臺灣二ＯＯ七年國際科學展覽會

科　　　別：數學

作 品 名 稱 ：約瑟夫問題

學校 / 作者　：臺北縣立江翠國民中學　　　　葉佩雯

目錄 起始頁

作者簡介

2006 年 12 月 23 日總統教育獎頒獎典禮，接下獎座時，我感動著。

從小就是爸媽掌上明珠的我，只要是喜歡的，總是會在背後默默支持與鼓勵。學習過程中，數學、音樂及美術都曾經是我的最愛；而這些回憶中，顏榮皇老師是讓我一頭掉進數字漩渦的重要推手。

小學五年級，第一次參加科學展覽用盡所有心力的作品卻慘遭淘汰。得到消息的那一晚，我哭了，真的好難過，情緒蕩到谷裡。感謝著爸媽找了好多理由鼓勵我，溫暖的雙手撫平我的挫折，讓我站起來。

四年來，感謝十位教授書面與親自的指導，讓我逐步解開「約瑟夫問題」的秘密，在沉悶煩瑣的數學證明中，我開始可以甘之如貽，享受思考數學的樂趣。當然，更要感謝爸媽，允許我在別人下課總是背書包往補習班跑時，卻可以在椰林大道旁教授研究室中留下痕跡。爸媽的支持，我感謝著。

「今天的妳是否比昨天的妳更進步？」這是教授勉勵我的話。也就這一句話鼓舞我持續研究與觀察。這一篇「約瑟夫問題」就是教授的勉勵下產生，同時，也是我第二次受邀請參與臺灣國際科學展覽會複審作品，本研究延續去年「約瑟夫數列」作品把「報數問題」由殺 α 留 β 任意一個出局者，延展至「酋長問題」及「碎形數列」。

生命來自於一段段的回憶。爸媽和老師的呵護，我珍惜著。

壹、前言

一、中文摘要

所謂約瑟夫問題，就是有 n 個自然數排成一環狀，從 1 開始，殺 1(個數)留 1(個數)，求最後留下數字會是多少？該問題在台灣的全國中小學科學展覽出現多次。而資訊界演算法大師 Donlad E. Knuth 在其著作 The Art of Programing，CONCRETE MATHEMATICS （具體數學），針對該數列作詳細的說明；但是，不論是歷屆全國中小學科學展覽或是大師著作，對於該問題，都只是談及殺 1 留 β 或是殺 α 留 1。

本研究利用獨創 α 分類、n 及 k 分類、d 函數、b 函數及循環、n 及 y 分類、碎形數列和演變關係，將約瑟夫問題探討範圍提升至殺 α (個數)留 β (個數)，直到剩下最後 1 個數時就不能再殺了，遊戲終止，倒數第 k 個留下的自然數是多少？

同時，本研究在殺 α (個數)留 β (個數)下，指定自然數 y 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止，求剩下的自然數有幾個？會發生什麼情形？

二、英文摘要(Abstract)

The Josephus problem refers to what will be remaining when arranging *n* natural numbers in a circle and starting killing one and leaving the next one alive. The problem has been on display for many times in Taiwan National Primary and High School Science Exhibitions (as shown in Table 1). And, the information algorithm master, Donald E. Knuth has elaborated on the array in his works The Art of Programming, CONCRETE MATHEMATICS. However, both the past science exhibitions and the master’s works are limited to discussions on cases of killing 1 leaving β or killing α and leaving 1.

This research employs uniquely created α classification, *n* and *k* classifications, *d* function, *b* function and loop theory to extend the Josephus problem scope to killing α leaving β to find out what the remaining natural number is by No. *k* counted recursively. Meanwhile, this research designates natural number *y* as the chieftain, which can never be killed. The game is over when the chieftain is to be killed. The problem is to work out how many natural numbers are remaining. And what happened?

三、研究動機

羅馬人佔領喬塔帕特後，39 個猶太人與歷史學家 Josephus 及朋友躲到一個洞中，39 個猶太人決定寧願死也不要被敵人抓到，於是決定了一個自殺方式，41 個人排成一個圓圈，由 1、2、3 連續報數，每逢報第 3 人就必須自殺，直到所有人都自殺身亡為止。然而 Josephus 和他的朋友並不想遵從，將朋友與自己安排在第 16 個與第 31 個位置，逃過了這場死亡遊戲。

本研究針對此歷史故事做一系列數學研究。

四、研究目的

（一）約瑟夫問題

任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，直到剩下最後 1 個數時就不能再殺了，遊戲終止。求倒數第 k 個留下的自然數？也可以說是第 $n+1-k$ 個被殺的自然數？

（二）酋長問題

任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，指定自然數 y 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止，求剩下的自然數有幾個？

五、研究過程

（一）約瑟夫問題之文獻探討

（二）殺 1 留 1、殺 1 留 2、殺 1 留 3，推算至殺 1 留 β 倒數第 k 個留下的數？

（三）殺 2 留 1、殺 2 留 2、殺 2 留 3，推算至殺 2 留 β 倒數第 k 個留下的數？

（四）殺 3 留 1、殺 3 留 2、殺 3 留 3，推算至殺 3 留 β 倒數第 k 個留下的數？

（五）殺 α 留 1、殺 α 留 2、殺 α 留 3，推算至殺 α 留 β 倒數第 k 個留下的數？

(六)酋長問題的研究。

(七)碎形數列問題的研究。

貳、文獻探討

一、歷屆全國中小學科學展覽

表一、歷屆全國中小學科學展覽會與「約瑟夫問題」有關之作品

屆數	組別	作品名稱	研究方法	與本研究比較
39	國小組	公主如何救王子	列舉數據推算解法。	殺 1 留 β，k=1。
40	國中組	天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討	電腦窮舉及數學歸納法證明遞迴一般式。	殺 α 留 1，k=1。
43	高中組	九死一生	電腦窮舉。	殺 α 留 1 及殺 α 留 α，k=1。
44	高中組	公主的抉擇	遞迴關係式。	殺 1 留 β，k=1。
44	高中組	我要活下去	數值分析。	殺 α 留 1 及殺 α 留 α，k=1。
44	國小組	王位繼承人	列舉數據後整理分類，最後綜合歸納整理。	殺 α 留 1，k=1。
45	國小組	探索俄羅斯遊戲法則之奧秘	列舉數據，推算解法。	殺 1 留 β，第 k 項。
45	國小組	老師無法解決的難題	筆者作品	殺 α 留 β，k=1。
45	國中組	魔數	等差數列。	殺 1 留 1，第 k 項。
46	國中組	約瑟夫數列的最後一章	筆者作品	本研究，殺 α 留 β，第 k 項。

二、筆者對約瑟夫問題的研究

（一）、老師無法解決的難題（第四十五屆全國中小學科學展覽，編號：080418）
http://www.ntsec.gov.tw/activity/race-1/45/elementary/0804/080418.pdf

（二）、約瑟夫數列(Josephus Series)（2006 年台灣國際科展，編號：010002-02）
http://www.ntsec.gov.tw/activity/race-2/2006/pdf/010002.pdf

（三）、約瑟夫數列的最後一章（第四十六屆全國中小學科學展覽，編號：030417）
http://www.ntsec.gov.tw/activity/race-1/46/junior/0304/030417.pdf

三、筆者對於「約瑟夫問題」系列研究演變

是一種偶然，也是一種緣份，碰上數學。

2004 年 7 月，筆者開始接觸「報數問題」，這二年以來，對於「約瑟夫問題」系列研究演變如表二所示。

表二、筆者對於「約瑟夫問題」系列研究之重要演進

年代	重要演變	說明
2004 年	歷屆科展作品	如表一，認識歷屆參賽者對於「約瑟夫問題」研究重點。
	學長科展作品	如表三，啟發「由後推算」的思考方向。
	尾數推算	如表四，筆者由表三發展的分析工具。
2005 年	α 分類	解決「殺 α 留 β，最後一個留下的數字為何？」問題。
	F 函數、b 函數	推算各循環，使「最後一個留下的數字為何？」公式一般化。
	第 45 屆國展	以「老師無法解決的難題」參賽，殺 α 留 β，k=1。
	2006 年台灣國際科學展覽	以「約瑟夫數列」參賽，使用「n 及 k 分類」分析工具。
2006 年	n 及 k 分類	解決「殺 α 留 β，倒數第 k 個留下的數字為何？」問題。
	電腦模擬	利用 Excel 找出「殺 α 留 β，倒數第 k 個留下的數字為何？」。
	六大性質	研究討論，發現六大性質並給予證明。
	圖表分析	發展 F 函數、b 函數之圖表分析。
	第 46 屆國展	以「約瑟夫問題的最後一章」參賽並電腦模擬及性質討論。
	國展面試會場	國展評審鼓勵筆者繼續研究約瑟夫數列。
	2007 年台灣國際科學展覽	由約瑟夫問題思考到酋長問題，並延伸至碎形數列。

四、「老師無法解決的難題」

2005 年 7 月，筆者以「老師無法解決的難題」討論殺 α 留 β，k=1，最後一個出局者。

很顯然，殺 1 留 1 的過程，留下來最後一個數如表三所示，呈現循環的現象。同時，把表三的過程，由後推算原數 n 減掉留下數字，則如表四所示。每一個圖黃色的部份，皆為 2 的次方。

表三、學長之殺 1 留 1 最後的出局者（2~100）

原數 n		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
留下的數		2	2	4	2	4	6	8	2	4	6	8	10	12	14	16	2	4	6	8
原數 n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
留下的數	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	2	4	6	8	10	12	14	16
原數 n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
留下的數	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56
原數 n	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
留下的數	58	60	62	64	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32
原數 n	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
留下的數	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	68	70	72

如果，把表三的過程，由後推算原數 n 減掉留下數字，則如表四所示。每一個圖黃色的部份，皆為 2 的次方。

表四、殺 1 留 1 之尾數推算

循環	代號	演算過程							
1	原數 n	2							
	留下數	2							
	由後推算 n 減掉留下數	0							
2	原數 n	3	4						
	留下數	2	4						
	由後推算 n 減掉留下數	1	0						
3	原數 n	5	6	7	8				
	留下數	2	4	6	8				
	由後推算 n 減掉留下數	3	2	1	0				
4	原數 n	9	10	11	12	13	14	15	16
	留下數	2	4	6	8	10	12	14	16
	由後推算 n 減掉留下數	7	6	5	4	3	2	1	0

在「老師無法解決的難題」作品中，筆者發展出來 F 函數及 b 函數，藉以延展一般式。為了研究描述的一致性，在該篇研究中， F 函數會變成本研究的 d 函數，b 值會變成本研究的 b 函數。所謂的 d 函數，就是當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α 留 β，倒數第 k 個留下的自然數小於 β 時，將此自然數 n 定義為 d 函數(循環尾數)。所謂的 b 函數，就是將循環尾數減掉該留下數，筆者將此定義為 b 函數。其中 $d(x,\alpha,\beta,c,k)$ 和 $b(x,\alpha,\beta,c,k)$ 中的 x，分別為第 x 個 d 函數(循環尾數)和第 x 個 b 函數(循環尾數減掉該留下數)。

對於 d 函數和 b 函數，在「老師無法解決的難題」是針對殺 α 留 β，k=1，最後一個出局者。其直觀的觀察如表五、六所示，其演算如表七所示。

表五、d 函數直觀觀察(k=1)

α ▼	β ▼	c ▼	x ▶					
			1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	2	4	8	16	32
1	2	1	1	2	3	4	6	9
1	3	1	1	2	3	4	5	7
2	1	1	1	3	9	27	81	243
2	2	1	1	3	5	11	21	43
2	3	1	1	3	5	7	13	21
2	1	2	2	6	18	54	162	486
2	2	2	2	4	8	16	32	64
2	3	2	2	4	6	10	18	30
3	1	1	1	4	16	64	256	1024
3	2	1	1	4	10	25	61	154
3	3	1	1	4	7	13	28	55
3	1	2	2	8	32	128	512	2048
3	2	2	2	5	11	29	71	179
3	3	2	2	5	11	20	41	83
3	1	3	3	12	48	192	768	3072
3	2	3	3	6	15	39	96	240
3	3	3	3	6	12	24	48	96

表六、b 函數直觀觀察(k=1)

α ▼	β ▼	c ▼	x ▶					
			1	2	3	4	5	6
1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	2	1	0	0	0	0	0	0
1	3	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0
2	3	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0	0
2	2	2	0	0	0	0	0	0
2	3	2	0	1	2	2	0	0
3	1	1	0	0	0	0	0	0
3	2	1	0	0	0	0	0	0
3	3	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	0	0	0	0	0	0
3	2	2	0	0	1	0	1	0
3	3	2	0	1	0	2	1	0
3	1	3	0	0	0	0	0	0
3	2	3	0	1	1	0	1	1
3	3	3	0	0	0	0	0	0

表七、d 函數、b 函數演算（k=1）

α 值	β 值	d 函數值和 b 函數值
1	1	$d(x,1,1,c,1)=1m- b(x,1,1,c,1)+ b(x+1,1,1,c,1)$ $d(x+1,1,1,c,1)=1m+d(x,1,1,c,1)$
1	2	$d(x,1,2,c,1)=2m- b(x,1,2,c,1)+ b(x+1,1,2,c,1)$ $d(x+1,1,2,c,1)= 1m+d(x,1,2,c,1)$
1	3	$d(x,1,3,c,1)=3m- b(x,1,3,c,1)+ b(x+1,1,3,c,1)$ $d(x+1,1,3,c,1)= 1m+d(x,1,3,c,1)$
1	β	$d(x,1, \beta ,c,1)= \beta m- b(x,1, \beta ,c,1)+ b(x+1,1, \beta ,c,1)$ $d(x+1, \beta ,1,c,1)= 1m+d(x,1, \beta ,c,1)$
2	1	$d(x,2,1,c,1)=1m- b(x,2,1,c,1)+ b(x+1,2,1,c,1)$ $d(x+1,2,1,c,1)=2m+d(x,2,1,c,1)+2m$
2	2	$d(x,2,2,c,1)=2m- b(x,2,2,c,1)+ b(x+1,2,2,c,1)$ $d(x+1,2,2,c,1)=2m+d(x,2,2,c,1)$
2	3	$d(x,2,3,c,1)=3m- b(x,2,3,c,1)+ b(x+1,2,3,c,1)$ $d(x+1,2,3,c,1)=2m+d(x,2,3,c,1)$
2	β	$d(x,2, \beta ,c,1)= \beta m- b(x,2, \beta ,c,1)+ b(x+1,2, \beta ,c,1)$ $d(x+1,2,\beta,c,1)=2m+d(x,2, \beta ,c,1)$
3	1	$d(x,3,1,c,1)=1m- b(x,3,1,c,1)+ b(x+1,3,1,c,1)$ $d(x+1,3,1,c,1)=3m+d(x,3,1,c,1)$
3	2	$d(x,3,2,c,1)=2m- b(x,3,2,c,1)+ b(x+1,3,2,c,1)$ $d(x+1,3,2,c,1)=3m+d(x,3,2,c,1)+3m$
3	3	$d(x,3,3,c,1)=3m- b(x,3,3,c,1)+ b(x+1,3,3,c,1)$ $d(x+1,3,3,c,1)=3m+d(x,3,3,c,1)$
3	β	$d(x,3, \beta ,c,1)= \beta m- b(x,3, \beta ,c,1)+b(x+1,3, \beta ,c,1)$ $d(x+1,3, \beta ,c,1)=3m+d(x,3, \beta , c,1)$
α	β	$d(x, \alpha , \beta ,c,1)= \beta m- b(x, \alpha , \beta ,c,1)+ b(x+1, \alpha , \beta ,c,1)$ $d(x+1, \alpha , \beta ,c,1)= \alpha m+d(x, \alpha , \beta ,c,1)$

在「老師無法解決的難題」之中，d 函數、b 函數是以上的形式所呈現。其中 m 是筆者所假設的，本研究會簡化 m，如表八所示。(將在性質 3.3 討論)

五、「約瑟夫數列的最後一章」

2006 年台灣國際科學展覽，筆者以「約瑟夫數列」作品參賽。

感謝一位專門研究「約瑟夫問題」評審在 2006 年台灣國際科學展覽會場的勉勵。「數學是很可愛的學科，在約瑟夫問題之外，還有很多題材值得你去探討，數學研究不要只限定在「報數問題」，應該多多欣賞其他數學的美麗。」為了追求數學的夢，2006 年 6 月筆者把想把國展作品當做「報數問題」研究的結束；所以，從另外一個研究角度切入，探討「報數問題，並以「約瑟夫數列的最後一章」當做第 46 屆全國中小學科學展覽會研究題目。

六、「約瑟夫問題」

2006 年 7 月，筆者在國展面試會場，評審們給筆者諸多的鼓勵，認為「約瑟夫數列的最後一章」有負面的印象，「約瑟夫問題」應該可以在繼續鑽研下去。比賽後，筆者拜訪一位專門研究代數數論的教授，得知在所出版高中資優班教材「動手玩數學」，提到筆者對於殺 α 留 β 科展，第 k 項的研究。同時，感謝教授的鼓勵，筆者嘗試由約瑟夫問題思考到酋長問題，並延伸至碎形數列。

本研究就是從約瑟夫問題出發，思考一位酋長列於位置 y 時，會發生什麼變化，同時探討當殺 α(個數)留 β(個數)下的酋長問題，把剩下的個數，推展成 n 個，將會形成碎形數列。如果將碎形數列的每一個第一次出現的數刪掉，將發現什麼現象？

2006 年 11 月，筆者以本研究「約瑟夫問題」參加本屆（2007 年）台灣國際科學展覽會。希望，這一篇研究，你會喜歡。

參、研究方法

本研究使用 d 函數、b 函數、α 分類、n 和 k 的分類、n 及 y 分類、碎形數列及演變關係，做為分析約瑟夫問題的分析工具。

一、d 函數和 b 函數

針對「約瑟夫問題」的一般式推測，筆者發明新的分析工具 d 函數和 b 函數關係。利用此工具，才可以推算出，有 n 個數排成環狀，殺 α 留 β，倒數第 k 個留下的數是多少？表八為 d 函數值和 b 函數值演算，藉此演算，可以發現殺 α 留 β 時，d 函數值和 b 函數值遞迴式。

表八、d 函數值和 b 函數值演算

α 值	β 值	d 函數值和 b 函數值
1	β	$d(x+1,1,\beta,c,k)=\ d(x,1,\beta,c,k)+1[\frac{d(x,1,\beta,c,k)+b(x,1,\beta,c,k)}{\beta}]$ $b(x+1,1,\beta,c,k)\equiv((d(x,1,\beta,c,k)+b(x,1,\beta,c,k))\bmod\beta)$
2	β	$d(x+1,2,\beta,c,k)=\ d(x,2,\beta,c,k)+2[\frac{d(x,2,\beta,c,k)+b(x,2,\beta,c,k)}{\beta}]$ $b(x+1,2,\beta,c,k)\equiv((d(x,2,\beta,c,k)+b(x,2,\beta,c,k))\bmod\beta)$
3	β	$d(x+1,3,\beta,c,k)=\ d(x,3,\beta,c,k)+3[\frac{d(x,3,\beta,c,k)+b(x,3,\beta,c,k)}{\beta}]$ $b(x+1,3,\beta,c,k)\equiv((d(x,3,\beta,c,k)+b(x,3,\beta,c,k))\bmod\beta)$
α	β	$d(x+1,\alpha,\beta,c,k)=\ d(x,\alpha,\beta,c,k)+\alpha[\frac{d(x,\alpha,\beta,c,k)+b(x,\alpha,\beta,c,k)}{\beta}]$ $b(x+1,\alpha,\beta,c,k)\equiv((d(x,\alpha,\beta,c,k)+b(x,\alpha,\beta,c,k))\mathit{mod}\,\beta)$

(推理過程請詳見性質 3.3)

二、α 分類

「約瑟夫問題」為任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，直到剩下最後 1 個數時就不能再殺了，遊戲終止。求倒數第 k 個留下的自然數？

「酋長問題」為任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，指定自然數 y 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止，求剩下的自然數有幾個？也是依照此分類方法進行。

三、n 及 k 分類

如表九所示，說明殺 1 留 1、n 及 k 分類。

當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，倒數第 k 個留下的自然數用數字大寫表示，如 n=13，被殺的順序為 1、3、5、7、9、11、13、4、8、12、6、2、10，最後一個被殺的數是 10，接下來依序是 2、6、12、8、4、13、11、9、7、5、3、1。數字小寫表示該條件 n 減掉該留下數字。

表九、約瑟夫問題(殺 1 留 1，c=1)

n	k ▶												
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1_0												
2	2_0	1_1											
3	2_1	3_0	1_2										
4	4_0	2_2	3_1	1_3									
5	2_3	4_1	5_0	3_2	1_4								
6	4_2	6_0	2_4	5_1	3_3	1_5							
7	6_1	2_5	4_3	7_0	5_2	3_4	1_6						
8	8_0	4_4	6_2	2_6	7_1	5_3	3_5	1_7					
9	2_7	6_3	8_1	4_5	9_0	7_2	5_4	3_6	1_8				
10	4_6	8_2	10_0	6_4	2_8	9_1	7_3	5_5	3_7	1_9			
11	6_5	10_1	2_9	8_3	4_7	11_0	9_2	7_4	5_6	3_8	1_{10}		
12	8_4	12_0	4_8	10_2	6_6	2_{10}	11_1	9_3	7_5	5_7	3_9	1_{11}	
13	10_3	2_{11}	6_7	12_1	8_5	4_9	13_0	11_2	9_4	7_6	5_8	3_{10}	1_{12}

四、n 及 y 分類

如表十所示，說明殺 1 留 1、n 及 y 分類。

表十中，當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，若指定自然數 1 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止，剩下的自然數從 n=1 依序排列為 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13 ...相當於表九中將「約瑟夫問題」留下數為 1 時，k 所在的位置依序排列。

當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，若指定自然數 2 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止，剩下的自然數的數目從 n=2 依序排列為 1、1、2、1、3、2、4、1、5、3、6、2 ...相當於表九中將「約瑟夫問題」留下數為 2 時， k 所在的位置依序排列。

表十、酋長問題(殺 1 留 1，c=1)

n	酋長(y)▶												
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1												
2	2	1											
3	3	1	2										
4	4	2	3	1									
5	5	1	4	2	3								
6	6	3	5	1	4	2							
7	7	2	6	3	5	1	4						
8	8	4	7	2	6	3	5	1					
9	9	1	8	4	7	2	6	3	5				
10	10	5	9	1	8	4	7	2	6	3			
11	11	3	10	5	9	1	8	4	7	2	6		
12	12	6	11	3	10	5	9	1	8	4	7	2	
13	13	2	12	6	11	3	10	5	9	1	8	4	7

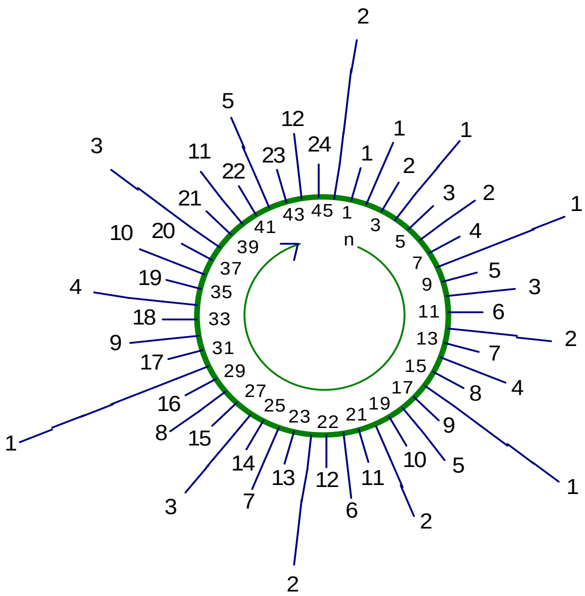
五、碎形數列

如表十一所示，說明殺 1 留 1 的碎形數列。

當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，若指定自然數 2 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止，剩下的自然數數目從 n=1 依序排列為 1、1、2、1、3、2、4、1、5、3、6、2、7、4、8、1、9、5 ...。如果將每一個第一次出現的數刪除 ~~1~~、1、~~2~~、1、~~3~~、2、~~4~~、1、~~5~~、3、~~6~~、2、~~7~~、4、~~8~~、1、~~9~~、5 ...，發現剩下的數列為 1、1、2、1、3、2、4、1、5 ...再將第一次出現的數刪除 ~~1~~、1、~~2~~、1、~~3~~、2、~~4~~、1、~~5~~ ...，發現剩下的數列為列 1、1、2、1 ...與原來相同，可以不斷地產生重複。

表十一、碎形數列(1，1，c=1)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
酋長 y	2																	
剩下數目▶	1	1	2	1	3	2	4	1	5	3	6	2	7	4	8	1	9	5



圖一、殺 1 留 1 酋長 y=2 之碎形數列

圖一為表十殺 1 留 1 酋長 y=2 中，剩下數目的圖形。如果將每一個第一次出現的數刪除，將發現剩下的數列與原來一樣，它具有有碎形的自我相似性可以不斷地產生重複。

六、演變關係

表九、表十、十一中，以顏色分別表示「約瑟夫問題」殺 1 留 1，留下數字為 1、2 時所對應的 k 位置，「酋長問題」中酋長 y 為 1、2 號的情形。並由「酋長問題」中酋長 y 為 2 號演化成「碎形數列」。

肆、研究結果

一、α=1

（一）α=1，β=2，c=1

殺 1 留 1 的約瑟夫問題、酋長問題、碎形數列分別如表九、十、十一所示。

1.約瑟夫問題

當殺 1 留 2，有 2 個自然數在遊戲時，被殺的順序為 1、2，所以最後一個被殺的數是 2，接下來是 1；3 個自然數在遊戲時，被殺的順序為 1、2、3，最後一個被殺的數是 3，接下來依序是 2、1；4 個自然數在遊戲時，被殺的順序為 1、4、2、3，最後一個被殺的數是 3，接下來依序是 2、4、1；5 個自然數在遊戲時，被殺的順序為 1、4、3、5、2，最後一個被殺的數是 2，接下來依序是 5、3、4、1；一直到 n=13 的情形如表十二。

表十二、約瑟夫問題(殺 1 留 2，c=1)

n ▼	k ▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1_0												
2	2_0	1_1											
3	3_0	2_1	1_2										
4	3_1	2_2	4_0	1_3									
5	2_3	5_0	3_2	4_1	1_4								
6	5_1	3_3	6_0	2_4	4_2	1_5							
7	2_5	6_1	3_4	5_2	7_0	4_3	1_6						
8	5_3	2_6	6_2	8_0	3_5	7_1	4_4	1_7					
9	8_1	5_4	9_0	3_6	6_3	2_7	7_2	4_5	1_8				
10	2_8	8_2	3_7	6_4	9_1	5_5	10_0	7_3	4_6	1_9			
11	5_6	11_0	6_5	9_2	2_9	8_3	3_8	10_1	7_4	4_7	1_{10}		
12	8_4	3_9	9_3	12_0	5_7	11_1	6_6	2_{10}	10_2	7_5	4_8	1_{11}	
13	11_2	6_7	12_1	3_{10}	8_5	2_{11}	9_4	5_8	13_0	10_3	7_6	4_9	1_{12}

2.酋長問題

(1)酋長 y 為 1 號

表十三中，若酋長 y 為 1 號時，剩下數目從 n=1 依序排列為 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、11、12、13 ...相當於表十二中將「約瑟夫問題」留下數字為 1 時，k 所在的位置依序排列。

(2)酋長 y 為 2 號

表十三中，若酋長 y 為 2 號時，剩下數目從 n=1 依序排列為 1、1、2、1、3、2、4、1、5、3、6、2 ...相當於表十二中將約瑟夫問題留下數字為 2 時，k 所在的位置依序排列。

(3)酋長 y 為 3 號

表十三中，若酋長 y 為 3 號時，剩下數目從 n=1 依序排列為 1、1、2、1、3、2、4、1、5、3、6、2 ...相當於表十二中將「約瑟夫問題」留下數字為 3 時，所在 k 的位置重新排列。

表十三、酋長問題(殺 1 留 2，c=1)

n	酋長(y)▶												
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1												
2	2	1											
3	3	2	1										
4	4	2	1	3									
5	5	1	3	4	2								
6	6	4	2	5	1	3							
7	7	1	3	6	4	2	5						
8	8	2	5	7	1	3	6	4					
9	9	6	4	8	2	5	7	1	3				
10	10	1	3	9	6	4	8	2	5	7			
11	11	5	7	10	1	3	9	6	4	8	2		
12	12	8	2	11	5	7	10	1	3	9	6	4	
13	13	6	4	12	8	2	11	5	7	10	1	3	9

3.碎形數列

當酋長 y 為 2 號時，剩下數目從 n=1 依序排列為 1、1、2、1、3、2、4、1、5、3、6、2 ...；酋長 y 為 3 號時，剩下數目依序排列為 1、1、2、1、3、2、4、1、5、3、6、2 ...。

若將兩組數列以酋長 y 為 3、2、3、2 ...的順序將剩下數目合併為一個數列後，為 1、1、2、1、2、3、1、2、4、3、1、5、2、4、6、3、1、7 ...，如果將每一個第一次出現的數刪除 ~~1~~、1、~~2~~、1、2、~~3~~、1、2、~~4~~、3、1、~~5~~、2、4、~~6~~、3、1、~~7~~ ...，發現剩下的數列 1、1、2、1、2、3、1、2、4、3、1 ...與原來相同，可以不斷地產生重複。

表十四、碎形數列(1，2，c=1)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
酋長 y	3、2																	
剩下數目▶	1	1	2	1	2	3	1	2	4	3	1	5	2	4	6	3	1	7

表十二、十三、十四中，塗色部份是為「酋長問題」的演變過程。塗粉紅色、橘色、黃色分別從是表十二「約瑟夫問題」留下數字為 1、2、3 時所對應的 k 位置，演變成表十三「酋長問題」中酋長 y 為 1、2、3 號的情形。並由表十三「酋長問題」中酋長 y 為 2、3 號演化成表十四「碎形數列」。

（二）$\alpha=1$，$\beta=3$，$c=1$

表十五、約瑟夫問題(殺 1 留 3，c=1)

n ▼	k ▶											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1_0											
2	2_0	1_1										
3	2_1	3_0	1_2									
4	3_1	4_0	2_2	1_3								
5	3_2	4_1	2_3	5_0	1_4							
6	2_4	3_3	6_0	4_2	5_1	1_5						
7	6_1	7_0	4_3	2_5	3_4	5_2	1_6					
8	3_5	4_4	8_0	6_2	7_1	2_6	5_3	1_7				
9	7_2	8_1	4_5	2_7	3_6	6_3	9_0	5_4	1_8			
10	2_8	3_7	8_2	6_4	7_3	10_0	4_6	9_1	5_5	1_9		
11	6_5	7_4	2_9	10_1	11_0	4_7	8_3	3_8	9_2	5_6	1_{10}	
12	10_2	11_1	6_6	3_9	4_8	8_4	12_0	7_5	2_{10}	9_3	5_7	1_{11}

↓

表十六、酋長問題(殺 1 留 3，c=1)

n ▼	酋長(y)▶												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1												
2	2	1											
3	3	1	2										
4	4	3	1	2									
5	5	3	1	2	4								
6	6	1	2	4	5	3							
7	7	4	5	3	6	1	2						
8	8	6	1	2	7	4	5	3					
9	9	4	5	3	8	6	1	2	7				
10	10	1	2	7	9	4	5	3	8	6			
11	11	3	8	6	10	1	2	7	9	4	5		
12	12	9	4	5	11	3	8	6	10	1	2	7	

↓

表十七、碎形數列(1，3，c=1)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
酋長 y	4、3、2																	
剩下數目▶	1	2	1	2	1	3	2	1	3	4	2	1	3	5	4	2	1	6

(三) α=1 公式

1.約瑟夫問題（證明請詳見性質 6.1）

設 $d(x+1,1,\beta,c,k) \geq n > d(x,1,\beta,c,k)$

當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 1(個數)留 β(個數)，直到剩下最後 1 個數時就不能再殺了，遊戲才終止。約瑟夫問題殺 1 留 β 倒數第 k 個留下的自然數

$$=(1+\beta)\frac{n-d(x,1,\beta,c,k)}{1}-b(x,1,\beta,c,k)$$

2.酋長問題（證明請詳見性質 8.1、10.2、11.2）

當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 1(個數)留 β(個數)，指定自然數 y 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止。酋長問題殺 1 留 β 剩下的自然數數目

$$=\begin{cases} n-(y-1),(y\leq 1) \\ (n-1), 酋長=y+n-2\times 1-\beta,(1<y\leq 1+\beta) \\ (n-1), 酋長=y-1-\beta)\ ,(y>1+\beta) \end{cases}$$

3.碎形數列（證明請詳見性質 12.1）

當 n 由小至大，將酋長 y 為 1+β、1+(β-1)、1+(β-2)、...、1+1 時的剩下數目依序排列下來，如果將每一個第一次出現的數刪除，將發現剩下的數列與原來一樣，可以不斷地產生重複。

二、α=2

當 α=2 時，將它分為兩種情況討論，分為 c=1 和 c=2 兩部份。

（一）α=2，β=1，c=1

表十八、約瑟夫問題(殺 2 留 1，c=1)

n ▼ \ k ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_0										
3	3_0	2_1	1_2								
5	3_2	5_0	4_1	2_3	1_4						
7	6_1	3_4	7_0	5_2	4_3	2_5	1_6				
9	9_0	6_3	3_6	8_1	7_2	5_4	4_5	2_7	1_8		
11	3_8	9_2	6_5	11_0	10_1	8_3	7_4	5_6	4_7	2_9	1_{10}
13	6_7	12_1	9_4	3_{10}	13_0	11_2	10_3	8_5	7_6	5_8	...
15	9_6	15_0	12_3	6_9	3_{12}	14_1	13_2	11_4	10_5	8_7	...
17	12_5	3_{14}	15_2	9_8	6_{11}	17_0	16_1	14_3	13_4	11_6	...
19	15_4	6_{13}	18_1	12_7	9_{10}	3_{16}	19_0	17_2	16_3	14_5	...

↓

表十九、酋長問題(殺 2 留 1，c=1)

n ▼ \ 酋長(y)▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1																		
3	3	2	1																
5	5	4	1	3	2														
7	7	6	2	5	4	1	3												
9	9	8	3	7	6	2	5	4	1										
11	11	10	1	9	8	3	7	6	2	5	4								
13	13	12	4	11	10	1	9	8	3	7	6	2	5						
15	15	14	5	13	12	4	11	10	1	9	8	3	7	6	2				
17	17	16	2	15	14	5	13	12	4	11	10	1	9	8	3	7	6		
19	19	18	6	17	16	2	15	14	5	13	12	4	11	10	1	9	8	3	7

↓

表二十、碎形數列(2，1，c=1)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
酋長 y	2																	
剩下數目▶	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
酋長 y	3																	
剩下數目▶	1	1	2	3	1	4	5	2	6	7	3	8	9	1	10	11	4	12

（二）$\alpha=2$，$\beta=1$，$c=2$

殺 2 留 1，c=2 部份的酋長問題，碎形數列與 c=1(表十八、十九、二十)情況相似。

表二十一、約瑟夫問題(殺 2 留 1，c=2)

n ▼	k ▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
4	3_1	4_0	2_2	1_3							
6	6_0	3_3	5_1	4_2	2_4	1_5					
8	3_5	6_2	8_0	7_1	5_3	4_4	2_6	1_7			
10	6_4	9_1	3_7	10_0	8_2	7_3	5_5	4_6	2_8	1_9	
12	9_3	12_0	6_6	3_9	11_1	10_2	8_4	7_5	5_7	4_8	...
14	12_2	3_{11}	9_5	6_8	14_0	13_1	11_3	10_4	8_6	7_7	...
16	15_1	6_{10}	12_4	9_7	3_{13}	16_0	14_2	13_3	11_5	10_6	...
18	18_0	9_9	15_3	12_6	6_{12}	3_{15}	17_1	16_2	14_4	13_5	...
20	3_{17}	12_8	18_2	15_5	9_{11}	6_{14}	20_0	19_1	17_3	16_4	...
22	6_{16}	15_7	21_1	18_4	12_{10}	9_{13}	3_{19}	22_0	20_2	19_3	...
24	9_{15}	18_6	24_0	21_3	15_9	12_{12}	6_{18}	3_{21}	23_1	22_2	...

↓

表二十二、酋長問題(殺 2 留 1，c=2)

n ▼	酋長(y)▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	2	1																
4	4	3	1	2														
6	6	5	2	4	3	1												
8	8	7	1	6	5	2	4	3										
10	10	9	3	8	7	1	6	5	2	4								
12	12	11	4	10	9	3	8	7	1	6	5	2						
14	14	13	2	12	11	4	10	9	3	8	7	1	6	5				
16	16	15	5	14	13	2	12	11	4	10	9	3	8	7	1	6		
18	18	17	6	16	15	5	14	13	2	12	11	4	10	9	3	8	7	1

↓

表二十三、碎形數列(2，1，c=2)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
酋長 y	2																	
剩下數目▶	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
酋長 y	3																	
剩下數目▶	1	2	1	3	4	2	5	6	1	7	8	3	9	10	4	11	12	2

（三）$\alpha=2$，$\beta=2$，$c=1$

表二十四、約瑟夫問題(殺 2 留 2，c=1)

n ▼	k ▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_{0}										
3	3_{0}	2_{1}	1_{2}								
5	4_{1}	3_{2}	5_{0}	2_{3}	1_{4}						
7	3_{4}	7_{0}	4_{3}	6_{1}	5_{2}	2_{5}	1_{6}				
9	7_{2}	4_{5}	8_{1}	3_{6}	9_{0}	6_{3}	5_{4}	2_{7}	1_{8}		
11	11_{0}	8_{3}	3_{8}	7_{4}	4_{7}	10_{1}	9_{2}	6_{5}	5_{6}	2_{9}	1_{10}
13	4_{9}	12_{1}	7_{6}	11_{2}	8_{5}	3_{10}	13_{0}	10_{3}	9_{4}	6_{7}	...
15	8_{7}	3_{12}	11_{4}	15_{0}	12_{3}	7_{8}	4_{11}	14_{1}	13_{2}	10_{5}	...
17	12_{5}	7_{10}	15_{2}	4_{13}	16_{1}	11_{6}	8_{9}	3_{14}	17_{0}	14_{3}	...
19	16_{3}	11_{8}	19_{0}	8_{11}	3_{16}	15_{4}	12_{7}	7_{12}	4_{15}	18_{1}	...
21	20_{1}	15_{6}	4_{17}	12_{9}	7_{14}	19_{2}	16_{5}	11_{10}	8_{13}	3_{18}	...
23	3_{20}	19_{4}	8_{15}	16_{7}	11_{12}	23_{0}	20_{3}	15_{8}	12_{11}	7_{16}	...

↓

表二十五、酋長問題(殺 2 留 2，c=1)

n ▼	酋長(y)▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1																		
3	3	2	1																
5	5	4	2	1	3														
7	7	6	1	3	5	4	2												
9	9	8	4	2	7	6	1	3	5										
11	11	10	3	5	9	8	4	2	7	6	1								
13	13	12	6	1	11	10	3	5	9	8	4	2	7						
15	15	14	2	7	13	12	6	1	11	10	3	5	9	8	4				
17	17	16	8	4	15	14	2	7	13	12	6	1	11	10	3	5	9		
19	19	18	5	9	17	16	8	4	15	14	2	7	13	12	6	1	11	10	3

↓

表二十六、碎形數列(2，2，c=1)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
酋長 y	2																	
剩下數目▶	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
酋長 y	4、3																	
剩下數目▶	1	1	2	3	1	2	4	5	3	1	6	7	2	4	8	9	5	3

（四）$\alpha=2$，$\beta=2$，$c=2$

殺 2 留 2，c=2 部份的酋長問題，碎形數列與 c=1(表二十四、二十五、二十六)情況相似。

表二十七、約瑟夫問題(殺 2 留 2，c=2)

n ▼ \ k ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
4	4_0	3_1	2_2	1_3							
6	4_2	3_3	6_0	5_1	2_4	1_5					
8	8_0	7_1	4_4	3_5	6_2	5_3	2_6	1_7			
10	4_6	3_7	8_2	7_3	10_0	9_1	6_4	5_5	2_8	1_9	
12	8_4	7_5	12_0	11_1	4_8	3_9	10_2	9_3	6_6	5_7	...
14	12_2	11_3	4_{10}	3_{11}	8_6	7_7	14_0	13_1	10_4	9_5	...
16	16_0	15_1	8_8	7_9	12_4	11_5	4_{12}	3_{13}	14_2	13_3	...
18	4_{14}	3_{15}	12_6	11_7	16_2	15_3	8_{10}	7_{11}	18_0	17_1	...
20	8_{12}	7_{13}	16_4	15_5	20_0	19_1	12_8	11_9	4_{16}	3_{17}	...
22	12_{10}	11_{11}	20_2	19_3	4_{18}	3_{19}	16_6	15_7	8_{14}	7_{15}	...
24	16_8	15_9	24_0	23_1	8_{16}	7_{17}	20_4	19_5	12_{12}	11_{13}	...

↓

表二十八、酋長問題(殺 2 留 2，c=2)

n ▼ \ 酋長(y)▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	2	1																
4	4	3	2	1														
6	6	5	2	1	4	3												
8	8	7	4	3	6	5	2	1										
10	10	9	2	1	8	7	4	3	6	5								
12	12	11	6	5	10	9	2	1	8	7	4	3						
14	14	13	4	3	12	11	6	5	10	9	2	1	8	7				
16	16	15	8	7	14	13	4	3	12	11	6	5	10	9	2	1		
18	18	17	2	1	16	15	8	7	14	13	4	3	12	11	6	5	10	9

↓

表二十九、碎形數列(2，2，c=2)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
酋長 y	2																	
剩下數目▶	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
酋長 y	4、3																	
剩下數目▶	1	2	1	2	3	4	1	2	5	6	3	4	7	8	1	2	9	10

（五）α=2，β=3，c=1

表三十、約瑟夫問題(殺 2 留 3，c=1)

n ▼	k ▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_0										
3	3_0	2_1	1_2								
5	5_0	4_1	3_2	2_3	1_4						
7	5_2	4_3	3_4	7_0	6_1	2_5	1_6				
9	3_6	9_0	8_1	5_4	4_5	7_2	6_3	2_7	1_8		
11	8_3	5_6	4_7	10_1	9_2	3_8	11_0	7_4	6_5	2_9	1_{10}
13	13_0	10_3	9_4	4_9	3_{10}	8_5	5_8	12_1	11_2	7_6	...
15	5_{10}	15_0	14_1	9_6	8_7	13_2	10_5	4_{11}	3_{12}	12_3	...
17	10_7	5_{12}	4_{13}	14_3	13_4	3_{14}	15_2	9_8	8_9	17_0	...
19	15_4	10_9	9_{10}	19_0	18_1	8_{11}	3_{16}	14_5	13_6	5_{14}	...
21	20_1	15_6	14_7	5_{16}	4_{17}	13_8	8_{13}	19_2	18_3	10_{11}	...
23	4_{19}	20_3	19_4	10_{13}	9_{14}	18_5	13_{10}	3_{20}	23_0	15_8	...

↓

表三十一、酋長問題(殺 2 留 3，c=1)

n ▼	酋長(y)▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1																		
3	3	2	1																
5	5	4	3	2	1														
7	7	6	3	2	1	5	4												
9	9	8	1	5	4	7	6	3	2										
11	11	10	6	3	2	9	8	1	5	4	7								
13	13	12	5	4	7	11	10	6	3	2	9	8	1						
15	15	14	9	8	1	13	12	5	4	7	11	10	6	3	2				
17	17	16	6	3	2	15	14	9	8	1	13	12	5	4	7	11	10		
19	19	18	7	11	10	17	16	6	3	2	15	14	9	8	1	13	12	5	4

↓

表三十二、碎形數列(2，3，c=1)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
酋長 y	2																	
剩下數目▶	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
酋長 y	5、4、3																	
剩下數目▶	1	1	2	3	1	2	3	4	5	1	2	3	6	7	4	5	1	8

（六）$\alpha=2$，$\beta=3$，$c=2$

殺 2 留 3，$c=2$ 部份的酋長問題，碎形數列與 $c=1$(表三十、三十一、三十二)情況相似。

表三十三、約瑟夫問題(殺 2 留 3，$c=2$)

n ▼ \ k ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
4	3_1	4_0	2_2	1_3							
6	4_2	5_1	3_3	6_0	2_4	1_5					
8	3_5	4_4	8_0	5_3	7_1	6_2	2_6	1_7			
10	8_2	9_1	5_5	10_0	4_6	3_7	7_3	6_4	2_8	1_9	
12	3_9	4_8	10_2	5_7	9_3	8_4	12_0	11_1	7_5	6_6	...
14	8_6	9_5	3_{11}	10_4	14_0	13_1	5_9	4_{10}	12_2	11_3	...
16	13_3	14_2	8_8	15_1	5_{11}	4_{12}	10_6	9_7	3_{13}	16_0	...
18	18_0	3_{15}	13_5	4_{14}	10_8	9_9	15_3	14_4	8_{10}	5_{13}	...
20	5_{15}	8_{12}	18_2	9_{11}	15_5	14_6	20_0	19_1	13_7	10_{10}	...
22	10_{12}	13_9	3_{19}	14_8	20_2	19_3	5_{17}	4_{18}	18_4	15_7	...
24	15_9	18_6	8_{16}	19_5	3_{21}	24_0	10_{14}	9_{15}	23_1	20_4	...

↓

表三十四、酋長問題(殺 2 留 3，$c=2$)

n ▼ \ 酋長(y)▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	2	1																
4	4	3	1	2														
6	6	5	3	1	2	4												
8	8	7	1	2	4	6	5	3										
10	10	9	6	5	3	8	7	1	2	4								
12	12	11	1	2	4	10	9	6	5	3	8	7						
14	14	13	3	8	7	12	11	1	2	4	10	9	6	5				
16	16	15	9	6	5	14	13	3	8	7	12	11	1	2	4	10		
18	18	17	2	4	10	16	15	9	6	5	14	13	3	8	7	12	11	1

↓

表三十五、碎形數列(2，3，$c=2$)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36
酋長 y	2																	
剩下數目▶	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35
酋長 y	5、4、3																	
剩下數目▶	2	1	2	1	3	4	2	1	3	5	6	4	2	1	7	8	3	5

（七）α=2 公式

1.約瑟夫問題 （證明請詳見性質 6.1）

設 $d(x+1,2,\beta,c,k)\geq n>d(x,2,\beta,c,k)$

當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 2(個數)留 β(個數)，直到剩下最後 1 個數時就不能再殺了，遊戲才終止。約瑟夫問題殺 2 留 β，倒數第 k 個留下的自然數

$$=(2+\beta)\frac{n-d(x,2,\beta,c,k)}{2}-b(x,2,\beta,c,k)$$

2.酋長問題 （證明請詳見性質 8.1、10.2、11.2）

當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 2(個數)留 β(個數)，指定自然數 y 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止。酋長問題殺 2 留 β 剩下的自然數數目

$$=\begin{cases} n-(y-1),(y\leq 2) \\ (n-2), \text{酋長}=y+n-2\times 2-\beta,(2<y\leq 2+\beta) \\ (n-2), \text{酋長}=y-2-\beta,(y>2+\beta) \end{cases}$$

3.碎形數列 （證明請詳見性質 12.1）

當 n 由小至大，將酋長 y 為 2+β、2+(β-1)、2+(β-2)、...、2+1 時的剩下數目依序排列下來，如果將每一個第一次出現的數刪除，將發現剩下的數列與原來一樣，可以不斷地產生重複。

三、α=3

當 α=3 時，將它分為三種情況討論，分為 c=1、c=2 和 c=3 三部份。

（一）α=3，β=1，c=1

表三十六、約瑟夫問題(殺 3 留 1，c=1)

n ▼	k ▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_0										
4	4_0	3_1	2_2	1_3							
7	4_3	7_0	6_1	5_2	3_4	2_5	1_6				
10	8_2	4_6	10_0	9_1	7_3	6_4	5_5	3_7	2_8	1_9	
13	12_1	8_5	4_9	13_0	11_2	10_3	9_4	7_6	6_7	5_8	...
16	16_0	12_4	8_8	4_{12}	15_1	14_2	13_3	11_5	10_6	9_7	...
19	4_{15}	16_3	12_7	8_{11}	19_0	18_1	17_2	15_4	14_5	13_6	...
22	8_{14}	20_2	16_6	12_{10}	4_{18}	22_0	21_1	19_3	18_4	17_5	...
25	12_{13}	24_1	20_5	16_9	8_{17}	4_{21}	25_0	23_2	22_3	21_4	...
28	16_{12}	28_0	24_4	20_8	12_{16}	8_{20}	4_{24}	27_1	26_2	25_3	...

↓

表三十七、酋長問題(殺 3 留 1，c=1)

n ▼	酋長(y)▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1																		
4	4	3	2	1															
7	7	6	5	1	4	3	2												
10	10	9	8	2	7	6	5	1	4	3									
13	13	12	11	3	10	9	8	2	7	6	5	1	4						
16	16	15	14	4	13	12	11	3	10	9	8	2	7	6	5	1			
19	19	18	17	1	16	15	14	4	13	12	11	3	10	9	8	2	7	6	5

↓

表三十八、碎形數列(3，1，c=1)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
酋長 y	2																	
剩下數目▶	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
酋長 y	3																	
剩下數目▶	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
酋長 y	4																	
剩下數目▶	1	1	2	3	4	1	5	6	7	2	8	9	10	3	11	12	13	4

（二）$\alpha=3$，$\beta=1$，$c=2$

殺 3 留 1，$c=2$ 部份的酋長問題，碎形數列與 $c=1$(表三十六、三十七、三十八)情況相似。

表三十九、約瑟夫問題(殺 3 留 1，$c=2$)

n ▼ \ k ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	4_1	5_0	3_2	2_3	1_4						
8	8_0	4_4	7_1	6_2	5_3	3_5	2_6	1_7			
11	4_7	8_3	11_0	10_1	9_2	7_4	6_5	5_6	3_8	2_9	1_{10}
14	8_6	12_2	4_{10}	14_0	13_1	11_3	10_4	9_5	7_7	6_8	...
17	12_5	16_1	8_9	4_{13}	17_0	15_2	14_3	13_4	11_6	10_7	...
20	16_4	20_0	12_8	8_{12}	4_{16}	19_1	18_2	17_3	15_5	14_6	...
23	20_3	4_{19}	16_7	12_{11}	8_{15}	23_0	22_1	21_2	19_4	18_5	...
26	24_2	8_{18}	20_6	16_{10}	12_{14}	4_{22}	26_0	25_1	23_3	22_4	...
29	28_1	12_{17}	24_5	20_9	16_{13}	8_{21}	4_{25}	29_0	27_2	26_3	...
32	32_0	16_{16}	28_4	24_8	20_{12}	12_{20}	8_{24}	4_{28}	31_1	30_2	...
35	4_{31}	20_{15}	32_3	28_7	24_{11}	16_{19}	12_{23}	8_{27}	35_0	34_1	...

↓

表四十、酋長問題(殺 3 留 1，$c=2$)

n ▼ \ 酋長(y)▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	1																		
5	5	4	3	1	2															
8	8	7	6	2	5	4	3	1												
11	11	10	9	1	8	7	6	2	5	4	3									
14	14	13	12	3	11	10	9	1	8	7	6	2	5	4						
17	17	16	15	4	14	13	12	3	11	10	9	1	8	7	6	2	5			
20	20	19	18	5	17	16	15	4	14	13	12	3	11	10	9	1	8	7	6	2

↓

表四十一、碎形數列(3，1，$c=2$)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
酋長 y	2																	
剩下數目▶	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
酋長 y	3																	
剩下數目▶	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
酋長 y	4																	
剩下數目▶	1	2	1	3	4	5	2	6	7	8	1	9	10	11	3	12	13	14

（三）α=3，β=1，c=3

殺 3 留 1，c=3 部份的酋長問題，碎形數列與 c=1(表三十六、三十七、三十八)情況相似。

表四十二、約瑟夫問題(殺 3 留 1，c=3)

n ▼	k ▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3_0	2_1	1_2								
6	4_2	6_0	5_1	3_3	2_4	1_5					
9	8_1	4_5	9_0	7_2	6_3	5_4	3_6	2_7	1_8		
12	12_0	8_4	4_8	11_1	10_2	9_3	7_5	6_6	5_7	3_9	...
15	4_{11}	12_3	8_7	15_0	14_1	13_2	11_4	10_5	9_6	7_8	...
18	8_{10}	16_2	12_6	4_{14}	18_0	17_1	15_3	14_4	13_5	11_7	...
21	12_9	20_1	16_5	8_{13}	4_{17}	21_0	19_2	18_3	17_4	15_6	...
24	16_8	24_0	20_4	12_{12}	8_{16}	4_{20}	23_1	22_2	21_3	19_5	...
27	20_7	4_{23}	24_3	16_{11}	12_{15}	8_{19}	27_0	26_1	25_2	23_4	...
30	24_6	8_{22}	28_2	20_{10}	16_{14}	12_{18}	4_{26}	30_0	29_1	27_3	...
33	28_5	12_{21}	32_1	24_9	20_{13}	16_{17}	8_{25}	4_{29}	33_0	31_2	...
36	32_4	16_{20}	36_0	28_8	24_{12}	20_{16}	12_{24}	8_{28}	4_{32}	35_1	...

↓

表四十三、酋長問題(殺 3 留 1，c=3)

n ▼	酋長(y)▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	3	2	1																		
6	6	5	4	1	3	2															
9	9	8	7	2	6	5	4	1	3												
12	12	11	10	3	9	8	7	2	6	5	4	1									
15	15	14	13	1	12	11	10	3	9	8	7	2	6	5	4						
18	18	17	16	4	15	14	13	1	12	11	10	3	9	8	7	2	6	5			
21	21	20	19	5	18	17	16	4	15	14	13	1	12	11	10	3	9	8	7	2	6

↓

表四十四、碎形數列(3，1，c=3)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
酋長 y	2																	
剩下數目▶	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
酋長 y	3																	
剩下數目▶	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
酋長 y	4																	
剩下數目▶	1	2	3	1	4	5	6	2	7	8	9	3	10	11	12	1	13	14

（四）$\alpha=3$，$\beta=2$，$c=1$

表四十五、約瑟夫問題(殺 3 留 2，c=1)

n ▼ \ k ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_{0}										
4	4_{0}	3_{1}	2_{2}	1_{3}							
7	5_{2}	4_{3}	7_{0}	6_{1}	3_{4}	2_{5}	1_{6}				
10	10_{0}	9_{1}	5_{5}	4_{6}	8_{2}	7_{3}	6_{4}	3_{7}	2_{8}	1_{9}	
13	5_{8}	4_{9}	10_{3}	9_{4}	13_{0}	12_{1}	11_{2}	8_{5}	7_{6}	6_{7}	...
16	10_{6}	9_{7}	15_{1}	14_{2}	5_{11}	4_{12}	16_{0}	13_{3}	12_{4}	11_{5}	...
19	15_{4}	14_{5}	4_{15}	19_{0}	10_{9}	9_{10}	5_{14}	18_{1}	17_{2}	16_{3}	...
22	20_{2}	19_{3}	9_{13}	5_{17}	15_{7}	14_{8}	10_{12}	4_{18}	22_{0}	21_{1}	...
25	25_{0}	24_{1}	14_{11}	10_{15}	20_{5}	19_{6}	15_{10}	9_{16}	5_{20}	4_{21}	...
28	5_{23}	4_{24}	19_{9}	15_{13}	25_{3}	24_{4}	20_{8}	14_{14}	10_{18}	9_{19}	...
31	10_{21}	9_{22}	24_{7}	20_{11}	30_{1}	29_{2}	25_{6}	19_{12}	15_{16}	14_{17}	...
34	15_{19}	14_{20}	29_{5}	25_{9}	4_{30}	34_{0}	30_{4}	24_{10}	20_{14}	19_{15}	...
37	20_{17}	19_{18}	34_{3}	30_{7}	9_{28}	5_{32}	35_{2}	29_{8}	25_{12}	24_{13}	...

↓

表四十六、酋長問題(殺 3 留 2，c=1)

n ▼ \ 酋長(y)▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1																		
4	4	3	2	1															
7	7	6	5	2	1	4	3												
10	10	9	8	4	3	7	6	5	2	1									
13	13	12	11	2	1	10	9	8	4	3	7	6	5						
16	16	15	14	6	5	13	12	11	2	1	10	9	8	4	3	7			
19	19	18	17	3	7	16	15	14	6	5	13	12	11	2	1	10	9	8	4

↓

表四十七、碎形數列(3，2，c=1)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
酋長 y	2																	
剩下數目▶	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
酋長 y	3																	
剩下數目▶	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
酋長 y	5、4																	
剩下數目▶	1	1	2	3	4	1	2	5	6	7	3	4	8	9	10	1	2	11

（五）$\alpha=3$，$\beta=2$，$c=2$

殺 3 留 2，$c=2$ 部份的酋長問題，碎形數列與 $c=1$(表四十五、四十六、四十七)情況相似。

表四十八、約瑟夫問題(殺 3 留 2，$c=2$)

n ▼ \ k ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	5_0	4_1	3_2	2_3	1_4						
8	5_3	4_4	8_0	7_1	6_2	3_5	2_6	1_7			
11	10_1	9_2	5_6	4_7	11_0	8_3	7_4	6_5	3_8	2_9	1_{10}
14	4_{10}	14_0	10_4	9_5	5_9	13_1	12_2	11_3	8_6	7_7	...
17	9_8	5_{12}	15_2	14_3	10_7	4_{13}	17_0	16_1	13_4	12_5	...
20	14_6	10_{10}	20_0	19_1	15_5	9_{11}	5_{15}	4_{16}	18_2	17_3	...
23	19_4	15_8	5_{18}	4_{19}	20_3	14_9	10_{13}	9_{14}	23_0	22_1	...
26	24_2	20_6	10_{16}	9_{17}	25_1	19_7	15_{11}	14_{12}	5_{21}	4_{22}	...
29	29_0	25_4	15_{14}	14_{15}	4_{25}	24_5	20_9	19_{10}	10_{19}	9_{20}	...
32	5_{27}	30_2	20_{12}	19_{13}	9_{23}	29_3	25_7	24_8	15_{17}	14_{18}	...
35	10_{25}	35_0	25_{10}	24_{11}	14_{21}	34_1	30_5	29_6	20_{15}	19_{16}	...

↓

表四十九、酋長問題(殺 3 留 2，$c=2$)

n ▼ \ 酋長(y)▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	1																		
5	5	4	3	2	1															
8	8	7	6	2	1	5	4	3												
11	11	10	9	4	3	8	7	6	2	1	5									
14	14	13	12	1	5	11	10	9	4	3	8	7	6	2						
17	17	16	15	6	2	14	13	12	1	5	11	10	9	4	3	8	7			
20	20	19	18	8	7	17	16	15	6	2	14	13	12	1	5	11	10	9	4	3

↓

表五十、碎形數列(3，2，$c=2$)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
酋長 y	2																	
剩下數目▶	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
酋長 y	3																	
剩下數目▶	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
酋長 y	5、4																	
剩下數目▶	1	2	1	2	3	4	5	1	2	6	7	8	1	2	9	10	11	3

（六）$\alpha=3$，$\beta=2$，$c=3$

殺 3 留 2，$c=3$ 部份的酋長問題，碎形數列與 $c=1$(表表四十五、四十六、四十七)情況相似。

表五十一、約瑟夫問題(殺 3 留 2，$c=3$)

n ▼	k ▶										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3_0	2_1	1_2								
6	5_1	4_2	6_0	3_3	2_4	1_5					
9	4_5	9_0	5_4	8_1	7_2	6_3	3_6	2_7	1_8		
12	9_3	5_7	10_2	4_8	12_0	11_1	8_4	7_5	6_6	3_9	...
15	14_1	10_5	15_0	9_6	5_{10}	4_{11}	13_2	12_3	11_4	8_7	...
18	4_{14}	15_3	5_{13}	14_4	10_8	9_9	18_0	17_1	16_2	13_5	...
21	9_{12}	20_1	10_{11}	19_2	15_6	14_7	5_{16}	4_{17}	21_0	18_3	...
24	14_{10}	4_{20}	15_9	24_0	20_4	19_5	10_{14}	9_{15}	5_{19}	23_1	...
27	19_8	9_{18}	20_7	5_{22}	25_2	24_3	15_{12}	14_{13}	10_{17}	4_{23}	...
30	24_6	14_{16}	25_5	10_{20}	30_0	29_1	20_{10}	19_{11}	15_{15}	9_{21}	...
33	29_4	19_{14}	30_3	15_{18}	5_{28}	4_{29}	25_8	24_9	20_{13}	14_{19}	...
36	34_2	24_{12}	35_1	20_{16}	10_{26}	9_{27}	30_6	29_7	25_{11}	19_{17}	...

↓

表五十二、酋長問題(殺 3 留 2，$c=3$)

n ▼	酋長(y)▶																				
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	3	2	1																		
6	6	5	4	2	1	3															
9	9	8	7	1	3	6	5	4	2												
12	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3	6	5									
15	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3						
18	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7			
21	21	20	19	8	7	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9

↓

表五十三、碎形數列(3，2，$c=3$)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
酋長 y	2																	
剩下數目▶	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
酋長 y	3																	
剩下數目▶	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
酋長 y	5、4																	
剩下數目▶	1	2	3	1	2	4	5	6	3	1	7	8	9	1	4	10	11	12

（七）$\alpha=3$，$\beta=3$，$c=1$

表五十四、約瑟夫問題(殺 3 留 3，c=1)

n ▼ \ k ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1_0										
4	4_0	3_1	2_2	1_3							
7	6_1	5_2	4_3	7_0	3_4	2_5	1_6				
10	5_5	4_6	10_0	6_4	9_1	8_2	7_3	3_7	2_8	1_9	
13	11_2	10_3	6_7	12_1	5_8	4_9	13_0	9_4	8_5	7_6	...
16	4_{12}	16_0	12_4	5_{11}	11_5	10_6	6_{10}	15_1	14_2	13_3	...
19	10_9	6_{13}	18_1	11_8	17_2	16_3	12_7	5_{14}	4_{15}	19_0	...
22	16_6	12_{10}	5_{17}	17_5	4_{18}	22_0	18_4	11_{11}	10_{12}	6_{16}	...
25	22_3	18_7	11_{14}	23_2	10_{15}	6_{19}	24_1	17_8	16_9	12_{13}	...
28	28_0	24_4	17_{11}	4_{24}	16_{12}	12_{16}	5_{23}	23_5	22_6	18_{10}	...
31	6_{25}	30_1	23_8	10_{21}	22_9	18_{13}	11_{20}	29_2	28_3	24_7	...
34	12_{22}	5_{29}	29_5	16_{18}	28_6	24_{10}	17_{17}	4_{30}	34_0	30_4	...
37	18_{19}	11_{26}	35_2	22_{15}	34_3	30_7	23_{14}	10_{27}	6_{31}	36_1	...

↓

表五十五、酋長問題(殺 3 留 3，c=1)

n ▼ \ 酋長(y) ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1																		
4	4	3	2	1															
7	7	6	5	3	2	1	4												
10	10	9	8	2	1	4	7	6	5	3									
13	13	12	11	6	5	3	10	9	8	2	1	4	7						
16	16	15	14	1	4	7	13	12	11	6	5	3	10	9	8	2			
19	19	18	17	9	8	2	16	15	14	1	4	7	13	12	11	6	5	3	10

↓

表五十六、碎形數列(3，3，c=1)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
酋長 y	2																	
剩下數目▶	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
酋長 y	3																	
剩下數目▶	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
酋長 y	6、5、4																	
剩下數目▶	1	1	2	3	4	1	2	3	5	6	7	4	1	2	8	9	10	3

（八）$\alpha=3$，$\beta=3$，$c=2$

殺 3 留 3，$c=2$ 部份的酋長問題，碎形數列與 $c=1$(表五十四、五十五、五十六)情況相似。

表五十七、約瑟夫問題(殺 3 留 3，$c=2$)

n ▼	k ▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	4_1	5_0	3_2	2_3	1_4						
8	5_3	6_2	4_4	8_0	7_1	3_5	2_6	1_7			
11	11_0	4_7	10_1	6_5	5_6	9_2	8_3	7_4	3_8	2_9	1_{10}
14	6_8	10_4	5_9	12_2	11_3	4_{10}	14_0	13_1	9_5	8_6	...
17	12_5	16_1	11_6	4_{13}	17_0	10_7	6_{11}	5_{12}	15_2	14_3	...
20	18_2	5_{15}	17_3	10_{10}	6_{14}	16_4	12_8	11_9	4_{16}	20_0	...
23	4_{19}	11_{12}	23_0	16_7	12_{11}	22_1	18_5	17_6	10_{13}	6_{17}	...
26	10_{16}	17_9	6_{20}	22_4	18_8	5_{21}	24_2	23_3	16_{10}	12_{14}	...
29	16_{13}	23_6	12_{17}	28_1	24_5	11_{18}	4_{25}	29_0	22_7	18_{11}	...
32	22_{10}	29_3	18_{14}	5_{27}	30_2	17_{15}	10_{22}	6_{26}	28_4	24_8	...
35	28_7	35_0	24_{11}	11_{24}	4_{31}	23_{12}	16_{19}	12_{23}	34_1	30_5	...

↓

表五十八、酋長問題(殺 3 留 3，$c=2$)

n ▼	酋長(y)▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2	2	1																		
5	5	4	3	1	2															
8	8	7	6	3	1	2	5	4												
11	11	10	9	2	5	4	8	7	6	3	1									
14	14	13	12	6	3	1	11	10	9	2	5	4	8	7						
17	17	16	15	4	8	7	14	13	12	6	3	1	11	10	9	2	5			
20	20	19	18	9	2	5	17	16	15	4	8	7	14	13	12	6	3	1	11	10

↓

表五十九、碎形數列(3，3，$c=2$)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
酋長 y	2																	
剩下數目▶	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
酋長 y	3																	
剩下數目▶	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	54
酋長 y	6、5、4																	
剩下數目▶	2	1	2	1	3	4	5	2	1	3	6	7	8	4	5	2	9	10

（九）α=3，β=3，c=3

殺 3 留 3，c=3 部份的酋長問題，碎形數列與 c=1(表五十四、五十五、五十六)情況相似。

表六十、約瑟夫問題(殺 3 留 3，c=3)

n ▼ \ k ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3_0	2_1	1_2								
6	6_0	5_1	4_2	3_3	2_4	1_5					
9	6_3	5_4	4_5	9_0	8_1	7_2	3_6	2_7	1_8		
12	12_0	11_1	10_2	6_6	5_7	4_8	9_3	8_4	7_5	3_9	...
15	6_9	5_{10}	4_{11}	12_3	11_4	10_5	15_0	14_1	13_2	9_6	...
18	12_6	11_7	10_8	18_0	17_1	16_2	6_{12}	5_{13}	4_{14}	15_3	...
21	18_3	17_4	16_5	6_{15}	5_{16}	4_{17}	12_9	11_{10}	10_{11}	21_0	...
24	24_0	23_1	22_2	12_{12}	11_{13}	10_{14}	18_6	17_7	16_8	6_{18}	...
27	6_{21}	5_{22}	4_{23}	18_9	17_{10}	16_{11}	24_3	23_4	22_5	12_{15}	...
30	12_{18}	11_{19}	10_{20}	24_6	23_7	22_8	30_0	29_1	28_2	18_{12}	...
33	18_{15}	17_{16}	16_{17}	30_3	29_4	28_5	6_{27}	5_{28}	4_{29}	24_9	...
36	24_{12}	23_{13}	22_{14}	36_0	35_1	34_2	12_{24}	11_{25}	10_{26}	30_6	...

↓

表六十一、酋長問題(殺 3 留 3，c=3)

n ▼ \ 酋長(y)▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	3	2	1																		
6	6	5	4	3	2	1															
9	9	8	7	3	2	1	6	5	4												
12	12	11	10	6	5	4	9	8	7	3	2	1									
15	15	14	13	3	2	1	12	11	10	6	5	4	9	8	7						
18	18	17	16	9	8	7	15	14	13	3	2	1	12	11	10	6	5	4			
21	21	20	19	6	5	4	18	17	16	9	8	7	15	14	13	3	2	1	12	11	10

↓

表六十二、碎形數列(3，3，c=3)

酋長 y	1																	
剩下數目▶	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48	51	
酋長 y	2																	
剩下數目▶	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53
酋長 y	3																	
剩下數目▶	1	4	7	10	13	16	19	22	25	28	31	34	37	40	43	46	49	52
酋長 y	6、5、4																	
剩下數目▶	1	2	3	1	2	3	4	5	6	1	2	3	7	8	9	4	5	6

(十) α=3 公式

1.約瑟夫問題 （證明請詳見性質 6.1）

設 $d(x+1,3,\beta,c,k) \geq n > d(x,3,\beta,c,k)$

當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 3(個數)留 β(個數)，直到剩下最後 1 個數時就不能再殺了，遊戲才終止。約瑟夫問題殺 3 留 β 倒數第 k 個留下的自然數

$$= (3+\beta)\frac{n - d(x,3,\beta,c,k)}{3} - b(x,3,\beta,c,k)$$

2.酋長問題 （證明請詳見性質 8.1、10.2、11.2）

當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 3(個數)留 β(個數)，指定自然數 y 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止。酋長問題殺 3 留 β 剩下的自然數數目

$$=\begin{cases} n-(y-1),(y \leq 3) \\ (n-3), \text{酋長} = y+n-2\times 3-\beta,(3 < y \leq 3+\beta) \\ (n-3), \text{酋長} = y-3-\beta,(y > 3+\beta) \end{cases}$$

3.碎形數列 （證明請詳見性質 12.1）

當 n 由小至大，將酋長 y 為 3+β、3+(β-1)、3+(β-2)、...、3+1 時的剩下數目依序排列下來，如果將每一個第一次出現的數刪除，將發現剩下的數列與原來一樣，可以不斷地產生重複。

(十一)殺α留β公式

1.約瑟夫問題 （證明請詳見性質 6.1）

設$d(x+1,\alpha,\beta,c,k)\geq n>d(x,\alpha,\beta,c,k)$

當任意n個自然數排成環狀，從頭開始，殺α(個數)留β(個數)，直到剩下最後 1 個數時就不能再殺了，遊戲才終止。約瑟夫問題殺α留β倒數第k個留下的自然數

$$=(\alpha+\beta)\frac{n-d(x,\alpha,\beta,c,k)}{\alpha}-b(x,\alpha,\beta,c,k)$$

2.酋長問題 （證明請詳見性質 8.1、10.2、11.2）

當任意n個自然數排成環狀，從頭開始，殺α(個數)留β(個數)，指定自然數y為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止。酋長問題殺α留β剩下的自然數數目

$$=\begin{cases} n-(y-1),(y\leq\alpha) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y+n-2\alpha-\beta,(\alpha<y\leq\alpha+\beta) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y-\alpha-\beta,(y>\alpha+\beta) \end{cases}$$

3.碎形數列 （證明請詳見性質 12.1）

當n由小至大，將酋長y為$\alpha+\beta$、$\alpha+(\beta-1)$、$\alpha+(\beta-2)$、...、$\alpha+1$時的剩下數目依序排列下來，如果將每一個第一次出現的數刪除，將發現剩下的數列與原來一樣，可以不斷地產生重複。

四、α=1、2、3…，β=1、2、3…

(一)約瑟夫問題（證明請詳見性質 6.1）

約瑟夫問題設 $d(x+1,1,\beta,c,k) \ge n > d(x,1,\beta,c,k)$ 公式推演如表六十三。

表六十三、約瑟夫問題留下數字公式表

	留下數字
殺 α 留 1	$(\alpha+1)\dfrac{n-d(x,\alpha,1,c,k)}{\alpha}-b(x,\alpha,1,c,k)$
殺 α 留 2	$(\alpha+2)\dfrac{n-d(x,\alpha,2,c,k)}{\alpha}-b(x,\alpha,2,c,k)$
殺 α 留 3	$(\alpha+3)\dfrac{n-d(x,\alpha,3,c,k)}{\alpha}-b(x,\alpha,3,c,k)$
殺 α 留 β	$(\alpha+\beta)\dfrac{n-d(x,\alpha,\beta,c,k)}{\alpha}-b(x,\alpha,\beta,c,k)$

(二)酋長問題（證明請詳見性質 8.1、10.2、11.2）

表六十四、酋長問題剩下數目公式表

	剩下數目
殺 α 留 1	$\begin{cases} n-(y-1),(y\le 1) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y+n-2\times 1-\beta,(1<y\le 1+\beta) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y-1-\beta,(y>1+\beta) \end{cases}$
殺 α 留 2	$\begin{cases} n-(y-1),(y\le 2) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y+n-2\times 2-\beta,(2<y\le 2+\beta) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y-2-\beta,(y>2+\beta) \end{cases}$
殺 α 留 3	$\begin{cases} n-(y-1),(y\le 3) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y+n-2\times 3-\beta,(3<y\le 3+\beta) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y-3-\beta,(y>3+\beta) \end{cases}$
殺 α 留 β	$\begin{cases} n-(y-1),(y\le \alpha) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y+n-2\alpha-\beta,(\alpha<y\le \alpha+\beta) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y-\alpha-\beta,(y>\alpha+\beta) \end{cases}$

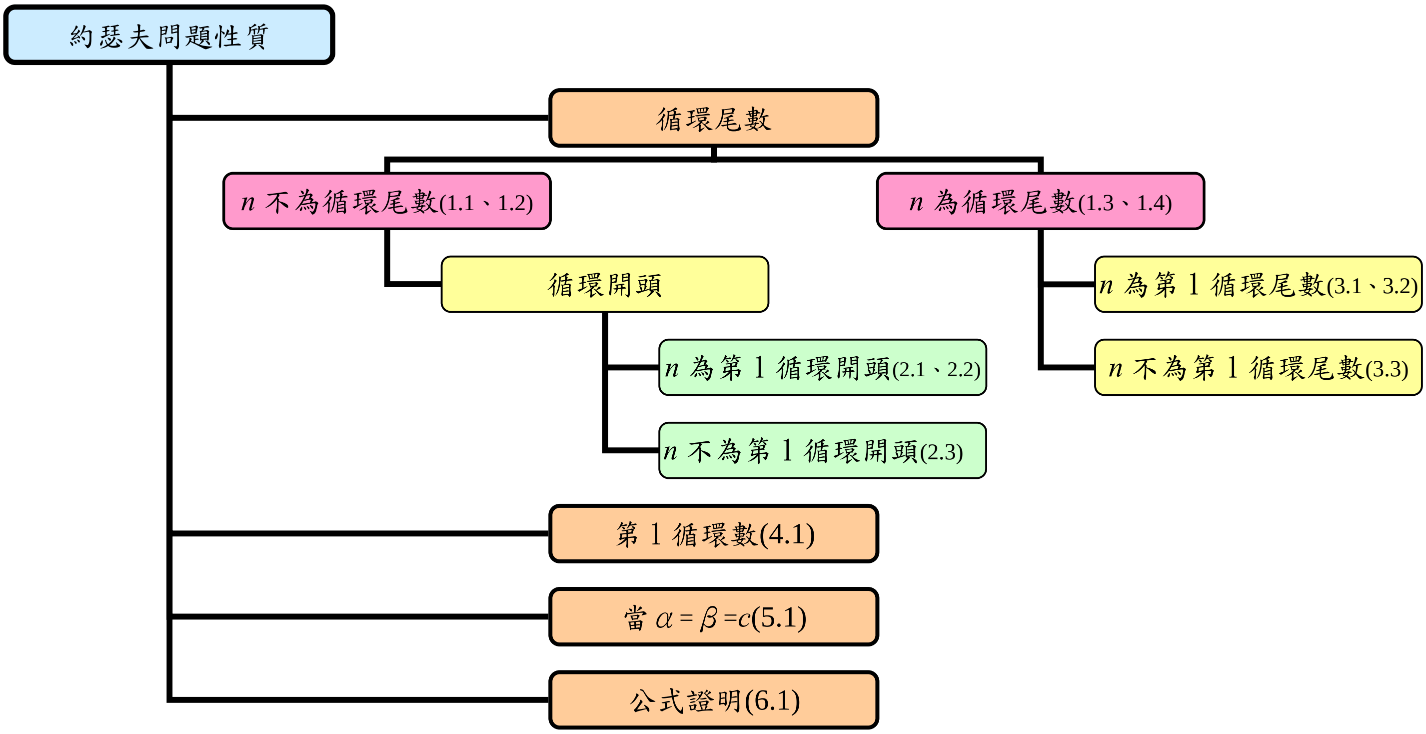
(三)碎形數列（證明請詳見性質 12.1）

當 n 由小至大，將酋長 y 為 $\alpha+\beta$、$\alpha+(\beta-1)$、$\alpha+(\beta-2)$、…、$\alpha+1$ 時的剩下數目依序排列下來，把每一個第一次出現的數刪除，將發現剩下的數列與原來一樣，可以不斷地產生重複。

伍、研究討論

第一部分、約瑟夫問題性質

約瑟夫問題研究中分成 8 種情形，共發現 12 個性質，架構圖如下圖一



（圖二、約瑟夫問題性質架構圖）

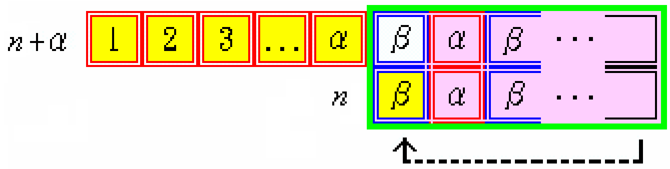
一、循環尾數(第 1 節)

(一)、n 不為循環尾數

1.1 當 k 固定時，若 n 不為循環的尾數， $n+\alpha$ 留下數字與 n 留下數字相差 $\alpha+\beta$。

1.2 當 k 固定時，若 n 不為循環的尾數，$n+\alpha$ 減掉留下數字與 n 減掉留下數字相差 β。

【証明】



圖三、n 不為循環尾數証明

提出 n 與 $n+\alpha$ 兩數來做比較。當 $n+\alpha$ 數先殺掉 α 後，兩數就都剩下 n 個數, 如圖三綠色框部份;在將 n 數從後面搬 β 個數往前補,並規定 n 數的遊戲規則改為留下 β(個數)殺掉 α(個數)循環，如此一來 $n+\alpha$ 數與 n 數的殺 α 和留 β 的順序相同。

若 n 不為循環的結束，留下數字則落在圖三粉紅色區塊。如此一來 n 數與 $n+\alpha$ 數兩數本身就差 α，再加上 n 數從後面搬 β 個數往前補又多差 β，因此 n 與 $n+\alpha$ 兩數留下數字差 $\alpha+\beta$。(如圖三黃色區塊) $n+\alpha$ 減掉留下數字與 n 減掉留下數字之間相差 $|\alpha-(\alpha+\beta)|=\beta$。

⊕

實例:

表六十五、n 不為循環尾數實例(ex:殺 1 留 1，c=1)

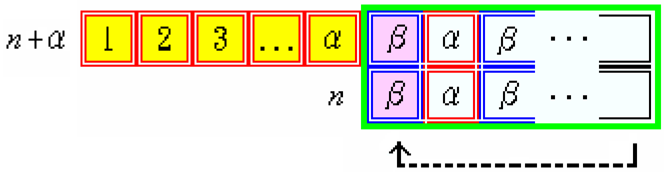
n	k ▶														
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1_0														
2	2_0	1_1													
3	2_1	3_0	1_2												
4	4_0	2_2	3_1	1_3											
5	2_3	4_1	5_0	3_2	1_4										
6	4_2	6_0	2_4	5_1	3_3	1_5									
7	6_1	2_5	4_3	7_0	5_2	3_4	1_6								
8	8_0	4_4	6_2	2_6	7_1	5_3	3_5	1_7							
9	2_7	6_3	8_1	4_5	9_0	7_2	5_4	3_6	1_8						
10	4_6	8_2	10_0	6_4	2_8	9_1	7_3	5_5	3_7	1_9					
11	6_5	10_1	2_9	8_3	4_7	11_0	9_2	7_4	5_6	3_8	1_{10}				
12	8_4	12_0	4_8	10_2	6_6	2_{10}	11_1	9_3	7_5	5_7	3_9	1_{11}			
13	10_3	2_{11}	6_7	12_1	8_5	4_9	13_0	11_2	9_4	7_6	5_8	3_{10}	1_{12}		
14	12_2	4_{10}	8_6	14_0	10_4	6_8	2_{12}	13_1	11_3	9_5	7_7	5_9	3_{11}	1_{13}	
15	14_1	6_9	10_5	2_{13}	12_3	8_7	4_{11}	15_0	13_2	11_4	9_6	7_8	5_{10}	3_{12}	1_{14}

（二）、n 為循環尾數

1.3 若 n 為循環尾數，那麼倒數第 k 個留下數字<β，該數 n 為該循環的結束，筆者定義為 $d(\alpha,\beta,c,k)$值。

1.4 若 n 為循環尾數，該數 n 減掉該留下數，筆者定義為 $b(\alpha,\beta,c,k)$值。$b(\alpha,\beta,c,k)<\beta$。

【証明】



圖四、n 為循環尾數証明

作法和性質 1.1、1.2 的証明相同，但是若 n 為循環的結束，留下數字則會落在圖四粉紅色區塊。如此一來 n 數中留下數字是將 n 數從後面搬β個數往前補的其中之一，也就是數字 n、n-1、n-2 ...或 n-(β-1)。而且 n 減掉留下數字<β。

⊕

實例:

表六十六、n 為循環尾數實例(ex:殺 1 留 1，c=1)

n	k ▶															
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1_0															
2	2_0	1_1														
3	2_1	3_0	1_2													
4	4_0	2_2	3_1	1_3												
5	2_3	4_1	5_0	3_2	1_4											
6	4_2	6_0	2_4	5_1	3_3	1_5										
7	6_1	2_5	4_3	7_0	5_2	3_4	1_6									
8	8_0	4_4	6_2	2_6	7_1	5_3	3_5	1_7								
9	2_7	6_3	8_1	4_5	9_0	7_2	5_4	3_6	1_8							
10	4_6	8_2	10_0	6_4	2_8	9_1	7_3	5_5	3_7	1_9						
11	6_5	10_1	2_9	8_3	4_7	11_0	9_2	7_4	5_6	3_8	1_{10}					
12	8_4	12_0	4_8	10_2	6_6	2_{10}	11_1	9_3	7_5	5_7	3_9	1_{11}				
13	10_3	2_{11}	6_7	12_1	8_5	4_9	13_0	11_2	9_4	7_6	5_8	3_{10}	1_{12}			
14	12_2	4_{10}	8_6	14_0	10_4	6_8	2_{12}	13_1	11_3	9_5	7_7	5_9	3_{11}	1_{13}		
15	14_1	6_9	10_5	2_{13}	12_3	8_7	4_{11}	15_0	13_2	11_4	9_6	7_8	5_{10}	3_{12}	1_{14}	
16	16_0	8_8	12_4	4_{12}	14_2	10_6	8_{10}	2_{14}	15_1	13_3	11_5	9_7	7_9	5_{11}	3_{13}	1_{15}

二、循環開頭

(一)、n 為第 1 循環開頭

2.1 當 k=1、2、3 ...c 時，第 1 循環開頭留下數字=c、c-1、c-2 ...1；

當 k>c，第 1 循環開頭留下數字以數字 α、α-1、α-2 ...1 循環。

【証明】

1. 當 $n \leqq c$ 時，第 1 循環開頭是在 $n=c$ 的時候，$\because c \leqq \alpha \therefore n=c \leqq \alpha$。因此，

（1）.當 k=1 時，留下數字為 c。

（2）.當 k=2 時，留下數字為 c-1。 ...

（3）.當 k=c 時，留下數字為 1。

2. 當 n>c 時，由於數字 n 與 $n+\alpha$ 之間差 α，因此，

(1).當 $k=n-(\alpha-1)$時，留下數字會是該循環的開頭，倒數第 $n-(\alpha-1)$個留下的數也就是代表是第 α 個被淘汰的數，也就是數字 α。

(2).當 $k=n-(\alpha-2)$時，留下數字會是該循環的開頭，倒數第 $n-(\alpha-2)$個留下的數也就是代表是第 α-1 淘汰的數，也就是數字 α-1。 ...

(3).當 k=n 時，留下數字會是該循環的開頭，倒數第 n 個留下的數也就是代表是第 1 個被淘汰的數，也就是數字 1。

實例:

表六十七、n 為第 1 循環開頭實例(ex:殺 3 留 1，c=2)

n	k ▶										
▼	1	2(c)	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	4_1	5_0	3_2	2_3	1_4						
8	8_0	4_4	7_1	6_2	5_3	3_5	2_6	1_7			
11	4_7	8_3	11_0	10_1	9_2	7_4	6_5	5_6	3_8	2_9	1_{10}
14	8_6	12_2	4_{10}	14_0	13_1	11_3	10_4	9_5	7_7	6_8	...
17	12_5	16_1	8_9	4_{13}	17_0	15_2	14_3	13_4	11_6	10_7	...
20	16_4	20_0	12_8	8_{12}	4_{16}	19_1	18_2	17_3	15_5	14_6	...
23	20_3	4_{19}	16_7	12_{11}	8_{15}	23_0	22_1	21_2	19_4	18_5	...
26	24_2	8_{18}	20_6	16_{10}	12_{14}	4_{22}	26_0	25_1	23_3	22_4	...
29	28_1	12_{17}	24_5	20_9	16_{13}	8_{21}	4_{25}	29_0	27_2	26_3	...
32	32_0	16_{16}	28_4	24_8	20_{12}	12_{20}	8_{24}	4_{28}	31_1	30_2	...
35	4_{31}	20_{15}	32_3	28_7	24_{11}	16_{19}	12_{23}	8_{27}	35_0	34_1	...
38	8_{30}	24_{14}	36_2	32_6	28_{10}	20_{18}	16_{22}	12_{26}	4_{34}	38_0	...
41	12_{29}	28_{13}	40_1	36_5	32_9	24_{17}	20_{21}	16_{25}	8_{33}	4_{37}	...

（二）、n 減掉第 1 循環開頭留下數字

2.2 若 n 為第 1 循環的開頭，則 n 減掉留下數字=$k-1$。

【証明】

(1).當 $k=n$ 時，留下的數字是 1，因此 n 減掉留下數字=n-1，又 $k=n$，所以 n 減掉留下數字=n-1=k-1。

(2).當 $k=n$-1 時，留下的數字是 2，因此 n 減掉留下數字=n-2，又 $k=n-1\Rightarrow k+1=n$，所以 n 減掉留下數字=n-2=k+1-2=k-1。

(3).當 $k=n$-2 時，留下的數字是 3，因此 n 減掉留下數字=n-3，又 $k=n-2\Rightarrow k+2=n$，所以 n 減掉留下數字=n-3=k+2-3=k-1

(4).當 $k=n-(\alpha-1)$時，留下的數字是 α，因此 n 減掉留下數字=$n-\alpha$，又 $k=n-(\alpha-1)\Rightarrow k+(\alpha-1)=n$，所以 n 減掉留下數字=$n-\alpha=k+(\alpha-1)-\alpha=k-1$；

⊕

實例:

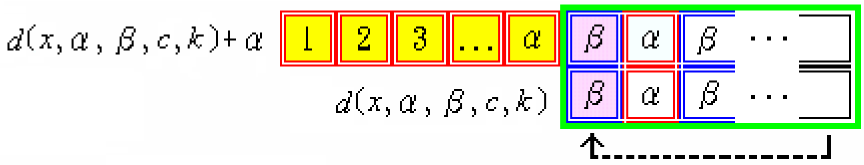
表六十八、n 減掉第 1 循環開頭留下數字實例(ex:殺 1 留 1，c=1)

n	k ▶															
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	1_{0}															
2	2_{0}	1_{1}														
3	2_{1}	3_{0}	1_{2}													
4	4_{0}	2_{2}	3_{1}	1_{3}												
5	2_{3}	4_{1}	5_{0}	3_{2}	1_{4}											
6	4_{2}	6_{0}	2_{4}	5_{1}	3_{3}	1_{5}										
7	6_{1}	2_{5}	4_{3}	7_{0}	5_{2}	3_{4}	1_{6}									
8	8_{0}	4_{4}	6_{2}	2_{6}	7_{1}	5_{3}	3_{5}	1_{7}								
9	2_{7}	6_{3}	8_{1}	4_{5}	9_{0}	7_{2}	5_{4}	3_{6}	1_{8}							
10	4_{6}	8_{2}	10_{0}	6_{4}	2_{8}	9_{1}	7_{3}	5_{5}	3_{7}	1_{9}						
11	6_{5}	10_{1}	2_{9}	8_{3}	4_{7}	11_{0}	9_{2}	7_{4}	5_{6}	3_{8}	1_{10}					
12	8_{4}	12_{0}	4_{8}	10_{2}	6_{6}	2_{10}	11_{1}	9_{3}	7_{5}	5_{7}	3_{9}	1_{11}				
13	10_{3}	2_{11}	6_{7}	12_{1}	8_{5}	4_{9}	13_{0}	11_{2}	9_{4}	7_{6}	5_{8}	3_{10}	1_{12}			
14	12_{2}	4_{10}	8_{6}	14_{0}	10_{4}	6_{8}	2_{12}	13_{1}	11_{3}	9_{5}	7_{7}	5_{9}	3_{11}	1_{13}		
15	14_{1}	6_{9}	10_{5}	2_{13}	12_{3}	8_{7}	4_{11}	15_{0}	13_{2}	11_{4}	9_{6}	7_{8}	5_{10}	3_{12}	1_{14}	
16	16_{0}	8_{8}	12_{4}	4_{12}	14_{2}	10_{6}	8_{10}	2_{14}	15_{1}	13_{3}	11_{5}	9_{7}	7_{9}	5_{11}	3_{13}	1_{15}

(三)、n 不為第 1 循環開頭

2.3 若 n 為第 x+1 循環開頭，留下數字為 $\alpha+\beta-b(x,\alpha,\beta,c,k)$

【證明】



圖五、n 為循環開頭証明

由圖四得知，當 n 為循環尾數時，$b(x,\alpha,\beta,c,k)$為 $\beta-1$、$\beta-2$、$\beta-3$... 2、1 或 0，$d(x,\alpha,\beta,c,k)+\alpha$ 留下數字為 $\alpha+1$、$\alpha+2$、$\alpha+3$... $\alpha+\beta-2$、$\alpha+\beta-1$、$\alpha+\beta$ 推算至圖五，再由圖五推算至表六十九。

表六十九、n 為循環開頭証明

$d(x,\alpha,\beta,c,k)+\alpha$ 留下數字	$\alpha+1$	$\alpha+2$	...	$\alpha+\beta-2$	$\alpha+\beta-1$	$\alpha+\beta$
$b(x,\alpha,\beta,c,k)$	$\beta-1$	$\beta-2$	...	2	1	0
相加	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	...	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta$

由圖五、表六十九得知 $d(x,\alpha,\beta,c,k)+\alpha$(第 x+1 循環開頭)的留下數字為 $\alpha+\beta-b(x,\alpha,\beta,c,k)$。

⊕

實例:

表七十、n 不為第 1 循環開頭實例(ex:殺 3 留 3，c=2)

n	k ▶										
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	4_1	5_0	3_2	2_3	1_4						
8	5_3	6_2	4_4	8_0	7_1	3_5	2_6	1_7			
11	11_0	4_7	10_1	6_5	5_6	9_2	8_3	7_4	3_8	2_9	1_{10}
14	6_8	10_4	5_9	12_2	11_3	4_{10}	14_0	13_1	9_5	8_6	...
17	12_5	16_1	11_6	4_{13}	17_0	10_7	6_{11}	5_{12}	15_2	14_3	...
20	18_2	5_{15}	17_3	10_{10}	6_{14}	16_4	12_8	11_9	4_{16}	20_0	...
23	4_{19}	11_{12}	23_0	16_7	12_{11}	22_1	18_5	17_6	10_{13}	6_{17}	...
26	10_{16}	17_9	6_{20}	22_4	18_8	5_{21}	24_2	23_3	16_{10}	12_{14}	...
29	16_{13}	23_6	12_{17}	28_1	24_5	11_{18}	4_{25}	29_0	22_7	18_{11}	...
32	22_{10}	29_3	18_{14}	5_{27}	30_2	17_{15}	10_{22}	6_{26}	28_4	24_8	...
35	28_7	35_0	24_{11}	11_{24}	4_{31}	23_{12}	16_{19}	12_{23}	34_1	30_5	...
38	34_4	6_{32}	30_8	17_{21}	10_{28}	29_9	22_{16}	18_{20}	5_{33}	36_2	...

三、循環尾數(第 2 節)

(一)、n 為第 1 循環尾數

3.1 若 n 為第 1 循環的尾數，n 減掉留下數字為($(k-1)$ mod β)。

3.2 若 n 為第 1 循環的尾數，從 k=1 開始，n 減掉留下數字以 0、1 ... $\beta-1$ 循環。

【證明】

由性質 1.2 得知當 k 固定時，若 n 不為循環的尾數，$n+\alpha$ 減掉留下數字與 n 減掉留下數字相差 β。；又由性質 2.2 得知，若 n 為第 1 循環的開頭，則 n 減掉留下數字=k-1。所以第 1 循環的結束 n 留下數字為($(k-1)$ mod β)。當 k=1，0≡($(k-1)$ mod β)；當 k=2，1≡($(k-1)$ mod β)；當 $k=\beta$，$\beta-1$≡($(k-1)$ mod β)；當 $k=\beta+1$ 時，($(k-1)$ mod β)又回到 0 開始循環。

⊕

實例:

表七十一、n 為第 1 循環尾數實例(ex:殺 1 留 3，c=1)

n	k ▶											
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1_{0}											
2	2_{0}	1_{1}										
3	2_{1}	3_{0}	1_{2}									
4	3_{1}	4_{0}	2_{2}	1_{3}								
5	3_{2}	4_{1}	2_{3}	5_{0}	1_{4}							
6	2_{4}	3_{3}	6_{0}	4_{2}	5_{1}	1_{5}						
7	6_{1}	7_{0}	4_{3}	2_{5}	3_{4}	5_{2}	1_{6}					
8	3_{5}	4_{4}	8_{0}	6_{2}	7_{1}	2_{6}	5_{3}	1_{7}				
9	7_{2}	8_{1}	4_{5}	2_{7}	3_{6}	6_{3}	9_{0}	5_{4}	1_{8}			
10	2_{8}	3_{7}	8_{2}	6_{4}	7_{3}	10_{0}	4_{6}	9_{1}	5_{5}	1_{9}		
11	6_{5}	7_{4}	2_{9}	10_{1}	11_{0}	4_{7}	8_{3}	3_{8}	9_{2}	5_{6}	1_{10}	
12	10_{2}	11_{1}	6_{6}	3_{9}	4_{8}	8_{4}	12_{0}	7_{5}	2_{10}	9_{3}	5_{7}	1_{11}

（二）、n 不為第 1 循環尾數

3.3 $d(x, \alpha, \beta, c, k)=d(x, \alpha, \beta, c, k)+\alpha[\frac{d(x,\alpha,\beta,c,k)+b(x,\alpha,\beta,c,k)}{\beta}]$

$b(x+1, \alpha, \beta, c, k)\equiv((d(x, \alpha, \beta, c, k)+b(x, \alpha, \beta, c, k)) \bmod \beta)$

【證明】

由 1.1 得知當 k 固定時，若 n 不為循環的尾數，$n+\alpha$ 留下數字與 n 留下數字相差 $\alpha+\beta$。

設 $d(x+1, \alpha, \beta, c, k)= \alpha m+d(x, \alpha, \beta, c, k)$

$\Rightarrow d(x, \alpha, \beta, c, k)+\alpha m-b(x+1, \alpha, \beta, c, k)=(\alpha+\beta)m-b(x, \alpha, \beta, c, k)$

$\Rightarrow d(x, \alpha, \beta, c, k)=(\alpha+\beta)m-b(x, \alpha, \beta, c, k)-\alpha m+b(x+1, \alpha, \beta, c, k)$

$\Rightarrow d(x, \alpha, \beta, c, k)=\beta m-b(x, \alpha, \beta, c, k)+b(x+1, \alpha, \beta, c, k)$

$\Rightarrow m=[\frac{d(x,\alpha,\beta,c,k)+b(x,\alpha,\beta,c,k)}{\beta}]$

$\Rightarrow d(x+1, \alpha, \beta, c, k)=d(x, \alpha, \beta, c, k)+\alpha[\frac{d(x,\alpha,\beta,c,k)+b(x,\alpha,\beta,c,k)}{\beta}]$

$\Rightarrow b(x+1, \alpha, \beta, c, k)\equiv((d(x, \alpha, \beta, c, k)+b(x, \alpha, \beta, c, k)) \bmod \beta)$

$\oplus$

實例:

d 函數和 *b* 函數係筆者所獨創分析工具，用來計算各循環的尾數，如表七十二。藍色的數字是前一循環的尾數，紅色的數字是本循環的尾數。

表七十二、n 不為第 1 循環尾數實例(例如:殺 3 留 2，c=1，k=1)

第 1 循環	第 2 循環	第 3 循環
4=2*2-0+0 5*2-0+0=10	10=2*5-0+0 5*5-0+0=25	25=2*12-0+1 5*12-0+1=61
第 4 循環	第 5 循環	第 6 循環
61=2*31-1+0 5*31-1+0=154	154=2*77-0+0 5*77-0+0=385	385=2*192-0+1 5*192-0+1=961
第 7 循環	第 8 循環	第 9 循環
961=2*481-1+0 5*481-1+0=2404	2404=2*1202-0+0 5*1202-0+0=6010	6010=2*3005-0+0 5*3005-0+0=15025

四、第 1 循環數

4.1 第 1 循環有$[\frac{k-1}{\beta}]+1$個數。

【證明】

由性質 1.2 得知當 k 固定時，若 n 不為循環的尾數，$n+\alpha$ 減掉留下數字與 n 減掉留下數字相差 β。又由性質 2.2 得知若 n 為第 1 循環的開頭，則 n 減掉留下數字=k-1。所以可得第 1 循環有$[\frac{k-1}{\beta}]$個數，但是由性質 1.4 得知$b(\alpha,\beta,\mathrm{c},\mathrm{k})<\beta$，所以$b(1,\alpha,\beta,\mathrm{c},\mathrm{k})$不在$[\frac{k-1}{\beta}]$個數的範圍中，故還要加 1。

$\oplus$

實例:

表七十三、第 1 循環數實例(例如:殺 3 留 3，c=2)

n ▼ \ k ▶	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	2_0	1_1									
5	4_1	5_0	3_2	2_3	1_4						
8	5_3	6_2	4_4	8_0	7_1	3_5	2_6	1_7			
11	11_0	4_7	10_1	6_5	5_6	9_2	8_3	7_4	3_8	2_9	1_{10}
14	6_8	10_4	5_9	12_2	11_3	4_{10}	14_0	13_1	9_5	8_6	...
17	12_5	16_1	11_6	4_{13}	17_0	10_7	6_{11}	5_{12}	15_2	14_3	...
20	18_2	5_{15}	17_3	10_{10}	6_{14}	16_4	12_8	11_9	4_{16}	20_0	...
23	4_{19}	11_{12}	23_0	16_7	12_{11}	22_1	18_5	17_6	10_{13}	6_{17}	...
26	10_{16}	17_9	6_{20}	22_4	18_8	5_{21}	24_2	23_3	16_{10}	12_{14}	...
29	16_{13}	23_6	12_{17}	28_1	24_5	11_{18}	4_{25}	29_0	22_7	18_{11}	...
32	22_{10}	29_3	18_{14}	5_{27}	30_2	17_{15}	10_{22}	6_{26}	28_4	24_8	...
35	28_7	35_0	24_{11}	11_{24}	4_{31}	23_{12}	16_{19}	12_{23}	34_1	30_5	...
38	34_4	6_{32}	30_8	17_{21}	10_{28}	29_9	22_{16}	18_{20}	5_{33}	36_2	...

五、當 $\alpha=\beta=c$

5.1 當 $\alpha=\beta=c$ 時，$b(\alpha,\beta,c,k)=b(\alpha,\alpha,\alpha,k)$ 只能為 $((k\text{-}1) \bmod \alpha)$

【證明】

當殺 α 留 α，n 又為 α 的倍數時，留下數字與 k 的關係如下表七十四。由性質 1.3 得知，若 n 為循環尾數，那麼 $b(\alpha,\alpha,\alpha,k)$ 可能是 0、1、2、3 ... $\alpha-1$(表七十四、藍色區塊藍色字)。

如此當 $b(\alpha,\alpha,\alpha,k)=0 \Rightarrow\ 0\equiv((k-1) \bmod \alpha)$；

$b(\alpha,\alpha,\alpha,k)=1 \Rightarrow\ 1\equiv((k-1) \bmod \alpha)$；

$b(\alpha,\alpha,\alpha,k)=2 \Rightarrow\ 2\equiv((k-1) \bmod \alpha)$ ...

$b(\alpha,\alpha,\alpha,k)=\alpha-1 \Rightarrow\ \alpha-1\equiv((k-1) \bmod \alpha)$ 。

表七十四、當 $\alpha=\beta=c$，留下數字與 k 的關係

留下數字	1	2	3	...	$\alpha-2$	$\alpha-1$	α
	$\alpha+1$	$\alpha+2$	$\alpha+3$	...	$2\alpha-2$	$2\alpha-1$	2α
	$2\alpha+1$	$2\alpha+2$	$2\alpha+3$	...	$3\alpha-2$	$3\alpha-1$	3α
	...	...	...	...	...	...	...
	$n-(\alpha-1)$	$n-(\alpha-2)$	$n-(\alpha-3)$	...	$n-2$	$n-1$	$n-0$
k	α 倍數	α 倍數-1	α 倍數-2	...	α 倍數 $-(\alpha-3)$	α 倍數 $-(\alpha-2)$	α 倍數 $-(\alpha-1)$
$((k-1) \bmod \alpha)$	$\alpha-1$	$\alpha-2$	$\alpha-3$	...	2	1	0

實例:

表七十五、當 $\alpha=\beta=c$ 實例(ex:殺 3 留 3，c=3)

n ▼	k ▶ 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3_0	2_1	1_2								
6	6_0	5_1	4_2	3_3	2_4	1_5					
9	6_3	5_4	4_5	9_0	8_1	7_2	3_6	2_7	1_8		
12	12_0	11_1	10_2	6_6	5_7	4_8	9_3	8_4	7_5	3_9	...
15	6_9	5_{10}	4_{11}	12_3	11_4	10_5	15_0	14_1	13_2	9_6	...
18	12_6	11_7	10_8	18_0	17_1	16_2	6_{12}	5_{13}	4_{14}	15_3	...
21	18_3	17_4	16_5	6_{15}	5_{16}	4_{17}	12_9	11_{10}	10_{11}	21_0	...
24	24_0	23_1	22_2	12_{12}	11_{13}	10_{14}	18_6	17_7	16_8	6_{18}	...
27	6_{21}	5_{22}	4_{23}	18_9	17_{10}	16_{11}	24_3	23_4	22_5	12_{15}	...
30	12_{18}	11_{19}	10_{20}	24_6	23_7	22_8	30_0	29_1	28_2	18_{12}	...
33	18_{15}	17_{16}	16_{17}	30_3	29_4	28_5	6_{27}	5_{28}	4_{29}	24_9	...
36	24_{12}	23_{13}	22_{14}	36_0	35_1	34_2	12_{24}	11_{25}	10_{26}	30_6	...
39	30_9	29_{10}	28_{11}	6_{33}	5_{34}	4_{35}	18_{21}	17_{22}	16_{23}	36_3	...

六、約瑟夫問題公式證明

6.1 任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，直到留下最後 1 個數時，遊戲才終止。倒數第 k 個留下的自然數為 $(\alpha+\beta)\dfrac{n-d(x,\alpha,\beta,c,k)}{\alpha}-b(x,\alpha,\beta,c,k)$。

【証明】

由性質 1.1 可得知當 k 固定時，若 n 不為循環的尾數， $n+\alpha$ 留下數字與 n 留下數字相差 $\alpha+\beta$。因此 n 為當循環中第 $\dfrac{n-d(x,\alpha,\beta,c,k)}{\alpha}$ 個數，又留下數字之間差 $\alpha+\beta$。所以留下數字比循環開頭多 $(\alpha+\beta)\dfrac{n-d(x,\alpha,\beta,c,k)}{\alpha}-(\alpha+\beta)$。

又從性質 2.3 得知若 n 為第 $x+1$ 循環開頭時，留下數字為 $\alpha+\beta-b(x,\alpha,\beta,c,k)$。

所以當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，直到留下最後 1 個數時，遊戲才終止。倒數第 k 個留下的自然數為

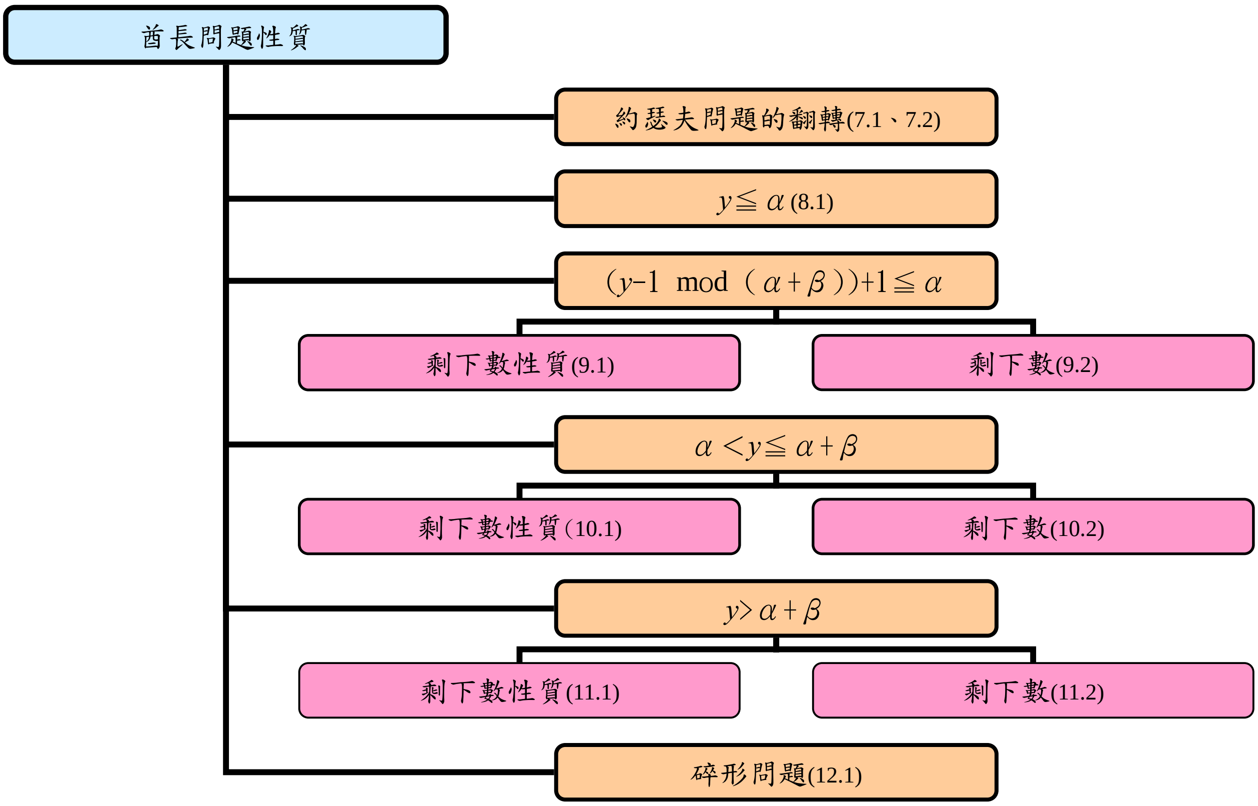
$$(\alpha+\beta)\frac{n-d(x,\alpha,\beta,c,k)}{\alpha}-(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta-b(x,\alpha,\beta,c,k))$$

$$=(\alpha+\beta)\frac{n-d(x,\alpha,\beta,c,k)}{\alpha}-b(x,\alpha,\beta,c,k)。$$

$\oplus$

第二部分、酋長問題性質

酋長問題研究中分成 6 種情形，共發現 10 個性質，架構圖如下圖六



圖六、酋長問題性質架構圖

七、約瑟夫問題的翻轉

7.1 酋長問題為約瑟夫問題的 k 與留下數字互換所產生的。

7.2 酋長問題為任意 n 個位置排成環狀，依序將數字 n、n-1、n-2 ...1，填入 α(個數)留 β (個位置)，直到全部填完所形成的數列。

【証明】

「約瑟夫問題」中留下數字所對應的 k 位置，表示為倒數第 k 個留下的自然數，也是第 n+1-k 個被殺的自然數；相反來說若酋長為此留下數字時，它不能被殺，所以剩下數目為 k。

所以當有 n 個自然數，從酋長 y=1、2、3、...n 的剩下數目依序排列，數列如

$\overbrace{n\ldots n-\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-\alpha\ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-2\alpha\ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-3\alpha\ldots n-4\alpha+1}^{\alpha}\ldots$ 排列。

以上遵照任意 n 個位置排成環狀，依序將數字 n、n-1、n-2 ...1，填入 α(個位置)留 β(個位置)，直到全部填完所形成的數列。

⊕

實例:

表七十六、約瑟夫問題的翻轉實例(ex:殺 3 留 2，c=3，n=21)

輪次	酋長(y)▶																				
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
第 1 輪	21	20	19	①	②	18	17	16	①	②	15	14	13	①	②	12	11	10	①	②	9
第 2 輪				8	7				①	②				6	5				4	①	
第 3 輪									①	3										2	
第 4 輪									1												

粉紅色表示填入 α 個數；橘色表示留 β 個位置

八、酋長$y \leqq \alpha$

8.1 當酋長$y \leqq \alpha$，剩下數目$=n-(y-1)$。

【証明】

「酋長問題」遊戲定義：任意n個自然數排成環狀，從頭開始，殺α(個數)留β(個數)，指定自然數y為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止，求剩下的自然數有幾個？

酋長y為1號時，1原本是第1個被殺，但是現在它不能被殺，且遊戲停止，所以遊戲停止時還剩下n個自然數。

酋長y為2號時，2原本是第2個被殺，但是現在它不能被殺，且遊戲停止，所以遊戲停止時還剩下n-(2-1)個自然數。

酋長y為3號時，3原本是第3個被殺，但是現在它不能被殺，且遊戲停止，所以遊戲停止時還剩下n-(3-1)個自然數。

一直到酋長y為α號時，α原本是第α個被殺，但是現在它不能被殺，且遊戲停止，所以遊戲停止時還剩下$n-(\alpha-1)$個自然數。

所以可推論：當酋長$y \leqq \alpha$時，剩下數目$=n-(y-1)$

⊕

實例:

表七十七、酋長$y \leqq \alpha$實例(ex:殺3留2，c=3)

n	酋長(y)▶																				
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	3	2	1																		
6	6	5	4	2	1	3															
9	9	8	7	1	3	6	5	4	2												
12	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3	6	5									
15	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3						
18	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7			
21	21	20	19	8	7	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9

九、((y-1) mod （$\alpha+\beta$）)+1≦α

9.1 當((y-1) mod ($\alpha+\beta$))+1≦α，n+α剩下數目與 n 剩下數目差α。

9.2 當((y-1) mod ($\alpha+\beta$))+1≦α，剩下數目$=n-(y-\beta[\dfrac{y}{\alpha+\beta}]-1)$。

【証明】

由性質 7.2 得知：當有 n 個自然數，從酋長 y=1、2、3、…n 的剩下數目依序排列，數列如 $\overbrace{n \ldots n-\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-\alpha \ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-2\alpha \ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-3\alpha \ldots n-4\alpha+1}^{\alpha}\ldots$ 排列。

以上遵照任意 n 個位置排成環狀，依序將數字 n、n-1、n-2 …1，填入α(個位置)留β(個位置)，直到全部填完所形成的數列。並提出 n-α 與 n 兩數做為比較，如下圖七、八。

n-α剩下數目$=\boxed{\overbrace{n-\alpha \ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \boxed{\overbrace{n-2\alpha \ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \boxed{\overbrace{n-3\alpha \ldots n-4\alpha+1}^{\alpha}}\ldots$

圖七、((y-1) mod （$\alpha+\beta$）)+1≦α，n-α剩下數目位置示意圖

n 剩下數目$=\boxed{\overbrace{n \ldots n-\alpha+1}^{\alpha}}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \boxed{\overbrace{n-\alpha \ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \boxed{\overbrace{n-2\alpha \ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}}$

圖八、((y-1) mod （$\alpha+\beta$）)+1≦α，n 剩下數目位置示意圖

所以推論當((y-1) mod （$\alpha+\beta$）)+1≦α（藍框部分），n−α剩下數目與 n 剩下數目差α。

⊕

實例:

表七十八、酋長((y-1) mod （$\alpha+\beta$）)+1≦α實例(ex:殺 3 留 2，c=3)

n	酋長(y)▶																				
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	3	2	1																		
6	6	5	4	2	1	3	2	1													
9	9	8	7	1	3	6	5	4	2		3	2	1								
12	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3	6	5	4			3	2	1			
15	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3	6	5	4			
18	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7			
21	21	20	19	8	7	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9

註:虛線部分為作者自己所虛構的，以利觀察。

十、$\alpha<y\leqq\alpha+\beta$

10.1 當有 n 個數，酋長 y 為前 β 項時，剩下數目
=有 $n-\alpha$ 個數時，酋長 y 為 $n-\alpha$ 個數中後 β 項。

10.2 當 $\alpha<y\leqq\alpha+\beta$，剩下數目 $=n-\alpha$ 時，酋長為 $y+n-2\alpha-\beta$ 的剩下數目。

【証明】

由性質 7.2 得知：當有 n 個自然數，從酋長 $y=1$、2、3、…n 的剩下數目依序排列，數列如 $\overbrace{n\ldots n-\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-\alpha\ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-2\alpha\ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-3\alpha\ldots n-4\alpha+1}^{\alpha}\ldots$ 排列。

以上遵照任意 n 個位置排成環狀，依序將數字 n、n-1、n-2 …1，填入 α(個位置)留 β(個位置)，直到全部填完所形成的數列。並提出 $n-\alpha$ 與 n 兩數做為比較，如下圖九、十。

$n-\alpha$ 剩下數目 $=\overbrace{\overbrace{n-\alpha\ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-2\alpha\ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-3\alpha\ldots n-4\alpha+1}^{\alpha}}^{n-\alpha-\beta}\ldots\ \overbrace{}^{\beta}\quad\overbrace{}^{\alpha}$

圖九、$\alpha<y\leqq\alpha+\beta$，$n-\alpha$ 剩下數目位置示意圖

n 剩下數目 $=\overbrace{n\ldots n-\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{\overbrace{n-\alpha\ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-2\alpha\ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-3\alpha\ldots n-4\alpha+1}^{\alpha}\ldots}^{n-\alpha-\beta}$

圖十、$\alpha<y\leqq\alpha+\beta$，$n$ 剩下數目位置示意圖

所以推論當 $\alpha<y\leqq\alpha+\beta$（圖十藍框部分）， n 個數酋長為 y 號時的剩下數目
$=n-\alpha$ 個數時，酋長為 $y+(n-\alpha-\beta)-\alpha=y+n-2\alpha-\beta$ 時的剩下數目。

⊕

實例:

表七十九、$\alpha<y\leqq\alpha+\beta$ 實例(ex:殺 3 留 2，c=3)

n	酋長(y)▶																				
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	3	2	1																		
6	6	5	4	2	1	3															
9	9	8	7	1	3	6	5	4	2												
12	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3	6	5									
15	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3						
18	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7			
21	21	20	19	8	7	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9

十一、酋長 $y>\alpha+\beta$

11.1 當有 n 個數，酋長 y 為 n 個數中後 $n-\alpha-\beta$ 項時，剩下數目

=有 $n-\alpha$ 個數時，酋長 y 為 $n-\alpha$ 個數中前 $n-\alpha-\beta$ 項。

11.2 當 $y>\alpha+\beta$，剩下數目 $=n-\alpha$ 時，酋長為 $y-\alpha-\beta$ 的剩下數目。

【証明】

由性質 7.2 得知：當有 n 個自然數，從酋長 y=1、2、3、...n 的剩下數目依序排列，數列如 $\overbrace{n\ldots n-\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-\alpha\ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-2\alpha\ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-3\alpha\ldots n-4\alpha+1}^{\alpha}\ldots$ 排列。

以上遵照任意 n 個位置排成環狀，依序將數字 n、n-1、n-2 ...1，填入 α(個位置)留 β(個位置)，直到全部填完所形成的數列。並提出 $n-\alpha$ 與 n 兩數做為比較，如下圖十一、十二。

$n-\alpha$ 剩下數目 = $\overbrace{\boxed{\overbrace{n-\alpha\ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-2\alpha\ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-3\alpha\ldots n-4\alpha+1\ldots}^{\alpha}}}^{n-\alpha-\beta}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}$

圖十一、$y>\alpha+\beta$，$n-\alpha$ 剩下數目位置示意圖

n 剩下數目 = $\overbrace{n\ldots n-\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{\boxed{\overbrace{n-\alpha\ldots n-2\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-2\alpha\ldots n-3\alpha+1}^{\alpha}\ \overbrace{\ldots}^{\beta}\ \overbrace{n-3\alpha\ldots n-4\alpha+1\ldots}^{\alpha}}}^{n-\alpha-\beta}$

圖十二、$y>\alpha+\beta$，n 剩下數目位置示意圖

所以推論當 $y>\alpha+\beta$（圖十二藍框部分），n 個數酋長為 y 號時的剩下數目

$=n-\alpha$ 個數時，酋長為 $y-\alpha-\beta$ 時的剩下數目。

⊕

實例:

表八十、酋長 $y>\alpha+\beta$ 實例(ex:殺 3 留 2，c=3)

n	酋長(y)▶																				
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	3	2	1																		
6	6	5	4	2	1	3															
9	9	8	7	1	3	6	5	4	2												
12	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3	6	5									
15	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3						
18	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7			
21	21	20	19	8	7	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9

十二、碎形問題

12.1 當 n 由小至大，將酋長 y 為 $\alpha+\beta$、$\alpha+(\beta-1)$、$\alpha+(\beta-2)$、...、$\alpha+1$ 時的剩下數目依序排列下來，把每一個第一次出現的數刪除，將發現剩下的數列與原來一樣，可以不斷地產生重複。

【証明】

由性質 10.1 得知，當有 n 個數，酋長 y 為前 β 項時，剩下數目

=有 $n-\alpha$ 個數時，酋長 y 為 $n-\alpha$ 個數中後 β 項。

又由性質 11.1 得知當有 n 個數，酋長 y 為 n 個數中後 $n-\alpha-\beta$ 項時，剩下數目

=有 $n-\alpha$ 個數時，酋長 y 為 $n-\alpha$ 個數中前 $n-\alpha-\beta$ 項。

所以 y 為 $\alpha+\beta$、$\alpha+(\beta-1)$、$\alpha+(\beta-2)$、...、$\alpha+1$ 時，剩下數目依序排列下來，它會具有自我相似性。

⊕

實例:

表八十一、碎形問題實例(ex:殺 3 留 2，c=3)

n	酋長(y)▶																				
▼	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
3	3	2	1																		
6	6	5	4	2	1	3															
9	9	8	7	1	3	6	5	4	2												
12	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3	6	5									
15	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7	1	3						
18	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9	8	7			
21	21	20	19	8	7	18	17	16	1	3	15	14	13	6	5	12	11	10	4	2	9

陸、結論

所謂約瑟夫問題，當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，直到剩下最後 1 個數時就不能再殺了，遊戲終止。

所謂酋長問題，當任意 n 個自然數排成環狀，從頭開始，殺 α(個數)留 β(個數)，指定自然數 y 為酋長，酋長不能被殺，殺到酋長時遊戲停止。

約瑟夫問題及酋長問題殺 α 留 β 公式如表八十二所示。

表八十二 α 留 β 公式

<table>
<tr><th>約瑟夫問題</th><th>酋長問題</th></tr>
<tr><td>殺 α 留 β 留下數字
$=(\alpha+\beta)\frac{n-d(x,\alpha,\beta,c,k)}{\alpha}-b(x,\alpha,\beta,c,k)$</td><td rowspan="2">殺 α 留 β 剩下數目
$=\begin{cases} n-(y-1),(y\le\alpha) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y+n-2\alpha-\beta,(\alpha<y\le\alpha+\beta) \\ (n-\alpha),\text{酋長}=y-\alpha-\beta,(y>\alpha+\beta) \end{cases}$</td></tr>
<tr><td>其中 : $d(x+1,\alpha,\beta,c,k)\ge n>d(x,\alpha,\beta,c,k)$</td></tr>
</table>

柒、參考文獻

一、中文部分

1.楊皓綜、翁郁婷（第 39 屆）。 **公主如何救王子**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 39 屆國小組數學科。

2.簡民惠（第 40 屆）。**天生贏家的奧秘—『傳遞問題』之研究與探討**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 40 屆國中組數學科。

3.林豐正、詹朱聰、林裕翔、簡子為（第 43 屆）。**九死一生**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 43 屆高中組數學科。

4.林千雅、陳珉儒、邱晨熙、梁育棻（第 44 屆）。**公主的抉擇**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 44 屆高中組數學科。

5.戴于珽（第 44 屆）。**我要活下去**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 44 屆高中組數學科。

6.段凱文、梁廷宇、羅子端、黃峧晟（第 44 屆）。**王位繼承人**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 44 屆高中組數學科。

7.林奕丞、洪嘉蔓、陳廷、徐東葦。**探索俄羅斯遊戲法則之奧妙**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 45 屆國小組數學科。

8.葉佩雯。**老師無法解決的難題**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 45 屆國小組數學科。

9.葉佩雯。**約瑟夫數列**。載於國立科學教育館，2006 年台灣國際科學展覽數學科。

10. DONALD E. KNUTH 編譯者:陳衍文 （民 80 年七月）。
具體數學 CONCRETE MATHEMATICS（9-20 頁）。格致圖書公司。

11.葉佩雯。**約瑟夫數列的最後一章**。載於國立科學教育館，全國中小學科學展覽第 46 屆國中組數學科。

12.許志農。**動手玩數學**（高一版）。遊戲 28，（61~62 頁）。師範大學數學系。

二、英文部分

1. DONALD E. KNUTH（民 86）。**The Art of Computer Programmibg VOLUME1**（162，184 頁）。Addison Wesley。
2. DONALD E. KNUTH（民 86）。**The Art of Computer Programmibg VOLUME3**（17-18 頁）。Addison Wesley。

評語

作者花了很多功夫去討論一些有趣的數學科展問題，但過於瑣碎並無一完整性的結論。