臺灣二ＯＯ七年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱：完美長方形

學校 / 作者：嘉義市立民生國民中學　　　　郭印川
嘉義市立民生國民中學　　　　李佳穎

作者簡介

我的名字是郭印川，目前就讀嘉義市民生國中三年級。在家中排名老大，有一弟一妹。我家的書櫥中有很多書，因此，我從小就有經常閱讀課外書的習慣，擷取各方面的知識。

本來，我的興趣是理化方面，可是在數學老師的循循善誘、潛移默化之下，我對數學的興趣也慢慢的萌芽了。

在偶然的機緣下，我們參加了這次科展。雖然是第一次，經驗難免不足。可是希望從此之後，可以吸收更多的知識，朝數學建構的理想世界更進一步。

作者簡介

我是李佳穎，目前就讀嘉義市立民生國中三年級，對數學有種莫名的情愫。在二年級時，偶然有個機會能參與科展的研究，因此更讓我感覺到了數學的深奧，在這浩瀚宇宙中，就是有那麼多道理，難以發現。我相信現今人類的文明只是宇宙浩瀚裡的冰山一角，人的想像力和創造力是無限的，所以不斷的思考才能創造璀璨的未來。

【中文摘要】

正方形和長方形是每一個人都非常熟悉的圖形，但其中卻隱藏了非常多奇妙的“數學之謎”。

所謂「完美長方形」是：在一個長方形中 (長、寬不等)，能否分割出最少大小相異的正方形。

這個研究中，首先用「**草圖**」的解題方法研究完美長方形，接下來利用「**平面圖形**」的解題方法可簡化計算的過程，最後利用「**對偶關係**」證明出：**完美長方形的最少階數為 9 階**。

進而，我們將這個問題擴展至三維空間，思索在一個長方體中（長、寬、高都不等長），能否仿照二維空間，分割出最少大小相異的正方體，而完成這個研究。

【英文摘要】

Square and the rectangle are figures that everyone knows well very much, but what a wonderful " mystery of mathematics " is hidden among them.

What is called the perfect rectangle is whether in a rectangle (its length and width is different) could cut apart two squares as the least difference in size .

In this research, the solution approach of "the sketch map" is used to study the perfect rectangle at first, then the solution approach of "the level figure" to simplify the complicatied calculation of the solving course , and "the dual relation" is finally used to prove 9 orders are the least orders for a perfect rectangle .

And then, we expand this question to three-dimensional space, considering in a cuboid (its length, width, and height is different) whether could follow the two-dimensional space model to cut apart two squares as the least difference in size, and finish this research.

研究動機：

在校內數學競試中，曾經出現一個問題：*「在一個長方形中能分割 9 個大小相異的正方形，其最小的正方形邊長為 1，請問其他的邊長為何?」*

同一段時間中，我們也在欣賞歷屆國中科展得獎作品時，發現了「完美正方形」這個題目。在我們腦海中，突發之間有了一個念頭：能否推廣「完美正方形」的性質，進而在「長方形」中，找出相同的性質和規則。

因此，我們決定以「完美長方形」，來做為研究的主題。

一、研究目的：

「完美長方形」：在一長方形內 (長、寬不等)，能分割成數目最少而且大小相異、邊長是最簡整數的正方形，且這些切割出來的正方形要將原長方形填滿不能有剩餘，並且這些正方形均不能全等也不能重疊。

首先，我們由前人的文獻參考著手，利用繪製「草圖」的方法，列出聯立方程式，將問題解決。

經由多次繪製「草圖」的經驗，找出繪製「草圖」的原則。並且經由這些原則，對「完美長方形」有了初步的猜想和了解。

接下來，我們將「完美長方形」這個問題轉換成「平面圖形」的解法，利用不同的想法和看法，對於「完美長方形」有更深入的認識。同時，利用「平面圖形」的解法，我們找出了 2 個 9 階的「完美長方形」和 6 個 10 階的「完美長方形」。

緊接著，利用「平面圖形」的「對偶關係」，我們可以將利用降階的方法，證明 9 階的「完美長方形」是最少階數的，這個證明是目前較簡潔的證明方法。

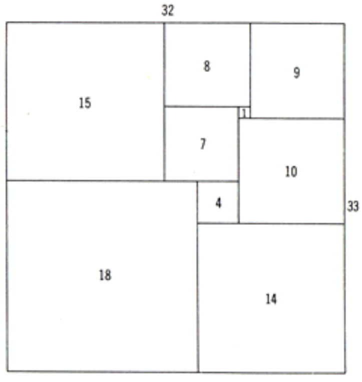
對於階數更大的「完美長方形」，我們的方法也可行。我們利用「平面圖形」的方法來解題，考慮：點、線以及我們發現的規則，我們即可尋找出所有的「完美長方形」。

二、研究方法和過程：

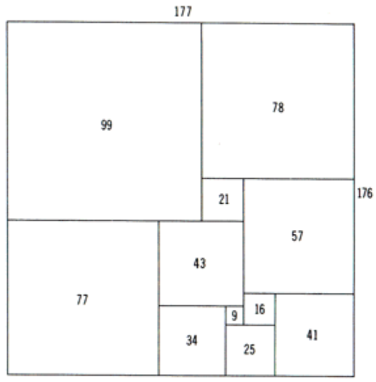
（一）研究文獻

在 1936 年，有四個學生 Cambridge-Brooks、Smith、Stone 和 Tutte 因為研究「完美正方形」，意外的發現了兩個「完美長方形」32x33 和 177x176 兩個「完美長方形」。如下圖（一）、（二）。

【在往後這篇報告的圖形中，出現在正方形內部的數字，代表這個正方形的邊長。】



圖（一）



圖（二）

首先，我們就先從上面兩個已知的「完全長方形」著手研究。

（二）利用製作「草圖」的方法求解：

「草圖」：我們發現尋求可以用正方形分割的長方形的一個辦法：是先作一個長方形分割成正方形的「草圖」，然後標出每個正方形的邊長，寫出這些正方形邊長滿足的關係式，最後再以這些方程式，求出這些聯立方程組的解。

我們以下面的例子來做說明：

例 1：在 32×33 的「完美長方形」中，如下圖，我們可以給定三個正方形的邊長為 x、y、z，我們可以依序由標出其他正方形的邊長為：

$x+y$ 、$2x+y$、$y-z$、$y-2z$、$y-3z$、$2y-5z$。

接下來，我們考慮：長方形水平方向的長度相等，可以得到：

$(2y-5z)+(y-2z)+(y-z)=(2x+y)+(x+y)$

化簡得到：$4y-8z=3x+2y$

$2y=3x+8z$

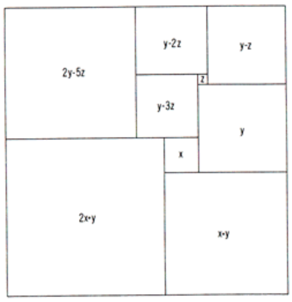
長方形垂直方向的長度相等，可以得到：

$(2y-5z)+(2x+y)=(y-z)+(y)+(x+y)$

化簡得到：$2x+3y-5z=x+3y-z$

$x=4z$　　因此　$x=4z$；$y=10z$

令 $z=1$，我們可以得到 33×32 的完美長方形



例 2：在 177×176 的「完美長方形」中如下圖，我們可以給定二個正方形的邊長為 x、y，我們可以依序由標出其他正方形的邊長為：

$x+y$ 、$2x+y$、$3x+y$ 、$x+2y$、$x-3y$ 、$3x-3y$ 、$6x-2y$ 、$2x+5y$ 、$9x-5y$

接下來，我們考慮：

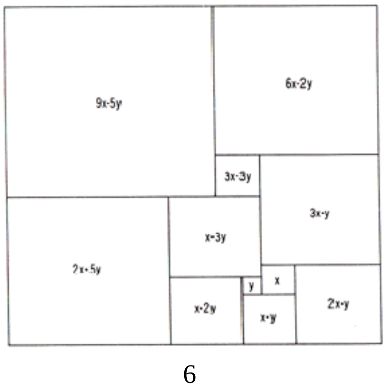
長方形水平方向的長度相等，可以得到：

$(9x-5y)+(6x-2y)=(2x+y)+(x+y)+(x+2y)+(2x+5y)$

化簡得到：$15x-7y=6x+9y$

$9x=16y$

令 $x=16$，$y=9$，我們可以得到 176×177 的「完美長方形」



當我們成功的把上面兩個問題解決時，我們在心中有一個疑惑：「由分割草圖給出的方程組是否一定有解？」

我們仔細研究發現：長方形中，有水平方向的長和垂直方向的寬。而仔細觀察我們的假設和列出了關係式，換句話說，其實就是「**水平方向**」和「**垂直方向**」的關係式。

如果能夠列出方程式，則我們就可以找出水平和垂直方向的關係式。因爲「完美長方形」，也存在相似圖形，所以我們只能找出水平和垂直方向的關係式，然後藉由關係式找出最簡單的整數解，即可完成這個問題。

不過，另一方面，有時候，我們也會解出一些沒有幾何意義的解，比如說：解出來的答案是負數，但是因爲邊長爲沒有負數，即代表這個「完美長方形」不存在。

最後，在這個研究「草圖」的過程中，我們發現：可以從「完美長方形」中「最小的正方形」切入，是一個很好的研究方法。

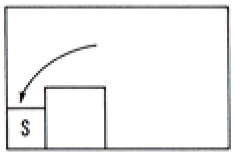
我們發現製作「草圖」有下列兩個基本原則：

草圖原則 1：最小正方形不能與原「完美長方形」的角或者邊相鄰。

【證明】:

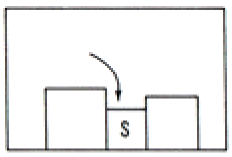
1、若是最小正方形 S，與原「完美長方形」的角落相鄰（如下圖），爲了塡滿「完美長方形」，則必存在更小的正方形。如此一來與原來最小正方形 S 的假設矛盾。

因此，最小正方形不能與原「完美長方形」的角相鄰。



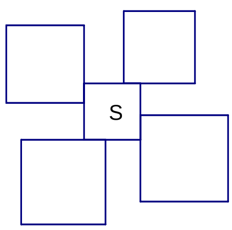
2、若是最小正方形 S，與原「完美長方形」的邊相鄰（如下圖），爲了塡滿「完美長方形」，則必存在更小的正方形。如此一來與原來最小正方形 S 的假設矛盾。

因此，最小正方形不能與原「完美長方形」的邊相鄰。



草圖原則 2：最小正方形與相鄰的正方形至少有一邊是平齊的。

【證明】: 若是最小正方形 S，與相鄰的正方形邊不平齊（如下圖），爲了塡滿「完美長方形」，則存在更小的正方形。如此一來與原來最小正方形 S 的假設矛盾。



研究完上面的原則後，緊接這我們發現在上面的圖（一）和圖（二），雖然都是「完美長方形」，但是在圖（一）中，有 9 個相異的正方形，圖（二）中，卻有 11 個相異的正方形。

因此，我們爲了方便說明起見，做了以下的定義：

【定義】：

如果在「完美長方形」中，可分割出n個相異的正方形，我們稱此「完美長方形」爲n階「完美長方形」。

緊接著，我們對於「完美長方形」的最小階數做了以下的猜測。

猜想：存在最小的「完美長方形」階數爲 9 階。

【證明】：我們將這個猜想，利用製作「草圖」的方法，將成果呈現在附錄（一）。

（三）利用「平面圖形」求解：

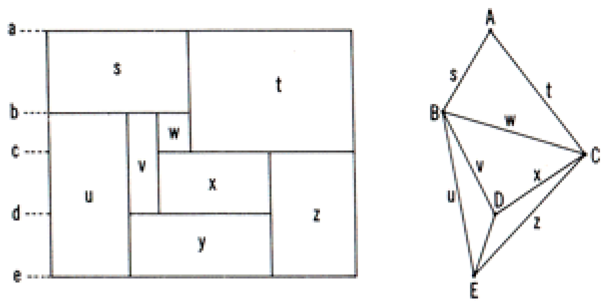
在製作「草圖」的過程中，因爲過程太繁瑣，所以嘗試了很多失敗的過程，於是我們想利用別的方法來解決這個問題。

我們發現：可以將「完美長方形」的分割圖形，轉換成右下方的**「平面圖形」**。

首先，先將「完美長方形」的五條水平線位置分別標上a、b、c、d、e，然後轉換成右邊「平面圖形」的 A、B、C、D、E 的五個頂點。由於第一條水平線a，包含了邊長爲s和t兩個正方形。而邊長爲s的正方形是由水平線a到水平線b，所以我們將「平面圖形」的 A、B 兩點連接起來並且標上$\overline{AB}=s$。

同理，邊長爲t的正方形是由水平線a到水平線c，所以我們將「平面圖形」的 A、C 兩點連接起來並且標上$\overline{AC}=t$。

依照這樣的規則，我們將「完美長方形」轉換成右下方的「平面圖形」。



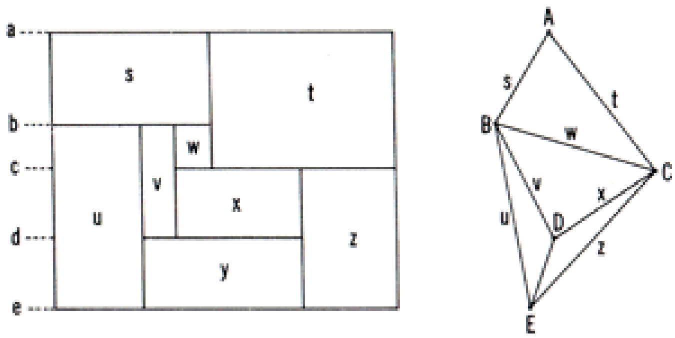
爲了方便以後的研究，我們將這個轉換圖形稱爲：**「平面圖形」**。

並且做了幾個命名：

1、 極：「完美長方形」的最外側兩邊，即水平線a和e，對應到的頂點 A 和 E 點，我們把點 A 和 E 點叫做「極」。
2、 頂點：除了極之外，即中間的水平線b、c、d，對應到的點 B、C、D 三點，我們稱做：「頂點」。
3、 電流：我們可以把「平面圖形」可以把想像成電流的圖形，我們把$\overline{AB}$線段的長度s，想像成電量從水平線a流往水平線b，所以我們把$\overline{AB}$線段的長度稱爲「電流s」。

將「完美長方形」轉換成「平面圖形」後，我們參考圖形理論的書，發現有幾個定理：
【定理】1：任意一個圖形，所有頂點的次數的和，是邊的個數的兩倍。
【證明】:頂點的次數是和此頂點接合邊的個數，每一個邊接合兩個頂點，因此共被計算兩次。
【定理】2：任何一個圖形，次數爲奇數的頂點有偶數個。
【證明】:因頂點次數的和爲偶數，故不可能有奇數個次數爲奇數的頂點。

在我們轉換成「平面圖形」後，我們發現我們這個「平面圖形」有幾個規則：



「平面圖形」的規則 1：

在兩個「極」中，從「A 極」流出的電流＝流入「E 極」的電流。

【說明】:

因爲「A 極」流出的電流=水平線 a 的長度=長方形的長=水平線 e 的長度=流入「E 極」的電流。

即　$s+t=u+y+z$

「平面圖形」的規則 2：

在每個「頂點」，從「頂點」流入的電流=「頂點」流出的電流。

【說明】:

我們以頂點 B 來做說明：
因水平線 b 長度=邊長 s 正方形=邊長 u 正方形+邊長 v 正方形+邊長 w 正方形
即是 $s=u+v+w$
所以我們可以得到「電流 s 」=「電流 u 」+「電流 v 」+「電流 w 」。
換句話說：**規則 1 和 2，其實這是「完美長方形」水平方向邊長的關係式。**

「平面圖形」的規則 3：

在一個封閉的迴路內，從一個較高的「極」或「頂點」至另一個較低的「極」或「頂點」，其兩條路徑的電流總和相等。

【說明】:

以封閉迴路 ABDCA 來看，A 至 D 有兩條路徑，A－B－D 和 A－C－D。
我們從「完美長方形」的圖形來看，A 至 D 的路徑，其實就是水平線 a 到水平線 d 的垂直距離。可以看作：

$$\overline{ab}+\overline{bd}=\overline{ad}=\overline{ac}+\overline{cd}$$

$$s+v=t+x$$

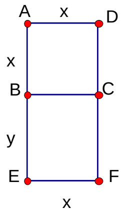
換句話說：**規則 3 其實這是「完美長方形」垂直方向邊長的關係式。**

「平面圖形」的規則 4：

「平面圖形」規則 4：「極」至少和兩條線連接。

【說明】:

如果「極」只和一條線連接，就會形成如下圖，ABCD 是一個正方形，若 BEFC 已經爲「完美長方形」，則 AEFD 和本文所探討「完美長方形」的定義相矛盾。（在本文我們所探討的「完美長方形」爲 BEFC。）



「平面圖形」的規則 5：

「平面圖形」規則 5：「頂點」至少和三條線連接。

【說明】:

若是「頂點」只有和兩條線連接，即代表一條 a 是流入的電流，一條 b 是留出的電流。

從上面的定律 2 我們可以知道： $a=b$ ，但這和「完美長方形」的定義矛盾（要分割出相異的正方形）。

由此可說明：「頂點」至少和三條線連接。

「平面圖形」的規則 6：

「平面圖形」規則：「電流」不相交，即線段不相交。

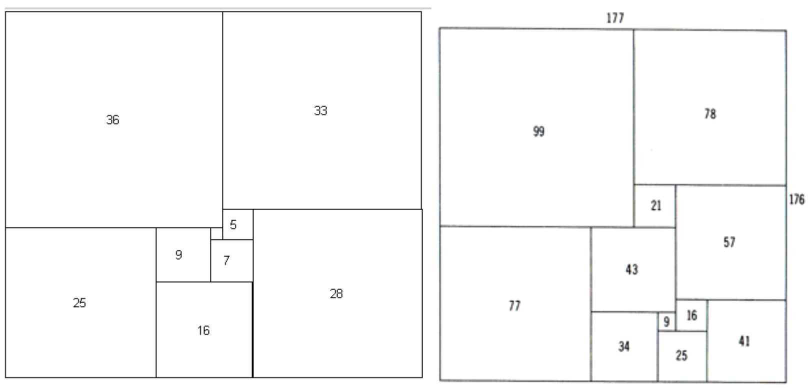
【說明】:

因爲「電流」在「完美長方形」中，代表的是兩相異的正方形，如果兩個「電流」相交，則代表兩個相異正方形，有重疊在一起，和我們「完美長方形」的定義不同。所以，「平面圖形」中「電流」不相交，即代表線段不能相交。

從上面的定理和規則，我們可以利用「平面圖形」找出：

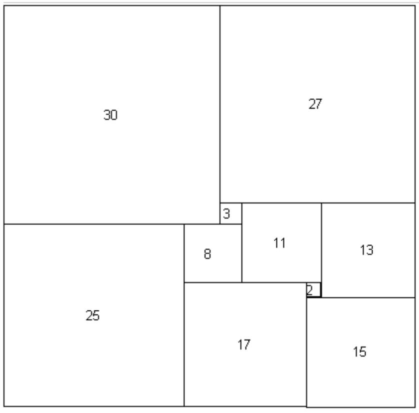
（1）、2 個 9 階的「完美長方形」。

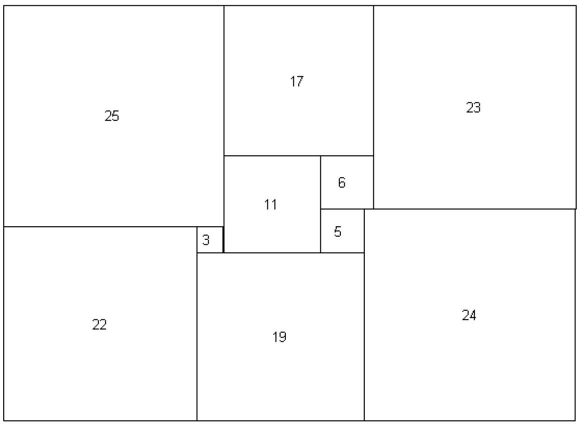
我們將計算的過程，詳細寫在【附錄二】

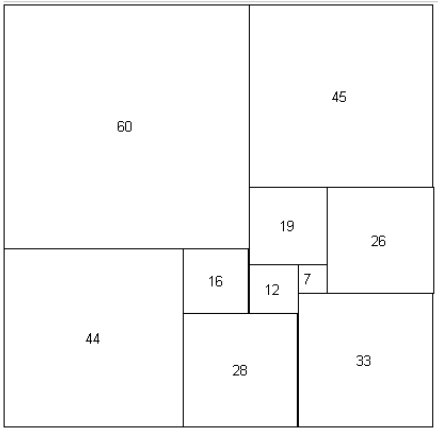


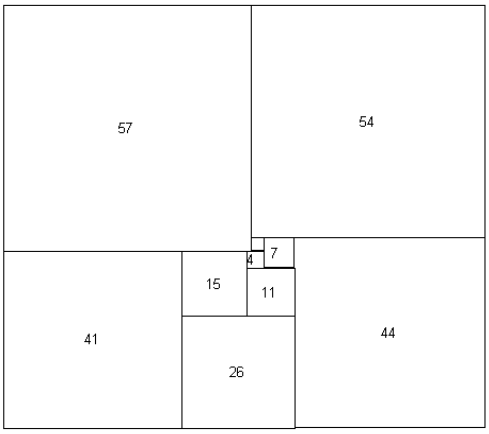
（2）、6 個 10 階的「完美長方形」

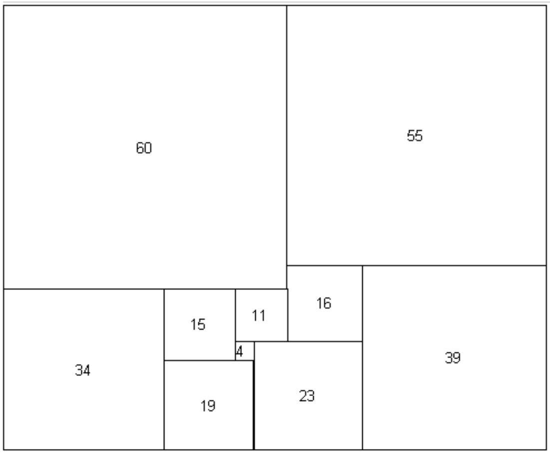
我們將計算的過程，詳細寫在【附錄三】

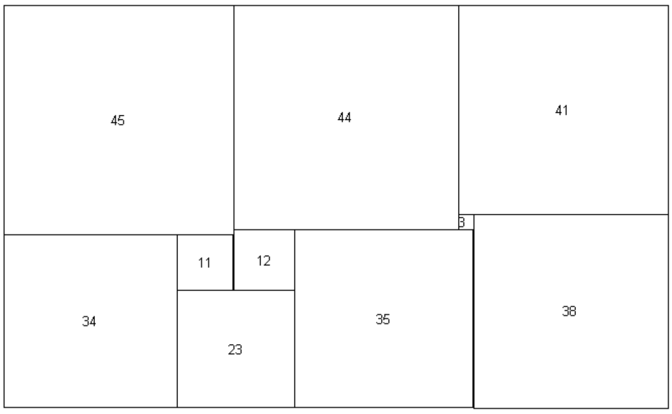












解決完 9 階和 10 階的「完美長方形」後，對於階數更大的「完美長方形」，我們的方法也可行。不過，限於篇幅，我們利用「平面圖形」的方法來解題，考慮：點、線以及我們發現的規則，我們即可尋找出所有的「完美長方形」。

（四）對偶關係

在同一個完美長方形可以得到兩個「平面圖形」，這兩個「平面圖形」之間必定存在著某種密切的關係，這種關係我們把它稱作**『對偶關係』**（圖三）。

把這兩個「平面圖形」重疊後，我們把它稱爲完美長方形的「完全網」（圖四）。

每一個「完全網」將平面分割成若干個區域（稱爲面）。而兩個互爲對偶的「平面圖形」只是指具有下列性質：

（1）在「完全網」中，一個「平面圖形」中，除了極之外，每一個面中存在且只有另一個「平面圖形」的一個頂點。（例如：ABDC 這個面中，只有 c 這個頂點）

（2）對偶圖形的邊長必定只有相交一次。（例如 $\overline{AC}$ 只相交 $\overline{ac}$ 一次，因爲代表的是相同的正方形。）

（3）「對偶關係」中，因相異正方形個數相同，所以兩者的階數是相同的。

以下我們用：V 代表頂點，F 代表面，E 代表邊。

V' 代表對偶的頂點，F' 代表對偶的面，E' 代表對偶的邊。

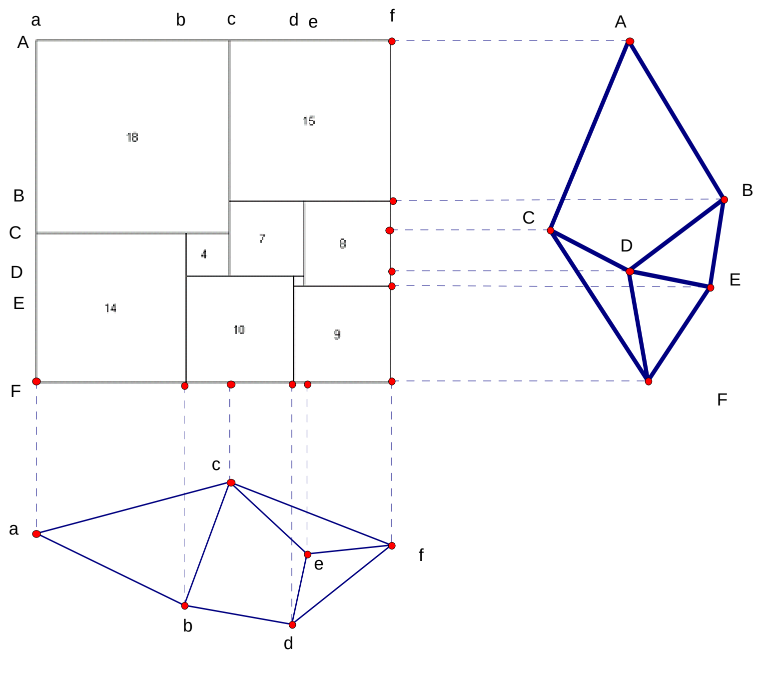
接下來由「尤拉公式」：V+F=E+2，和上面三個性質，我們可以得到：

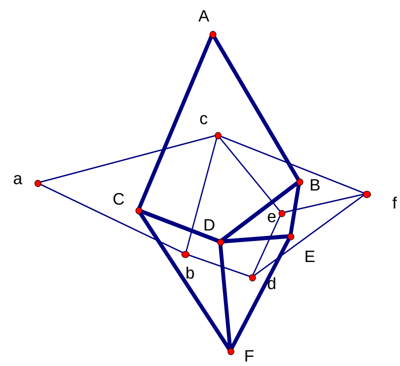
（1）V'=F-1(無限遠區域)+2(兩極)=F+1

（2）V=F'+1

（3）$E=E'$。

所以我們可以透過「對偶關係」及「尤拉公式」，將頂點個數減少，以簡化計算上的繁雜。





圖（三）　　　　　　　　圖（四）

最後利用「平面圖形」的對偶關係，我們精簡的證明了階數爲 9 階的完美長方形是最少階數的完美長方形。

我們將這個證明過程放在【附錄四】。

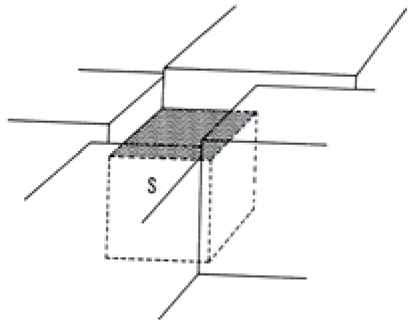
（五）問題的推廣：

在對於平面的問題，得到一些初步的解決後，我們想把這個問題往三維空間發展。

猜想：是否存在有限個大小相異的正立方體能填滿一個長方體形成「完美長方體」嗎?

對於這個問題，我們這樣的解釋：

如同「完美長方形」的草圖切割中，最小的正方形，不能與原「完美長方形」的邊相鄰，也不能放在角落。同樣的，如下圖，位於底部的正立方體提供了一個底部矩形的一個正方形分割，在這些挨著底部的第一層正立方體中，最小的正立方體不可能放在靠原來「完美長方體」的邊上，否則將有一個更小的正立方體挨著底部。因此最小的正立方體必擺在中間地帶。



此時此最小正立方體的四側被四面牆圍起來，爲了蓋住其上表面，必須用一個更小的正立方體；在最小正立方體上側的第二層正立方體中的最小正立方體，再次出現在中間部位，且四周被較大的正立方體圍起來，於是一個更小的方塊出現在第三層。

這種推論將無休止的繼續下去，因此可知用有限個大小不相等的正立方體不能填滿一個長方體。

三、研究結果與討論：

（一）利用「草圖」，找出最少爲 9 階的「完美長方形」，雖然可行的方法，但是卻是非常繁雜的計算過程。

（二）利用「平面圖形」，找出 2 個 9 階的「完美長方形」和 6 個 10 階的「完美長方形」。

（三）透過「對偶關係」及「尤拉公式」，簡化繁雜的計算，進而精簡的證明 9 階完美長方形是最少階數的完美長方形。

（四）擴展此問題至三維空間，證明不存在「完美長方體」。

四、研究結果與應用：

（一）經由這個研究，可以應用於解決「完美正方形」的問題。

（二）透過這個研究，可以應用於解決若干倉儲的問題。

五、參考文獻：

（一）林怡君等三人，＜完美正方形＞，（中華民國第四十五屆中小學科學展覽）

（二）黃文達，＜輾轉相除法的連結＞，

（http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/mathedu/me7/me7004.doc ）

（三）Ross Honsberger，＜Squaring the Square＞，

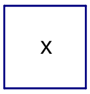
（http://shadowfax.math.uwaterloo.ca/navigation/ideas/articles/honsberger2/index.shtml ）

【附錄一】

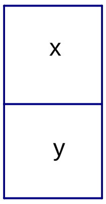
猜想：存在最小的「完美長方形」階數為 9 階。

「完美長方形」是指，在一長方形內 (長、寬不等)分割成不同大小、邊長是整數的正方形，且這些切割出來的正方形要將原長方形填滿不能有剩餘，並且這些正方形均不能全等，而且重疊。

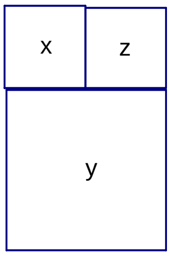
1、假設存在 1 階的「完美長方形」，如下圖。則 x 為正方形和「完美長方形」的定義不符合。故不存在 1 階的「完美長方形」。



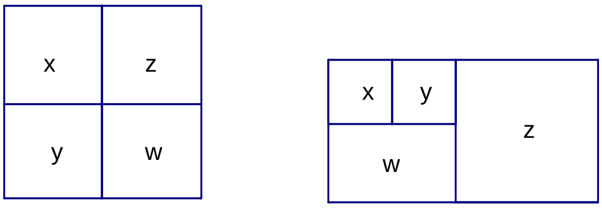
2、假設存在 2 階的「完美長方形」，如下圖，則 $x=y$ ，不符合分割出來的正方形要相異的條件，所以矛盾。固不存在 2 階的「完美長方形」。



3、假設存在 3 階的「完美長方形」，如下圖，則我們可發現 $x=z$ ，不符合分割出來的正方形要相異的條件，所以矛盾。固不存在 3 階的「完美長方形」。



4、假設存在 4 階的「完美長方形」，如左下圖，則我們可發現 $x=y=z=w$；或者，如右下圖，則我們可發現 $x=y$ ，不符合分割出來的正方形要相異的條件，所以矛盾。固不存在 3 階的「完美長方形」。



5、假設存在 5 階的「完美長方形」，我們依照繪製草圖原則 1 和原則 2，可以假設最小正方形 x ，而得到下圖，而其餘 4 個正方形的邊長依序為 y 、 $x+y$ 、 $2x+y$ 、 $3x+y$ 。

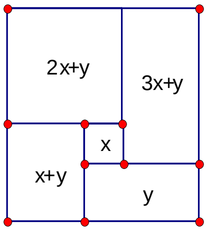
我們由長方形的邊長要相等，可列出下列方程式：

$$(2x+y)+(3x+y)=(x+y)+(y)$$

$$5x+2y=x+2y$$

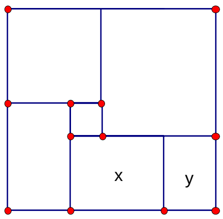
$$5x=x$$

$$x=0$$

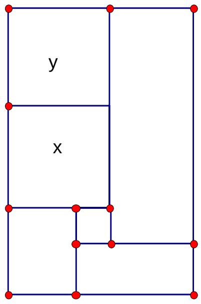


所以，我們可以知道不存在 5 階的「完美長方形」。

6、假設存在 6 階的「完美長方形」，我們依照繪製草圖原則 1 和原則 2，得到下兩個圖，我們可以發現： $x=y$ ，所以不存在 6 階的「完美長方形」。



或者



7、假設存在 7 階的「完美長方形」，我們依照繪製草圖原則 1 和原則 2，得到下兩個圖。

【狀況一】我們可以假設最小正方形 x，而得到下圖，而其餘的正方形的邊長依序為 y、$x+y$、$2x+y$ 、 $3x+y$ 、 $x+2y$ 、 $x+3y$ 。

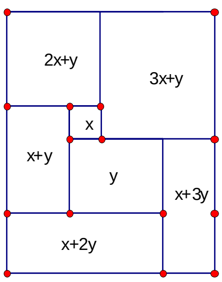
我們由長方形的邊長要相等，可列出下列方程式：

$$(2x+y)+(3x+y)=(x+2y)+(x+3y)$$

$$5x+2y=2x+5y$$

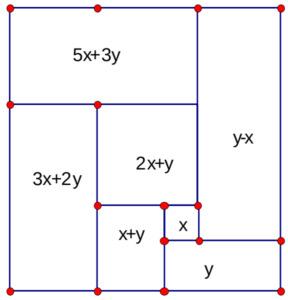
$$3x=3y$$

$$x=y$$



【狀況二】我們可以假設最小正方形 x，而得到下圖，而其餘的正方形的邊長依序爲 y、$x+y$、$2x+y$、$3x+2y$、$5x+3y$、$y-x$。

我們由長方形的邊長要相等，可列出下列方程式：



$$(5x+3y)+(y-x)=(3x+2y)+(x+y)+(y)$$

$$4x+4y=4x+3y$$

$$y=0$$

所以探討以上兩種較不易觀察的狀況，我們可以知道不存在 7 階的「完美長方形」。（其他的草圖繪製可以很清楚的發現，正方形不相異。）

8、假設存在 8 階的「完美長方形」，我們依照繪製草圖原則 1 和原則 2，得到下兩個圖，我們可以假設最小正方形 x，而得到下圖，而其餘的正方形的邊長依序爲 y、$y-x$、$x+y$、$2x+y$、$x+2y$、$4x+4y$、$6x+5y$。

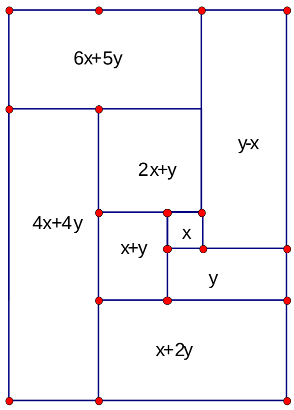
我們由長方形的邊長要相等，可列出下列方程式：

$$(6x+5y)+(4x+4y)=(y-x)+(y)+(x+2y)$$

$$10x+9y=4y$$

$$10x=-5y$$

x、y 異號，因爲是幾何圖形，所以不存在。



所以探討以上較不易觀察的狀況，我們可以知道不存在 8 階的「完美長方形」。（其他的草圖繪製可以很清楚的發現，正方形不相異。）

9、9 階的「完美長方形」已經在前文證明過，即在 1936 年，有四個學生 Cambridge-Brooks、Smith、Stone 和 Tutte 因爲研究「完美正方形」，意外的發現了「完美長方形」邊長爲 32×33。

【附錄二】

利用圖形論的定理：

定理 1：任意一個圖形，所有頂點的次數的和，是邊的個數的兩倍。

定理 2：任何一個圖形，次數爲奇數的頂點有偶數個。

和我們發展出來的「平面圖形」原則：

「平面圖形」的規則 1：

在兩個「極」中，從「A 極」流出的電流＝流入「E 極」的電流。

「平面圖形」的規則 2：

在每個「頂點」，從「頂點」流入的電流=「頂點」流出的電流。

「平面圖形」的規則 3：

在一個封閉的迴路內，從一個較高的「極」或「頂點」至另一個較低的「極」或「頂點」，其兩條路徑的電流總和相等。

「平面圖形」的規則 4：

「平面圖形」規則 4：「極」至少和兩條線連接。

「平面圖形」的規則 5：

「平面圖形」規則 5：「頂點」至少和三條線連接。

「平面圖形」的規則 6：

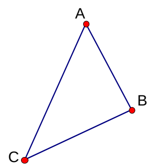
「平面圖形」規則：「電流」不相交，即線段不相交。

我們可以推理出：

1、「平面圖形」中不可能只有 1 個點，因爲至少有兩個「極」。

2、「平面圖形」中不可能只有 2 個點，因爲兩點只有一條連線，和「極」至少有兩條線違背。

3、假設「平面圖形」中，只有 A、B、C3 個點，則和原則 2：「頂點」至少和三條線連接違背。所以不可能只有 3 個點。故不存在「完美長方形」。

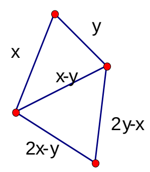


4、假設「平面圖形」中，只有 A、B、C、D4 個點，5 個邊

，則我們可以依照上面的規則列出：x 、 y 、 $x-y$ 、 $2x-y$ 、 $2y-x$

可列出方程式 $x+(2x-y)=y+(2y-x)$

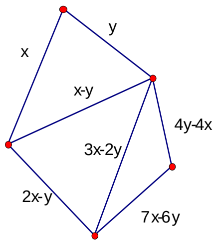
可得： $4x=4y$ 則 $x=y$ ，和我們的定義矛盾。所以不存在「完美長方形」。



5、

【狀況一】假設「平面圖形」有 5 個頂點，7 個邊，則我們可以依照上面的規則列出

x 、 y 、 $x-y$ 、 $2x-y$ 、 $3x-2y$ 、 $4y-4x$ 、 $7x-6y$



我們可以列出方程式： $x+y=(2x-y)+(3x-2y)+(7x-6y)$

得到 $11x=10y$

我們取最簡整數： $x=10$ ， $y=11$ ，但是觀察有一個邊 $x-y=10-11=-1$ 會產生負數，所以不存在這種「完美長方形」。

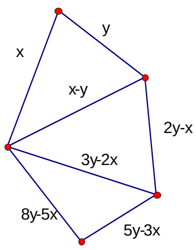
【狀況二】

假設「平面圖形」有 5 個頂點，7 個邊，則我們可以依照上面的規則列出

x 、 y 、 $x-y$ 、 $2y-x$ 、 $3y-2x$ 、 $8y-5x$ 、 $5y-3x$

我們可以列出方程式： $x+y=(8y-5x)+(5y-3x)$

得到 $4y=3x$ ，我們取最簡單的整數， $x=4$ ， $y=3$ ，不過經過驗算後，發現這樣會導致很多邊長相同，所以不存在這種「完美長方形」。



6、9 階「完美長方形」

假設「平面圖形」有 6 個頂點，9 個邊，則我們可以依照上面的規則列出

【狀況一】:

此 9 個邊爲 x 、 y 、 z 、 $x+z-y$ 、 $x-z$ 、 $x-2z$ 、 $2y-x-z$ 、 $3y-2x-2z$ 、 $3x-3y$

可以列出方程式：

兩極相等： $x+y=(x-z)+(x-2z)+(3x-3y)$

頂點流入電流=流出電流：$(3y-2x-2z)+(2y-x-z)=3x-3y$

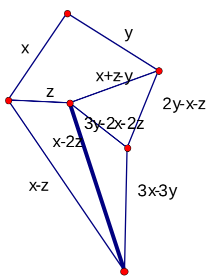
可解得： $4x-4y=3z$ 和 $8y-6x=3z$

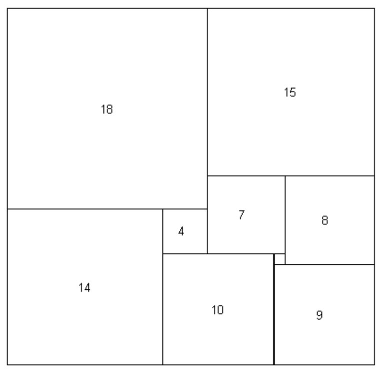
$4x-4y=8y-6x$

$10x=12y$

$x:y=6:5$ 代回讓 z 爲最小整數則 $z=4$ ， $x=18$ ， $y=15$

所以可以求出：





【狀況二】:

假設「平面圖形」有 6 個頂點，9 個邊，則我們可以依照上面的規則列出

x 、 y 、 z 、 $x+z-y$ 、 $x-z$ 、 $x+2z-y$ 、 $2x+3z-2y$ 、 $3x+5z-3y$ 、 $4y-3x-4z$

可列出方程式：

（ $2x+3z-2y$ ）＋（ $3x+5z-3y$ ）＝ $4y-3x-4z$ ，

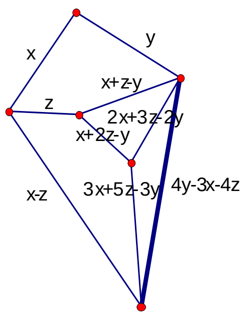
（ z ）＋（ $x+2z-y$ ）＋（ $3x+5z-3y$ ）＝ $x-z$

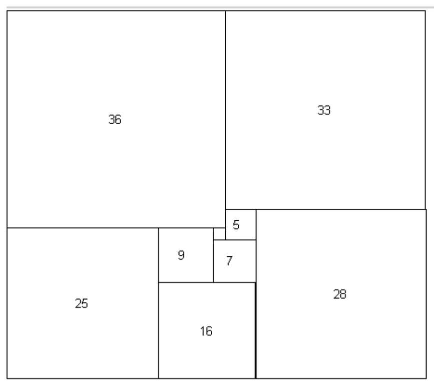
$$8x+12z=9y$$

$$3x+9z=4y$$

消去 z 得 $36x=33y$ ，得 $x=33$ ， $y=36$ ， $z=5$

所以可以得到：





【附錄三】

10 階「完美長方形」

【狀況一】假設「平面圖形」有 6 個頂點，10 個邊，則我們可以依照上面的規則列出

x 、 y 、 z 、 $y+z$ 、 $y-z$ 、 $y-2z$ 、 $4z$ 、 $y-6z$ 、 $y-10z$ 、 $2y-16z$

可列出方程式：

（ x ）＋（ $y+z$ ）＋（ y ）＝（ $2y-16z$ ）＋（ $y-6z$ ）＋（ $y-2z$ ）＋（ $y-z$ ）

（ x ）＋（ $y-10z$ ）＝（ $y+z$ ）＋（ $4z$ ）

化簡可得：

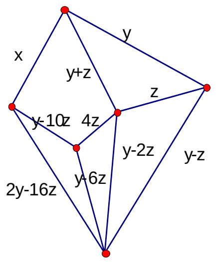
$$x=3y-26z$$

$$x=15z$$

$$\text{故}\quad 41z=3y$$

我們取最簡整數得： $x=45$ ， $y=41$ ， $z=3$

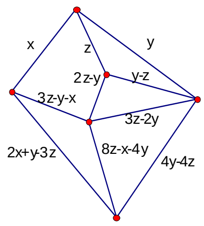
所以可以得到：



【狀況二】

假設「平面圖形」有 6 個頂點，10 個邊，則我們可以依照上面的規則列出

x 、 y 、 z 、 $y-z$ 、 $2z-y$ 、 $3z-2y$ 、 $4y-4z$ 、 $3z-y-x$ 、 $2x+y-3z$ 、 $8z-x-4y$



可列出方程式：

$$（8z-x-4y）+（3z-2y）=（4y-4z）$$

$$（3z-y-x）+（8z-x-4y）=（2x+y-3z）$$

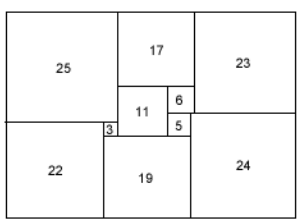
化簡可得：

$$15z=x+10y \qquad 7z=2x+3y$$

$$\text{得}\, 23z=17y$$

我們取最簡的整數，得 $x=25$ ， $y=23$ ， $z=17$

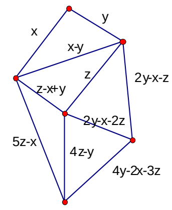
所以可以得到：



【狀況三】

假設「平面圖形」有 6 個頂點，10 個邊，則我們可以依照上面的規則列出：

x 、 y 、 z 、 $x-y$ 、 $2y-x-z$ 、 $2y-x-2z$ 、 $4y-2x-3z$ 、 $4z-y$ 、 $z-x+y$ 、 $5z-x$



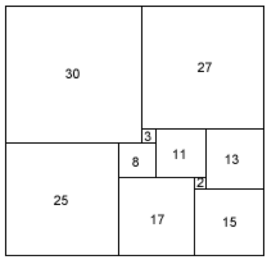
可列出方程式： $x+y=(5z-x)+(4z-y)+(4y-2x-3z)$

$z+(4z-y)=(2y-x-z)+(4y-2x-3z)$

可得： $2x=3z+y$　　　$9z=7y-3x$　　化簡： $30z=11x$

我們取最簡整數得： $x=30$ ， $y=27$ ， $z=11$

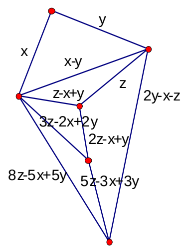
所以可以得到：



【狀況四】

假設「平面圖形」有 6 個頂點，10 個邊，則我們可以依照上面的規則列出：

x 、 y 、 z 、 $x-y$ 、 $2y-x-z$ 、 $z-x+y$ 、 $2z-x+y$ 、 $3z-2x+2y$ 、 $5z-3x+3y$ 、 $8z-5x+5y$



可列出方程式：

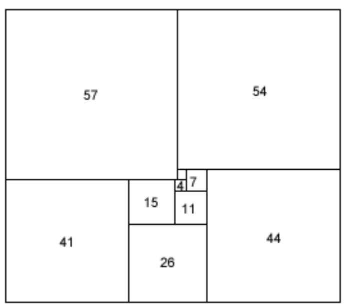
$x+y=(8z-5x+5y)+(5z-3x+3y)+(2y-x-z)$

$z+(2z-x+y)+(5z-3x+3y)=(2y-x-z)$

化簡可得：$10x=12z+9y$ ， $9z=3x-2y$　得 $7y=54z$

我們取最簡整數得 $x=57$ ， $y=54$ ， $z=7$

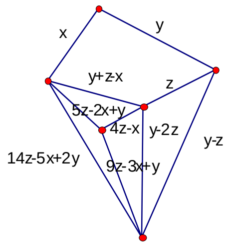
所以可以得到：



【狀況五】

假設「平面圖形」有 6 個頂點，10 個邊，則我們可以依照上面的規則列出：

x 、 y 、 z 、 $y+z-x$ 、 $y-z$ 、 $y-2z$ 、 $4z-x$ 、 $5z-2x+y$ 、 $9z-3x+y$ 、 $14z-5x+2y$



可列出方程式：

$$x+y=(14z-5x+2y)+(9z-3x+y)+(y-2z)+(y-z)$$

$$(4z-x)+(9z-3x+y)=y-2z$$

可得：$9x=20z+4y$

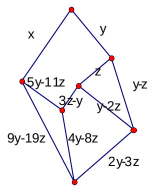
$15z=4x$

我們取最簡單的整數解：$x=60$ ， $y=55$ ， $z=16$

所以可以得到：

【狀況六】假設「平面圖形」有 7 個頂點，10 個邊，則我們可以依照上面的規則列出：

x 、 y 、 z 、 $y-z$ 、 $y-2z$ 、 $2y-3z$ 、 $3z-y$ 、 $4y-8z$ 、 $5y-11z$ 、 $9y-19z$



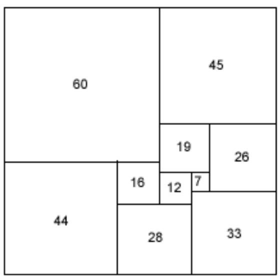
可列出方程式：$x=(5y-11z)+(9y-19z)$

$$x+(9y-19z)=(y)+(y-z)+(2y-3z)$$

化簡可得

$$x=14y-30z \text{，} x=15z-5y \text{，得 } 45z=19y$$

我們取最小整數：$x=60$ ， $y=45$ ， $z=19$ ，所以可以得到：



【附錄四】

對偶關係的應用

【定理】存在最低階數為 9 階的「完美長方形」

由於尤拉公式：V-E+F=2、V+F=E+2

若存在 V 個頂點（包含兩極）、E 條線段、F 個面，則 V+F=E+2，

由對偶關係知：另一「對偶圖形」的 V’、E’ 存在

V'=F-1(無限遠區域)+2(兩極)=F+1 和 E'=E

（1）若存在 1 階的「完美長方形」，和「完美長方形」的定義矛盾，故不存在最低階數為 1 階的「完美長方形」。

（2）2 階

平面圖形（V，F，E）	對偶圖形（V'，F'，E'）	說明
（4，0，2）	（1，3，2）	不存在
（3，1，2）	（2，2，2）	不存在

（3）3 階

平面圖形（V，F，E）	對偶圖形（V'，F'，E'）	說明
（5，0，3）	（1，4，3）	不存在
（4，1，3）	（2，3，3）	不存在
（3，2，3）	（3，2，3）	不存在

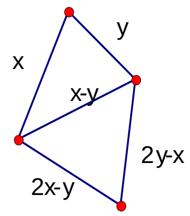
（4）4 階

平面圖形（V，F，E）	對偶圖形（V'，F'，E'）	說明
（6，0，4）	（1，5，4）	不存在
（5，1，4）	（2，4，4）	不存在
（4，2，4）	（3，3，4）	不存在

（5）5 階

平面圖形（V，F，E）	對偶圖形（V'，F'，E'）	說明
（7，0，5）	（1，6，5）	不存在
（6，1，5）	（2，5，5）	不存在
（5，2，5）	（3，4，5）	不存在
（4，3，5）	（4，3，5）	備註 1

【備註 1】如右圖， 得到 X=Y



（6）6 階

平面圖形（V，F，E）	對偶圖形（V'，F'，E'）	說明
（8，0，6）	（1，7，6）	不存在
（7，1，6）	（2，6，6）	不存在
（6，2，6）	（3，5，6）	不存在
（5，3，6）	（4，4，6）	不存在

（7）7 階

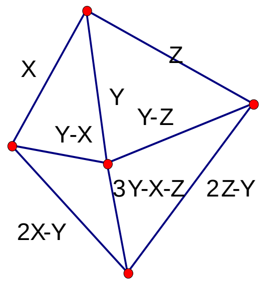
平面圖形（V，F，E）	對偶圖形（V'，F'，E'）	說明
（9，0，7）	（1，8，7）	不存在
（8，1，7）	（2，7，7）	不存在
（7，2，7）	（3，6，7）	不存在
（6，3，7）	（4，5，7）	不存在
（5，4，7）	（5，4，7）	備註 2

【備註 2】：同附錄二，狀況一、二。

（8）8 階

平面圖形（V，F，E）	對偶圖形（*V*'，*F*'，*E*'）	說明
（10，0，8）	（1，9，8）	不存在
（9，1，8）	（2，8，8）	不存在
（8，2，8）	（3，7，8）	不存在
（7，3，8）	（4，6，8）	不存在
（6，4，8）	（5，5，8）	備註 3

【備註 3】：得 Z=0



（9）9 階

平面圖形（V，F，E）	對偶圖形（*V*'，*F*'，*E*'）	說明
（11，0，9）	（1，10，9）	不存在
（10，1，9）	（2，9，9）	不存在
（9，2，9）	（3，8，9）	不存在
（9，3，9）	（4，7，9）	不存在
（7，4，9）	（5，6，9）	不存在
（6，5，9）	（6，5，9）	存在

（10）10 階

平面圖形（V，F，E）	對偶圖形（V'，F'，E'）	說明
（12，0，10）	（1，11，10）	不存在
（11，1，10）	（2，10，10）	不存在
（10，2，10）	（3，9，10）	不存在
（9，3，10）	（4，8，10）	不存在
（8，4，10）	（5，7，10）	不存在
（7，5，10）	（6，6，10）	存在

經由「對偶關係」的簡化，我們只須要證明備註 1、2、3 的三種狀況，就可以證明出：9 階爲最少階數的完美長方形，研究至此令我們對於數學之美，感到讚嘆。

評語

思考嚴謹具探索的科學精神，繼續努力未來一定有好的表現。