臺灣二００七年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：在 generalized Petersen graph P(n,5)中的 hyper Hamiltonian

學校／作者：臺北市立建國高級中學　　　王國丞
臺北市立建國高級中學　　　高思介

作者簡介

(左為王國丞，右為高思介)

我是高思介，家裡有五個人，爸爸、媽媽和兩個兄弟，興趣是窩在家裡看動畫，或偶爾打打籃球、桌球之類比較感興趣的運動，最討厭要動腦的事情，喜歡看別人解謎的過程，所以也不排斥推理小說，但太厚的例外，個性稍微有一點陰沉，自認可以算是自己知心好友的，半個都沒有，對自己還算稍微有點期許，希望未來能想辦法考上台大不算太差的科系，並且在三十歲以前完成所有學業，找到一個待遇不會太差，而且有優渥退休金的工作，高枕無憂的度過一生。

我是王國丞，現就讀於建國中學二年級，平時喜歡思考些有趣的事物，習慣畫些奇奇怪怪的東西。這一次剛好接觸到有關圖論的事物，在花時間找些資料後也產生了些興趣，因此就花了一些時間去研究這次的題目，並在過程中得到些收穫，也很幸運的做出了些成果，就來參加這次的科展，在做這報告的過程中也獲得些心得，也很高興有這次的機會來充實自己。

在 generalized Petersen graph *P*(*n*,5)中的 hyper Hamiltonian

Hyper Hamiltonian in generalized Petersen graph *P*(*n*,5)

Abstract

The generalized Petersen graph $P(n,k)$, $n \geq 2$ and $1 \leq k \leq n-1$, has vertex-set $\{u_0, u_1, ..., u_{n-1}, v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$ and edge-set $\{u_iu_{i+1}, u_iv_i, v_iv_{i+k}$: $1 \leq i \leq n-1$ with subscripts reduced modulo n}. And we can know that $P(n,5)$ is Hamiltonian if and only if $n \neq 11$ from [2].In this paper it is proved that generalized Petersen graph $P(n,5)$ is Hyper Hamiltonian (A Hamiltonian graph can still be a Hamiltonian graph when any one of the nodes fault) if and only if n is odd and $n \neq 11$.

摘要

Generalized Petersen graph $P(n,k)$，定義爲 n 爲不小於 2 的整數以及 $1 \leq k \leq n-1$，有頂點$\{u_0, u_1, ..., u_{n-1}, v_0, v_1, ..., v_{n-1}\}$，及路徑$\{u_iu_{i+1}, u_iv_i, v_iv_{i+k}$：$1 \leq i \leq n-1\}$。在 [2] 中，我們可以知道 $P(n,5)$ 是 Hamiltonian 等價於當 $n \neq 11$。

在這一篇報告中，我們證明當 generalized Petersen graph $P(n,5)$ 是 hyper Hamiltonian（一種 Hamiltonian graph 再去掉任何一點後，仍然是 Hamiltonian graph）的充要條件是 n 爲不等於 11 的奇數且 $n \geq 7$。

研究報告

壹、研究動機

在最初，因為看了徐力行教授所著作的「沒有數字的數學」，因而開始對其中談到的圖論感到興趣，而後聽了幾次教授演講，對教授提到網路連結中可以容錯的 hyper Hamiltonian 產生興趣，因此去尋找相關資料，了解到 generalized Petersen graph 是 Hamiltonian 的條件已經被發現了，但其中在 Petersen graph 中的 hyper Hamiltonian 仍有許多問題尚待解決,而且教授提到已經做了 $P(n,3)$、$P(n,4)$ 的部分[6],是以決定研究 $P(n,5)$ 中的 hyper Hamiltonian。

貳、研究目的

一、畫出在 Petersen graph $P(n,5)$ 中為 hyper Hamiltonian 的圖形。
二、找出並證明在 Petersen graph $P(n,5)$ 中形成 hyper Hamiltonian 的條件。

參、名詞定義

一、Hamiltonian graph

一個由點和線組成的圖形，可以由任何一點出發，經過所有點後，回到出發點，而且一個點只走過一次的圖形稱之。

二、Hyper Hamiltonian graph

一個 Hamiltonian 圖形去掉任何一點後，還是 Hamiltonian 圖形的圖形稱之。

三、Petersen graph [5]

可表示爲 $P(n,k)$，是一種由兩組點和三組路徑組成的圖形。

點：u_i ，$0 \le i \le n-1$，共 n 個點。

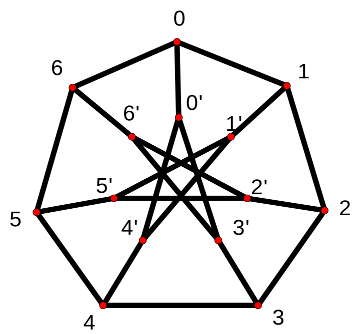
v_i ，$0 \le i \le n-1$，共 n 個點。

路徑：連接 u_iu_{i+1}、u_iv_i、v_iv_{i+k}，$0 \le i \le n-1$ (爲方便，以 modulo n 表示)

u_i亦可寫作 i，v_i 亦可寫作 i'。

使得每個點都有三條通路

例如：$P(7,3)$



四、$P(n,k)-x$

我們以 $P(n,k)-x$ 表示在 $P(n,k)$ 中去掉點 x，

例如：$P(n,5)-0$，$P(n,5)-0'$

肆、研究過程

一、經由參考資料我們可先去掉不可能的情形

定理一：任何的 bipartite graph 都不是 hyper Hamiltonian。

定理二：$P(n,k)$ 是 bipartite 的充要條件是 n 爲偶數且 k 是奇數的 Petersen graph，所以 $P(n,k)$ 不是 hyper Hamiltonian 的充分條件是 n 是偶數且 k 是奇數。

定理三：[4] $P(n,k)$ 是 Hamiltonian graph 的充要條件是當 $n \equiv 5 \pmod{6}$ 時 $P(n,k)$ 不是 $P(n,2)$、$P(n,n-2)$、$P(n,(n-1)/2)$ 或 $P(n,(n+1)/2)$，亦或當 $n \equiv 0 \pmod{4}$ 且 $n \geq 8$ 時 $P(n,k)$ 不是 $P(n,n/2)$。

由上可知，對於 $P(n,5)$ 而言，n 不爲偶數且 $n \neq 11$ 時，$P(n,5)$ 必爲 Hamiltonian，因此只需討論去除一點後的情形。

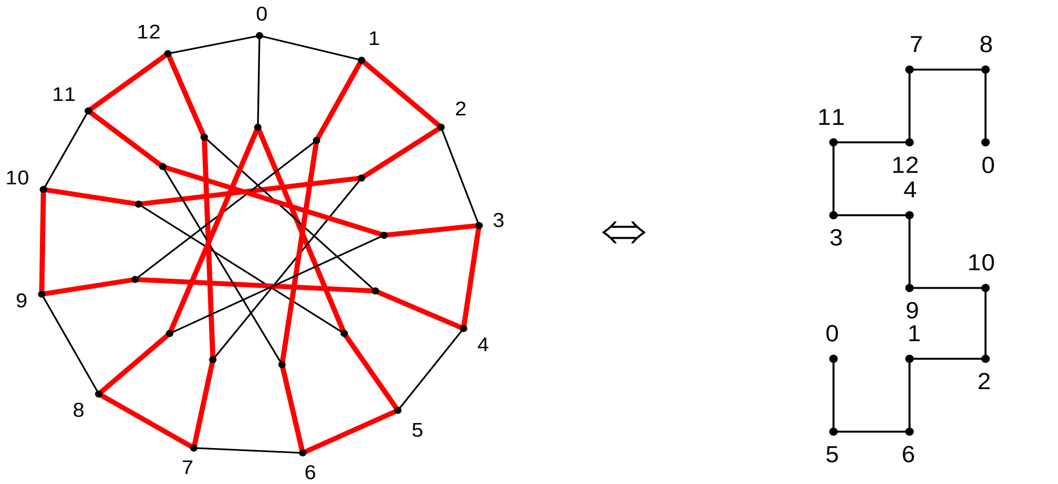
二、轉換 Petersen graph 成格子圖

Petersen Graph 一般的樣子都是表示成兩個同心圓的模式，i 點、i' 點各圍成一圈。

我們爲了方便證明，所以就把 Petersen Graph 的路徑轉換成格子圖：

u_i 到 u_{i+1} 點是橫著走，分別是 $+1$ 往右，-1 往左。

v_i 到 v_{i+k} 點是直著走，分別是 $+k$ 往下，$-k$ 往上。
而轉角的部分則是 u_i 到 v_i 點。
例如 $P(13,5)-0$ 以下圖方式表示



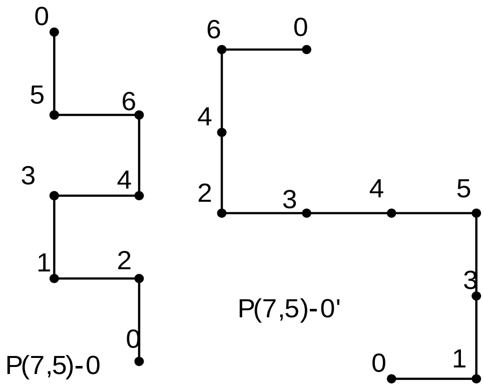
而在格子圖中的點，只要縱向及橫向各經過一次，就代表 u_i，v_i 都已經過一次。

三、親自作圖

由於一開始並不熟悉，故採取直接作圖。
例如：

1.

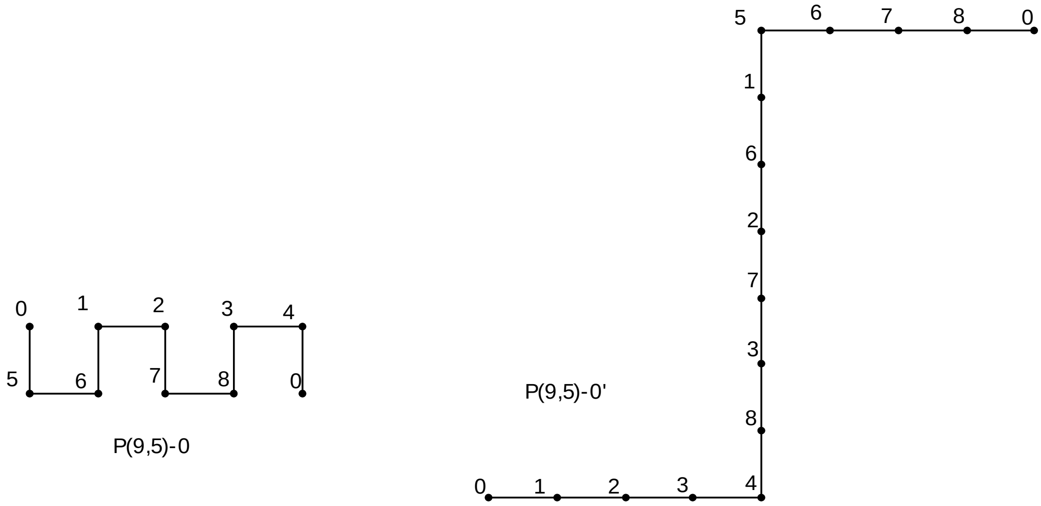
$P(7,5)-0$ 以 0,1, 1’,3’,5’,5,4,3,2, 2’,4’,6’,6,0 的順序作圖是 Hamiltonian cycle
$P(7,5)-0'$ 以 0’,2’,2,1,1’,3’,3,4,4’,6’,6,5,5’,0’的順序作圖是 Hamiltonian cycle



故得 $P(7,5)$是 hyper Hamiltonian

2.

$P(9,5)-0$ 以 0’,4’,4,3,3’,8’,8,7,7’,2’,2,1,1’,6’,6,5,5’,0’的順序作圖是 Hamiltonian cycle
$P(9,5)-0'$ 以 0,1,2,3,4,4’,5’,3’,7’,2’,6’,1’,5’,5,6,7,8,0 的順序作圖是 Hamiltonian cycle

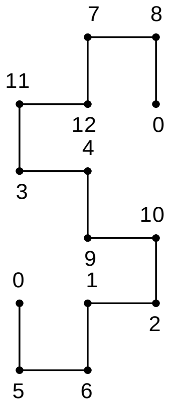


故得 $P(9,5)$是 hyper Hamiltonian

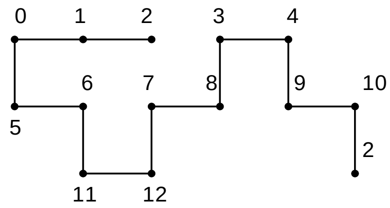
3.

P(13,5)−0 以
0’,8’,8,7,7’,12’,12,11,11’,3’,3,4,4’,9’,9,10,10’,2’,2,1,1’,6’,6,5,5’,0’的順序作圖是 Hamiltonian cycle

P(13,5)−1' 以
2,1,0,0’,5’,5,6,6’,11’,11,12,12’,7’,7,8,8’,3’,3,4,4’,9’,9,10,10’,2’ 的順序作圖是 Hamiltonian cycle



P(13,5)-0



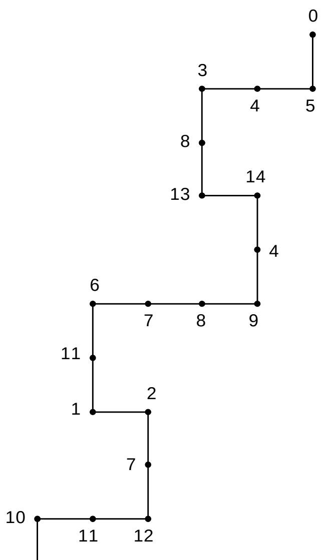
P(13,5)-1'

故得 *P*(13,5) 是 hyper Hamiltonian

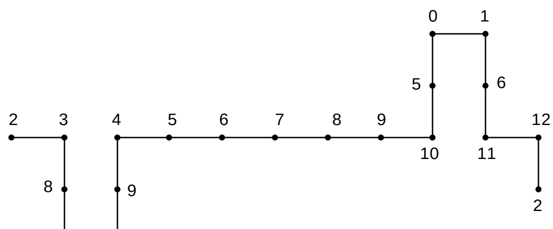
4.

P(15,5)−0 以
0’,5’,5,4,3,3’,8’,13’,13,14,14’,4’,9’,9,8,7,6,6’,11’,1’,1,2,2’,7’,12’,12,11,10,10’,0’的順序作圖是 Hamiltonian cycle

P(15,5)−7''‘ 以
2,3,3’,8’,13’,13,14,14’,9’,4’,4,5,6,7,8,9,10,10’,5’,0’,0,1,1’,6’,11’,11,12,12’,2’ 的順序作圖是 Hamiltonian cycle



P(15,5)-0



P(15,5)-7'

故得 *P*(15,5) 是 hyper Hamiltonian

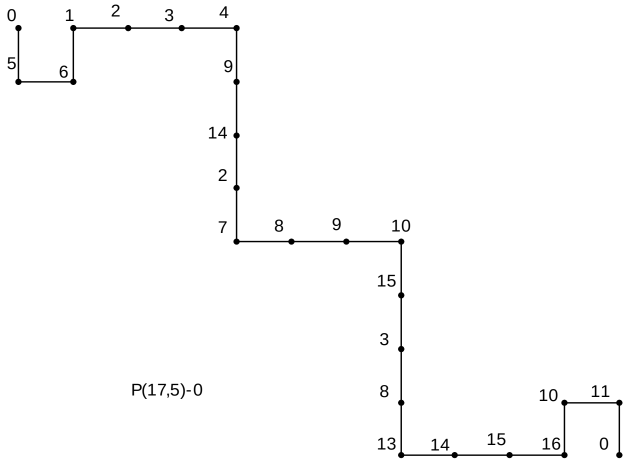
5.

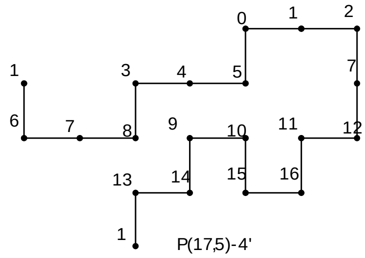
$P(17,5)-0$ 以

0’,5’,5,6,6’,1’,1,2,3,4,4’,9’,14’,2’,7’,7,8,9,10,10’,15’,3’,8’,13’,13,14,15,16,16’,11’,11,12,12’,0’的順序作圖是 Hamiltonian cycle

$P(17,5)-4'$ 以

1’,6’,6,7,8,8’,3’,3,4,5,5’,0’,0,1,2,2’,7’,12’,12,11,11’,16’,16,15,15’,10’,10,9,9’,14’,14,13,13’,1’的順序作圖是 Hamiltonian cycle





故得 $P(17,5)$是 hyper Hamiltonian

四、圖形分類

為了易於找出條件，我們將圖形轉換成格子圖後，尋找形狀類似的圖形歸類，並找出其變化模型。在此，我們將圖形分為去外圈的點($P(n,k)-x$)去內圈的點($P(n,k)-x'$)兩大類，在於其下分 $n\equiv 1 \pmod 5$、$n\equiv 2 \pmod 5$、$n\equiv 3 \pmod 5$、$n\equiv 4 \pmod 5$、$n\equiv 0 \pmod 5$五種狀況。並發現由 n 到 $n+10$ 只需加一段具 10 個點的格子圖。

故由此所推導出的對於 $P(n,5)$ 的一般解。

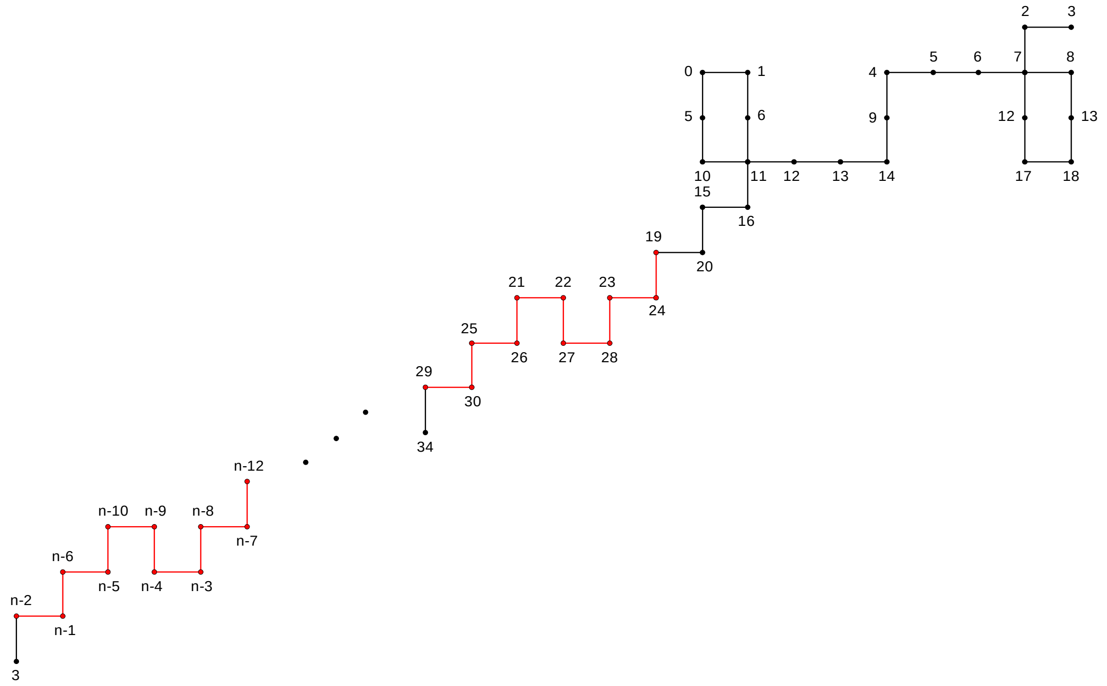
如下圖：

(圖中的紅色部分為每次加 10 個點的部分。如圖(a)中，當 $n=21$ 時，不必走紅色部分，當 $n=31$ 時，則多走紅色部分一次)

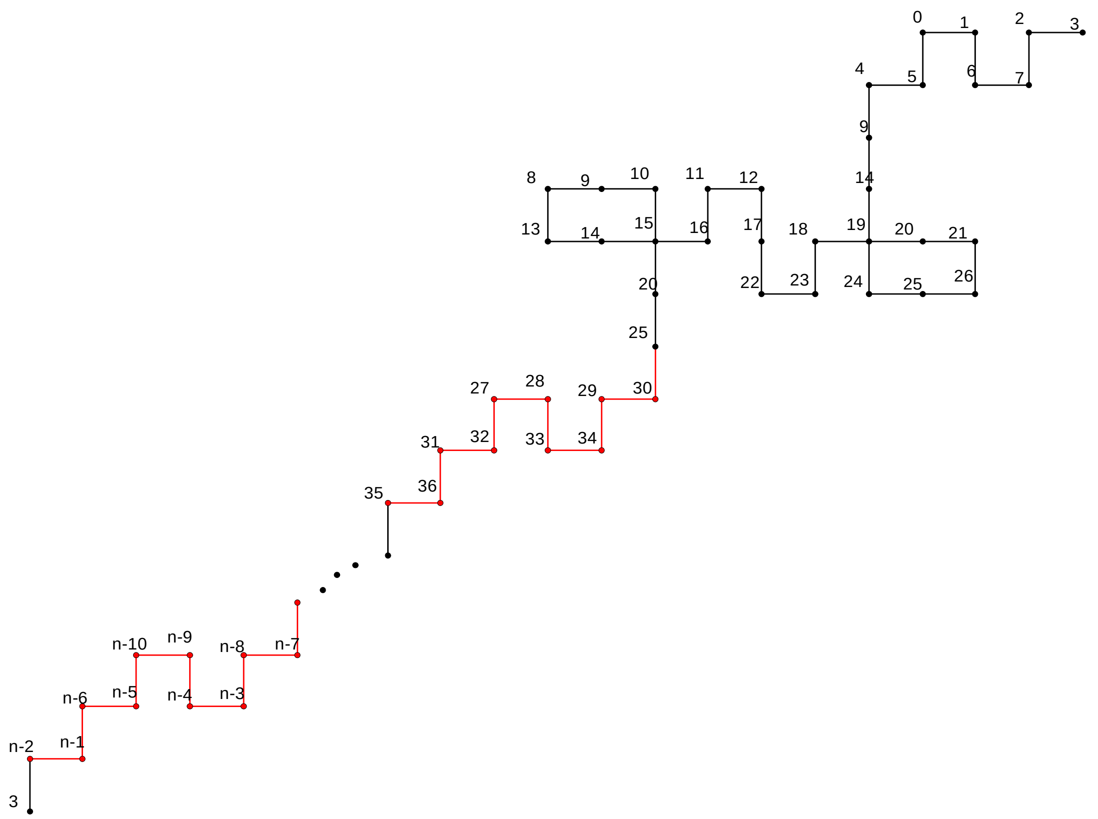
圖 (a) ~ (e) 為去外圈的點，圖 (f) ~ (j) 為去內圈的點。

(a)$n \equiv 1 \pmod{5}$ \ $P(n,5)-9$ \ $n \geq 21$

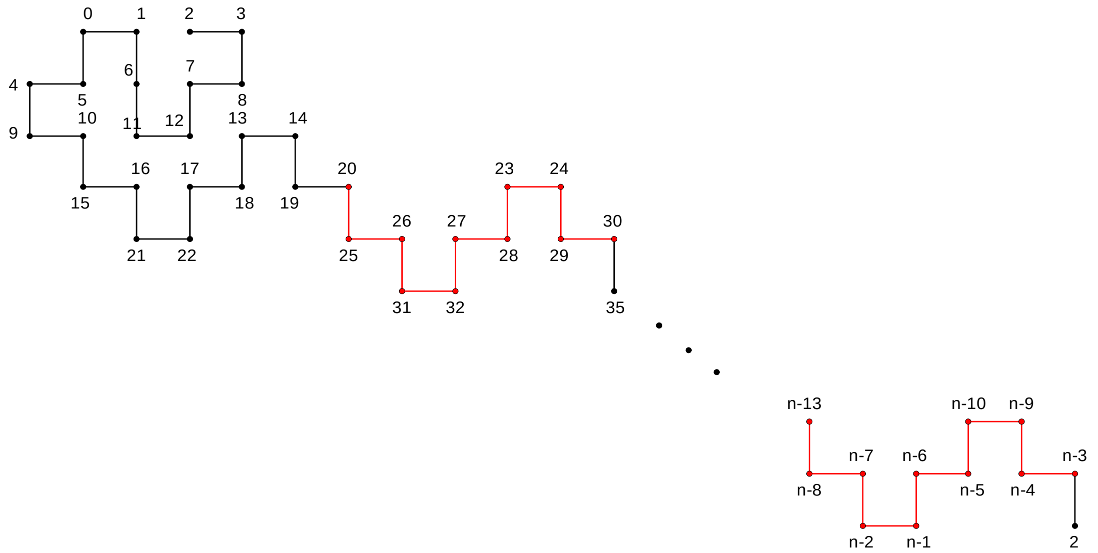
此圖表示 $n \equiv 1 \pmod{5}$且 $n \geq 21$ 時，去掉 9



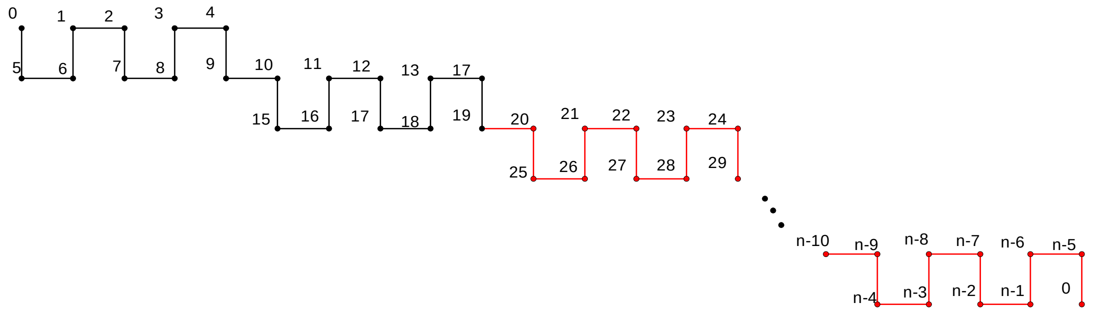
(b) $n \equiv 2 \pmod{5}$ \ $P(n,5)-17$ \ $n \geq 27$



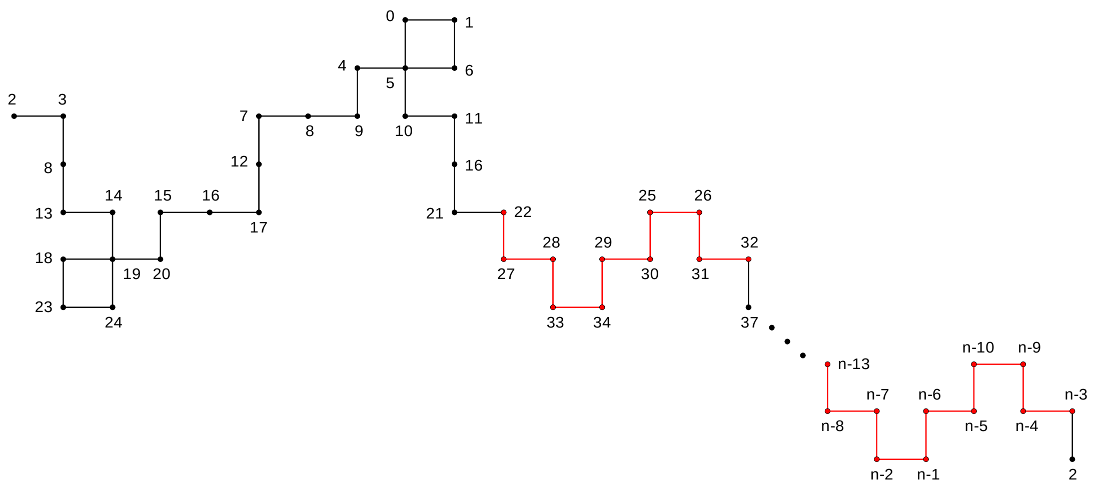
(c) $n \equiv 3 \pmod 5$ \ $P(n,5)$–6 \ $n \geq 23$



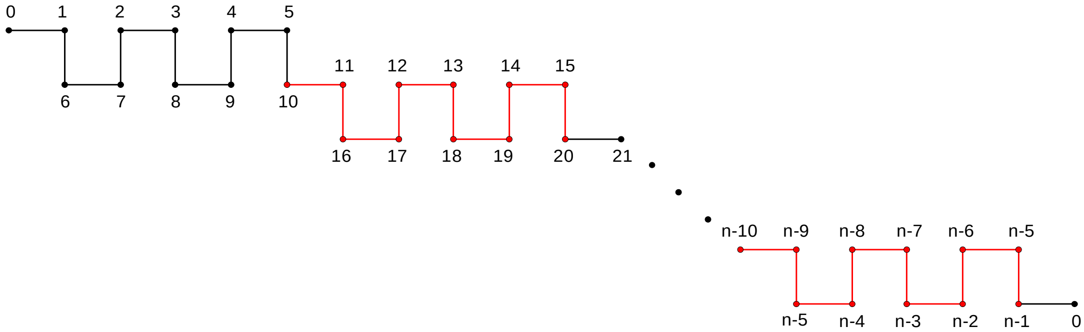
(d) $n \equiv 4 \pmod 5$ \ $P(n,5)$–0 \ $n \geq 19$



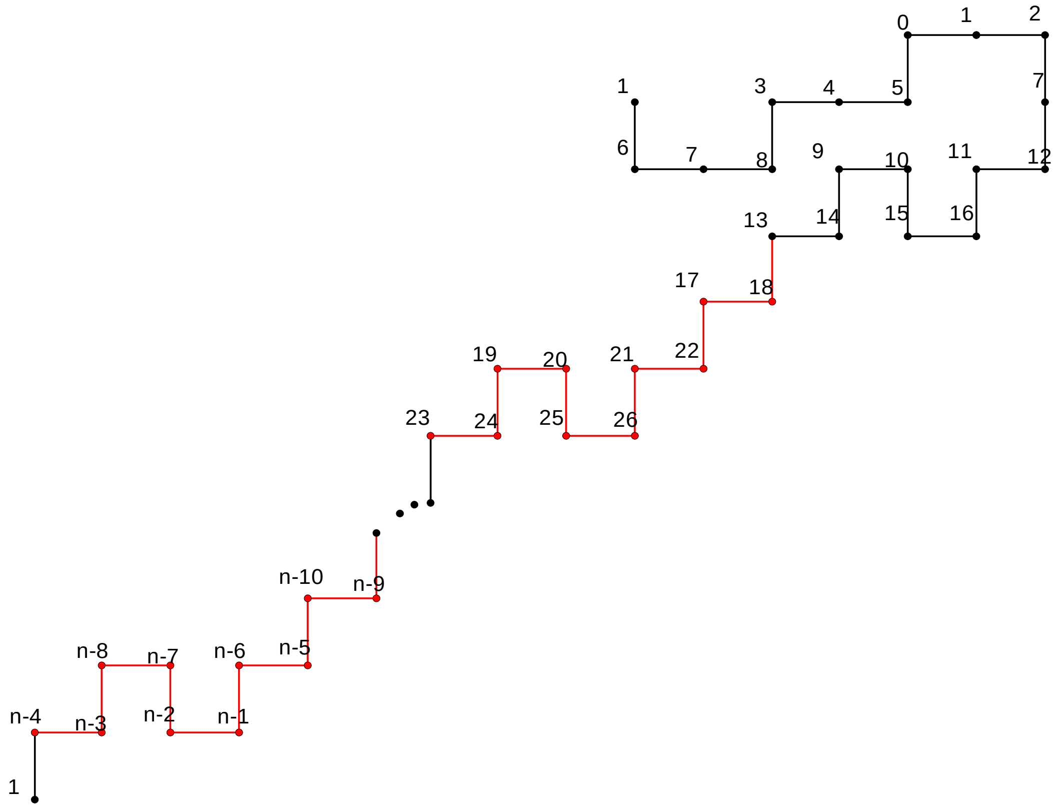
(e) $n \equiv 0 \pmod 5$ \ $P(n,5)$– 12 \ $n \geq 25$



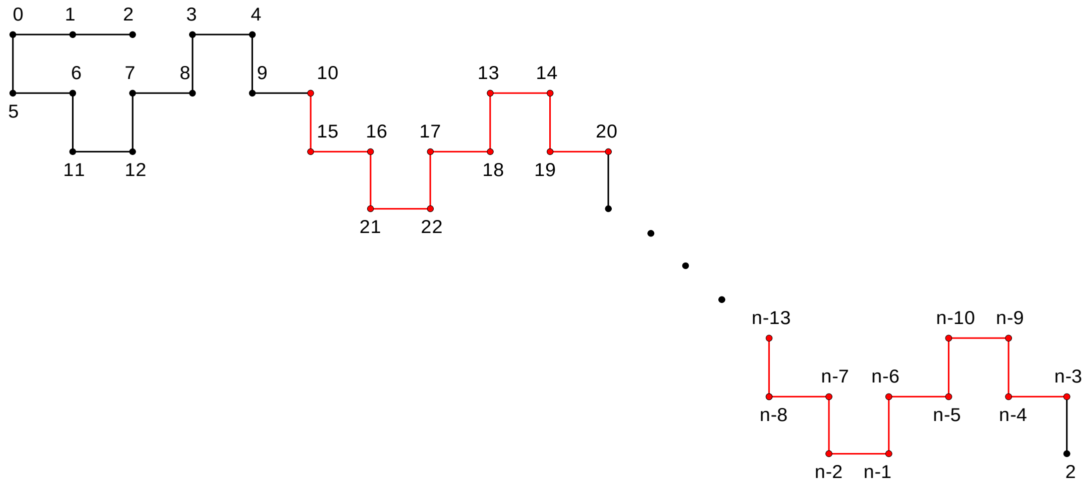
(f) $n \equiv 1 \pmod 5$ \ $P(n,5)-0'$ \ $n \geq 11$



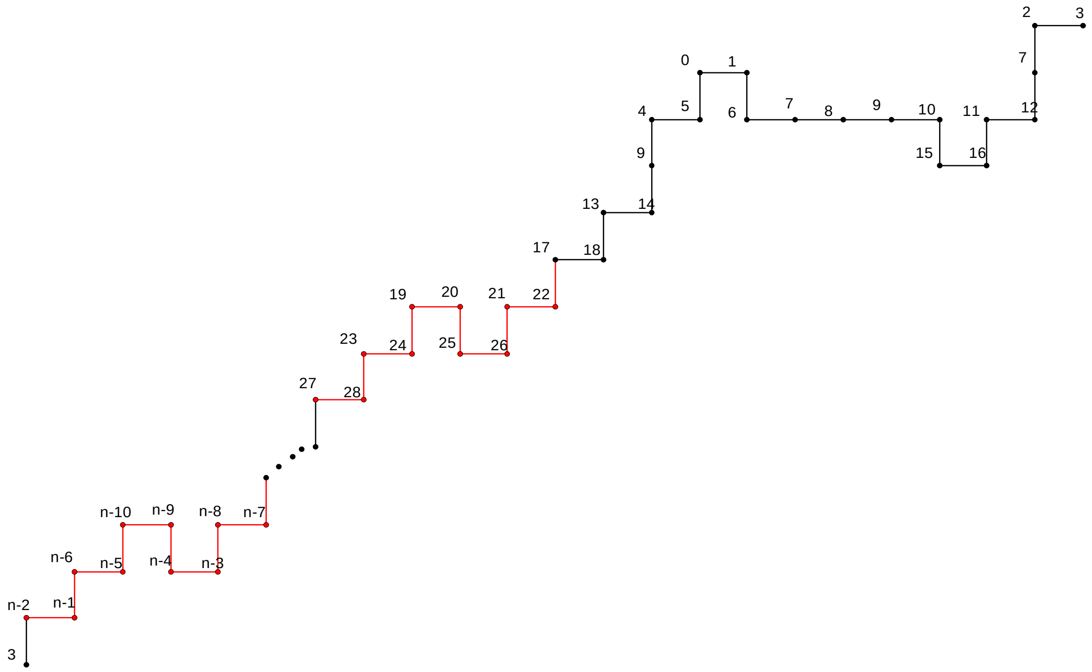
(g) $n \equiv 2 \pmod 5$ \ $P(n,5)-4'$ \ $n \geq 17$



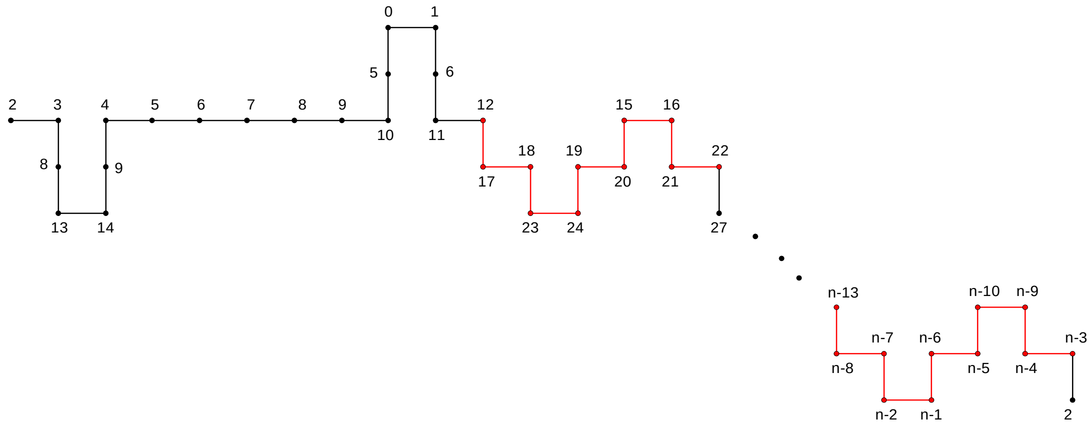
(h) $n \equiv 3 \pmod{5}$ \ $P(n,5)-1'$ \ $n \geq 13$



(i) $n \equiv 4 \pmod{5}$ \ $P(n,5) - 8'$ \ $n \geq 19$



(j) $n \equiv 0 \pmod 5$ \ $P(n,5)-7'$ \ $n \geq 15$



由圖 (a) 到圖 (j) 以及步驟三中所得結果，可得 $P(n,5)$是 hyper Hamiltonian 的充要條件是 n 爲不等於 11 的奇數且 $n \geq 7$。

伍、結果與討論

一、研究結果：

$P(n,5)$是 hyper Hamiltonian 的充要條件是 n 為不等於 11 的奇數且 $n \geq 7$。

二、討論：

1. 在本次研究中，我們發現一般解的圖形為可以累加 10 點的線段（即內外圈各加 10 個點）作擴充，這可能可以為一種向其他的 Petersen graphs 作突破的方式。
2. 當 n 小於一定的值時，將無法使用一般解，有特定的作圖法（例如：n = 7,9,13,15,17），但無法使用一般解的走法的最小值為何則尚無法推廣確定。
3. 之後我們可以採用類似手法去做 $P(n,7)$，$P(n,9)$等，並從中再加以分類。嘗試推廣至更一般化的解法。
4. 我們猜測：當 k 為奇數時，只要 $P(n,k)$是 Hamiltonian 時，$P(n,k)$必為 hyper Hamiltonian。

陸、結論與應用

這 generalized Petersen graphs 中的 hyper Hamiltonian，可以用於網路連結的容錯上，或許可由此導出更加具有效率的方式。

雖然在這次的研究中，我們已經成功證明了 $P(n,5)$ 中形成 Hyper Hamiltonian 的充要條件，但由於仍有部分圖形無法完全的一般化，所以還無法對於任意的 k 進行推廣，不過在這過程中，有發現幾種的擴充方式，可供繼續研究。

柒、參考資料

1. 徐力行　沒有數字的數學　天下文化　2003.9.15
2. BRAIN ALSPACH, The Classification of Hamiltonian Generalized Petersen Graphs, *J . Combinatorial. Theory Ser. B* 34 (1983),293-312。
3. BRAIN ALSPACH, PETER J. ROBINSON, AND MOSHE ROSENFELD,A Result on Hamiltonian Cycles in Generalized Petersen Graphs, *J . Combinatorial. Theory Ser. B* 31 (1981),225-231。
4. KOZO BANNAI, Hamiltonian Cycles in Generalized Petersen Graphs, *J . Combinatorial. Theory Ser. B* 24 (1978),181-188。
5. M. E. WATKINS, A theorem on Tait colorings with an application to the generalized Petersen graphs, *J . Combinatorial. Theory 6* (1969),152-164。
6. TA-CHENG MAI, JENG-JUNG WANG,LIH-HSING HSU, Hyper Hamiltonian Generalized Petersen Graphs, 未發表。

評語

思考完整清楚但創造性稍弱，以科展觀點來看題目比較抽象，請加強應用方向的探討。