}) + \lambda \cdot \Phi(\bar{u}), \text{ 則 } G(\bar{u}) \text{ 的極值發生在 } \begin{cases} \left(\frac{\partial H}{\partial u_i} \right)_{\bar{u} \text{ excluding } u_i, \lambda} = 0 \\ \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{\bar{u}} = \Phi(\bar{u}) = 0 \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

時的 (\bar{u}) ，而 λ 稱為 Lagrange 乘數。

(二)若可以將 u_n 表為 $\psi(\underline{u})$ ，其中 $\Phi(\underline{u} + \psi \hat{e}_n) = 0$ ，(意即

$u_n = \psi(\underline{u}) \Leftrightarrow \Phi(\underline{u} + \psi \hat{e}_n) = 0$)，則求 $G(\bar{u})$ 的極值時，將 $u_n = \psi(\underline{u})$ 代入 $G(\bar{u})$ ，得到

$$G'(\underline{u}), \text{ 再求 } \left(\frac{\partial G'}{\partial u_j} \right)_{\underline{u} \text{ excluding } u_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \text{ 的時候的 } (\underline{u}), \text{ 再由 } u_n = \psi(\underline{u}) \text{ 得}$$

到此時的 (\bar{u}) ，令其為 $(\bar{u}^0) \Rightarrow G(\bar{u})$ 在 (\bar{u}^0) 的時候有極值。

綜合(一)(二)，得到

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial H}{\partial u_i} \right)_{\bar{u} \text{ excluding } u_i, \lambda} = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right)_{\bar{u}} = \Phi(\bar{u}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\partial G'}{\partial u_j} \right)_{\underline{u} \text{ excluding } u_j} = 0, & j = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}$$

也就是方程組(四-4)中的 $\partial_i' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n-1$ 將可用新的方程組

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial a_i} (F + \lambda \Phi) \right)_{\bar{x}, \bar{a} \text{ excluding } a_i, \lambda} = 0, & i = 1, 2, \dots, n \\ \Phi(\bar{a}) = 0 \end{cases} \quad \text{取代。其中 } \Phi(\bar{a}) = 0 \text{ 爲之前用以消去}$$

a_n 的限制方程式。也就是說我們由定理四·一中所證得找尋包絡方程用的聯立

$$\text{方程組(四-4)} \begin{cases} F(\bar{x}, \underline{a}) = 0 \\ \partial_i' F(\bar{x}, \underline{a}) = 0, \quad \text{for } i = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases}, \text{ 可以被改寫如下:}$$

$$\begin{cases} F(\bar{x}, \bar{a}) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_1} + \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_2} + \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial a_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial a_n} + \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial a_n} = 0 \\ \Phi = 0 \end{cases}, \text{ 或記爲 } \begin{cases} F(\bar{x}, \bar{a}) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_i} + \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \Phi = 0 \end{cases} \quad (\text{附-15})$$

$$\text{其中 } \frac{\partial F}{\partial a_i} = \left(\frac{\partial F}{\partial a_i} \right)_{\bar{x}, \bar{a} \text{ excluding } a_i}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial a_i} \right)_{\bar{a} \text{ excluding } a_i}, \quad F(\bar{x}, \underline{a}) \text{ 和 } F(\bar{x}, \bar{a}) \text{ 的關係爲前}$$

者是後者以 $\Phi(\bar{a}) = 0$ 消去 a_n 後的線性方程。

$$\text{由(式四), 我們就可以避免去從 } \Phi(\bar{a}) = 0 \text{ 解出 } a_n, \text{ 從而經由 } \begin{cases} F(\bar{x}, \bar{a}) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial a_i} + \lambda \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial a_i} = 0 \end{cases} \text{ (共}$$

$n+1$ 條方程式)解出 (\bar{a}) 和 λ (共 $n+1$ 個變數, 以 x 的函數來表示), 然後將 (\bar{a}) 代回

$\Phi(\bar{a}) = 0$ 中, 即得到包絡方程式。

例：Lagrange 乘數法解 1-3 分平分曲面。

首先先將平面以參數式表示，得到 $F(x, y, z, p, q, r) = px + qy + rz - 1 = 0$

$$\text{限制方程式爲 } \frac{1}{pqr} - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \Phi(p, q, r) = pqr - 2 = 0$$

爲了讓參數微分後可以簡化，我們令原本參數的倒數爲新的參數。

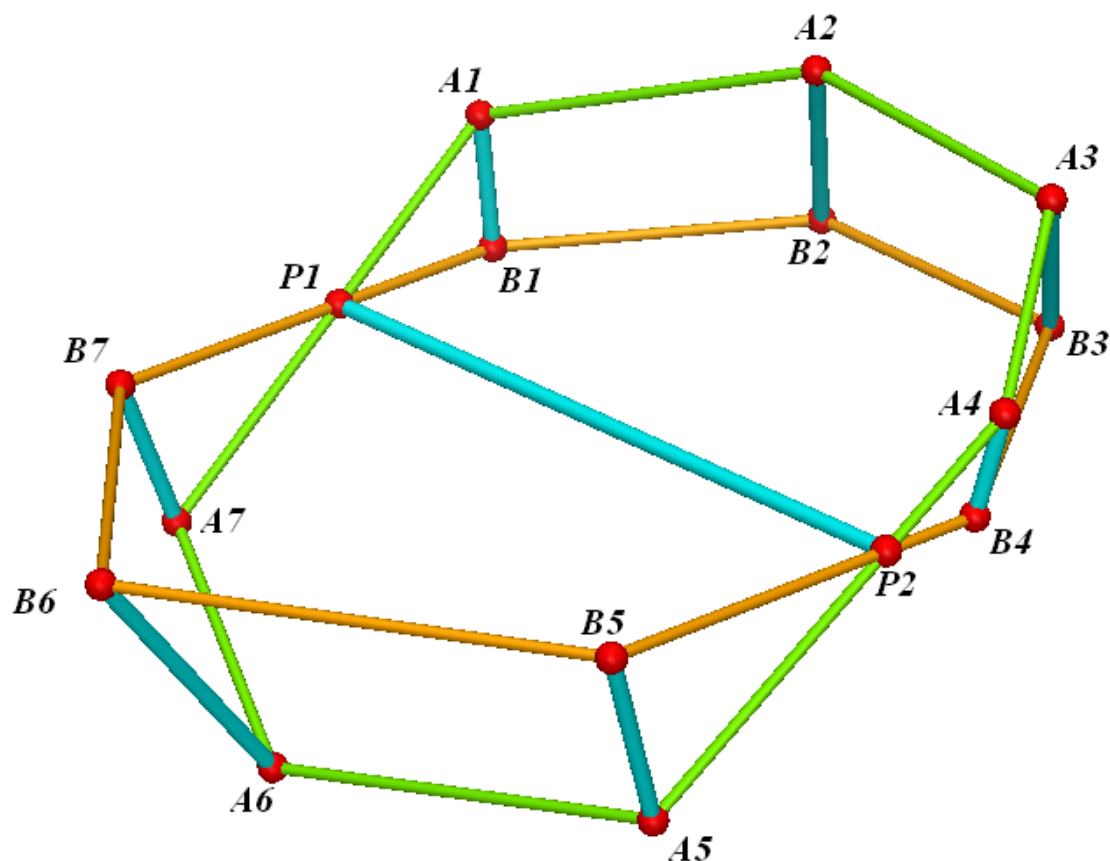
由(附-15)，得到

$$\begin{cases} px + qy + rz - 1 = 0 \\ x + \lambda(qr) = 0 \\ y + \lambda(pr) = 0 \\ z + \lambda(pq) = 0 \\ pqr = 2 \end{cases}, \text{ 消去 } \lambda \Rightarrow \begin{cases} px + qy + rz - 1 = 0 \\ y - \frac{p}{q}x = 0 \\ z - \frac{p}{r}x = 0 \\ pqr = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} px + qy + rz - 1 = 0 \\ px = qy \\ px = rz \\ pqr = 2 \end{cases}$$

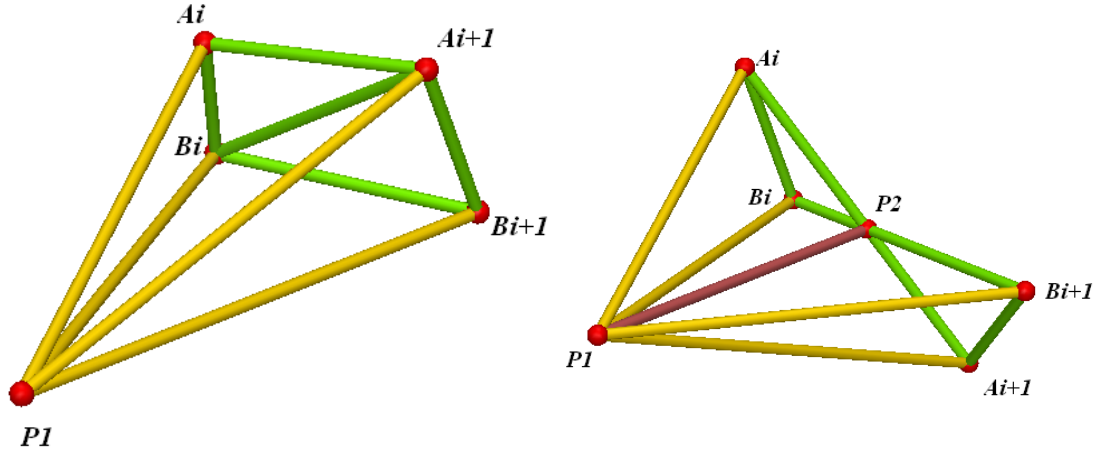
$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3p} \\ y = \frac{1}{3q} \\ z = \frac{1}{3r} \\ pqr = 2 \end{cases}, \text{ 消去 } p, q, r \text{ 後得 } xyz = \frac{1}{54}, \text{ 與之前的做法，結果相同。}$$

六、凸多面體的平分

在研究完四面體的平分後，我們想將同樣方法推廣到空間中的凸多面體，我們發現，要表示多面體的方程式較複雜，且平面截出部分的體積也不好求，所以我們改用另一種新的概念思考。這個概念來自於相關研究中陳和平先生文章提到的方法，在此篇文章的證明中，預先假設一個四面體體積平分面，接著將平面做變動，使截出部分在變動前後增加及減少的體積相等，如此便可確定：新的平面也是體積平分面。



類似地，假設 $B_1B_2\dots B_n$ 為已知的體積平分面與凸多面體的稜之交點， $A_1A_2\dots A_n$ 為變動後的平面與凸多面體的稜之交點，要使 $A_1A_2\dots A_n$ 一為體積平分面，則必須 $A_1A_2\dots A_n$ 在 $B_1B_2\dots B_n$ 上方圍出的體積等於在下方圍出的體積；如果以兩平面交線 $\overline{P_1P_2}$ 為區隔，令上方、下方分別為正體積、負體積，那麼就相當於正負體積之和恰好等於零，利用這個條件，我們可以找到另外一種限制方程式的表示方式。計算正、負體積的方法是將其分成數個部份， $(P_1 - A_iB_iB_{i+1}A_{i+1})_{i=1,2,\dots,n, n+1=1}$ ，再加總。每一部份的的體積分下列兩種情況：



(一) $A_i A_{i+1}$ 都在 $B_1 B_2 \dots B_n$ 上方(或下方)，如上方左圖

$$\begin{aligned}
 V_{P_1-A_i B_i B_{i+1} A_{i+1}} &= V_{P_1-A_i B_i A_{i+1}} + V_{P_1-B_i B_{i+1} A_{i+1}} = \frac{1}{6} \left(\overline{B_i A_{i+1}} \times \overline{B_i A_i} \cdot \overline{B_i P_1} + \overline{B_{i+1} A_{i+1}} \times \overline{B_{i+1} B_i} \cdot \overline{B_{i+1} P_1} \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left(\overline{A_i B_i} \times (\overline{B_i B_{i+1}} + \overline{B_{i+1} A_{i+1}}) \cdot \overline{B_i P_1} + \overline{B_i B_{i+1}} \times \overline{B_{i+1} A_{i+1}} \cdot \overline{B_i P_1} \right) \\
 &= \frac{1}{6} \left((\overline{A_i B_i} + \overline{B_i B_{i+1}}) \times (\overline{B_i B_{i+1}} + \overline{B_{i+1} A_{i+1}}) \cdot \overline{B_i P_1} \right) = \frac{1}{6} \overline{A_i B_{i+1}} \times \overline{B_i A_{i+1}} \cdot \overline{B_i P_1} ,
 \end{aligned}$$

當 $A_i A_{i+1}$ 都在 $B_1 B_2 \dots B_n$ 上方時，上式取正；當 $A_i A_{i+1}$ 都在 $B_1 B_2 \dots B_n$ 下方時，上式取負。因此此式符合要求。

(二) $A_i A_{i+1}$ 一個在 $B_1 B_2 \dots B_n$ 上方，另一個在下方，如上方右圖

$$\begin{aligned}
 &\text{取 } \frac{1}{6} \overline{A_i B_{i+1}} \times \overline{B_i A_{i+1}} \cdot \overline{B_i P_1} \text{ 仍符合所求，因 } \frac{1}{6} \overline{A_i B_{i+1}} \times \overline{B_i A_{i+1}} \cdot \overline{B_i P_1} \\
 &= \frac{1}{6} (\overline{A_i P_2} + \overline{P_2 B_{i+1}}) \times (\overline{B_i P_2} + \overline{P_2 A_{i+1}}) \cdot \overline{B_i P_1} , \text{ 由 } B_i P_2 B_{i+1} \text{ 共線} \Rightarrow \overline{P_2 B_{i+1}} \times \overline{B_i P_2} = 0 \text{ 化簡} \\
 &= \frac{1}{6} (\overline{P_2 A_i} \times \overline{P_2 B_i} \cdot \overline{B_i P_1} + \overline{P_2 B_{i+1}} \times \overline{P_2 A_{i+1}} \cdot \overline{B_i P_1}) = V_{P_1-P_2 A_i B_i} - V_{P_1-P_2 A_{i+1} B_{i+1}} ,
 \end{aligned}$$

即上方體積減去下方體積，也符合要求。

由以上討論，新的限制方程式寫為 $\frac{1}{6} \sum_{i=1}^n \overline{A_i B_{i+1}} \times \overline{B_i A_{i+1}} \cdot \overline{B_i P_1} = 0$ ($B_1 B_2 \dots B_n$ 已知)，

不過，要將此限制方程用於座標方程中也未必會變得簡單，我們只是寫出來作為日後思考研究的方向。

評語

1. 本作品說明四面體體積平分面的包絡與直覺感受到的 hyperbolic paraboloid 的確不同，是創新的發現。
2. 展示的圖形太少，令人無法一眼區分彼此差異的地方，有待改善。