臺灣二ＯＯ七年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：幽靈雷劈數的推廣及其性質研究

學校／作者：臺中市立惠文高級中學　　　　賴暐婷

Autobiography

My name is Lai Wet Ting, I am studying in Hui-Wen Senior High School, which is located in Taichung city, the central part of Taiwan. I was born into a small but busy family with only four members: my parents, my young sister and I.

The first year in my high school has been very smooth for me. Without much company from my parents, I learn to be more independent and mature in study and personal affairs. For example, I take care of my schoolwork wholeheartedly. In my pastime I surf the Internet and chat with the pals. We talk about what we see and how we feel about everything in our life. With dear friends around me, I find I’m not alone but surround by plenty of warmth and love. Friends are my best company in my days of leaving my hometown and studying alone in Taichung.

Sometimes, many teachers of my junior high school were wondering why I choose the school which is young and not that well-known. In my opinion, what matters isn’t the school history but the atmosphere and the teachers in the school. Luckily I met Mr. Hsieh, my math teacher. He introduced me into the mysterious world of math. Owing to his craze about math, I learn a lot from him. Besides, I’m inspired to delve deeper on my road of research.

I feel so proud and encouraged to have the honor to participate in this Taiwan International Science Fair. I am looking forward to sharing what I have learned in this research and learning from each other’s work.

Thank you for your attention !

作品名稱：幽靈雷劈數的推廣及其性質研究

作　　者：賴暐婷

中文摘要（Abstract）

幽靈雷劈數：分和平方（立方）再現數

若正整數k的s次方（$s=2,3$）：$k^s=\sum_{j=1}^{s} d_j\cdot N^{(j-1)}$，其中$0\le d_j\le N-1$（$d_1>0$），滿足

$$\begin{cases} k^s\equiv k\equiv \sum_{i=1}^{s} d_i \pmod{(N-1)} \\ 1\le k=\sum_{i=1}^{s} d_i\le N-1 \end{cases},$$

則稱正整數k為「平方（立方）分和再現數（$s=2,3$）」，或「二次與三次完美再現數」。

幽靈雷劈數(重圓數)	完美再現數 (西方數學家所稱的"*Kaprekar Numbers*")
分和平方再現數$k^2=\left[d_2,d_1\right]_N$	平方分和再現數的集合$\mathrm{K}_1(N):k=d_2+d_1$
分和立方再現數$k^3=\left[d_3,d_2,d_1\right]_N$	立方分和再現數的集合$\mathrm{K}_3(N):k=d_3+d_2+d_1$

幽靈雷劈數：分段和差相間平方（立方）再現數

若正整數k的s次方（$s=2,3$）：$k^s=\sum_{j=1}^{s} d_j\cdot N^{(j-1)}$，其中$0\le d_j\le N-1$（$d_1>0$），滿足

$$\begin{cases} k^s\equiv k\equiv \sum_{i=1}^{s}(-1)^{i-1}\cdot d_i \pmod{(N+1)} \\ 1\le k=\sum_{i=1}^{s}(-1)^{i-1}\cdot d_i\le N-1 \end{cases},$$

則稱正整數k為「平方（立方）分段和差相間再現數（$s=2,3$）」。

幽靈雷劈數(重圓數)	完美再現數 (西方數學家所稱的"*Kaprekar Numbers*")
分差平方再現數$k^2=\left[d_1,d_2\right]_N$	平方分差再現數的集合$\mathrm{K}_2(N):k=d_1-d_2$
分段和差相間立方再現數$k^3=\left[d_1,d_2,d_3\right]_N$	立方分段和差相間再現數的集合$\mathrm{K}_4(N):k=d_1-d_2+d_3$

探討創新創意的逆向思維及其結果，研究「平方分和（分差）再現數」的許多性質（結構、數式），主要的關鍵都做了充分討論與推廣，並完整證明重要的性質。提出許多自然、有意義的造法，更提出其與$N\mp1$的質因數分解與在同餘關係之下的種種關聯性，建立與$N\mp1$的單一除數有一對一且為映成的對應關係。更進一步，文中描述了兩個新穎且簡單的方法以產生「立方分和再現數·立方分段和差相間再現數」，研究其存在的必要條件。運用所提出的定理，由$N\mp1$的單一除數，就可較容易尋找到這些再現數的數列。此外，更探討研究了某些形式的再現數，推廣其相關性質並加以研究與探討形形色色的再現數，且任何二進位表示的偶完全數恰好正是「平方（立方）分和再現數」。

（關鍵詞：中國剩餘定理、模運算、偶完全數）

作品名稱：Generalization of Some Various Recurrent Numbers

作　　者：賴暐婷

英文摘要（Abstract）

Number which when chopped into two（three）parts, added / subtracted and squared（cubed）result in the same number. Consider an n-digit number k, square it and add / subtract the right n or $n-1$ digits. If the resultant sum is k, then k is called a Kaprekar number. The set of n-Kaprekar integers is in one-to-one correspondence with the set of unitary divisors of $10^n \mp 1$. If instead we work in binary, it turns out that every even perfect number is n- Kaprekar for some n. We wish to find a general pattern for numbers these numbers cubed or 3-D Kaprekar. We also investigate some 3-D Kaprekar of special forms. In addition, some results relating to the properties of the Kaprekar numbers also presented.

This study indicates the “interesting” and “pragmatic” natures of the research project. We have developed the original results based upon his initiatives and has thus created a new horizon through the research project. This is the proudest achievement for this study. Generalization of Some Curiously Fascinating Integer Sequences：Various Recurrent Numbers！

幽靈雷劈數的推廣及其性質研究

一、研究動機

在 2003 年台灣國際科展之作品說明書「Concatenating Squares」中【9】與 2004第三屆旺宏科學獎「SA3-119：與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解」成果報告書中【10】，就已有令人驚訝的結果。在 2005 第四屆旺宏科學獎「SA4-298：分和累乘再現數產生的方法及其性質探討之推廣與應用」成果報告書中【11】，更是以逆向思維進行研究推廣，創造出許多新穎且引人注意的美麗數式，由原創性的觀點來進行逆向思維的研究。正由於這些再現數充滿奇巧，且與不定方程（代數）、簡單的數整除性分析（數論）以及同餘式理論都有所關聯，我們要發展前所未有的同步關聯與研究分歧，且是最新的發現，更以豐富的想像力、創造力與推理能力提出令人耳目一新的重要結果，得到許多從未見過世面的美麗數式，回眸觀賞時內心充滿了數學之美！

符號說明：

◎ $a \| m$：a 是 m 的單一除數，意即若 $ab = m$ 且 $(a,b)=1$。令 $d' = \left(\dfrac{N \mp 1}{d}\right)$，如果 $d \mid (N \mp 1)$ 且 $\left(d, \dfrac{N \mp 1}{d}\right) = (d, d') = 1$，稱 d 為 $(N \mp 1)$ 的單一除數，以 $d \| (N \mp 1)$ 表示之。

◎ $\mathrm{I}nv^{+1}(d, d')$：若 $d' > 1$ 且 $(d, d') = 1$，則存在 $m \in \mathbb{Z}$ 使得 $d\,m \equiv 1 \pmod{d'}$，稱 m 為 d 對模 d' 的逆，記作 $m = \mathrm{I}nv^{+1}(d, d') = d^{-1} = d^{-1} (\mathrm{mod}\ d')$。

◎ $\Omega(N \mp 1)$：表可以整除 $(N \mp 1)$ 的質因數之個數，則 $(N \mp 1)$ 有 $2^{\Omega(N \mp 1)}$ 或 $3^{\Omega(N \mp 1)}$ 個單一除數（是以文中之研究作為論述）；且 $\mathrm{K}_i(N)$ 的元素數量以符號 $\left|\mathrm{K}_i(N)\right|$ $(i = 1,2,3,4)$ 表示之。

◎ The Extended GCD（同餘性質）
（http://www.hostsrv.com/webmaa/app1/MSP/webm1010/extended_gcd.msp）
必存在整數 m 及 m'，可將 d 與 d' 之最大公因數 $(d, d') = 1$ 表示成整數 m 及 m' 的線性組合：$d\,m + d'\,m' = (d, d') = 1$，所求的整數 m 及 m' 可寫成一般通解型式的線性參數解。

http://www.hostsrv.com/webmaa/app1/MSP/webm1010/extended_gcd.msp
http://mathworld.wolfram.com/KaprekarNumber.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Kaprekar_number
http://www.hkame.org.hk/EduMath/Edumath/v22/00content_22.htm
http://blog.chinaunix.net/u/14418/article_36614.html
http://home.earthlink.net/~mrob/pub/math/seq-kaprekar.html
http://chancezoo.soyuan.net/qixiang/lps.htm
http://www.cs.uwaterloo.ca/journals/JIS/VOL3/iann2a.html

二、研究目的

（一）描述新奇且簡單的方法，產生平方分和再現數必要條件為k與其平方數對模9同餘，證明平方分和再現數k不是模9的同餘類$[0]$，就是同餘類$[1]$，即模9的同餘類集合為$\{[0],[1]\}$，由這兩種同餘類所組成；能有明確的方法與步驟，且方法的實現需結合程式語言與代數軟體套件（微機）。

（二）創新創意且首次整合的新結果，提出平方分差（分和）再現數與質因數分解的關聯性，建立平方分差（分和）再現數k與$(N\mp1)$的單一除數有一對一且為映成的對應關係，且k與其互補數是成對出現！

（三）提出其在同餘關係之下的種種關聯性，將形形色色的再現數結合不定方程、簡單的數整除性分析（數論）以及同餘式理論，以逆向思維的方式研究令人耳目一新的性質，並深入推廣所探討的性質。

（四）能表列形形色色的再現數，且形形色色的再現數之自然密度皆為零，探討形形色色的再現數在其他進位表示的數式，提出扣人心弦的重要結果，以及與二進位下的偶完全數之關聯性。

（五）更深入探討形形色色再現數的相關性質，能完整地證明許多有趣的性質。結合運用所述之定理，輕易且相對快速地將指定範圍內的各種再現數產生出來，建構從未見過世面的美麗數式與金字塔型數列。

（六）完整探討幽靈雷劈數（形形色色再現數），並歸類新發現的某些有趣的幽靈雷劈數（形形色色再現數），並研究某些形式的「立方分和再現數/立方分段和差相間再現數」，推廣其相關的性質並加以討論。

（七）歸納出兩種模式，研究「立方分和再現數·立方分段和差相間再現數」存在的必要條件；由$(N\mp1)$的標準分解式所產生的單一除數數值，運用文中所提方法，可較容易尋找到有趣的「立方分和再現數·立方分段和差相間再現數」，發展前所未有的同步關聯與研究分歧，數學的美麗境界！

三、研究設備及器材

（一）紙筆若干　（二）個人電腦二台　（三）滑鼠・印表機

（四）工程用計算機　（五）程式語言 Visual Basic 6.0　（六）電腦代數軟體套件 Mathcad

四、研究過程與方法

（一）與「幽靈雷劈數（重圓數）/完美再現數（Kaprekar Numbers）」相關的不定方程之代數分析（「數的整除性分析」與「同餘式之理論」）。

	分和（分差）平方再現數/平方分和（分差）再現數	
形形色色再現數	$\mathrm{K}_1(N) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_1(10^n)$	$\mathrm{K}_2(N) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_2(10^n)$
不定方程（定義）	$\begin{cases} k^2 = q \cdot N + r \\ k = q + r \end{cases} \begin{pmatrix} k \ge 1, 0 \le q, r \le N-1 \\ N > 1 \text{且} q, r, N \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$ q,r 的位數可少於 n 位	$\begin{cases} k^2 = q \cdot N + r \\ k = \pm(q - r) \end{cases} \begin{pmatrix} k \ge 1, 0 \le q, r \le N-1 \\ N > 1 \text{且} q, r, N \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$ q,r 的位數可少於 n 位
自然規定	$\{0, N\} \notin \mathrm{K}_1(N), \{1, N-1\} \in \mathrm{K}_1(N)$	$\{0, N\} \notin \mathrm{K}_2(N), \{1, N+1\} \in \mathrm{K}_2(N)$
同餘方程	$k^2 \equiv k \pmod{(N-1)}$	$k^2 \equiv \mp k \pmod{(N+1)} \quad (q > r, q < r)$
方程分析重要結果	$1 \le k, k' \le N-1$ $(k + k', k \cdot k') = (N, r(N-1))$ Chinese remainder theorem/同餘性質	$q > r \ge 1 : k \ge N+1, k' \le -1$ $1 \le q < r : -N+1 \le -k \le -1, 1 \le k' \le N-1$ $(k + k', \lvert k \cdot k' \rvert) = (N, r(N-1))$
整除分析	$k(k-1) = (N-1)q \Rightarrow N-1 \mid k(k-1)$	$k(k \pm 1) = (N+1)q \Rightarrow N+1 \mid k(k \pm 1)$
基本性質	$\lvert \mathrm{K}_1(N) \rvert = 2^{\Omega(N-1)}$（自然密度為零）	$\lvert \mathrm{K}_2(N) \rvert = 2^{\Omega(N+1)}$（自然密度為零）
具體實例	$k \equiv 7777\alpha + 7272\beta + 4950\gamma \pmod{9999}$ $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(0,1), (0,1), (0,1)\}$	$k \equiv 715\alpha + 364\beta + 924\gamma \pmod{1001}$ $(\alpha, \beta, \gamma) \in \{(0, \underline{6}, 1), (0, \underline{10}, 1), (0, \underline{12}, 1)\}$
綜合討論	數的整除性分析與 $N-1$ 的單一除數	數的整除性分析與 $N+1$ 的單一除數

	分和（分段和差相間）立方再現數/立方分和（分段和差相間）再現數
形形色色再現數	$\mathrm{K}_3(N) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_3(10^n)$
不定方程（定義）	$\begin{cases} k^3 = p \cdot N^2 + q \cdot N + r \\ k = p + q + r \end{cases} \begin{pmatrix} k \ge 1, 0 \le p, q, r \le N-1 \\ N > 1 \text{ 且 } p, q, r, N \in \mathbb{N} \end{pmatrix}$ p,q,r 的位數可少於 n 位
自然規定	$\{1, N\} \notin \mathrm{K}_3(N)$
同餘方程	$k^3 \equiv k \pmod{(N-1)}$
方程分析重要結果	$\begin{cases} 1 < k \le N-1 \\ N \ne 1 \pmod 4 \\ k(k-1)(k+1) = (N-1)\left[p(N+1) + q\right] \end{cases}$
整除分析	$N-1 \mid k(k-1)(k+1)$
基本性質	$\lvert \mathrm{K}_3(N) \rvert \le 3^{\Omega(N-1)}$（自然密度為零）
具體實例	$\begin{cases} k \equiv 7777\alpha + 7272\beta + 4950\gamma \pmod{9999} \\ (\alpha, \beta, \gamma) \in \{(0,1,8), (0,1,10), (0,1,100)\} \end{cases}$
綜合討論	在 $N \equiv 1 \pmod 4$ 的條件下之討論與 $\mathrm{K}_3(N) = \varnothing$？

	分和（分段和差相間）立方再現數/立方分和（分段和差相間）再現數
形形色色再現數	$\mathrm{K}_4(N) \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{K}_4(10^n)$
不定方程（定義）	$\begin{cases} k^3 = p \cdot N^2 + q \cdot N + r \\ k = p - q + r \end{cases} \left(\begin{array}{c} k \geq 1, 0 \leq p,q,r \leq N-1 \\ N > 1 \text{ 且 } p,q,r,N \in \mathbb{N}, q < r \end{array} \right)$ p,q,r 的位數可少於 n 位
自然規定	$\{1, N\} \notin \mathrm{K}_4(N)$
同餘方程	$k^3 \equiv k \pmod{(N+1)}$
方程分析重要結果	$\begin{cases} 1 < k \leq N-1 \\ N \neq -1 \pmod 4 \\ k(k-1)(k+1) = (N+1)\left[p(N-1) + q \right] \end{cases}$
整除分析	$N+1 \mid k(k-1)(k+1)$
基本性質	$\left| \mathrm{K}_4(N) \right| \leq 3^{\Omega(N+1)}$（自然密度為零）
具體實例	$\begin{cases} k \equiv 715\alpha + 364\beta + 924\gamma \pmod{1001} \\ (\alpha,\beta,\gamma) \in \{(0,1,6),(0,1,10),(0,1,12)\} \end{cases}$
綜合討論	在 $N \equiv -1 \pmod 4$ 的條件下之討論與 $\mathrm{K}_4(N) = \varnothing$？

（二）主要結果（I）：

$\mathrm{K}_1(N)$ 與 $(N-1)$ 的單一除數之間必可建立一個一對一且為映成的對應關係【3】。

定　義：

若 $(d, d') = 1$，令 $\mathrm{Inv}^{+1}(d, d')$ 代表滿足 $d\,m \equiv 1 \pmod{d'}$ 的最小正整數 m，則 $m = \mathrm{Inv}^{+1}(d, d')$ 成立，若且唯若 $d\,m \equiv 1 \pmod{d'}$ 且 $1 \leq m < d'$。

引理一：

設 $(d, d') = 1$，則

（1）$m = \mathrm{Inv}^{+1}(d, d')$ 且 $m' = \mathrm{Inv}^{+1}(d', d)$，若且唯若 $d\,m + d'm' = d\,d' + 1$，

其中 $m\,(1 \leq m < d')$ 及 $m'\,(1 \leq m' < d)$ 皆為正整數；

（2）更進一步，可得 $k = d\,m = d \cdot \mathrm{Inv}^{+1}(d, d')$ 與 $k' = d'm' = d' \cdot \mathrm{Inv}^{+1}(d', d)$。

定理一：$\mathrm{K}_1(N)$（平方分和再現數）

元素 $k \in \mathrm{K}_1(N)$ 中，若且唯若存在 $(N-1)$ 的某一個單一除數 d，使得

$$k = d \cdot \mathrm{Inv}^{+1}\left(d, \frac{(N-1)}{d} \right);$$

且 k（平方分和再現數）與其互補數是成對出現的，即若 $k \in \mathrm{K}_1(N)$，則 $(N-k) \in \mathrm{K}_1(N)$。

（三）主要結果（II）：

$\mathrm{K}_2(N)$ 與 $(N+1)$ 的單一除數會有一對一且是映成的對應關係。

定　義：

若 $(d,d')=1$，令 $\mathrm{Inv}^{-1}(d,d')$ 代表滿足 $d\,m\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ d')$ 的最小正整數 m，則 $m=\mathrm{Inv}^{-1}(d,d')$ 成立，若且唯若 $d\,m\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ d')$ 且 $m>d'$；而 $\mathrm{Inv}^{-1}(d',d)$ 是滿足 $d'm'\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ d)$ 的最大負整數 m'，則 $m'=\mathrm{Inv}^{-1}(d',d)$ 成立，若且唯若 $d'm'\equiv -1\ (\mathrm{mod}\ d)$ 且 $1\le |m'|<d$。

引理二：

設 $(d,d')=1$，則

（1）$m=\mathrm{Inv}^{-1}(d,d')$ 且 $m'=\mathrm{Inv}^{-1}(d',d)$，若且唯若 $d\,m+d'm'=d\,d'-1$，

其中 m 及 m' 分別是正整數（$m>d'$）與負整數（$1\le |m'|<d$）；

（2）更進一步，可得 $k=d\cdot \mathrm{Inv}^{-1}(d,d')$ 與 $k'=d'\cdot \mathrm{Inv}^{-1}(d',d)$。

定理二：$\mathrm{K}_2(N)$（平方分差再現數）

元素 k_1 與 $k_2=N-k_1$ 在 $\mathrm{K}_2(N)$ 中，若且唯若存在 $(N+1)$ 的某一個單一除數 d，使得

$$k_1=d\cdot \mathrm{Inv}^{-1}\left(d,\frac{(N+1)}{d}\right) \text{或} k_2=d\cdot \mathrm{Inv}^{-1}\left(\frac{(N+1)}{d},d\right)；$$

其中 $\mathrm{Inv}^{-1}\left(d,\frac{(N+1)}{d}\right)$ 與 $\mathrm{Inv}^{-1}\left(\frac{(N+1)}{d},d\right)$ 是一正一負的整數，正整數的部份必須要大於 $\frac{(N+1)}{d}$ 或 d 的最小正整數，而負整數的絕對值必須要小於 d 或 $\frac{(N+1)}{d}$ 的最大負整數，且兩者乘積的絕對值必滿足

$$1\le \left|\mathrm{Inv}^{-1}\left(d,\frac{(N+1)}{d}\right)\cdot \mathrm{Inv}^{-1}\left(\frac{(N+1)}{d},d\right)\right|\le N-1$$

，此外，k_1 與 $k_2=N-k_1$ 是成對的，即若 $k_1\in \mathrm{K}_2(N)$，則 $(N-k_1)\in \mathrm{K}_2(N)$。

◎設 $k\in \mathrm{K}_3(N)$ 或 $k\in \mathrm{K}_4(N)$，則 $(N\mp 1)\,|\,k(k-1)(k+1)$，其中 $1\le k\le N$。因 $N\ne \pm 1\ (\mathrm{mod}\,4)$，故存在著成對且兩兩互質的正整數對 (d,d_1,d_2)，使得 $N\mp 1=d\,d_1\,d_2$，$d\,|\,k$，$d_1\,|\,k-1$，$d_2\,|\,k+1$。

◎因 $d\,|\,k$，對於 $m\in \mathbb{N}$，寫成 $k=d\,m$，又因 $d_1\,|\,d\,m-1$ 且 $d_2\,|\,d\,m+1$，可得

$$d\,m\equiv 1\ \ (\mathrm{mod}\ d_1) \text{ 與 } d\,m\equiv -1\ \ (\mathrm{mod}\ d_2)，$$

且存在 $(m_1,m_2,m_3,m_4)=(d^{-1}\ (\mathrm{mod}\ d_1),d^{-1}\ (\mathrm{mod}\ d_2),d_1^{-1}\ (\mathrm{mod}\ d_2),d_2^{-1}\ (\mathrm{mod}\ d_1))$。

◎可得

$$m\equiv m_1\ \ (\mathrm{mod}\ d_1) \text{ 且 } m\equiv -m_2\ \ (\mathrm{mod}\ d_2)，$$

根據中國剩餘定理（Chinese remainder theorem），可得

$$m\equiv m_1\cdot(m_4\cdot d_2)-m_2\cdot(m_3\cdot d_1)\ \ (\mathrm{mod}\ d_1d_2)。$$

◎且因 $dm=k<N=dd_1d_2\pm1$，所以 m 是滿足上述同餘方程的最小正餘數，因此 $1\le m\le d_1d_2$。

（四）主要結果（III）：

$K_3(N)$ 立方分和再現數產生的方法及其相關性質之探討與推廣。

定理三：$K_3(N)$（構成立方分和再現數存在的必要條件【5】）

如果 $N\ne1\pmod 4$，則集合 $K_3(N)$ 中每一個元素 k 都可以被 $(N-1)$ 的單一除數 d 整除。若我們寫成 $k=dm$，然後我們可以找到某些 $(N-1)$ 的單一除數 d_1 與 d_2，使得 m 滿足

$$N-1=dd_1d_2，d\,\big|\,k，d_1\,\big|\,k-1，d_2\,\big|\,k+1；$$

並且 $d_1d_2=\left(\dfrac{N-1}{d}\right)$，$\left|K_3(N)\right|\le3^{\Omega(N-1)}$ 是成立的。

（五）主要結果（IV）：.

$K_4(N)$ 分段和差相間立方再現數產生的方法及其相關性質之探討與推廣。

定理四：$K_4(N)$（構成分段和差相間立方再現數存在的必要條件）

如果 $N\ne-1\pmod 4$，則集合 $K_4(N)$ 中每一個元素 k 都可以被 $(N+1)$ 的單一除數 d 整除。若我們寫成 $k=dm$，然後我們可以找到某些 $(N+1)$ 的單一除數 d_1 與 d_2，使得 m 滿足

$$N+1=dd_1d_2，d\,\big|\,k，d_1\,\big|\,k-1，d_2\,\big|\,k+1；$$

並且 $d_1d_2=\left(\dfrac{N+1}{d}\right)$，$\left|K_4(N)\right|\le3^{\Omega(N+1)}$ 是成立的。

（六）闡釋「定理三」在 $N\equiv1\pmod 4$ 的條件下與「定理四」在 $N\equiv-1\pmod 4$ 的條件下所進行的推算結果：$\left|K_3(N)\right|\le3^{\Omega(N-1)}$ 與 $\left|K_4(N)\right|\le3^{\Omega(N+1)}$ 分別對「定理三」及「定理四」仍是成立的。

說　　明	「定理三」與「定理四」提供了尋找 $K_3(N)$ 與 $K_4(N)$ 中所有元素 k 的必要條件，藉此條件可較容易找到「立方分和再現數‧立方分段和差相間再現數」，可用來尋找 $\left|K_3(N)\right|$ 和 $\left|K_4(N)\right|$ 之上限。	
	$N\ne1\pmod 4\Rightarrow\left|K_3(N)\right|$ 之上限	$N\ne-1\pmod 4\Rightarrow\left|K_4(N)\right|$ 之上限
$d\,\\|\,(N\mp1)$	首先，根據質因數分解式（質數乘冪 $p_i^{a_i}$ 為 $N\mp1$ 之構成要素）：$N\mp1=\prod_{i=1}^{t}p_i^{a_i}$，則 $d\,\\|\,(N\mp1)$（若且唯若 d 為 $N\mp1$ 之構成要素的乘積且 $d\ge1$），令 $\Omega(N\mp1)=t$，依序根據「定理三」與「定理四」：若 $N\ne\pm1\pmod 4$，則 $\left|K_{3,4}(N)\right|\le3^{\Omega(N\mp1)}$。	
綜合討論	在 $N\equiv1\pmod 4$ 的條件下定義 $K_3(N)$	在 $N\equiv-1\pmod 4$ 的條件下定義 $K_4(N)$
	◎存在著成對且兩兩互質的正整數對 (d,d_1,d_2)，使得 $N\mp1=dd_1d_2$，$d\,\big|\,k$，$d_1\,\big|\,k-1$，$d_2\,\big|\,k+1$。如上所述進行推算，得 $\left|K_{3,4}(N)\right|\le3^{\Omega(N\mp1)}$ 正確無誤，若且唯若 d 為偶數。	

	◎d 為奇數，對某些 $\nu \ge 2$ 且 $2^{\nu} \parallel (N \mp 1)$，得 $(2^{\nu-1} \parallel d_1, 2 \parallel d_2)$ 或 $(2 \parallel d_1, 2^{\nu-1} \parallel d_2)$，且 $d\,m \equiv 1 \pmod{d_1}$ 與 $d\,m \equiv -1 \pmod{d_2}$ 都是成立的。因 $(d,d_1)=(d,d_2)=1$，m 可由模 $[d_1,d_2]$ 計算得出唯一值。 ◎此時，$d \parallel (N \mp 1)$ 且 d_1 與 d_2 均是 2 的某個乘冪再乘上 $N \mp 1$ 的一個奇單一除數。因此，依序在 $N \equiv \pm 1 \pmod 4$ 的條件下，$\left\| \mathrm{K}_{3,4}(N) \right\| \le 3^{\Omega(N \mp 1)}$ 仍是可成立的。

五、研究結果

（一）表列 $\mathrm{K}_1(N)$ 中的元素：以數的整除性分析研究探討「定理一」之完全性：

$$\mathrm{K}_1(N) = \left\{ d \cdot \mathrm{Inv}^{+1}(d, d') : d\,d' = N-1,\ (d,d')=1 \right\} ,$$

證明平方分和再現數 $k\,(1 \le k \le N-1)$ 與 $N-1\ (N>1, N \in \mathbb{N})$ 的單一除數 d 之間必定可建立一個一對一且為映成的對應關係，且 k 與其互補數是成對出現的，其和為 N 。

（二）平方分和再現數 k 與其平方對模 9 是同餘的，對模 9 同餘類的集合即為 $\{[0],[1]\}$。因此，$\mathrm{K}_1(N)$ 就是由這兩種同餘類所組成，且與去 9 驗算法（略 9 法）也很有關係。

（三）表列 $\mathrm{K}_2(N)$ 中的元素：以數的整除性分析研究探討「定理二」之完全性，證明平方分差再現數 k 與 $N+1$ 的單一除數 d 之間亦必可建立一個一對一且為映成的對應關係，且 k 與其互補數是成對出現的。

（四）歸納出兩種模式，研究「立方分和再現數/立方分段和差相間再現」存在的必要條件。由 $(N \mp 1)$ 的標準分解式所衍生的單一除數數值，運用「定理三」與「定理四」，可表列 $\mathrm{K}_3(N)$ 與 $\mathrm{K}_4(N)$ 中的元素。

（五）高原創性與逆向思維的創意：應用「定理一」、「定理二」、「定理三」、「定理四」可應用於研究某些形式的再現數，形形色色的再現數在其他進位下的表示，會有究極的重要性質與應用論述。

（六）一般而言，$\Omega(N \mp 1)$ 的值越大，則其元素與非元素的比例就愈接近某一比率數值，其「比率」可視為 $\left| \mathrm{K}_{3,4}(10^n) \right| / 3^{\Omega(N \mp 1)}$ 的比值。使用「定理三」、「定理四」時，發現有些 $N \mp 1$ 之單一除數的三元數對會依序產生屬於 $\mathrm{K}_{3,4}(N)$ 的正整數 k ，但是其它的三元數對依序所產生正整數 k 只能使得 $k^3 = p \cdot N^2 + q \cdot N + r$ ，但卻 $p \pm q + r = k + (N \mp 1)$，意即其中的 p 、q 與 r 是不會產生 $p+q+r=k$ 的關係。

六、討論及其應用

（一）性質一：「平方分和(分差)再現數」有趣的規律性（結構、計數）。

（1）當 $n\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,2)$ 時，則 $\mathrm{K}_2(10^n)$ 中的元素 k 至少有一個是 11 的倍數；
當 $n\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,4)$ 時，則 $\mathrm{K}_2(10^n)$ 中的元素 k 至少有一個是 101 的倍數。
（以 $n\in\mathbb{N}$ 分類 $\mathrm{K}_1(10^n)$ 與 $\mathrm{K}_2(10^n)$ 中的元素 k）

（2）當 $n\in\mathbb{N}$ 時，則 $\mathrm{K}_1(10^n)$ 中的元素 k 至少有一個必是 9 的倍數；
當 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2)$ 時，則 $\mathrm{K}_1(10^n)$ 中的元素 k 至少有一個是 11 的倍數；
當 $n\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4)$ 時，則 $\mathrm{K}_1(10^n)$ 中的元素 k 至少有一個是 101 的倍數。

（3）所有 $\mathrm{K}_1(10^n)$ 與 $\mathrm{K}_2(10^n)$ 中的元素 k，所對應的 q 必是偶數，則 $\mathrm{K}_1(10^n)$ 與 $\mathrm{K}_2(10^n)$ 中所對應的 q 之個位數字分別只能是 $\{0,4,8\}$ 與 $\{0,2,6\}$；

（4）所有 $\mathrm{K}_1(10^n)$ 與 $\mathrm{K}_2(10^n)$ 中的元素 k，與所對應的 r 必具有相同的奇偶性；
當 $\mathrm{K}_1(10^n)$ 與 $\mathrm{K}_2(10^n)$ 中所對應的 r 為奇數（偶數）時，則其所對應的 r 之個位數字皆是 $\{1,5,9\}$（$\{0,4,6\}$）。

（二）性質二：「模 9 運算的主要結果與應用」及「平方分和再現數 $\mathrm{K}_1(10^n)$ 產生的方法」。

（1）平方分和再現數 k 滿足同餘式 $k^2\equiv k\ (\mathrm{mod}\,(10^n-1))$，可推得 $k^2\equiv k\ (\mathrm{mod}\,9)$ 是成立的；且若 $t\equiv k\ (\mathrm{mod}\,9)$，則 $t\in\{[0],[1]\}$。

（2）根據定義之方程找所有可能的 r 值，以 $r(n)=\dfrac{k(10^n-k)}{10^n-1}$ 表示，其中 $n=1,2,\ldots,n_{\max}$；使得 $k\in\mathrm{K}_1(10^n)$ 之條件為 $r(n)\in\mathbb{N}$，而 $n_{\max}$ 的值可由大於或等於 $2\log_{10}k$ 的最小正整數來加以決定之【8】。

（三）性質三：「定理一、定理二」的完全性，某些有趣的「平方分和(分差)再現數」影蹤以「定理一、定理二」來尋找金字塔型數列【4】。

（1）

$\mathrm{K}_1(N)$ $N-1=d\,d'$	$10^{9n-2}-1=\left(\dfrac{10^{9n-2}-1}{9}\right)\cdot 9$	$(m,m')=\left(4,\dfrac{5\cdot 10^{9n-2}+4}{9}\right)$
(k,k')	$\left\langle \left\{4^{(9n-2)}\right\}=\left\{\underbrace{444\cdots444}_{(9n-2)\text{個}4}\right\}\Leftrightarrow\left\{\underbrace{555\cdots555}_{(9n-3)\text{個}5}6\right\}\in\mathrm{K}_1(10^{9n-2})\right\rangle$	
(k^2,k'^2)	$\begin{cases}\left[\dfrac{4\cdot(10^{9n-2}-1)}{9}\right]^2=\left[\dfrac{16\cdot 10^{9n-2}-52}{81},\dfrac{20\cdot 10^{9n-2}+16}{81}\right]_{10^{9n-2}}\\ \left[\dfrac{5\cdot 10^{9n-2}+4}{9}\right]^2=\left[\dfrac{25\cdot 10^{9n-2}+20}{81},\dfrac{20\cdot 10^{9n-2}+16}{81}\right]_{10^{9n-2}}\end{cases}$	

$\mathrm{K}_1(N)$ $N-1=d\,d'$	$10^{9n-4}-1=\left(\dfrac{10^{9n-4}-1}{9}\right)\cdot 9$	$(m,m')=\left(2,\dfrac{7\cdot 10^{9n-4}+2}{81}\right)$
(k,k')	$\left\langle \left\{ 2^{(9n-4)} \right\} = \left\{ \underbrace{222\cdots 222}_{(9n-4)\text{個}2} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \underbrace{777\cdots 777}_{(9n-5)\text{個}7} 8 \right\} \in \mathrm{K}_1(10^{9n-4}) \right\rangle$	
(k^2,k'^2)	$\begin{cases} \left[\dfrac{2\cdot(10^{9n-4}-1)}{9}\right]^2 = \left[\dfrac{4\cdot 10^{9n-4}-22}{81},\dfrac{14\cdot 10^{9n-4}+4}{81}\right]_{10^{9n-4}} \\ \left[\dfrac{7\cdot 10^{9n-4}+2}{9}\right]^2 = \left[\dfrac{49\cdot 10^{9n-4}+14}{81},\dfrac{14\cdot 10^{9n-4}+4}{81}\right]_{10^{9n-4}} \end{cases}$	

$\mathrm{K}_1(N)$ $N-1=d\,d'$	$10^{9n-8}-1=\left(\dfrac{10^{9n-8}-1}{9}\right)\cdot 9$	$(m,m')=\left(1,\dfrac{8\cdot 10^{9n-8}+1}{81}\right)$
(k,k')	$\left\langle \left\{ 1^{(9n-8)} \right\} = \left\{ \underbrace{111\cdots 111}_{(9n-8)\text{個}1} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \underbrace{888\cdots 888}_{9(n-1)\text{個}8} 9 \right\} \in \mathrm{K}_1(10^{9n-8}) \right\rangle$	
(k^2,k'^2)	$\begin{cases} \left[\dfrac{10^{9n-8}-1}{9}\right]^2 = \left[\dfrac{10^{9n-8}-10}{81},\dfrac{8\cdot 10^{9n-8}+1}{81}\right]_{10^{9n-8}} \\ \left[\dfrac{8\cdot 10^{9n-4}+1}{9}\right]^2 = \left[\dfrac{64\cdot 10^{9n-8}+8}{81},\dfrac{8\cdot 10^{9n-8}+1}{81}\right]_{10^{9n-8}} \end{cases}$	

（2）

<table>
<tr>
<td>$K_1(N)$
$N-1=d\,d'$</td>
<td>$k\in K_1(4M^2)$
$4M^2-1=(2M-1)(2M+1)$
$\Rightarrow (m,m')=(M,M)$</td>
</tr>
<tr>
<td>(k,k')
(k^2,k'^2)</td>
<td>$\begin{cases} M(2M\mp1)\in K_1(4M^2) \\ \left[M(2M\mp1)\right]^2=\left[M(M\mp1),M^2\right]_{4M^2} \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$(M,N-1)$
(k,k')
(k^2,k'^2)</td>
<td>$\begin{cases} \left[2^{n-1},2^{2n}-1,2^{n-1}\cdot(2^n-1),2^{n-1}\cdot(2^n+1)\in K_1(2^{2n})\right] \\ \leftrightarrow\left[2^{n-1}\cdot(2^n\mp1)\right]^2=\left[2^{n-1}(2^{n-1}\mp1),2^{2n-2}\right]_{2^{2n}} \end{cases}$
$\begin{cases} \left[5\cdot10^{n-1},10^{2n}-1,5\cdot10^{n-1}(10^n-1),5\cdot10^{n-1}(10^n+1)\in K_1(2^{2n})\right] \\ \leftrightarrow\left[5\cdot10^{n-1}(10^n\mp1)\right]^2=\left[25\cdot10^{2n-2}\mp5\cdot10^{n-1},25\cdot10^{2n-2}\right]_{10^{2n}} \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td>$(M,N-1)$
(k,k')
(k^2,k'^2)</td>
<td>$k\in K_1(256M^4)$
$256M^4-1=\overbrace{(4M-1)\underbrace{(4M+1)(16M^2+1)}}\Rightarrow(m,m')=(M,48M^3\mp8M^2+M)$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\begin{cases} \quad M(4M\mp1)(16M^2+1)\in K_1(256M^4) \\ \Leftrightarrow\left[M(4M\mp1)(16M^2+1)\right]^2=\left[16M^4\mp8M^3+3M^2\mp M,48M^4\mp8M^3+M^2\right]_{256M^4} \\ \quad (4M\pm1)(48M^3\mp8M^2+M)\in K_1(256M^4) \\ \Leftrightarrow\left[(4M\pm1)(48M^3\mp8M^2+M)\right]^2=\left[144M^4\pm24M^3-5M^2\pm M,48M^4\mp8M^3+M^2\right]_{256M^4} \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 25\cdot10^{n-2}\ (n\ge2),10^{4n}-1,25\cdot10^{n-2}(10^n-1)(10^{2n}+1) \\ (10^n+1)\cdot(75\cdot10^{3n-2}-50\cdot10^{2n-2}+25\cdot10^{n-2})\in K_1(10^{4n}) \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{l} 25\cdot10^{n-2}\ (n\ge2),10^{4n}-1,25\cdot10^{n-2}(10^n+1)(10^{2n}+1) \\ (10^n-1)\cdot(75\cdot10^{3n-2}+50\cdot10^{2n-2}+25\cdot10^{n-2})\in K_1(10^{4n}) \end{array}\right] \end{cases}$
$\begin{cases} \quad\left[25\cdot10^{n-2}(10^n\mp1)(10^{2n}+1)\right]^2 \\ =\left[625\cdot10^{4n-4}\mp125\cdot10^{3n-3}+1875\cdot10^{2n-4}\mp25\cdot10^{n-2},1875\cdot10^{4n-4}\mp125\cdot10^{3n-3}+625\cdot10^{2n-4}\right]_{10^{4n}} \\ \quad\left[(10^n\pm1)\cdot(75\cdot10^{3n-2}\mp50\cdot10^{2n-2}+25\cdot10^{n-2})\right]^2 \\ =\left[5625\cdot10^{4n-4}\pm375\cdot10^{3n-3}-3125\cdot10^{2n-4}\pm25\cdot10^{n-2},1875\cdot10^{4n-4}\mp125\cdot10^{3n-3}+625\cdot10^{2n-4}\right]_{10^{4n}} \end{cases}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$\left\langle\begin{array}{l} 45,4\underline{9}5\underline{0},4\underline{99}5\underline{00},4\underline{999}5\underline{000},4\underline{9999}5\underline{0000},4\underline{99999}5\underline{00000},4\underline{999999}5\underline{000000},\cdots \\ 55,5\underline{0}5\underline{0},5\underline{00}5\underline{00},5\underline{000}5\underline{000},5\underline{0000}5\underline{0000},5\underline{00000}5\underline{00000},5\underline{000000}5\underline{000000},\cdots \end{array}\right\rangle$
$\left\langle\begin{array}{l} 24752475,24\underline{9}75\underline{0}24\underline{9}75\underline{0},24\underline{99}75\underline{00}24\underline{99}75\underline{00},24\underline{999}75\underline{000}24\underline{999}75\underline{000},\cdots; \\ 75247525,75\underline{0}24\underline{9}75\underline{0}25\underline{0},75\underline{00}24\underline{99}75\underline{00}25\underline{00},75\underline{000}24\underline{999}75\underline{000}25\underline{000},\cdots \\ 25252525,25\underline{0}25\underline{0}25\underline{0}25\underline{0},25\underline{00}25\underline{00}25\underline{00}25\underline{00},25\underline{000}25\underline{000}25\underline{000}25\underline{000},\cdots; \\ 74747475,74\underline{9}74\underline{9}74\underline{9}75\underline{0},74\underline{99}74\underline{99}74\underline{99}75\underline{00},74\underline{999}74\underline{999}74\underline{999}75\underline{000},\cdots \end{array}\right\rangle$</td>
</tr>
</table>

（3）

$N+1=d\,d'$	$(3\mathrm{M}+1)^3+1=(3\mathrm{M}+2)(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1)$ $\Rightarrow k\in \mathrm{K}_2((3\mathrm{M}+1)^3)\Rightarrow (m,m')=(12\mathrm{M}^2+5\mathrm{M}+1,-(\mathrm{M}+1))$
$\mathrm{K}_2(N)$ $k,k'\leftrightarrow k^2,k'^2$	$\begin{cases} (3\mathrm{M}+2)(12\mathrm{M}^2+5\mathrm{M}+1)\in \mathrm{K}_2((3\mathrm{M}+1)^3) \\ \leftrightarrow \left[(3\mathrm{M}+2)(12\mathrm{M}^2+5\mathrm{M}+1)\right]^2 \\ \quad =\left[48\mathrm{M}^3+56\mathrm{M}^2+19\mathrm{M}+3,12\mathrm{M}^3+17\mathrm{M}^2+6\mathrm{M}+1\right]_{(3\mathrm{M}+1)^3} \\ \left\|-(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1)(\mathrm{M}+1)\right\|\in \mathrm{K}_2((3\mathrm{M}+1)^3) \\ \leftrightarrow \left[\left\|-(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1)(\mathrm{M}+1)\right\|\right]^2 \\ \quad =\left[3\mathrm{M}^3+5\mathrm{M}^2+2\mathrm{M},12\mathrm{M}^3+17\mathrm{M}^2+6\mathrm{M}+1\right]_{(3\mathrm{M}+1)^3} \end{cases}$
$(\mathrm{M},N+1,k,k')$ (k^2,k'^2)	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \dfrac{10^n-1}{3},10^{3n}+1=(10^n+1)(10^{2n}-10^n+1), \\ \dfrac{(10^n+1)(4\cdot 10^{2n}-3\cdot 10^n+2)}{3}\in \mathrm{K}_2((3\mathrm{M}+1)^3) \end{array}\right] \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{10^n-1}{3},10^{3n}+1=(10^n+1)(10^{2n}-10^n+1), \\ \left\|-\dfrac{(10^{3n}+10^{2n}-10^n+2)}{3}\right\|\in \mathrm{K}_2((3\mathrm{M}+1)^3) \end{array}\right] \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} \left[\dfrac{(4\cdot 10^{3n}+10^{2n}-10^n+2)}{3}\right]^2 \\ =\left[\dfrac{16\cdot 10^{3n}+8\cdot 10^{2n}-7\cdot 10^n+10}{9},\dfrac{4\cdot 10^{3n}+5\cdot 10^{2n}-4\cdot 10^n+4}{9}\right]_{10^{3n}} \\ \left[\left\|-\dfrac{(10^{3n}+10^{2n}-10^n+2)}{3}\right\|\right]^2 \\ =\left[\dfrac{10^{3n}+2\cdot 10^{2n}-10^n-2}{9},\dfrac{4\cdot 10^{3n}+5\cdot 10^{2n}-4\cdot 10^n+4}{9}\right]_{10^{3n}} \end{cases}$
$1364,1\underline{3}3\underline{6}6\underline{3}4,1\underline{33}3\underline{66}6\underline{33}4,1\underline{333}3\underline{666}6\underline{333}4,1\underline{3333}3\underline{6666}6\underline{3333}4,1\underline{33333}3\underline{66666}6\underline{33333}4,\cdots$ $\lvert -364\rvert,\lvert -\underline{3}3\underline{6}6\underline{3}4\rvert,\lvert -\underline{33}3\underline{66}6\underline{33}4\rvert,\lvert -\underline{333}3\underline{666}6\underline{333}4\rvert,\lvert -\underline{3333}3\underline{6666}6\underline{3333}4\rvert,\lvert -\underline{3333}3\underline{6666}6\underline{3333}4\rvert,\cdots$	

（4）

$N+1=d\,d'$	$(5\mathrm{M})^5+1=(625\mathrm{M}^4-125\mathrm{M}^3+25\mathrm{M}^2-5\mathrm{M}+1)(5\mathrm{M}+1)$ $\Rightarrow k\in\mathrm{K}_2((5\mathrm{M})^5)$ $\Rightarrow(m,m')=(6\mathrm{M}+1,-(125\mathrm{M}^4-50\mathrm{M}^3+15\mathrm{M}^2-4\mathrm{M}+1))$
$\mathrm{K}_2(N)$ $k,k'\leftrightarrow k^2,k'^2$	$\begin{cases} (625\mathrm{M}^4-125\mathrm{M}^3+25\mathrm{M}^2-5\mathrm{M}+1)(6\mathrm{M}+1)\in\mathrm{K}_2((5\mathrm{M})^5) \\ \Rightarrow\left[(625\mathrm{M}^4-125\mathrm{M}^3+25\mathrm{M}^2-5\mathrm{M}+1)(6\mathrm{M}+1)\right]^2 \\ \quad=\begin{bmatrix}4500\mathrm{M}^5-300\mathrm{M}^4+65\mathrm{M}^3-14\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+2, \\ 750\mathrm{M}^5-175\mathrm{M}^4+40\mathrm{M}^3-9\mathrm{M}^2+2\mathrm{M}+1\end{bmatrix}_{(5\mathrm{M})^5} \\ \left\|-(5\mathrm{M}+1)(125\mathrm{M}^4-50\mathrm{M}^3+15\mathrm{M}^2-4\mathrm{M}+1)\right\|\in\mathrm{K}_2((5\mathrm{M})^5) \\ \Rightarrow\left[\left\|-(5\mathrm{M}+1)(125\mathrm{M}^4-50\mathrm{M}^3+15\mathrm{M}^2-4\mathrm{M}+1)\right\|\right]^2 \\ \quad=\begin{bmatrix}125\mathrm{M}^5-50\mathrm{M}^4+15\mathrm{M}^3-4\mathrm{M}^2+\mathrm{M}, \\ 750\mathrm{M}^5-175\mathrm{M}^4+40\mathrm{M}^3-9\mathrm{M}^2+2\mathrm{M}+1\end{bmatrix}_{(5\mathrm{M})^5}\end{cases}$
$(\mathrm{M},N+1,k,k')$	$\begin{cases}\begin{bmatrix}2\cdot10^{n-1},10^{5n}+1=(10^n+1)(10^{4n}-10^{3n}+10^{2n}-10^n+1), \\ \quad(10^{4n}-10^{3n}+10^{2n}-10^n+1)\cdot(12\cdot10^{n-1}+1) \\ =(12\cdot10^{5n-1}-2\cdot10^{4n-1}+2\cdot10^{3n-1}-2\cdot10^{2n-1}+2\cdot10^{n-1}+1)\in\mathrm{K}_2(10^{5n})\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix}2\cdot10^{n-1},10^{5n}+1=(10^n+1)(10^{4n}-10^{3n}+10^{2n}-10^n+1), \\ \quad\left\|-(10^n+1)(2\cdot10^{4n-1}-4\cdot10^{3n-1}+6\cdot10^{2n-1}-8\cdot10^{n-1}+1)\right\| \\ =\left\|-(2\cdot10^{5n-1}-2\cdot10^{4n-1}+2\cdot10^{3n-1}-2\cdot10^{2n-1}+2\cdot10^{n-1}+1)\right\|\in\mathrm{K}_2(10^{5n})\end{bmatrix}\end{cases}$
(k^2,k'^2)	$\begin{cases}\quad\left[(10^{4n}-10^{3n}+10^{2n}-10^n+1)\cdot(12\cdot10^{n-1}+1)\right]^2 \\ =\begin{bmatrix}144\cdot10^{5n-2}-48\cdot10^{4n-2}+52\cdot10^{3n-2}-56\cdot10^{2n-2}+60\cdot10^{n-2}+2, \\ 24\cdot10^{5n-2}-28\cdot10^{4n-2}+32\cdot10^{3n-2}-36\cdot10^{2n-2}+40\cdot10^{n-2}+1\end{bmatrix}_{10^{5n}} \\ \quad\left[\left\|-(10^n+1)(2\cdot10^{4n-1}-4\cdot10^{3n-1}+6\cdot10^{2n-1}-8\cdot10^{n-1}+1)\right\|\right]^2 \\ =\begin{bmatrix}4\cdot10^{5n-2}-8\cdot10^{4n-2}+12\cdot10^{3n-2}-16\cdot10^{2n-2}+20\cdot10^{n-2}, \\ 24\cdot10^{5n-2}-28\cdot10^{4n-2}+32\cdot10^{3n-2}-36\cdot10^{2n-2}+40\cdot10^{n-2}+1\end{bmatrix}_{10^{5n}}\end{cases}$

（四）性質四：以「定理三」來尋找「立方分和再現數」的美麗的數式
（某些特殊形式的立方分和再現數）。

若$n\ge 3$，則正整數$5\cdot 10^{n-1}(10^n\pm 1)\in \mathrm{K}_3(10^{2n})$，$5\cdot 10^{n-1}(10^{2n}+1)=5\cdot 10^{3n-1}+5\cdot 10^{n-1}\in \mathrm{K}_3(10^{4n})$。

$\mathrm{K}_3(N):N-1=d\,d_1d_2$	$64\mathrm{M}^2-1=(8\mathrm{M}-1)(8\mathrm{M}+1)\Rightarrow k\in \mathrm{K}_3(64\mathrm{M}^2)$
$(d,d_1,d_2;m_1,m_2,m_3,m_4)\to m$	$(8\mathrm{M}\mp 1,8\mathrm{M}\pm 1,1;4\mathrm{M},1,1,1)\to m=4\mathrm{M}$
$k\in \mathrm{K}_3(N)\leftrightarrow k^2$	$4\mathrm{M}(8\mathrm{M}\mp 1)\in \mathrm{K}_3(64\mathrm{M}^2)$ $\leftrightarrow\left[4\mathrm{M}(8\mathrm{M}\mp 1)\right]^3=\left[8\mathrm{M}^2\mp 3\mathrm{M},24\mathrm{M}^2\mp \mathrm{M},0\right]_{64\mathrm{M}^2}$
$\mathrm{K}_3(N):N-1=d\,d_1d_2$	$4096\mathrm{M}^4-1=(64\mathrm{M}^2+1)(8\mathrm{M}+1)(8\mathrm{M}-1)\Rightarrow k\in \mathrm{K}_3(4096\mathrm{M}^4)$
$(d,d_1,d_2;m_1,m_2,m_3,m_4)\to m$	$(64\mathrm{M}^2+1,8\mathrm{M}-1,8\mathrm{M}+1;4\mathrm{M},4\mathrm{M}+1,4\mathrm{M},4\mathrm{M})\to m=4\mathrm{M}$
$k\in \mathrm{K}_3(N)\leftrightarrow k^2$	$4\mathrm{M}(64\mathrm{M}^2+1)\in \mathrm{K}_3(4096\mathrm{M}^4)$ $\leftrightarrow\left[4\mathrm{M}(64\mathrm{M}^2+1)\right]^3=\left[\mathrm{M},192\mathrm{M}^3+3\mathrm{M},64\mathrm{M}^3\right]_{4096\mathrm{M}^4}$

$\mathrm{K}_3(N)$ $(\mathrm{M},N-1,k)$	$\begin{cases}\left[2^{n-3}\,(n\ge 3),2^{2n}-1=(2^n-1)(2^n+1),2^{n-1}\cdot(2^n\mp 1)\in \mathrm{K}_3(2^{2n})\right]\\ \left[5^3\cdot 10^{n-3}\,(n\ge 3),10^{2n}-1=(10^n-1)(10^n+1),5\cdot 10^{n-1}(10^n\mp 1)\in \mathrm{K}_3(10^{2n})\right]\end{cases}$
	$\left[\begin{array}{l}5^3\cdot 10^{n-3}\,(n\ge 3),10^{4n}-1=(10^{2n}+1)(10^n+1)(10^n-1),\\ 5\cdot 10^{n-1}(10^{2n}+1)\in \mathrm{K}_3(10^{4n})\end{array}\right]$
(k^2,k'^2)	$\begin{cases}\left[2^{n-1}\cdot(2^n\mp 1)\right]^3\\ =\left[2^{n-3}(2^n\mp 3),2^{n-3}(3\cdot 2^n\mp 1),0\right]_{2^{2n}}\\ \left[5\cdot 10^{n-1}\cdot(10^n\mp 1)\right]^3\\ =\left[1953125\cdot 10^{2n-3}\mp 375\cdot 10^{n-3},375\cdot 10^{2n-3}\mp 125\cdot 10^{n-3},0\right]_{10^{2n}}\,(n\ge 3)\end{cases}$
	$\left[5\cdot 10^{n-1}\cdot(10^{2n}+1)\right]^3$ $=\left[125\cdot 10^{n-3},375\cdot 10^{3n-3}+375\cdot 10^{n-3},125\cdot 10^{3n-3}\right]_{10^{4n}}\,(n\ge 3)$
$500000500\in \mathrm{K}_3(10^{12}),500000005000\in \mathrm{K}_3(10^{16}),500000000050000\in \mathrm{K}_3(10^{20}),\cdots$	

（五）性質五：以「定理四」來尋找「分段和差相間立方再現數」的美麗的數式

（某些特殊形式的分段和差相間立方再現數）。

<table>
<tr><td>$\mathrm{K}_4(N): N+1 = d\,d_1 d_2$</td><td>$(3\mathrm{M}+1)^3+1 = (3\mathrm{M}+2)(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1) \Rightarrow k \in \mathrm{K}_4((3\mathrm{M}+1)^3)$</td></tr>
<tr><td>$(d, d_1, d_2; m_1, m_2, m_3, m_4)$
m</td><td>$(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1, 3\mathrm{M}+2, 1; \mathrm{M}+1, 1, 1, 1) \to m = \mathrm{M}+1$</td></tr>
<tr><td>$k \in \mathrm{K}_4(N) \leftrightarrow k^3$</td><td>$(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1)(\mathrm{M}+1) \in \mathrm{K}_4((3\mathrm{M}+1)^3)$
$\leftrightarrow \left[(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1)(\mathrm{M}+1)\right]^3$
$= \begin{bmatrix} \mathrm{M}^3+2\mathrm{M}^2+\mathrm{M}, \\ 5\mathrm{M}^3+9\mathrm{M}^2+4\mathrm{M}, \\ 13\mathrm{M}^3+19\mathrm{M}^2+7\mathrm{M}+1 \end{bmatrix}_{(3\mathrm{M}+1)^3}$</td></tr>
<tr><td>$(\mathrm{M}, N+1, k)$</td><td>$\left[\frac{10^n-1}{3}, 10^{3n}+1, \frac{(10^{2n}-10^n+1)(10^n+2)}{3} \in \mathrm{K}_4((3\mathrm{M}+1)^3)\right]$
$\Rightarrow \boxed{364, \underline{3}3\underline{6}6\underline{3}4, \underline{33}3\underline{66}6\underline{33}4, \underline{333}3\underline{666}6\underline{333}4, \cdots \in \mathrm{K}_4(10^{3n})}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\left[\frac{(10^{2n}-10^n+1)(10^n+2)}{3}\right]^3$
$= \left[\frac{10^{3n}+3\cdot 10^{2n}-4}{27}, \frac{5\cdot 10^{3n}+12\cdot 10^{2n}-3\cdot 10^n-14}{27}, \frac{13\cdot 10^{3n}+18\cdot 10^{2n}-12\cdot 10^n+8}{27}\right]_{10^{3n}}$</td></tr>
<tr><td>$(d, d_1, d_2; m_1, m_2, m_3, m_4)$
m</td><td>$(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1, 1, 3\mathrm{M}+2; 1, \mathrm{M}+1, 1, 1) \to m = 2\mathrm{M}+1$</td></tr>
<tr><td>$k \in \mathrm{K}_4(N) \leftrightarrow k^3$</td><td>$(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1)(2\mathrm{M}+1) \in \mathrm{K}_4((3\mathrm{M}+1)^3)$
$\leftrightarrow \left[(9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1)(2\mathrm{M}+1)\right]^3$
$= \begin{bmatrix} 8\mathrm{M}^3+4\mathrm{M}^2+2\mathrm{M}, \\ 13\mathrm{M}^3+12\mathrm{M}^2+5\mathrm{M}, \\ 23\mathrm{M}^3+23\mathrm{M}^2+8\mathrm{M}+1 \end{bmatrix}_{(3\mathrm{M}+1)^3}$</td></tr>
<tr><td>$(\mathrm{M}, N+1, k)$</td><td>$\left[\frac{10^n-1}{3}, 10^{3n}+1, \frac{(10^{2n}-10^n+1)(2\cdot 10^n+1)}{3} \in \mathrm{K}_4((3\mathrm{M}+1)^3)\right]$
$\Rightarrow \boxed{637, \underline{6}6\underline{3}3\underline{6}7, \underline{66}6\underline{33}3\underline{66}7, \underline{666}6\underline{333}3\underline{666}7, \cdots \in \mathrm{K}_4(10^{3n})}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\left[\frac{(10^{2n}-10^n+1)(2\cdot 10^n+1)}{3}\right]^3$
$= \left[\frac{8\cdot 10^{3n}-12\cdot 10^{2n}+18\cdot 10^n-14}{27}, \frac{13\cdot 10^{3n}-3\cdot 10^{2n}+12\cdot 10^n-22}{27}, \frac{23\cdot 10^{3n}+3\cdot 10^n+1}{27}\right]_{10^{3n}}$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>$(d,d_1,d_2;m_1,m_2,m_3,m_4)$
m</td><td>$(1,9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1,3\mathrm{M}+2;1,1,\mathrm{M}+1,6\mathrm{M}^2+\mathrm{M}+1)$
$\to m=9\mathrm{M}^3+3\mathrm{M}^2+\mathrm{M}+1$</td></tr>
<tr><td>$k\in \mathrm{K}_4(N)\leftrightarrow k^3$</td><td>$$9\mathrm{M}^3+3\mathrm{M}^2+\mathrm{M}+1\in \mathrm{K}_4((3\mathrm{M}+1)^3)$$ $$\leftrightarrow \left[(9\mathrm{M}^3+3\mathrm{M}^2+\mathrm{M}+1)\right]^3$$ $$=\begin{bmatrix} \mathrm{M}^3-\mathrm{M}^2+\mathrm{M}-1, \\ 14\mathrm{M}^3+18\mathrm{M}^2+10\mathrm{M}, \\ 22\mathrm{M}^3+22\mathrm{M}^2+10\mathrm{M}+2 \end{bmatrix}_{(3\mathrm{M}+1)^3}$$</td></tr>
<tr><td>$(\mathrm{M},N+1,k)$</td><td>$$\left[\frac{10^n-1}{3},10^{3n}+1,\frac{(10^{3n}-2\cdot 10^{2n}+2\cdot 10^n+2)}{3}\in \mathrm{K}_4((3\mathrm{M}+1)^3)\right]$$ $$\Rightarrow \boxed{274,\underline{3}2\underline{6}7\underline{3}4,\underline{33}2\underline{66}7\underline{33}4,\underline{333}2\underline{666}7\underline{333}4,\cdots\in \mathrm{K}_4(10^{3n})}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\left[\frac{(10^{3n}-2\cdot 10^{2n}+2\cdot 10^n+2)}{3}\right]^3$$ $$=\left[\frac{10^{3n}-6\cdot 10^{2n}+18\cdot 10^n-40}{27},\frac{14\cdot 10^{3n}+12\cdot 10^{2n}+24\cdot 10^n-50}{27},\frac{22\cdot 10^{3n}+24\cdot 10^n+8}{27}\right]_{10^{3n}}$$</td></tr>
<tr><td>$(d,d_1,d_2;m_1,m_2,m_3,m_4)$
m</td><td>$(1,3\mathrm{M}+2,9\mathrm{M}^2+3\mathrm{M}+1;1,1,6\mathrm{M}^2+\mathrm{M}+1,\mathrm{M}+1)$
$\to m=18\mathrm{M}^3+24\mathrm{M}^2+8\mathrm{M}+1$</td></tr>
<tr><td>$k\in \mathrm{K}_4(N)\leftrightarrow k^3$</td><td>$$18\mathrm{M}^3+24\mathrm{M}^2+8\mathrm{M}+1\in \mathrm{K}_4((3\mathrm{M}+1)^3)$$ $$\leftrightarrow \left[(18\mathrm{M}^3+24\mathrm{M}^2+8\mathrm{M}+1)\right]^3$$ $$=\begin{bmatrix} 8\mathrm{M}^3+16\mathrm{M}^2+8\mathrm{M}, \\ 4\mathrm{M}^3+12\mathrm{M}^2+8\mathrm{M}, \\ 14\mathrm{M}^3+20\mathrm{M}^2+8\mathrm{M}+1 \end{bmatrix}_{(3\mathrm{M}+1)^3}$$</td></tr>
<tr><td>$(\mathrm{M},N+1,k)$</td><td>$$\left[\frac{10^n-1}{3},10^{3n}+1,\frac{(10^{3n}-2\cdot 10^{2n}+2\cdot 10^n+2)}{3}\in \mathrm{K}_4((3\mathrm{M}+1)^3)\right]$$ $$\Rightarrow \boxed{727,\underline{6}7\underline{3}2\underline{6}7,\underline{66}7\underline{33}2\underline{66}7,\underline{666}7\underline{333}2\underline{666}7,\cdots\in \mathrm{K}_4(10^{3n})}$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$$\left[\frac{(2\cdot 10^{3n}+2\cdot 10^{2n}-2\cdot 10^n+1)}{3}\right]^3$$ $$=\left[\frac{8\cdot 10^{3n}+24\cdot 10^{2n}-32}{27},\frac{4\cdot 10^{3n}+24\cdot 10^{2n}+12\cdot 10^n-40}{27},\frac{14\cdot 10^{3n}+18\cdot 10^n-6\cdot 10^n+1}{27}\right]_{10^{3n}}$$</td></tr>
</table>

（六）性質六：任何二進位表示的偶完全數恰好正是「平方分和再現數」。

任何二進位表示的偶完全數恰好正是平方分和再現數，即

$$2^{n-1}\cdot(2^n-1)\in \mathrm{K}_1(2^{2n}): 6\in \mathrm{K}_1(2^4), 28\in \mathrm{K}_1(2^6), 496\in \mathrm{K}_1(2^{10}), \quad 8128\in \mathrm{K}_1(2^{14}), 3550336\in \mathrm{K}_1(2^{26}), 8589869056, 137438691328, \cdots$$ 。

$$6^2=(2,4)_{16} \Leftrightarrow 110^2=\underline{10}\cdot 1000+\underline{\underline{0100}}$$

$$28^2=(12,16)_{64} \Leftrightarrow 11100^2=\underline{1100}\cdot 1000000+\underline{\underline{010000}}$$

$$496^2=(240,256)_{1024} \Leftrightarrow 111110000^2=\underline{11110000}\cdot 10000000000+\underline{\underline{0100000000}}$$

$$\begin{aligned}&3550336^2=(16773120,16777216)_{67108864}\\ &\Leftrightarrow 1111111111111000000000000^2\\ &=\underline{111111111111000000000000}\cdot 100000000000000000000000000\\ &\quad+\underline{\underline{01000000000000000000000000}}\end{aligned}$$

（七）性質七：任何偶完全數（二進位的）恰好正是「立方分和再現數」。

每一個偶完全數（可以二進位表之）都具有立方分和再現數的特徵，即

$$2^{n-1}\cdot(2^n-1)\in \mathrm{K}_3(2^{2n}): 6\in \mathrm{K}_3(8), 28\in \mathrm{K}_3(2^6), 496\in \mathrm{K}_3(2^{10}), \quad 8128\in \mathrm{K}_3(2^{14}), 3550336\in \mathrm{K}_3(2^{26}), 8589869056, 137438691328, \cdots$$ 。

$$6^3=(3,3,0)_8 \Leftrightarrow 110^3=\underline{11}\cdot 1000^2+\underline{\underline{11}}\cdot 1000+0$$

$$28^3=(5,23,0)_{64} \Leftrightarrow 11100^3=\underline{101}\cdot 1000000^2+\underline{\underline{010111}}\cdot 1000000+\underline{0}$$

$$\begin{aligned}&496^3=(116,380,0)_{1024}\\ &\Leftrightarrow 111110000^3=\underline{1110100}\cdot 10000000000^2+\underline{\underline{0101111100}}\cdot 10000000000+\underline{0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&8128^3=(2000,6128,0)_{16384}\\ &\Leftrightarrow 1111111000000^3\\ &=\underline{11111010000}\cdot 100000000000000^2+\underline{\underline{01011111110000}}\cdot 100000000000000+\underline{0}\end{aligned}$$

（八）性質八：更廣泛且常見的問題，集合$\mathrm{K}_3(N)$與集合$\mathrm{K}_4(N)$是非空的嗎？

根據前面之定理及基本性質論述，是否有某種型式的N會使$\left\|\mathrm{K}_i(N)\right\|=0\ (i=3,4)$	
$\mathrm{K}_3(N)$ $(1<k\le N-1)$	舉個例來說，當取$N>8$時，$6\in \mathrm{K}_3(8)$； 令$N=p^{\alpha}+1$，其中p為奇質數，且$\alpha\ge 1$：
「性質四」	◎若$k\in \mathrm{K}_3(N)$，且$N-1=p^{\alpha}$， 根據基本性質及「定理三」可知有三種情況之一會成立：
$6\in \mathrm{K}_3(8)$ $\mathrm{K}_3(10^{2n})\ne\varnothing$	（i）$p^{\alpha}\mid k$，（ii）$p^{\alpha}\mid k-1$，（iii）$p^{\alpha}\mid k+1$； 但這三種情形都導致矛盾。 ◎故$\left\|\mathrm{K}_3(N)\right\|=0$， 意即$\mathrm{K}_3(N)=\varnothing$，其中$N=p^{\alpha}+1$，$p$為奇質數，且$\alpha\ge 1$。

$K_4(N)$ $(1<k\le N-1)$	舉個例來說，當取$N>64$時，$26\in K_4(64)$； 令$N=p^{\alpha}-1$，其中p為奇質數，且$\alpha\ge 1$：
「性質五」	◎若$k\in K_4(N)$，且$N+1=p^{\alpha}$，
$26\in K_4(64)$ $K_4(10^{3n})\ne\varnothing$	根據基本性質及「定理四」可知有三種情況之一會成立： （i）$p^{\alpha}\mid k$，（ii）$p^{\alpha}\mid k-1$，（iii）$p^{\alpha}\mid k+1$； 但這三種情形也都導致矛盾。 ◎故$\left\|K_4(N)\right\|=0$， 意即$K_4(N)=\varnothing$，其中$N=p^{\alpha}-1$，p為奇質數，且$\alpha\ge 1$。

七、結論及未來研究方向

（一）表列幽靈雷劈數（重圓數）及形形色色再現數，因在自然數中的分佈十分稀少，密度是按「指數」規律減少的，所以它們在大數中密度更小，其自然密度皆為零【6】。

（二）平方分差再現數是平方分和再現數的逆向思維與研究分歧，其分別與$N\pm1$的單一除數有一對一且為映成的對應關係，兩者都是互補成對出現的，並探討其產生的方法及推廣相關之性質「定理一、二」。

（三）深入性質的研究與推廣，平方分和再現數不是模9的同餘類[0]，就是模9同餘類[1]。以明確的步驟找出滿足所定義方程中的任意整數q、r及n，所採用的方法是用程式語言 Visual Basic 6.0 或電腦代數軟體套件 Mathcad 執行；而平方分差再現數也可根據其兩個關係式，採類似的做法並編個程序來便捷加以搜尋所給定的正整數範圍。

（四）使用「定理三、四（必要條件）」，就可以較容易尋找平方（立方）分和再現數與平方（立方）分段和差相間再現數，此乃就相當於依序尋找同餘方程$k^s\equiv k \pmod{(N\mp1)}$的基本解，再經過檢驗，即能找到符合條件的形形色色再現數。由於後者是和差相間地運用，在高次方的時候仍然可有完美再現的概率；未來，將再向高次的情況推進，相信這將會是很有趣的研究主題。

（五）深入的探討與推廣「平方分和（分差）再現數」與「立方分和再現數/立方分段和差相間再現數」的一些相關性質，任何二進位的偶完全數的都是平方（立方）分和再現數。

（六）「性質四」指出，當$n\geq6$且為偶數時，必存在一個正整數$k\in\mathrm{K}_3(10^n)$。當n為奇數時，根據$\left|\mathrm{K}_3(N)\right|\leq 3^{\Omega(N-1)}$，當$\Omega(10^n-1)$的數值很小時，有非常少的$k\in\mathrm{K}_3(10^n)$，即其組成情形非常少，目前無法確知有多少的$n$會產生這樣的結果。根據研究的表列結果：當$n=19$、$23$與$317$時，$\Omega(10^n-1)=2$；前兩者仍然存在正整數$k\in\mathrm{K}_3(10^n)$，而最後者卻未找到屬於$\mathrm{K}_3(10^{317})$的整數。因此，對每個$n$而言，並不是都會產生屬於正整數$k\in\mathrm{K}_3(10^n)$的。

（七）有某種形式的N會讓$\mathrm{K}_3(N)=\varnothing$，這是可以證明加以論證的。例如：當$N=2^n+1\ (n\geq2)$，得出$k=2^{n-1}-1\in\mathrm{K}_3(N)$。另一方面，某些形式的$N$會造成$\mathrm{K}_3(N)\neq\varnothing$，例如：當$N=10^{2n}$。

（八）嘗試檢測偶完全數在更高的次方之下能否保持「完美再現」性質，結果讓人驚奇！事實上33550336這個數我們只是測試到十次方，至於在更高次方時，是否仍具有這個性質？相信，再大一些的偶完全數，這「完美再現」的性質，應會更優良強勁吧！

（九）一般而言，次數越高的形形色色再現數就越稀有，但卻不能由此認為它們根本不存在，且很難肯定地指出到了某個方次，形形色色再現數就不存在。完美再現數是有趣的數論問題，更是訓練程式語言編寫的好題材。

（十）未來將要直觀介紹有趣的數式：兩平方差再現數；也是以逆向思維的模式來探討與差數有關的平方再現數，提出前所未有的重要結果，得到許多從未見過世面的美麗數式，且這種數過去確是沒有人提出過的，是我們首先以逆向思維想到並提出的。

$\mathrm{K}_1(N)$ 平方分和再現數$k=q+r$					
n	k^2	$t\equiv k \pmod 9$		q	r
1	1	1	[1]	**0**	1
1	**8**1	9	[0]	**8**	1
2	**20**25	**45**	[0]	**20**	25
2	**30**25	55	[1]	**30**	25

2	**98**01	99	[0]	**98**	01
3	**88**209	**297**	[0]	**88**	209
3	**494**209	703	[1]	**494**	209
3	**998**001	999	[0]	**998**	001
4	**494**1729	2223 ●	[0]	**494**	1729
4	**744**1984	**2728** ●	[1]	**744**	1984
5	**238**04641	4879	[1]	**238**	04641
4	**2450**2500	**4950** ●	[0]	**2450**	2500
4	**2550**2500	**5050** ●	[1]	**2550**	2500
6	**28**005264	5292	[0]	**28**	005264
4	**5288**1984	7272 ●	[0]	**5288**	1984
4	**6048**1729	7777 ●	[1]	**6048**	1729
4	**9998**0001	9999 ●	[0]	**9998**	0001
5	**3008**14336	17344	[1]	**3008**	14336
5	**4938**17284	**22222**	[1]	**4938**	17284
6	**1518**037444	38962	[1]	**1518**	037444
5	**60494**17284	**77778**	[0]	**60494**	17284
5	**68320**14336	82656	[0]	**68320**	14336
5	**90480**04641	95121	[0]	**90480**	04641
5	**99998**00001	99999	[0]	**99998**	00001
6	**20408**122449	142857	[0]	**20408**	122449
6	**21948**126201	148149	[0]	**21948**	126201
6	**33058**148761	181819	[1]	**33058**	148761
6	**35010**152100	187110	[0]	**35010**	152100
6	**43470**165025	208495	[1]	**43470**	165025
6	**101558**217124	318682	[1]	**101558**	217124
6	**108878**221089	329967	[0]	**108878**	221089
6	**123448**227904	351352	[1]	**123448**	227904
6	**127194**229449	356643	[0]	**127194**	229449
6	**152344**237969	390313	[1]	**152344**	237969
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$K_2(N)$ 平方分差再現數 $k=\lvert q-r \rvert$				
n	k^2	k	q	r
1	1	1	**1**	0
1	**12-**1	11	**12**	1
2	**102-**01	101	**102**	01
3	**1002-**001	1001 ●	**1002**	001
3	**6-**084	78 ●	**6**	084
3	**1162-**084	1078 ●	**1162**	084
3	**82-**369	**287** ●	**82**	369
3	**1656-**369	1287 ●	**1536**	369

3	**132-**496	**364** ●	**132**	496
3	**1860-**496	**1364** ●	**1860**	496
4	**10002-**0001	10001	**10002**	0001
4	**120-**1216	**1096**	**120**	1216
4	**12312-**1216	11096	**12312**	1216
5	**100002-**00001	100001	**100002**	00001
5	**3306-**21489	**18183**	**3306**	21489
5	**139672-**21489	118183	**139672**	21489
6	**1000002-**000001	1000001	**1000002**	000001
6	**113322-**449956	**336634**	**113322**	449956
6	**1786590-**449956	**1336634**	**1786590**	449956
7	**10000002-**0000001	10000001	**10000000**	0000001
7	**743802-**3471076	2727274	**743802**	3471076
7	**16198350-**3471076	12727274	**16198350**	3471076
8	**100000002-**00000001	100000001	**100000002**	00000001
8	**5536332-**29065744	**23529412**	**5536332**	29065744
8	**152595156-**29065744	123529412	**152595156**	29065744
9	**1000000002-**000000001	1000000001	**1000000002**	000000001
9	**366292-**019505049	19138757	**366292**	019505049
9	**1038643806-**019505049	1019138757	**1038643806**	019505049
9	**674650-**026648676	25974026	**674650**	026648676
9	**1052622702-**026648676	1025974026	**1052622702**	026648676
9	**9553960-**107298321	97744361	**9553960**	107298321
9	**1205042682-**107298321	1097744361	**1205042682**	107298321
9	**14611762-**135490884	120879122	**14611762**	135490884
9	**1256370006-**135490884	1120879122	**1256370006**	135490884
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$K_3(N)$ 立方分和再現數 $k=p+q+r$		
n	k	k^3
1	1	1
1	8	512
2	**45**	91125
3	**297**	26198073
4	2322 ●	12519490248
4	**2728** ●	20301732352
4	4445 ●	87824421125
4	4544 ●	93824221184
4	4949 ●	121213882349
4	5049 ●	128711132649
4	5455 ●	162324571375
4	5554 ●	171323771465

$K_4(N)$ 立方分段和差相間再現數 $p-q+r$		
n	k	k^3
1	1	1
3	155 ●	3723875
3	209 ●	9129329
3	**274** ●	20570824
3	286 ●	23393656
3	287 ●	23639903
3	351 ●	43243551
3	**364** ●	48228544
3	428 ●	78402752
3	573 ●	188132517
3	**637** ●	258474853
3	715 ●	365525875

4	7172 ●	368910352448	3	**727** ●	384240583
5	27100	19902511000000	3	846 ●	605495736
5	44443	87782935806307	3	923 ●	786330467
5	55556	171471879319616	4	1095	1312932375
5	60434	220721185826504	4	1096	1316532736
5	**77778**	470511577514952	4	2191	10517853871
6	143857	2977097087043793	4	8905	706157817625
6	208494	9063181647017784	5	18182	6010698724568
6	226071	11554058606155911	5	18183	6011690534487
6	279720	21886209834048000	5	81818	547704838475432
6	313390	30779063611219000	5	81819	547724921276259
6	324675	34225243575046875	6	**326734**	34880523050814904
6	**329967**	35926219978074063	6	**336634**	38148189618488104
6	346060	41443288617016000	6	**663367**	291918480414851863
6	368928	50214003962314752	6	**673267**	305184157080525163
6	395604	61913024827308864	7	2727274	20285528024055326824
6	422577	75460133084214033	7	4545454	93914316303535236664
6	427868	78330233506116032	7	5454547	162284134936177325323
6	**461539**	98316229404133819	7	7272727	384673134785876904583
6	472823	105705061351305767	7	23529411	13026662682678649053531
6	478115	109294197946170875	7	**23529412**	13026664343578265662528
6	488214	116367227503144344	7	76470589	447180961919397650946469
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

八、參考資料及其他

【1】J. Brillhart, D. H. Lehmer, J. Selfridge, B. Tuckerman, S. Wagstaff, "*Factorizations of* $b^n \pm 1, b = 2,3,5,6,7,10,11,12$ *up to high powers*." 2nd ed., Contemporary Mathematics, v. 22, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

【2】M. Charosh, *Some Applications of Casting Out* $999\ldots' s$, Journal of Recreational Mathematics **14**, pp. 111-118, 1981-1982.

【3】Douglas E. Iannucci, *The Kaprekar Numbers*, Journal of Integer Sequences, Vol. **3**, No. 00.1.2, 2000. http://www.math.uwaterloo.ca/JIS/VOL3/iann2a.html.

【4】D. R. Kaprekar, *On Kaprekar Numbers*, Journal of Recreational Mathematics **13**, pp. 81-82, 1980-1981.

【5】Douglas E. Iannucci and Bertrum Foster, Kaprekar Triples, Journal of Integer Sequences, Vol. **8**, No. 05.4.8, 2005.

【6】Sloane, N. J. A. Sequences A006886/M4625 in "*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*." http://www.research.att.com/~njas/sequences/.
Sloane, N. J. A. Sequences A006887/M4478 in "*The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*." http://www.research.att.com/~njas/sequences/A006887.

【7】D. Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*. Middlesex, England: Penguin Books, p. 73, 1986.

【8】C. G. Black, Some properties of the Kaprekar numbers and a means of generation, ScienceAsia：Journal of the Science Society of Thailand, Vol. 27, No. 2, pp.133-136, 2001.

【9】紀佩文，陳彥鈞，可表為兩個平方數和的一種特定型式的數及其性質推廣研究 Generalization of Some Special Forms of Numbers Expressible as the Sum of Two Squares~「Concatenating Squares」，二○○三年台灣國際科展數學科大會佳作，國立台灣科學教育館，2003 年 2 月。

【10】洪宗良，與特殊型質數之倒數關聯的兩平方總和的整數分解（On the Decomposition of a VR Number Associated with Reciprocals of Primes of Particular Forms），二○○四年第三屆旺宏科學獎 SA3-119 成果報告書（第三屆旺宏科學獎銀牌獎），財團法人旺宏教育基金會，2004 年 11 月。

【11】邱鈺茜，分和累乘再現數產生的方法及其性質探討之推廣與應用（Means of Generation of Split Sum-Squared Recurrent Numbers and its Applications），二○○五年第四屆旺宏科學獎 SA4-298 成果報告書（第四屆旺宏科學獎金牌獎），財團法人旺宏教育基金會，2005 年 11 月。

附錄

（一）$K_2(10^n)$「平方分差再現數」之表列（●表 $q-r<0$）

n	k^2	$k=\lvert q-r\rvert$	q	r
1	1	**1** ●	**0**	1
1	**12**1	**11**	**12**	1
2	1	**1** ●	**0**	1
2	**102**01	**101**	**102**	01
3	1	**1** ●	**0**	1
3	**1002-**001	**1001**	**1002**	001
3	**6**084	**78** ●	**6**	084
3	**1162-**084	**1078**	**1162**	084
3	**82-**369	**287** ●	**82**	369
3	**1656-**369	**1287**	**1656**	369
3	**132-**496	**364** ●	**132**	496
3	**1860-**496	**1364**	**1860**	496
4	1	**1** ●	**0**	1
4	**10002-**0001	**10001**	**10002**	0001
4	**120-**1216	**1096** ●	**120**	1216
4	**12312**-1216	**11096**	**12312**	1216
5	1	**1** ●	**0**	1
5	**100002-**00001	**100001**	**100002**	00001
5	**3306-**21489	**18183** ●	**3306**	21489
5	**139672-**21489	**118183**	**139672**	21489
6	1	**1** ●	**0**	1
6	**1000002-**000001	**1000001**	**1000002**	000001
6	**113322-**449956	**336634** ●	**113322**	449956
6	**1786590-**449956	**1336634**	**1786590**	449956
7	1	**1** ●	**0**	1
7	**10000002-**0000001	**10000001**	**10000002**	0000001
7	**743802-**3471076	**2727274** ●	**743802**	3471076
7	**16198350-**3471076	**12727274**	**16198350**	3471076
8	1	**1** ●	**0**	1
8	**100000002-**00000001	**100000001**	**100000002**	00000001
8	**5536332-**29065744	**23529412** ●	**5536332**	29065744
8	**152595156-**29065744	**123529412**	**152595156**	29065744
9	**1**	**1** ●	**0**	1
9	**1000000002-**000000001	**1000000001**	**1000000002**	000000001
9	**366292-**019505049	**19138757** ●	**366292**	019505049

9	**1038643806-**019505049	**1019138757**	**1038643806**	019505049
9	**674650-**026648676	**25974026** ●	**674650**	026648676
9	**1052622702-**026648676	**1025974026**	**1052622702**	026648676
9	**9553960-**107298321	**97744361** ●	**9553960**	107298321
9	**1205042682-**107298321	**1097744361**	**1205042682**	107298321
9	**14611762-**135490884	**120879122** ●	**14611762**	135490884
9	**1256370006-**135490884	**1120879122**	**1256370006**	135490884
9	**19605006-**159622884	**140017878** ●	**19605006**	159622884
9	**1299640762-**159622884	**1140017878**	**1299640762**	159622884
9	**27553312-**193545216	**165991904** ●	**27553312**	193545216
9	**1359537120-**193545216	**1165991904**	**1359537120**	193545216
9	**56530882-**294293121	**237762239** ●	**56530882**	294293121
9	**1532055360-**294293121	**1237762239**	**1532055360**	294293121
9	**83263152-**371816704	**288553552** ●	**83263152**	371816704
9	**1660370256-**371816704	**1288553552**	**1660370256**	371816704
9	**94674556-**402366864	**307692308** ●	**94674556**	402366864
9	**1710059172-**402366864	**1307692308**	**1710059172**	402366864
9	**111333222-**444999556	**333666334** ●	**111333222**	444999556
9	**1778665890-**444999556	**1333666334**	**1778665890**	444999556
9	**164378892-**569815561	**405436669** ●	**164378892**	569815561
9	**1975252230-**569815561	**1405436669**	**1975252230**	569815561
9	**183673470-**612244900	**428571430** ●	**183673470**	612244900
9	**2040816330-**612244900	**1428571430**	**2040816330**	612244900
9	**200444410-**648154596	**447710186** ●	**200444410**	648154596
9	**2095864782-**648154596	**1447710186**	**2095864782**	648154596
9	**206611570-**661157025	**454545455** ●	**206611570**	661157025
9	**2115702480-**661157025	**1454545455**	**2115702480**	661157025
9	**224376732-**698060944	**473684212** ●	**224376732**	698060944
9	**2171745156-**698060944	**1473684212**	**2171745156**	698060944
10	**1**	**1** ●	**0**	1
10	**10000000002-**0000000001	**10000000001**	**10000000002**	0000000001
10	**19408740-**0459962256	**440553516** ●	**19408740**	0459962256
10	**10900515772-**0459962256	**10440553516**	**10900515772**	0459962256
10	**237050520-**1776695025	**1539644505** ●	**237050520**	1776695025
10	**13316339530-**1776695025	**11539644505**	**13316339530**	1776695025
10	**392118420-**2372316441	**1980198021** ●	**392118420**	2372316441
10	**14352514462-**2372316441	**11980198021**	**14352514462**	2372316441

（二）$K_1(10^n)$「平方分和再現數」之表列

http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/kaprekar.dat					
$k=q+r$	k^2	$k=q+r$	k^2	$k=q+r$	k^2
1	1	670033	448944221089	94520547	8934133805179209
9	81	681318	464194217124	99999999	9999999800000001
45	2025	791505	626480165025	234567901	55022100179545801
55	3025	812890	660790152100	332999667	110888778222110889
99	9801	818181	669420148761	432432432	186997808245434624
297	88209	851851	725650126201	567567568	322132944245434624
703	494209	857143	734694122449	667000333	444889444222110889
999	998001	961038	923594037444	765432099	585886298179545801
2223	4941729	994708	989444005264	999999999	999999998000000001
2728	7441984	999999	999998000001	243902440	59488400237953600
4879	23804641	4444444	19753082469136	665188470	442475700620940900
4950	24502500	4927941	24284602499481	867208672	752050880792003584
5050	25502500	5072059	25725782499481	909090909	826446280826446281
5292	28005264	5555556	30864202469136	1111111111	1234567900987654321
7272	52881984	9372385	87841600588225	1776299581	3155240201460775561
7777	60481729	9999999	99999980000001	2020202020	4081216201612080400
9999	99980001	5479453	30024405179209	3846956652	14799075482367049104
17344	300814336	8161912	66616807495744	3888938889	15123845682376554321
22222	493817284	11111112	123456809876544	4090859091	16735128102417346281
38962	1518037444	13641364	186086811780496	4132841328	17080377442424803584
77778	6049417284	16590564	275246813838096	4756047561	22619988402494048721
82656	6832014336	19273023	371449415558529	4798029798	23021089942495920804
95121	9048004641	19773073	390974415863329	4958067763	24582435942499824169
99999	9999800001	24752475	612685018625625	4999950000	24999500002500000000
142857	20408122449	25252525	637690018875625	5000050000	25000500002500000000
148149	21948126201	30884184	953832821345856	5041932237	25421080682499824169
181819	33058148761	36363636	1322314023140496	5201970202	27060493982495920804
187110	35010152100	38883889	1511956823764321	5243952439	27499037182494048721
208495	43470165025	44363341	1968106024682281	5867158672	34423550882424803584
318682	101558217124	44525548	1982524424700304	5909140909	34917946282417346281
329967	108878221089	49995000	2499500025000000	6111061111	37345067902376554321
351352	123448227904	50005000	2500500025000000	6153043348	37859942442367049104
356643	127194229449	55474452	3077414824700304	7979797980	63677175801612080400
390313	152344237969	55636659	3095437824682281	8223700419	67629248581460775561
461539	213018248521	61116111	3735179023764321	8888888889	79012345680987654321
466830	217930248900	63636364	4049586823140496	9090909091	82644628100826446281
499500	249500250000	69115816	4776996021345856	9132791328	83407877440792003584
500500	250500250000	74747475	5587185018875625	9334811530	87138706300620940900
533170	284270248900	75247525	5662190018625625	9756097560	95181439600237953600
538461	289940248521	80226927	6436359815863329	9999999999	99999999980000000001
609687	371718237969	88888888	7901234409876544	⋮	⋮
648648	420744227904	91838088	8434234407495744	⋮	⋮

（三）$K_3(10^n)$「立方分和再現數」之表列

http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~yamasaki/kaprekar.dat			
$k=p+q+r$	k^3	$k=p+q+r$	k^3
1	1	11273318	1432700041661610713432
8	512	13793570	2624400123813012293000
10	1000	17090613	4991980961501806976397
45	91125	21803275	10364901934491001421875
297	26198073	22293325	11079611748223903703125
2322	12519490248	24752475	15165470606405317171875
2728	20301732352	25242525	16084160018098423453125
4445	87824421125	25252524	16103281230837211333824
4544	93824221184	27272728	20285501247182612772352
4949	121213882349	27282727	20307821247736212774583
5049	128711132649	28201724	22429881232731213631424
5455	162324571375	30731977	29024951215764915671833
7172	368910352448	33404436	37274551844312511233856
27100	19902511000000	36363635	48084141848234613072875
44443	87782935806307	38383839	56551642990995602818719
55556	171471879319616	38546045	57271620577775827041125
60434	220721185826504	38883889	58790761308044419924369
77778	470511577514952	39046095	59529580178576231307375
143857	2977097087043793	39546145	61846120636290826998625
208494	9063181647017784	41843088	73260720125954433257472
226071	11554058606155911	44025497	85332172405380711438473
279720	21886209834048000	44363340	87311752792816507704000
313390	30779063611219000	44525547	88272980485592630842323
324675	34225243575046875	45025597	91280590244636533451173
329967	35926219978074063	47045800	104126812463311912000000
346060	41443288617016000	49842793	123824650720907130251257
368928	50214003962314752	49995000	124962503749875000000000
395604	61913024827308864	50005000	125037503750125000000000
422577	75460133084214033	50657256	129994501742459020233216
427868	78330233506116032	55474451	170717891744681120955851

461539	98316229404133819	55474452	170717900976925428633408
472823	105705061351305767	55484452	170810240065002037753408
478115	109294197946170875	56136708	176905291183926726606912
488214	116367227503144344	58156911	196699833740089701086031
494208	120706126590246912	58656961	201817431964353718831681
495208	121440334856038912	60453854	220938793708011101279864
499500	124625374875000000	61453954	232086293635066101894664
500500	125375375125000000	63636364	257700981126972226596544
517076	138249363851014976	63798570	259676610203790935793000
533170	151564368606013000	64298620	265830590578756131928000
543752	160769107975275008	66747770	297378990157687135433000
559846	175471156639227736	69278022	332496010036177335666648
565137	180493358291026353	69768072	339601941949863016309248
598807	214714120150263943	69778072	339747990397402531829248
664741	293736149984221021	72227222	376792920320288231345048
670032	300806096458272768	72717272	384514510655817327707648
720279	373682068958277639	72727271	384673150653644527723511
757835	435235164725157875	74747475	417627972518780307796875
791505	495862183018112625	74909681	420352701580617017068241
807598	526727149679131192	75409731	428827052296213509564891
825175	561873028927234375	77706674	469218322003481810750024
829466	570684092086166696	77767777	470326072320873707526433
856142	627534213320015288	77777776	470507512318244907544576
966329	902350034690029289	80726976	526085161987628408242176
973323	922085001971049267	80726977	526085181538162612736833
4444443	87791409602222606307	80889183	529262771767141910291487
4927940	119673015472102184000	88878888	702094930154632317123072
5072058	130482609481202819112	88888888	702331940521262213443072
5555555	171467712620032578875	93868290	827097521036953800789000
5555556	171467805212623319616	197864531	7746470118484770071633291
5699673	185161129138450934217	332999667	36925926221999778074073963
6183170	236392428062461013000	667000332	296741406109664558260594368
8888887	702331513854690480103	⋮	⋮

（四）$K_4(10^n)$「立方分段和差相間再現數」之表列

$K_3(10^n)$立方分和再現數$k=p+q+r$			$K_4(10^n)$分段和差相間立方再現數$p-q+r$		
n	k	k^3	n	k	k^3
1	1	1	1	1	1
1	8	512	3	155 ●	3723875
2	**45**	91125	3	209 ●	9129329
3	**297**	26198073	3	**274** ●	20570824
4	2322 ●	12519490248	3	286 ●	23393656
4	**2728** ●	20301732352	3	287 ●	23639903
4	4445 ●	87824421125	3	351 ●	43243551
4	4544 ●	93824221184	3	**364** ●	48228544
4	4949 ●	121213882349	3	428 ●	78402752
4	5049 ●	128711132649	3	573 ●	188132517
4	5455 ●	162324571375	3	**637** ●	258474853
4	5554 ●	171323771465	3	715 ●	365525875
4	7172 ●	368910352448	3	**727** ●	384240583
5	27100	19902511000000	3	846 ●	605495736
5	44443	87782935806307	3	923 ●	786330467
5	55556	171471879319616	4	1095	1312932375
5	60434	220721185826504	4	1096	1316532736
5	**77778**	470511577514952	4	2191	10517853871
6	143857	2977097087043793	4	8905	706157817625
6	208494	9063181647017784	5	18182	6010698724568
6	226071	11554058606155911	5	18183	6011690534487
6	279720	21886209834048000	5	81818	547704838475432
6	313390	30779063611219000	5	81819	547724921276259
6	324675	34225243575046875	6	**326734**	34880523050814904
6	**329967**	35926219978074063	6	**336634**	38148189618488104
6	346060	41443288617016000	6	**663367**	291918480414851863
6	368928	50214003962314752	6	**673267**	305184157080525163
6	395604	61913024827308864	7	2727274	20285528024055326824
6	422577	75460133084214033	7	4545454	93914316303535236664
6	427868	78330233506116032	7	5454547	162284134936177325323
6	**461539**	98316229404133819	7	7272727	384673134785876904583
6	472823	105705061351305767	7	23529411	13026662682678649053531
6	478115	109294197946170875	7	**23529412**	13026664343578265662528
6	488214	116367227503144344	7	76470589	447180961919397650946469

（五）The Extended GCD

（http://www.hostsrv.com/webmaa/app1/MSP/webm1010/extended_gcd.msp）

The Extended Euclidean Algorithm
The Extended Euclidean Algorithm determines, if present, the inverse of *b* modulo *n*

```
package kryptoScript;
//
// http://www-ti.informatik.uni-tuebingen.de/~haeusser/krypto/
// java/ExtEuclid.java (RSA)
//
// Copyright (c) 1999 Matthias Haeusser
//
// last change: 14.11.1999
//

import java.awt.*;
import java.applet.*;
import java.lang.*;
import java.awt.event.ActionListener;
import java.awt.event.ActionEvent;

public class ExtEuclid extends Applet implements ActionListener {
    KeyField bField, nField;
    TextArea steps;
    Button ButtonStart;

    // layout
    public void init() {
        setLayout(new GridBagLayout());
        GridBagConstraints c;

        c = new GridBagConstraints();
        c.gridx = 0; c.gridy = 0; c.anchor = GridBagConstraints.WEST;
        add(new Label("b ="), c);

        c = new GridBagConstraints();
        c.gridx = 1; c.gridy = 0;
        add(bField = new KeyField("28", 5), c);

        c = new GridBagConstraints();
        c.gridx = 2; c.gridy = 0;
        add(new Label("n ="), c);

        c = new GridBagConstraints();
        c.gridx = 3; c.gridy = 0;
        add(nField = new KeyField("75", 5), c);

        c = new GridBagConstraints();
        c.gridx = 0; c.gridy = 1; c.gridwidth = 4;
        add(ButtonStart = new Button(getParameter("start")), c);

        c = new GridBagConstraints();
        c.gridx = 0; c.gridy = 2; c.anchor = GridBagConstraints.WEST;
        c.gridwidth = 5;
```

```
        add(steps = new TextArea(18,28), c);
        steps.setEditable(false);

        // register listeners
        bField.addActionListener(this);
        nField.addActionListener(this);
        ButtonStart.addActionListener(this);
    }

    // listen, dispatch
    public void actionPerformed(ActionEvent e) {
        exteuclid();
    }

    public void exteuclid() {
        int b = bField.getKey();
        int n = nField.getKey();
        if (b == 0) {
            steps.setText(getParameter("bnot0"));
            return;
        }
        if ((b == -1) | (n == -1)) { return; }

        int b0 = b;
        int n0 = n;
        int t = 1;
        int q = (int)Math.floor((double)(n0/b0)); // trunc?
        int r = n0 - q * b0;
        steps.setText(" (6) "+ n +" = "+ q +" * "+ b0 +" + "+ r +"\n"); // output
        int t0 = 0;
        while (r > 0) {     // should step 12 be output?
            int temp = t0 - q * t;
            if (temp >= 0) temp = temp % n;
            if (temp < 0) temp = n - ((-temp) % n);
            t0 = t;
            t = temp;
            steps.append("(12) "+ t +" * "+ b +" mod "+ n +" = "+ r +"\n"); // output
            n0 = b0;
            b0 = r;
            q = (int)Math.floor((double)(n0/b0));
            r = n0 - q * b0;
            steps.append("(16) "+ n0 +" = "+ q +" * "+ b0 +" + "+ r +"\n"); // output
        }
        if (b0 != 1) {
            steps.append("\n" + getParameter("noInverse"));
        }
        else {
            steps.append("\n=> " + getParameter("result") + ": " + t);
        }
    }
}
```

（六）$K_1(N)$「平方分和再現數」Program

```
http://paste.lisp.org/display/10799

#include <stdio.h>
#include <math.h>

int FindDigits(int);
int FindFirstHalfDigits(int);
int FindSecondHalfDigits(int, int);
int FindFirstHalfNumber(int, int);
int FindSecondHalfNumber(int, int);

int main()
{
		int k;
		printf("enter the number to be tested: ");
		scanf("%d", &k);
		int squaredNumber = k * k;
		int a = FindDigits(squaredNumber);
		int b = FindFirstHalfDigits(a);
		int c = FindSecondHalfDigits(b, a);
		int beginningOfSquaredNumber = FindFirstHalfNumber(squaredNumber, b);
		int restOfSquaredNumber = FindSecondHalfNumber(squaredNumber, c);
		if ((beginningOfSquaredNumber - restOfSquaredNumber == k) ||
(beginningOfSquaredNumber + restOfSquaredNumber == k))
				printf("%d is a kaprekar number\n", k);
		else
				printf("%d is not a kaprekar number\n", k);
		return 0;
}

int FindDigits(int d)
{
		return (int)(floorf(log10((float)(d))) + 1.0);
}

int FindFirstHalfDigits(int j)
{
		return (int)(floorf((float)(j) / 2.0));
}

int FindSecondHalfDigits(int h, int y)
{
		float twoValue = 2.0;
		return (int)((float)(h) + modff((float)(y), &twoValue));
}

int FindFirstHalfNumber(int w, int t)
{
		return (int)(ceilf((float)(w) * powf(10.0, -(float)(t))) - 1.0);
}
```

```
int FindSecondHalfNumber(int p, int l)
{
		return (int)(powf(10.0, (float)(l)) * ((ceilf((float)(p) * powf(10.0, -(float)(l))) - 1.0) -
(float)(p) * powf(10.0, -(float)(l))));
}
```

（七）Mathcad Code（Mathcad 實現分和累乘再現數產生的方法：定理二）

Mathcad Software. Website：http://www/mathsoft.com/mathcad.

```
k(kupper) :=  j ← 0
              nupper ← ceil(2·log(kupper))
              for k ∈ 1..kupper
                  mod9k ← mod(k,9)
                  mod9k2 ← mod(mod9k^2, 9)
                  if (mod9k = mod9k2)
                      flag ← 0
                      for n ∈ 1..nupper
                          r ← (k·10^n − k^2)/(10^n − 1)
                          if (0 < r)·(r < 10^n)·(floor(r) = r)·(flag = 0)
                              q ← k − r
                              if (k^2 = q·10^n + r)·(k = q + r)
                                  j ← j + 1
                                  x_{j,0} ← k
                                  x_{j,1} ← q
                                  x_{j,2} ← r
                                  x_{j,3} ← n
                                  x_{j,4} ← q·10^n + r
                                  x_{j,5} ← k^2
                                  flag ← 1
              x
```

Mechanical Engineering Program 2001 Publications

C. G. Black, Some properties of the Kaprekar numbers and a means of generation, ScienceAsia：Journal of the Science Society of Thailand, Vol. 27, No. 2, pp.133-136, 2001.

（八）Prime Factor Calculation's Online【質因數分解與($10^n \mp 1$)的單一除數】

```
http://www.maths.hscripts.com/primefactor.php
import javax.swing.*;
import java.awt.*;
import java.awt.event.*;

public class Practice1_2 extends JFrame implements ActionListener {
   JTextField outputField = new JTextField(30) , enterField= new JTextField(8);
   String output;
   boolean end = false;
   public Practice1_2 () {
      super("質因數分解");
      Container c =getContentPane();
      c.setLayout( new FlowLayout());
      c.add(enterField);
      c.add(outputField);
      outputField.setEditable(false);
      enterField.addActionListener(this);
      pack();
      show();
   }

   public void actionPerformed (ActionEvent e ) {
      String in = e.getActionCommand();
      enterField.setText("");
      output = in + " = " ;
      end = false;
      process(Integer.parseInt(in), 2);
   }

   public void process (int x, int y) {
      while (!end) {
         while ( x % y == 0) {
            output += y + "*";
            x /= y;
         }
         if ( y < x ) {
            y++;
         }
         else {
            output = output.substring(0, output.length()-1);
            outputField.setText(output);
            end = true;
         }
      }
   }
   public static void main (String [] args ) {
      Practice1_2 app = new Practice1_2();
      app.setDefaultCloseOperation(JFrame.EXIT_ON_CLOSE);
   }
}
```

評語

作者非常用心，在呈現方面可以化簡，組織上可以加強。