臺灣二００七年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：長方體內最少完全城堡數

得 獎 獎 項：第二名

學校 / 作者：臺北市立建國高級中學　　　　陳冠霖
　　　　　　臺北市立建國高級中學　　　　劉彥廷

作者：陳冠霖

目前就讀於台北市立建國高級中學數理資優班二年級

台北市第 37 屆中小學科學展覽會 彩色蠶繭 國中組 生物科 特優

第四十四屆中小學科學展覽會 彩色蠶繭 國中組 生物科大會獎 最佳團隊合作獎

台北市第 39 屆中小學科學展覽會 城堡保衛 高中職組 數學科 特優 創意獎

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會 城堡保衛 高中組 數學科 大會獎佳作

作者： 劉彥廷

目前就讀於台北市立建國高級中學數理資優班二年級

台北市第 37 屆中小學科學展覽會 彩色蠶繭 國中組 生物科 特優

第四十四屆中小學科學展覽會 彩色蠶繭 國中組 生物科大會獎 最佳團隊合作獎

台北市第 39 屆中小學科學展覽會 城堡保衛 高中職組 數學科 特優 創意獎

中華民國第四十六屆中小學科學展覽會 城堡保衛 高中組 數學科 大會獎佳作

摘要

我們試著尋找所需最小的城堡個數以看守整個$a \times b \times c$ $(a,b,c \in N)$的長方體。所謂城堡是一種棋子，當放置城堡的位置是(x,y,z)，則(x,y,t)、(x,t,z)、(t,y,z)(t是任何不超出邊界的正整數)是這個城堡可以看守的格子。我們用這些城堡來完全看守長方體，試著找出其最小值。

在 2005 年我們猜測了$a=b=c$、$a=b<c$、$a=b>c$、$a>b>c$的上界，而在 2006 年時完成了$a=b=c$、$a=b<c$的最小值證明。而這份報告我們完成了$a=b>c$的大部分情況的證明，少數不能解決的部份也提供了不錯的上界。

目前我們在$a=b=c$、$a=b<c$、$a=b>c$的情況幾乎完全解決，目前正在向$a>b>c$的部份發展。

Abstract

A generalized searching method of finding the minimum number of castle which can oversee all over the rectangular box, defined as $a \times b \times c$ $(a,b,c \in N)$, is presented. The castle here is defined as one kind of chess. The castle positioned as (x,y,z) can direct the lattice points of (x,y,t)、(x,t,z)、(t,y,z) (t is the positive integer and smaller than the box size). These castles we use here is to oversee the rectangular box and to help us to find the minimum number.

In 2005, we got the upper bound of overseeing the rectangular box in the conditions of $a=b=c$、$a=b<c$、$a=b>c$、$a>b>c$, while in 2006 we complete the proofs of the minimum number of castles based on the conditions of $a=b=c$、$a=b<c$. In this paper, we have almost completed the total proofs and provided the suitable upper bound for the other proofs. By the same time, we almost solve out the problems if the conditions are $a=b=c$、$a=b<c$、$a=b>c$. The further work we want to attain is to complete the case of $a>b>c$.

壹、 前言

當我們在觀察一些有關西洋棋中城堡的移動問題時，發現如果棋盤格數為 $m \times n\ (m \ge n)$ 時，只需要 n 個城堡就可以吃到這個棋盤上所有的棋子（或者說是可以看守到這個棋盤的所有格子）。當我們再把這個題目延伸到三度空間中時，那結果會是如何呢？於是就開始了我們的研究。我們於 2005 年台灣國際科學展覽會所作的完全圖立方乘積之最小控制的問題和此類似，並以其為基礎，繼續探討這個問題。

我們要試著找出在 $a \times b \times c\ (a,b,c \in N)$ 的長方體中最少需要多少個城堡才能完全看守這個長方體。我們將 a、b、c 三邊長分成以下四種情形來討論：

$a = b = c$

$a = b < c$

$a = b > c$

$a > b > c$

貳、　研究方法或過程

一、 符號定義

1. 在我們以下的討論中所有變數若不特別指定，則都是正整數，而空間也是有限的正整數空間(也就是我們所研究的長方體空間)，這些變數也都是定義在此有限正整數空間內。

2. 當我們在正整數空間中放下一個城堡(棋子，以下依此類推)，令我們放置城堡的位置是 (x,y,z) ，則很明顯的可以看出 (x,y,t) 、 (x,t,z) 、 (t,y,z) (t 是任何不超出邊界的正整數)都是這個城堡可以看守的位置。我們的目標就是找出最少的城堡個數，使得這些城堡可以看守整個長方體的所有位置。

3. 若有一組的城堡，其涵蓋的範圍包含了所要看守的長方體範圍，我們就稱這一組城堡為**一組可靠的城堡**。我們用一個集合 S 來表示這組可靠的城堡，而 $|S|$ 代表這組可靠的城堡的個數。我們定義函數 $f(a,b,c)=\min\{|S|\}$ 。

二、 $a=b=c=n$

這個部分我們於 **2005** 年台灣國際展覽會「完全圖立方乘積之最小控制」中有得到它是一個上界；在 **2006** 年，我們更進一步的證明了它是最小值（定理一），並得到了一個額外的結果（引理一）。

引理一
$x_1+x_2+...+x_{s-1}+x_s=n$,　$x_i\in N$
當所有 $\lvert x_i-x_j\rvert\le 1, i\ne j$
會使得 $x_1^2+x_2^2+...+x_{s-1}^2+x_s^2$ 有最小值

定理一
當 $a=b=c=n$ 時， $f(n,n,n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil^2+\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2$

以下利用 x_i 來代表第 i 層的城堡個數。
證明：

1. **當邊長 $n=2k$ ，只用 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 - 1 = 2k^2 - 1$ 個不能完全看守正方體**

利用排容原理，由於每放一個城堡就可以看守 $3n-2=6k-2$ 個，再因為有 $x_i(x_i-1)$ 被重複計算 3 次，所以必須扣除 2 次。利用引理一可以得到：

$$
\begin{aligned}
\text{總覆蓋數} &= (3n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1) \\
&= (6k-2)(2k^2-1) - 2\left[(k-1)^2 + (2k-1)k^2 - (2k^2-1)\right] \\
&= 8k^3 - 2k - 2 < 8k^3
\end{aligned}
$$

2. **當邊長 $n=2k$ ，只用 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 = 2k^2$ 個可以完全看守正方體**

同上，可以得到：

$$
\begin{aligned}
\text{總覆蓋數} &= (3n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1) \\
&= (6k-2)2k^2 - 2(2k \cdot k^2 - 2k^2) \\
&= 8k^3
\end{aligned}
$$

3. **當邊長 $n=2k+1$ ，只用 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 - 1 = 2k^2 + 2k$ 個不能完全看守正方體**

同上，可以得到：

$$
\begin{aligned}
\text{總覆蓋數} &= (3n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1) \\
&= (6k+1)(2k^2+2k) - 2[k(k+1)^2 + (k+1)k^2 - (2k^2+2k)] \\
&= 8k^3 + 12k^2 + 4k < 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = (2k+1)^3
\end{aligned}
$$

4. **當邊長 $n=2k+1$ ，只用 $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 = 2k^2 + 2k + 1$ 個可以完全看守正方體**

同上，可以得到：

$$
\begin{aligned}
\text{總覆蓋數} &= (3n-2)\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i-1) \\
&= (6k+1)(2k^2+2k+1) - 2[(k+1)^2 + 2k \cdot k^2 - (2k^2+2k+1)] \\
&= 8k^3 + 16k^2 + 8k + 1 > 8k^3 + 12k^2 + 6k + 1 = (2k+1)^3
\end{aligned}
$$

那麼我們如何在邊長為 n 的正方體，佈置 r^2 個城堡使其能看守所有格子？方法如下

設 $s=\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$，$t=\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$，且選取 $1,2,3,\ldots,s$ 爲模 s 下的一組剩餘系，選取 $s+1$, $s+2$, $s+3$, …, n 爲模 t 下的一組剩餘系，很明顯得知集合 A=$\{(i, j, m) \mid 1 \leqq i \leqq s, 1 \leqq j \leqq s, m \equiv i+j-1 \pmod{s}\}$ 及集合 B=$\{(n-i, n-j, m) \mid 0 \leqq i \leqq n-1, 0 \leqq j \leqq n-1, m \equiv n-i-j \pmod{t}\}$，A∪B 可以做爲 $n\times n\times n$ 正方體中的一組可靠的城堡。像 A 集合中的城堡的分佈方式，我們稱爲轉格。

三、 $a=b<c$

> **定理二**
> $f(n,n,n+k)=\min\{s^2+t^2+sk \mid s+t=n, t\ge s\ge 0, s,t\in N\cup\{0\}, k\in N\}$
> 當 $k\ge 2n-2$，也就是當 $c\ge 3a-2$ 時，$f(n,n,c)=n^2$。

此段是 $a=b=c=n$ 再往上加層。根據不同的 s 、t 分割方式找出最小值。當 $k\ge 2n-2$ 時，可以直接放上 n^2 個城堡。至於證明的部份，請參見參考資料三，在此就不再贅述。

四、 $a=b>c$

這個部分我們於 2005 年台灣國際展覽會「完全圖立方乘積之最小控制」中提出了猜想（定理六）；現在我們可以加以證明，同時也得到了另一個較好的下界（定理七）。此外在「區塊分割法」部分，我們也證明出來其在分段點部份是正確的（定理八）。

> **定理三**
> $f(n+1,n+1,k)\le f(n,n,k)+k$

證明：

若 $f(n,n,k)=m$，表示 m 個城堡就可以看守 $n\times n\times k$ 的長方體，如圖 1 這樣在 $n\times n\times k$ 的長方體外面再放一個 k 個城堡組成的 $1\times 1\times k$ 的長方柱，如此 $(n+1)\times(n+1)\times k$ 的長方體完全被看守了。所以 $(n+1)^2\times k$ 的解，至多只要 $f(n,n,k)+k$ 個。

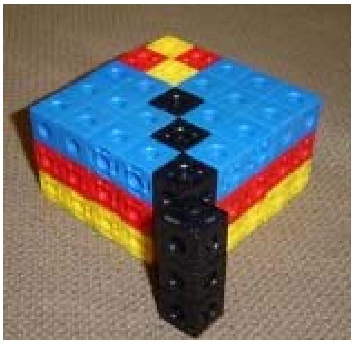

圖 1 外加一柱的情形

> **定理四**
> 當 $n\ge 2$，$f(n,n,2)=2(n-1)$

> **定理五**
> $f(4,4,3)=8$，$f(5,5,3)=10$
> 當 $n\ge 6$，$f(n,n,3)=3n-6$

定理五的證明跟定理四的證明很類似，也是用鴿籠原理加上一些仔細的計數，就可以完成證明，在此就不再證明。

在我們進行計算之後，發現以下的結果：

當 $n \geq 2$ ， $f(n,n,2) = 2(n-1)$

當 $n \geq 6$ ， $f(n,n,3) = 3(n-2)$

當 $n \geq 12$ ， $f(n,n,4) = 4(n-3)$

當 $n \geq 20$ ， $f(n,n,5) = 5(n-4)$

根據以上的結果，我們可以猜想以下的定理六，並加以證明：

定理六 當 $n \geq c(c-1)$ 時， $f(n,n,c) = c(n-c+1)$

證明：

當城堡數爲 $c(n-c+1)$ 時可以從擺法上得知其可以覆蓋整個長方體。所以我們要證明的部分就是當城堡數爲 $c(n-c+1)-1$ 時不能覆蓋整個長方體。方法是計算城堡的最多覆蓋數，首先分爲水平與垂直覆蓋的部分：水平部分每一個城堡可以在同層覆蓋掉 $2n-1$ 個城堡，再扣掉與同層重複計算的部分，可得水平覆蓋數爲 $2n\sum_{i=1}^{c} x_i - \sum_{i=1}^{c} x_i^2$ ；而垂直覆蓋數，我們可以知道兩個城堡擺放在同行或同列時，所能覆蓋的格子數減小。以第一層爲例，第一層能覆蓋第二層的格子數有 $(n-x_2)$ 個，加總得：$(n-x_2)+...+(n-x_c)+(n-x_1)-(n-x_1) = cn - \sum_{i=1}^{c} x_i - (n-x_i)$ ，再將其依照層數加總可得 $\sum_{i=1}^{c}\left(cn - \sum_{i=1}^{c} x_i - (n-x_i)\right) = (c-1)(cn - \sum_{i=1}^{c} x_i)$ 。

將 n 以 $c(c-1)+k$ 替代，故 $c(n-c+1)-1 = c(c-1)^2 + ck - 1$ 再與總格子數比較可得：

覆蓋數 − 格子數

$$= 2n\sum_{i=1}^{c} x_i - \sum_{i=1}^{c} x_i^2 + (c-1)(cn - \sum_{i=1}^{c} x_i) - n^2 c$$

$$= -c$$

由於總覆蓋數小於總格子數，利用 $c(n-c+1)-1$ 個城堡並不能完全覆蓋長方體。

定理七

$nc+c-c^2 \le f(n,n,c) \le nc$

證明：

由於水平覆蓋數＋垂直覆蓋數≧總格子數 才能完全覆蓋長方體。所以可得：

$$2n\sum_{i=1}^{c} x_i - \sum_{i=1}^{c} x_i^2 + (c-1)(cn - \sum_{i=1}^{c} x_i) \ge n^2 c$$

令 $p = \sum_{i=1}^{c} x_i$ （總城堡數），

$$\because \sum_{i=1}^{c} x_i^2 \ge \frac{p^2}{c}$$

$$\therefore n^2 c \le 2np - \sum_{i=1}^{c} x_i^2 + (c-1)(cn-p)$$

$$\le 2np - \frac{p^2}{c} + (c-1)(cn-p)$$

$$\Rightarrow c + nc - c^2 \le p \le nc$$

所以由定理六可以得知 $nc+c-c^2 \le f(n,n,c) \le nc$

區塊分割法 —— 針對$n \le c(c-1)$

使用這個方法找到的可靠的城堡並不能確定是最少的情況，但已經對城堡的個數給一個上界。也就是我們知道最佳解不會超過我們所給的值。

我們把長方體切成 c 層，每一層都是邊長 n 正方形。如圖 2，把這邊長爲 n 的正方形切成 s 個小正方形(區塊)，設這些小正方形的邊長分別是 x_1、x_2、…、x_s，$x_i \in N$ 一個邊長 x_i 的區塊如完全靠上下看守，則需要 x_i^2 個城堡。我們只需要照著轉格的方式排列，在每一層都放置 x_i 個城堡。

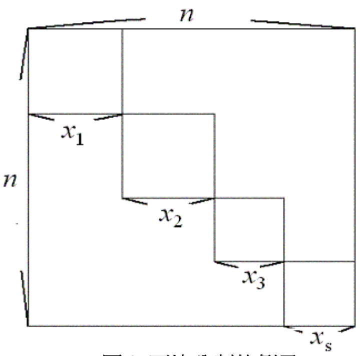

圖 2 區塊分割的例子

除了這 x_i 層之外的 $c-x_i$ 層，各層在這邊長 x_i 的區塊都不需要有城堡，而在其它的正方形都有跟邊長一樣數量的城堡，也就是需要 $n-x_i$ 個城堡，那就可以完全看守這些層。如此，每一層在一個區塊可以缺席一次，故我們計算在 $x_1, x_2, \ldots x_{s-1}$ 這幾個區塊中，累計的缺席的層數 $t = c-x_1+c-x_2+..+c-x_{s-1}$，也是最後一個區塊 x_s 中，有 t 層必須各層都有 x_s 個城堡。

已知 $x_1+x_2+\ldots+x_{s-1}+x_s = n$，並假設 $x_1 \ge x_2 \ge \ldots\ldots \ge x_s$，若 $c-x_1+c-x_2+..+c-x_{s-1} \le c$。則定義

$f(n,n,c) = \min\{x_1^2+x_2^2+\ldots\ldots+x_{s-1}^2+t\,x_s \mid x_1+x_2+\ldots+x_s = n$，$x_1 \ge x_2 \ge \ldots\ldots \ge x_s$，$t = c-x_1+c-x_2+..+c-x_{s-1}$，$x_i \in \boldsymbol{N}\}$。

若 $a = tc(t \in N)$，則我們說 $a \times a \times c$ 是第 t 個分段點，而 $a \times a \times c$ 到 $(tc+c)\times(tc+c)\times c$ 叫第 t 個區段。已經知道，在第 t 分段點做區塊分割時是(t+1)等分的。如表 1 就是 $c=10$ 的例子。

表 1　c = 10 區塊分割分段點的排列

a		a		c		區塊數	區塊分割
10	×	10	×	10		2	5^2+5^2
20	×	20	×	10		3	$7^2+7^2+6^2$
30	×	30	×	10		4	$8^2+8^2+7^2+7^2$
40	×	40	×	10		5	$8^2+8^2+8^2+8^2+8^2$
50	×	50	×	10		6	$9^2+9^2+8^2+8^2+8^2+8^2$
60	×	60	×	10		7	$9^2+9^2+9^2+9^2+8^2+8^2+8^2$
70	×	70	×	10		8	$9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+8^2+8^2$
80	×	80	×	10		9	$9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+8^2$
90	×	90	×	10		10	$9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+9^2+9^2$

我們說第 t 個分段點會被 $t+1$ 等分，是因爲他不能被 t 等分，這樣會被分成 t 個邊長 c 的區塊，如此所需的城堡數 tc^2，會比原先的 $(t+1)\left\lceil \frac{tc}{t+1} \right\rceil^2$ 還來得大。也不能被 $t+2$ 等分，若分成 $t+2$ 個區塊，缺席的總層數會超過 c 層，這時就不只 x_{t+2} 的係數是 c，還有其它更多區塊不能只用邊長的平方計算，而都要去乘上長方體的高 c，如此一來，所需的城堡數會比分成 $t+1$ 塊來的多。

而對於第 t 區段之間的 a，也就是 $tc < a < (t+1)c$ 時，$a \times a \times c$ 做區塊分割時是分成 $t+2$ 區塊，而前 t 塊的邊長 x_1、x_2、…、x_{t+1}，這些數彼此的差也都不大於 1，x_{t+2} 則是介於 1 到 $\left\lfloor \frac{n}{t+1} \right\rfloor$ 的整數。第 t 個分段點可以看出來，在每一個區段之間，$f(n+1,n+1,c) - f(n,n,c)$ 是相當有規律的。利用這個規律，可以很容易用程式把 $f(n,n,c)$ 的值算出來。這個規律我們透過下面表 2 這個例子來說明。

表 2　區塊分割法遞增的規律

a		a		c		區塊數	區塊分割	城堡數	差	
10	×	10	×	10		2	5^2+5^2	50		
11	×	11	×	10		2	$5^2+5^2+10\times1$	60	10	2 次 10
12	×	12	×	10		2	$5^2+5^2+10\times2$ $6^2+5^2+9\times1$	70	10	
13	×	13	×	10		2	$6^2+5^2+9\times2$	79	9	
14	×	14	×	10		2	$6^2+5^2+9\times3$ $6^2+6^2+8\times2$	88	9	2 次 9
15	×	15	×	10		2	$6^2+6^2+8\times3$	96	8	
16	×	16	×	10		2	$6^2+6^2+8\times4$	104	8	
17	×	17	×	10		2	$6^2+6^2+8\times5$	112	8	
18	×	18	×	10		2	$6^2+6^2+8\times6$ $7^2+6^2+7\times5$	120	8	4 次 8
19	×	19	×	10		2	$7^2+6^2+7\times6$	127	7	
20	×	20	×	10		3	$7^2+6^2+7\times7$	134	7	

在每一區段的最一開始，$f(n+1,n+1,10) - f(n,n,10)$ 都會是 10，如此加 10 出現 2 次，這個 2＝2×6－10 (5 平方要變成 6 平方)，再來因爲也是 5 進位成 6，所以是增加 2 次 9，再來是第一個 6 平方進位成 7 平方，所以會加 4 次 8。

一般來說，從第 t 個分斷點開始增加的數由 c 遞減，每次減 1。而同樣數字重覆的次數是：c 有 $2\times(x_t+1)-c$ 次；接下來如果都是要讓 x_t 進位成 x_t+1 次，則都是 2 次；一直到第一個要從 x_t+1 進位成 x_t+2，才會是 4 次；之後的 x_t+1 進位成 x_t+2，又會到 2 次。如此完成一個區段。

關於 $2\times(x_t+1)-c$

這邊透過簡單的計算就可以輕易證明這個算式，如下：

假設所需 $x^2+x^2+...+x^2+tc$ 個城堡，

當第一個 x^2 進位成 $(x+1)^2$ 時，也就是 $(x+1)^2+x^2+...+x^2+(t-1)(c-1)$ ，

將兩式相等時，得到 $2(x+1)-c-t=0$ ，即 $t=2(x+1)-c$

定理八
以區塊分割法得到的城堡數在分段點時是最小值。

證明：

當 $a = tc$ 時，我們將其分成 $t+1$ 個區塊。設其中小的區塊邊長為 s，大邊長 $s+1$。再設 k 為邊長 $s+1$ 的個數。於是 $a = tc = (t+1)s + k$。

所需總城堡數 $N = k(s+1)^2 + (t+1-k)s^2 = as + sk + k$。

而我們要證明的是在少一個城堡的時候不能完全覆蓋。方法是計算垂直覆蓋數是否能完全覆蓋水平蓋完後空的格子數。於是設 $N' = N - 1 = as + sk + k - 1$。

由於區塊分割法每層都有一個區塊缺席，因此我們可得在一層中有 $a-s$ 個城堡有 $(c-s)(t+1-k)-1$ 層、$a-(s+1)$ 個城堡有 $k(c-s-1)+1$ 層。接下來計算水平蓋完後仍空的格子數：$T_1 = [(c-s)(t+1-k)-1]s^2 + [(c-s-1)k+1](s+1)^2$

我們將城堡投影到尚未覆蓋的水平空格，計算出投影後的水平空格：$A = [(c-s)(t+1-k)-1]s + [(c-s-1)k+1](s+1)$。再將 A 個平均分給 a 列 $\frac{A}{a} = c - s - \frac{sk+k-1}{a} = c - s - 1 + \frac{a-sk-k+1}{a}$。於是可得每列空格數有 $sk+k-1$ 列是 $c-s-1$ 個、$a-sk-k+1$ 列是 $c-s$ 個。

如此就可以計算垂直覆蓋數：

$T_2 = s(c-s)(a-sk-k+1) + (s+1)(c-s-1)(sk+k-1)$

因為 $T_2 - T_1 = -c$，由此得知只有 N' 個城堡是不能完整的覆蓋長方體，所以 N 為所需的最小城堡個數。

接著我們要說明當一層中有兩個城堡放在同行或同列會造成覆蓋數減少。假設第 i 層共放有 X_i 個城堡，其中有 Y_i 個城堡放在同行。另外假設 $Y=\sum Y_i$ 、$S_i = a - X_i$ ，可得 S_i 為 s 或是 $s+1$ 。所以增加的水平空格數為：$\sum Y_i S_i \ge s\sum Y_i = Ys$ 。

由於投影過後的水平空格增加了 Y 個。我們計算每增加一個同行同列的城堡所會增加的垂直覆蓋：原本覆蓋 s 格有 $c-(s+1)$ 個的少了一列，相對的覆蓋 $s+1$ 格有 $c-s$ 個的多了一列，於是計算其中的差：$(c-s)s-\left[c-(s+1)\right](s+1) = 2s+1-c = s-\left[(c-1)-s\right] \le s$。於是我們得到每增加一個同行同列最多會增加 s 個的垂直覆蓋數。

根據以上的計算，可得：增加水平空格 $\ge Ys \ge$ 增加垂直覆蓋。所以若有城堡放在同行同列會造成覆蓋數減少。

五、 $a>b>c$

定理九

令 $g(x) = 2x^2 - (a+3b-2c)x + b(a+b-c)$ ，

當 $x = \text{round}(\dfrac{a+3b-2c}{4})$ 時，

$f(a,b,c) \le g(x) \quad (a>b>c)$

D 區的城堡數：

我們是把 $a\times b\times c$ 的長方體分成 c 層，每一層都是 $a\times b$ 的長方體。設第一層有最少的城堡，只有 x 個城堡 $(0 \le x \le b)$ ，則第一層還有$(a-x)(b-x)$個正方體需要上下看守，也就是在 D 區至少要有$(a-x)(b-x)$個城堡。如圖 3 這些城堡如果平均分配到 $b-x$ 層，每層有 $a-x$ 個。

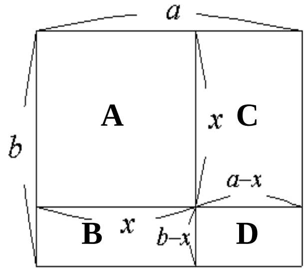

圖 3 第一層的情形

A 區的城堡數

照前一段，則共有 $c-(b-x)$層在 D 區是沒有城堡(包括第一層)，這些層在 A 區都要 x 個城堡，共需$(c+x-b)$ x 個城堡。因爲至少有第一層在 D 區是沒有城堡，且 $b>c$，因此我們知道 $0<(c+x-b)<x$。

D 區有城堡的層數是 $b-x$ 層，考慮這些層在 A 區的情況。因爲 A 區有 x 個城堡的已經有$(c+x-b)$層了，這些在 A 區的城堡至少能形成一個邊長$(c+x-b)$的正方形，如此 $b-x$ 層中，每層只需要 $x-(c+x-b)$個城堡。因此需要$(b-x)(b-c)$個城堡。

城堡總數

把這三類加起來得到城堡數有

$2x^2-(a+3b-2c)x+b(a+b-c)$……………(1)

這是一個二次函數。當 x 是在 $0 \le x \le b$ 這範圍中離 $\frac{a+3b-2c}{4}$ 最近的整數時，城堡數有最少。我們只要把給定的 a、b、c 代進去算出 x，再把 x 代到(1)的二次函數中，就可以知道需要嘗試的次數了。

而當 $x=b$ 時，此時 $\frac{a+3b-2c}{4} \ge b-\frac{1}{2}$，即 $a \ge b+2c-2$ 時，函數值會等於 bc。這跟 $b=c$ 的情況，$a \ge 2c-2$ 時只要試 c^2 次就好的結果是一致的。

但當 $a=b$ 時，這個方法得到的城堡數會比用區塊分割法得到的城堡數還多，這個部分是個不錯的問題，日後可再深入研究。

參、　研究結果與討論

引理一

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{s-1} + x_s = n$， $x_i \in N$

$\forall |x_i - x_j| \le 1 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{s-1}^2 + x_s^2$有最小值

定理一

當$a = b = c = n$時，$f(n,n,n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2$

定理二

當$a = b = n < c = n + k$時，$f(n,n,n+k) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2 + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor k$。

特別是$k \ge n - 2$，$f(n,n,n+k) = n^2$。

定理三

$f(n+1,n+1,k) \le f(n,n,k) + k$

定理四

當$n \ge 2$，$f(n,n,2) = 2(n-1)$

定理五

$f(4,4,3) = 8$，$f(5,5,3) = 10$

當$n \ge 6$，$f(n,n,3) = 3n - 6$

定理六

當$n \ge c(c-1)$時，$f(n,n,c) = c(n-c+1)$

定理七

$nc + c - c^2 \le f(n,n,c) \le nc$

定理八

以區塊分割法得到的城堡數在分段點時是最小值。

定理九

令 $g(x)=2x^2-(a+3b-2c)x+b(a+b-c)$，

當 $x=\text{round}(\dfrac{a+3b-2c}{4})$ 時，

$f(a,b,c)\le g(x) \quad (a>b>c)$

我們在 $a=b=c=n$ 、 $a=b<c$ 的部分已經完成。我們接下來要繼續做下去的是把區塊分割法試著把它證出來，並且在 $a>b>c$ 的個數計算的配方法找出其與區塊分割法偏差的原因。

肆、　結論與應用

一塊長寬高分別爲 a、b、c 長方體，交給數個城堡看守，則達成可靠的城堡所需的個數爲：

一、　當 $a=b=c=n$ 時，一組可靠的城堡所需的最少個數爲 $\left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil^2+\left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor^2$ 。

二、　當 $a=b<c$ 時，一組可靠的城堡所需的最少個數爲 $\min\{s^2+t^2+s(c-a) \mid s+t=a, t\ge s\ge 0, s,t\in N\}$，特別當 $c\ge 2n-2$ 時，只要 a^2 。

三、　當 $a=b>c$ 時，利用區塊分割法能夠算出一組可靠的城堡所需個數的上界。並且在固定 c 的情況下，隨著 a 遞增的，需要的個數也是呈現規則性的遞增。特別是當 $a=b\ge c(c-1)$ 時，$f(n,n,c)=c(n-c+1)$ 。另外也發現了一組上下界：$nc+c-c^2\le f(n,n,c)\le nc$ 。

四、　當 $a>b>c$ 時，令 $x=\text{round}\left(\dfrac{a+3b-2c}{4}\right)$，一組可靠的城堡所需的個數最多只要 $2x^2-(a+3b-2c)x+b(a+b-c)$ 個。

伍、　參考文獻

一、　張康、張茂盛、阮夙姿，離散數學，東華書局，2002 年出版

二、　單墫、胡大同，數學奧林匹亞第 28、29 界國際數學競賽預選題，九章出版社

三、　陳冠儒、陳冠霖，完全圖立方乘積之最小控制，2005 年台灣國際科學展覽會

四、　陳冠霖、劉彥廷，城堡保衛，中華民國第四十六屆中小學科學展覽

評語

題目相當有趣，作者亦有延續先前的結論得到更多成果，值得鼓勵，展示亦很清楚。