

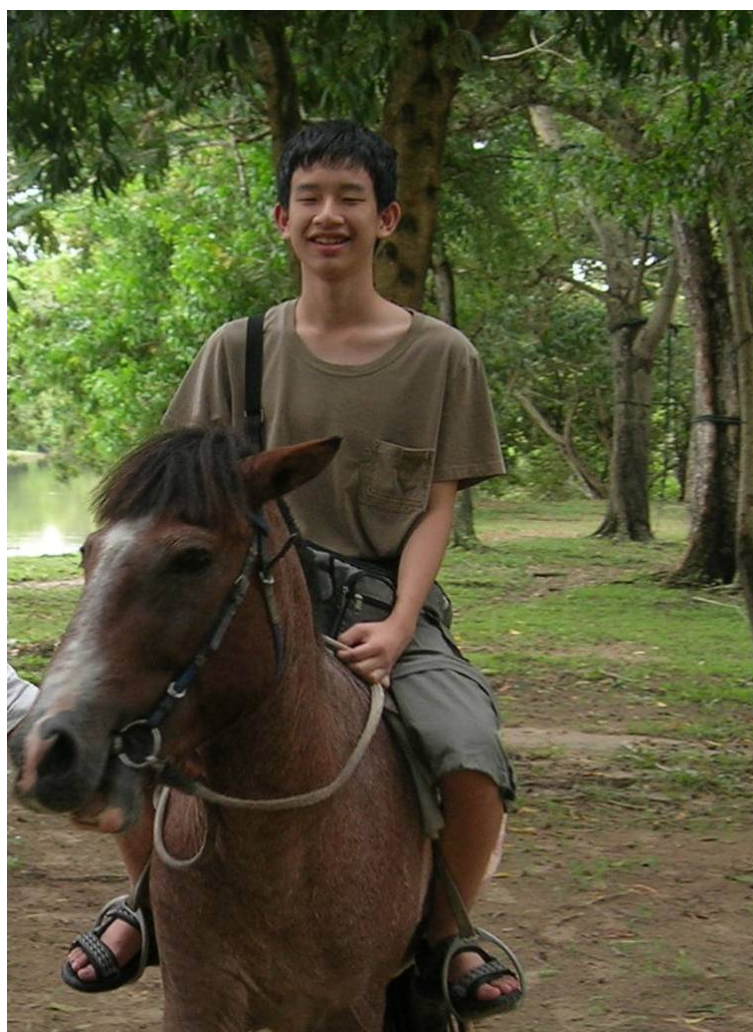
臺灣二〇〇七年國際科學展覽會

科 別：數學

作品名稱：魔術猜牌

學校 / 作者：國立新竹科學工業園區實驗高級中學 江盛浩

作者簡介



我是江盛浩，就讀國立新竹科學工業園區實驗高級中學數理資優班一年級。我喜歡數學，我覺得生活中無處不是數學。記憶所及，數學玩具、數學遊戲、數學故事，以及成長後的數學實驗、數學解題，幾乎填滿了我的整個成長歷程。

「魔術猜牌」這道迷人的數學題，早在我國中一年級時即開始接觸。這期間我不斷的嘗試各種數學原理與方法，雖經歷過重重的挫敗，但也幾度淺嘗到成功的喜悅。爲了能深入探究本數學題之奧秘，我一次次的跨越原已得出的結果，期能尋找出更好的解法，歷經兩、三年不斷的努力，終於稍露曙光得出今日之研究。雖然，27 張或大於 27 張的結論是「保證可以猜中」或「可證明一定猜不中」，目前仍無定論，但卻是我日後繼續研究及探討的方向。

魔術猜牌

目次

◇ 作者簡介	2
◇ 中英文摘要	4
壹、 研究動機	4
貳、 研究目的	5
參、 研究器材	5
肆、 研究過程或方法	5
伍、 研究結論	22
陸、 應用及推廣	23
柒、 參考資料	23

魔術猜牌

中文摘要

本研究是藉由數學手法探討；如何由一疊 36 張四種花色的撲克牌中，尋找出保證可猜中最多張花色的方法。研究過程是以在適當的猜牌時機，以鴿籠原理、邏輯推理、二進位、分析與歸納……等數學原理與方法，搭配巧妙的策略運用而達到目的。猜牌方法：先約定好猜牌規則，助手將 36 張牌背圖樣相同但非對稱的撲克牌，以旋轉牌背的方向傳達訊息。在本研究中得出利用數學原理與方法可「經由巧妙的猜牌方法保證可以猜中 26 張花色」，並提供後續研究者利用本研究之結果繼續深入探討與研究。

Magic Guessing

英文摘要(Abstract)

The study is mathematically based with reasonable explanations behind it. We are to correctly guess as many cards as possible from a deck of 36 cards, with random numbers and four different suits. We will apply mathematical methods, such as pigeonhole principle, logic inference, binary system, and analytical reduction, upon right timing. Using careful arrangement of the principles and reasoning, we can reach our ultimate goal. To state guessing: Conference between the guesser and the assistant about the guessing rules, the assistant will have 36 cards with the same exact pattern on the back but not symmetrical. The pattern of the cards will be different when rotated 180° . The only communication between the two is by rotating cards. In the process we will obtain mathematical theory and methods assuring 26 cards correctly guessed, and the study is for further and deeper discussion.

研究報告

壹、研究動機

2004 年 5 月網路上數學討論區裡，熱烈探討環球城市數學競賽高中組高級卷的題目：「小田宣稱他有魔法，可以從撲克牌的背面透視它的花色，於是大家把包括有黑桃、紅心、方塊及梅花各 9 張的一疊 36 張牌洗好後，交由小方把這疊牌的牌面向下放在小田面前，要他說出這疊牌最上面一張牌的花色。當小田說出答案後即把這張牌翻開來驗證他的答

案是否正確，並將這張牌放在一旁不再加入這疊牌中；接著繼續猜測下一張牌，重複以上程序。他試圖使猜測的正確次數愈多愈好。這副牌背面的圖樣完全相同但並非對稱的(即可以分辨出圖案朝前或朝後)。小方雖然知道這疊牌的排列順序，但他不能更動，也不能偷偷告訴小田。但是他可以依照事先與小田約定好的方式擺置撲克牌背面圖案的朝向來暗中協助小田。事實上，小田並無魔法，他只是利用數學方法來作分析判斷。請問在小方的協助下，小田有沒有辦法保證正確地預測到 (a)不少於 19 張牌？ (b)不少於 20 張牌？」。

當我在網路發現這個問題時，雖已有兩位網友分別解出 22 張及 24 張牌，在好奇心驅使下，我開始參予討論。在和他人討論之後覺得目前的解法還有改進的空間，因此我就不斷地嘗試並改進目前的解法。經過一年多的探索與研究，令我驚喜且興奮的事發生了，我於 2005 年 7 月中旬找到 25 張牌的猜牌法，並於 2006 年 6 月底成功地找到 26 張牌的猜牌方法。

貳、研究目的

利用數學原理與方法，尋找出保證可猜中最多張花色的猜牌方法。

參、研究器材

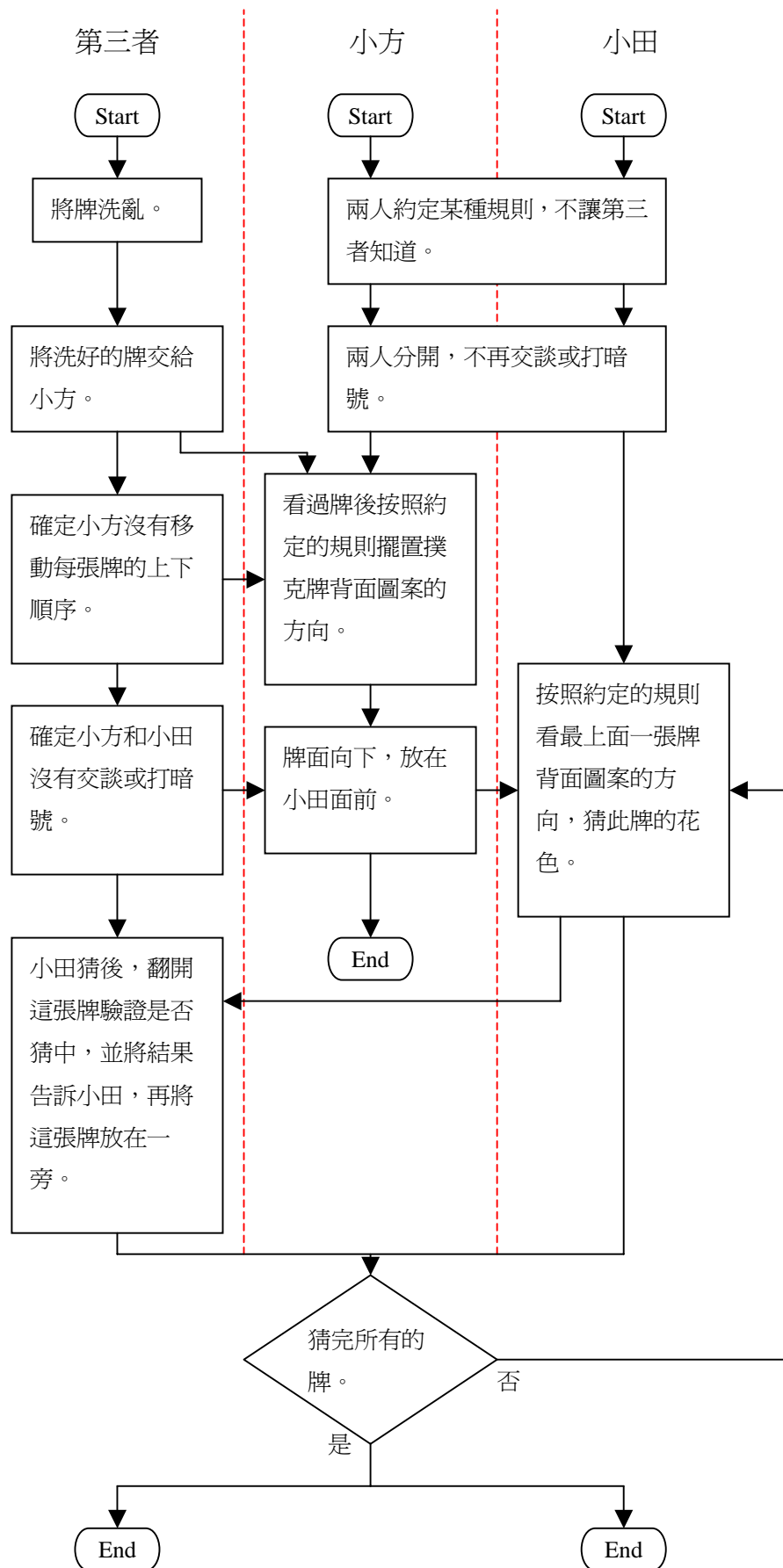
紙、筆、電腦。

肆、研究過程或方法

一、遊戲規則：

- (一)黑桃、紅心、方塊及梅花各 9 張共 36 張牌，背面的圖樣完全相同但非對稱。
- (二)遊戲之前小方和小田可以約定某種規則，但將洗好的牌交給小方後兩人不能再交談。
- (三)洗好牌後上下的順序不再更動，但小方可以調整撲克牌背面圖案的方向。
- (四)小田只能看到最上面一張牌，下面的牌在猜此牌之前都看不到。

二、猜牌的流程圖



三、我歸納的猜牌方法：

- (一)牌背有朝上、朝下兩種不同的情況，設朝上為 1、朝下為 0，等於一個訊息。
- (二)兩張牌的牌背有(1, 1)、(1, 0)、(0, 1)、(0, 0)四種不同的情況，可猜出某一張牌是黑桃、紅心、方塊或梅花。
- (三)第一張牌一定猜不到，因為猜中一張牌至少要有兩個訊息。
- (四)整副牌的最後兩張，可只用第 35 張的牌背猜中，只要將四種花色排序：黑桃>紅心>方塊>梅花，第 35 張的花色可能大於、等於或小於第 36 張的花色。
 - (a)大於時：設第 35 張的牌背為 1。
 - (b)小於時：設第 35 張的牌背為 0。
 - (c)等於時：不用猜即可知道。
- (五)圖示講解（見表 1）

牌序 牌向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3					
牌背																																									
牌面																																									
猜對																																									

表 1

說明：

1. 從左到右分別代表第 01 張到第 36 張牌。
2. 在牌背和牌面的方格內，若已塗色表示已使用過。
3. 相關的牌背和牌面會上相同的顏色(例如用 01、02 兩張的牌背猜第 02 張的牌面，用同色表示)。
4. 區塊同色是指使用了相同的方法猜牌，如果兩組間靠的太緊密時，為了容易分辨，用類似的顏色(如第 01~10 張，一樣都用粉紅色表示；第 12~20 張，用水藍色或藍色表示)。
5. 在猜對的方格內，在同一個位置用一樣的顏色做記號。但如果不確定會猜中哪幾張，則以最前面幾張表示(如第 01~10 張，用粉紅色做記號；第 13~20 張，以最前面那張水藍色或藍色做記號)。該情況本文講解時以藍色表示。
6. 表 1 的內容為：用 01、02 兩張牌猜第 02 張牌並猜中，第 03~10 張都用相同方法；用 12、13 兩張牌猜 13、14 兩張牌並猜中其中一張，第 14~19 張都用相同方法。
7. 使用圖示講解可以很清楚的知道每張牌的用途和作牌、猜牌的過程，例如

小方可以根據第 02 張牌的花色擺置 01、02 兩張牌的方向；小田則可以根據 01、02 兩張牌的方向猜出第 02 張牌的花色。

四、解讀網路討論區甲生使用鴿籠原理給出 23 張牌的猜法（甲生的猜法原猜出 22 張，但他的猜法實際上可猜出 23 張牌，在此以 23 張牌講解）：

(一)圖示講解（見表 2）

牌序 牌向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	
牌背	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	3	3	3	3	
牌面																																						
猜對																																						

表 2

說明：

1. 根據鴿籠原理，在 $4n+1$ 張牌中，花色最多的牌至少有 $n+1$ 張。
2. 用兩張牌背代表最多的花色，猜測時就可以從這四種花色中猜中。

(二)甲生猜中 23 張牌的方法（見表 3）

牌序 牌向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	
牌背	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	3	3	3	3	
牌面																																						
猜對																																						

表 3

說明：

1. 02、03、05、07、09、……、31、33 這 17 張牌的花色根據鴿籠原理最多的花色至少有 5 張，用 01、02 兩張牌代表此花色，至少可以猜中 5 張牌(表 3 中的綠色)。
2. 用 03、04 兩張牌的牌背可以猜中第 04 張牌，以此類推，04、06、08、……、34 張牌都可猜中，共 16 張牌(表 3 中的粉紅色)。
3. 35、36 兩張牌可猜中 2 張(表 3 中的紫色)。
4. 一共是 $5+16+2=23$ 張。

五、解讀討論區裡乙生猜中 24 張牌的方法：

(一)圖示講解（見表 4）

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6		
牌背																																						
牌面																																						
猜對																																						

表 4

說明：

用 n 、 $n+1$ 兩張牌的牌背猜 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌，兩張都猜一樣的花色，會有兩種情況：

1. 當 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌的花色恰好一樣時，用 n 、 $n+1$ 兩張牌的牌背代表此花色，可以猜對 2 張。
2. 當 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌的花色不一樣時，雖然只能猜對 1 張，但小方可以控制猜對前面那張或猜對後面那張兩種，設猜對前面那張為 1、猜對後面那張為 0，等於是多了一個額外的訊息。

這種猜法在後面會常常使用，本文中以【※】符號表示。

(二)乙生給出 24 張牌的猜法（見表 5）

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6		
牌背																																						
牌面																																						
猜對																																						

表 5

說明：

1. 以【※】猜法連續使用 10 次，用第 01~20 張猜第 02~21 張，如果這 10 組 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌的花色不一樣，則會猜對 10 張，並產生 10 個額外的訊息(表 5 中的藍色)。
2. 10 個額外的訊息兩個兩個一組，分別去猜第 25、27、29、31、33 張牌，

可猜對 5 張。

3. 第 22、24、26、28、30、32、34 張牌都可以猜中(表 5 中的粉紅色)。
4. 35、36 兩張牌可猜中 2 張(表 5 中的紫色)。
5. 一共是 $10+5+7+2=24$ 張牌。
6. 如果[※]猜法中，這 10 組的其中一組 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌的花色恰好一樣，雖然額外的訊息減少，不夠猜中後面 5 張，但相對的[※]猜法會猜中超過 10 張，因此總猜牌數不會減少。

(三)我的發現：乙生的猜法有些牌浪費掉了。

1. 第 23 張牌沒有猜。
2. 如果[※]猜法中，其中一組猜對了 2 張，後面 5 張不會全部猜中。
3. 解讀乙生哪些牌浪費掉了（見表 6）。

牌序 牌向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3			
牌背																																							
牌面																																							
猜對																																							

表 6

說明：

猜中一張牌需要兩組訊息，如果猜對了兩張牌，等於製造了兩個訊息(左邊)；但如果只猜對一張，就多了一個額外的訊息(中間)。

乙生是用兩組製造的額外訊息來猜一張牌，如果其中一組猜中了兩張牌，另外一組雖然有一個額外的訊息卻無處使用。除非又有一組猜中了兩張牌，和另外一組的額外訊息一起猜第 23 張牌，才有能猜中 25 張牌(右邊)。

我改良了乙生的方法：「只要有一組猜中兩張牌，就可以猜中 25 張牌。」

六、改良乙生的猜牌法猜中 24 張牌（見表 7）

牌序 牌向	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
牌背																																				
牌面																																				
猜對																																				

表 7

說明：

1. [※]猜法連續使用 11 次，用第 01~22 張猜第 02~23 張，會猜對 11 張，並產生 11 個額外的訊息(表 7 中的藍色)。
2. 11 個額外的訊息和第 24~34 張牌猜第 24~34 張牌，可猜對 11 張(表 7 中的藍色)。
3. 35、36 兩張牌可猜中 2 張(表 7 中的紫色)。
4. 一共是 $11+11+2=24$ 張。

猜牌方法：

- (一)經過改良的方法雖只猜中 24 張牌，但是這 11 組中只要有 1 組是 2 張牌都猜中，對應到的牌背和牌面都會空下來，這時只要再和第 23 張牌的牌背一起猜，又會猜中空下來的牌面而猜到第 25 張牌。
- (二)本法的缺點：當每組同時由兩張不一樣的花色組成時，也有可能因此而猜不到第 25 張牌。
- (三)因此；如果可以找到控制[※]猜法猜中 2 張牌，就一定可以猜中 25 張牌。

經過反覆思索，我找到了「保證猜中 25 張牌」的方法。

七、保證猜中 25 張牌的方法：

- (一)[※]猜法不一定要兩張都猜一樣，也可以按照某種規則猜第二張的花色，我找到以下四個規則（見表 8）：

第一類	(黑桃，黑桃)	(紅心，紅心)	(方塊，方塊)	(梅花，梅花)
第二類	(黑桃，紅心)	(紅心，方塊)	(方塊，梅花)	(梅花，黑桃)
第三類	(黑桃，方塊)	(紅心，梅花)	(方塊，黑桃)	(梅花，紅心)
第四類	(黑桃，梅花)	(紅心，黑桃)	(方塊，紅心)	(梅花，方塊)

表 8

先選擇一類，先用 n 、 $n+1$ 兩張牌的牌背猜第 $n+1$ 張牌，再根據表 8 猜第 $n+2$ 張牌。一張牌有四種花色，**[※]** 猜法中， $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌共會有 16 種情況，且都在這四類中，所以必有其中一類可以猜中 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌，如果 **[※]** 猜法使用 $4n+1$ 次，根據鴿籠原理至少有 $n+1$ 組在同一類，只要用兩張牌背代表使用此類，就會有 $n+1$ 組猜中 2 張牌。

(二)使用此法找出 25 張牌的解法（見表 9）

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6
牌背	綠	綠	綠	綠	綠	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉
牌面	綠	綠	綠	綠	綠	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉
猜對	綠	綠	綠	綠	綠	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉	粉

表 9

說明：

1. 用 01、02 兩張牌來猜第 02、03、04、05、06 張牌，根據鴿籠原理至少可以猜中 2 張牌(表 9 中的綠色)。
2. 用 05、06 兩張牌的牌背猜第 07 張，可猜中 1 張牌(表 9 中的粉紅色)。
3. **[※]** 猜法連續使用 9 次，用第 07~24 張猜第 08~25 張，並根據表 8 用 03、04 兩張牌代表最好的一類，根據鴿籠原理這 9 組中至少有 3 組可以猜中 2 張牌，剩下的 6 組只能猜對 1 張牌，共猜中 12 張。6 組產生 6 個額外的訊息(表 9 中的褐色+藍色)。
4. 6 個額外的訊息和 29~34 的牌背猜中 29~34 的牌面，會猜中 6 張(表 9 中的藍色)。
5. 25、26 兩張牌的牌背猜中第 26 張牌，27、28 兩張牌的牌背猜中第 28 張

牌，可猜中 2 張牌(表 9 中的粉紅色)。

6. 35、36 兩張牌可猜中 2 張 (表 9 中的紫色)。

7. 所以一共是 $2+1+12+6+2+2=25$ 張。

(三)經過反覆驗證覺得上述方法還是有些牌被浪費了：

03、04 兩張牌已經被用掉造成 03、04 兩張牌沒猜測，而必須用鴿籠原理猜牌 (用少張的牌背猜多張的牌)，這種方法本身就無法猜中很多張牌。

我認為「方法再改進會有更好的結果」。

八、改進前述猜中 25 張牌的方法：

(一)再將鴿籠原理融入【※】猜法中，用鴿籠原理同時猜單張牌(黑桃、紅心、方塊、梅花)和【※】的四種猜法 (見表 10)。

	一張牌組成	兩張牌組成			
第一類	(黑桃)	(黑桃，黑桃)	(紅心，紅心)	(方塊，方塊)	(梅花，梅花)
第二類	(紅心)	(黑桃，紅心)	(紅心，方塊)	(方塊，梅花)	(梅花，黑桃)
第三類	(方塊)	(黑桃，方塊)	(紅心，梅花)	(方塊，黑桃)	(梅花，紅心)
第四類	(梅花)	(黑桃，梅花)	(紅心，黑桃)	(方塊，紅心)	(梅花，方塊)

表 10

我以這個想法改良前述做法，雖然也只找出了 25 張牌，但增加了猜牌的空間可向 26 張牌的猜法邁進。

(二)改進後的 25 張牌的解法 (見表 11)

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3		
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

表 11

說明：

[※]猜法連續使用 7 次，用第 03~16 張猜第 04~17 張，並用 01、02 兩張牌代表這 9 組(包括 02、03 兩張牌)中最好的一類。根據鴿籠原理這 9 組中至少有 3 組是同一類(中的**褐色**+**藍色**)。

因這 9 組有些是一張、有些是兩張，所以從這 3 組的位置又有 3 種不同的狀況：

I. 02、03 兩張牌都是屬於最多的一類(表 11 的上面三列)

(1)第 02、03 張牌都會猜對，可猜中兩張(表 11 中的**褐色**)。

(2)因為前兩張都猜對了，所以這 7 組中至少還有 1 組可以猜對 2 張牌，剩下的 6 組雖只能猜對 1 張牌，但產生的 6 個額外的訊息又可以和 29~34 的牌背猜中 29~34 的牌面，共 $2+6+6=14$ 張(表 11 中的**藍色**)。

(3)第 18~28 張牌這 11 張牌用**[※]**猜法補足，由上圖可知至少可猜中 7 張牌(表 11 中的**粉紅色**+**橘色**+**黃色**)。

(4) 35、36 兩張牌可猜中 2 張 (表 11 中的**紫色**)。

(5)所以一共是 $2+2+6+6+7+2=25$ 張。

II. 02、03 兩張牌這兩組其中一組屬於最多的一類(表 11 的中間三列)

(1)02、03 兩張牌有一張猜對，可猜中一張(表 11 中的**褐色**)。

(2)因前兩張有一張猜對了，所以這 7 組中至少還有 2 組可以猜對 2 張牌，剩下的 5 組只能猜對 1 張牌，但產生的 5 個額外的訊息又可以和 30~34 的牌背猜中 30~34 的牌面，共張(表 11 中的**藍色**)。

(3)第 18~29 張牌這 12 張牌用**[※]**猜法補足，由上圖可知至少可猜中 8 張牌(表 11 中的**粉紅色**+**橘色**+**黃色**)。

(4)35、36 兩張牌可猜中 2 張牌(表 11 中的**紫色**)。

(5)所以一共是 $1+14+8+2=25$ 張。

Ⅲ. 02、03 兩張牌這兩組沒有屬於最多的一類(表 11 中的下面三列)

(1)因前兩張都沒有猜對，所以這 7 組中至少還有 3 組可以猜對 2 張牌，剩下的 4 組只能猜對 1 張牌，但產生的 4 個額外的訊息又可以和 31~34 的牌背猜中 31~34 的牌面，共 14 張(表 11 中的藍色)。

(2)第 18~30 這 13 張牌用[※]猜法補足，由上圖可知至少可猜中 9 張牌(表 11 中的粉紅色+橘色+黃色)。

(3)35、36 兩張牌可猜中 2 張牌 (表 11 中的紫色)。

(4)所以一共是 $14+9+2=25$ 張。

(三)此方法的優缺點：

1.優點：(1)改進了前述有幾張牌未猜測的缺點。

(2)和前一個方法比起來，雖然都是 9 組，但這個方法多出了十幾張的空牌，可以用來創新。

2.缺點：(1)這 9 組是由兩種不同類型的猜牌法組成，從這 3 組的位置產生了 3 種不同的狀況；每種狀況產生的空牌數量不一，造成填補這些空牌時的困難。

(2)設空牌暫不猜測，僅這 3 種不同的狀況猜中的張數不一：

第 I 種：17 張

第 II 種：16 張

第 III 種：15 張

每一種不同的狀況猜中的張數不一樣多，可能造成第 1 種狀況已經猜中 26 張牌了，第 3 種還是 25 張牌。

3.爲了改進以上缺點，我使用下列方法猜牌（見表 12）

牌序 牌向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3				
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■		
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

表 12

說明：

將原本分成的 9 組改成 10 組，根據鴿籠原理最多的一類至少有 3 組，且當最多的一類恰好有 3 組時，會有另一類也恰好有 3 組。

分成 4 種不同的情況：

- I. 當 02、03 兩張牌都是屬於最多的一類，用 01、02 兩張牌代表此類(表 11 中的 1~3 列)。
- II. 當 02、03 兩張牌這兩組其中一組屬於最多的一類，用 01、02 兩張牌代表此類(表 11 中的 4~6 列)。
- III. 當 02、03 兩張牌這兩組沒有屬於最多的一類，雖然 02、03 兩張牌都沒猜中，但是卻可以選擇使用哪一類，等於是多了一個額外的訊息，因此可以和 1 張空牌的牌背猜中此張的牌面(表 11 中的 7~9 列的灰色)。
- IV. 當最多的一類超過 3 組，就不能用前述方法猜空牌。但空牌比前述方法還多，所以用兩張空牌的牌背猜一張空牌的牌面，和前述方法猜中的牌數、空牌還是一樣多(表 11 中 10~12 列的粉紅色)。

以上 4 種不同的方法到目前為止猜中的張數如下：

第 I 種：20

第 II 種：19

第 III 種：19

第 IV 種：19

和之前比較，猜中的牌數和沒用到的空牌數都比較穩定了。

4.運用空牌猜牌策略：

這 n 張牌中原本可以猜中 m 張，但爲了製造出更多的猜牌訊息，故意讓這 n 張牌只猜中 $m-1$ 張，可以控制少掉的牌是第幾張牌、少的原因、……等，雖然少了一張，但是相對的卻產生很多訊息，可以在其他地方再多猜出幾張牌。

以【※】猜法爲例：用 n 、 $n+1$ 兩張牌猜 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌，只猜對一張，並產生一個額外的訊息，這個訊息又可以和一張牌的牌背猜中此張牌，加起來可以猜對兩張(見表 13)。

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	
牌背																																					
牌面																																					
猜對																																					

表 13

讓一組【※】猜法經過策略運用只猜中一張有以下 4 個方法：

- (1)讓前面原應該猜到的牌換成猜測另一張牌，導致後面對應到的牌猜錯(見表 14)。

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	
牌背																																					
牌面																																					
猜對																																					

表 14

- (2)讓後面的牌背轉換方向，導致後面對應到的牌猜錯(見表 15)。

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	
牌背																																					
牌面																																					
猜對																																					

表 15

(3) 讓前面應該猜的牌換成猜另一張牌，再讓後面的牌背換方向，導致後面對應到的牌猜錯（見表 16）。

牌序 牌向	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	2 0	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8	2 9	3 0	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6						
牌背																																										
牌面																																										
猜對																																										

表 16

(4) 讓前面兩張牌都猜錯有兩種方法，要使用哪一種視後面對應到的牌的花色而定，讓猜牌的人可以用前面的錯誤(兩種方法)和後面對應到的牌的牌背猜中後面對應到的牌（見表 17）。

牌序 牌向	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	2 0	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8	2 9	3 0	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6						
牌背																																										
牌面																																										
猜對																																										

表 17

九、經策略運用後少猜中一張牌，以產生新訊息的方法猜中 26 張牌（見表 18）

牌序 牌向	0 1	0 2	0 3	0 4	0 5	0 6	0 7	0 8	0 9	1 0	1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6	1 7	1 8	1 9	2 0	2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6	2 7	2 8	2 9	3 0	3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6						
牌背																																										
牌面																																										
猜對																																										
牌背																																										
牌面																																										
猜對																																										
牌背																																										
牌面																																										
猜對																																										

表 18

說明：

[※]猜法連續使用 8 次，用第 03~18 張猜第 04~19 張，並用 01、02 兩張牌代表這 10 組(包括 02、03 兩張牌)中最好的一類。根據鴿籠原理最多的一類至少有 3 組，當最多的一類恰好有 3 組時，會有另一類也恰好有 3 組(表 18 中的**褐色+藍色**)。

分成四種情況：

- I. 當 02、03 兩張牌都是屬於最多的一類，用 01、02 兩張牌代表此類(表 18 中的 1~3 三行)。
- II. 當 02、03 兩張牌這兩組其中一組屬於最多的一類，用 01、02 兩張牌代表此類(表 18 中的 4~6 行)。
- III. 當 02、03 兩張牌這兩組沒有屬於最多的一類，雖然 02、03 兩張牌都沒猜中，但是卻可以選擇使用哪一類，等於是多了一個額外的訊息，因此可以和 1 張空牌的牌背猜中此張的牌面(表 18 中的 7~9 行+灰色)。
- IV. 當最多的一類超過 3 組，就不能用前述方法猜空牌。但可以用第 24、25 張牌的牌背猜第 25 張牌的牌面 (表 18 中的 10~12 行+**粉紅色**)。

經策略運用後少猜中一張牌會產生 4 種不同的情況，以下按順序講解：

- I. 02、03 兩張牌這兩組都是屬於最多的一類 (見表 19)。

牌 牌序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5
牌背	褐色	褐色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色
牌面	褐色	褐色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色
猜對	褐色	褐色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色	藍色

表 19

說明：

1. 02、03 兩張牌都會猜對，可猜中兩張(表 19 中的**褐色**)。
2. 這 8 組中至少還有 1 組可以猜對 2 張牌，剩下的 7 組雖只能猜對 1 張牌，但產生的 7 個額外的訊息又可以和 20~26 的牌背猜中 20~26 的牌面，共 $2+2+7+7=18$ 張牌(表 19 中的**藍色**)。
3. 第 27~30 張牌這 4 張牌用**[※]**猜法補足，由上圖可知至少可猜中 3 張牌(表 19 中的**粉紅色+黃色**)。

4. 在 7 組中選 4 組，讓這 4 組中的其中一組只猜對一張牌。因為 1 組只猜對 1 張牌有 4 種方法，4 組中的其中一組只猜對 1 張牌就有 16 種方法，等於 4 組額外的訊息，可以和第 30~34 張牌的牌背猜中第 30~34 張牌的牌面，共可猜中 4-1=3 張牌(表 19 中的打叉+紅色+青綠色)。
5. 35、36 兩張牌可猜中 2 張 (表 19 中的紫色)。
6. 所以一共是 $2+2+7+7+3+4-1+2=26$ 張。

II. 02、03 兩張牌這兩組其中一組屬於最多的一類 (見表 20)。

牌 牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
牌背	褐								藍								金黃	紅				綠						紫						
牌面	褐								藍								金黃	紅				綠						紫						
猜對	褐								藍								金黃	紅				綠						紫						

表 20

說明：

1. 02、03 兩張牌其中一張會猜對，可猜中一張(表 20 中的褐色)。
2. 這 8 組中至少有 2 組可以猜對 2 張牌，剩下的 6 組雖只能猜對 1 張牌，但產生的 6 個額外的訊息又可以和 20~25 的牌背猜中 20~25 的牌面，共 17 張(表 21 中的藍色)。
3. 用第 19、26 張牌的牌背可以猜中第 26 張牌，可猜中 1 張(表 21 中的金黃色)。
4. 在 6 組中選 4 組，讓這 4 組中的其中一組只猜對一張牌。因為 1 組只猜對 1 張牌有 4 種方法，4 組中的其中一組只猜對 1 張牌就有 16 種方法，等於 4 組額外的訊息，可以和第 27~30 張牌的牌背猜中第 27~30 張牌的牌面，共可猜中 4-1=3 張牌(表 21 中的打叉+紅色+金黃色)。
5. 第 26~30 張牌這 5 張牌只猜中四張牌有 $5 \times 3=15$ 種方法，加上 5 張都猜對共有 $1+15=16$ 種方法，等於 4 組額外的訊息，可以和第 31~34 張牌的牌背猜中 31~34 張牌的牌面，共可猜中 4-1=3 張牌(表 21 中的青綠色)。
6. 35、36 兩張牌可猜中 2 張 (表 21 中的紫色)。
7. 所以一共是 $1+17+4-1+4-1+2=26$ 張。

III. 當 02、03 兩張牌這兩組不屬於最多的一類 (見表 21)。

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

表 21

說明：

1. 方法和前面一樣。
2. 所以一共是 $16+1+1+4-1+4-1+2=26$ 張。

IV. 當最多的一類超過 3 組（見表 22）。

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6		
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

表 22

說明：

1. 方法和前面一樣。
2. 所以一共是 $16+1+4-1+4-1+2=26$ 張。

以上 4 種狀況都可以猜對 26 張牌。

V. 另有一種例外情況：這 8 組中剩下不到 4 組可以猜對 1 張，無法使用前述猜法（見表 23）。

牌 序 向	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	5	6		
牌背	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	
牌面	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■
猜對	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■	■

表 23

說明：

1. 雖然不能使用少猜中一張產生訊息的方法猜牌，但是可以用[※]猜法補足，由上圖可知至少可猜中 8 張牌(表 24 中的粉紅色+橘色+黃色)。
2. 所以在此情況之下仍然可猜中 $16+8+2=26$ 張。

伍、研究結論

- 一、 第一張牌一定猜不到，因為猜中一張牌至少要有兩個訊息。
- 二、 整副牌的最後兩張，可只用第 35 張的牌背猜中，只要將四種花色排序：黑桃紅心>方塊>梅花，第 35 張的花色可能大於、等於或小於第 36 張的花色。
 - (a)大於時：設第 35 張的牌背為 1。
 - (b)小於時：第 35 張的牌背為 0。
 - (c)等於時，不用猜即可知道。
- 三、 根據鴿籠原理，在 $4n+1$ 組中，花色最多的牌至少有 $n+1$ 組；用兩張牌背代表最多的那一組，猜測時就可以猜中最多組。
- 四、 用 n 、 $n+1$ 兩張牌的牌背猜 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌，都猜一樣的花色，當 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌兩張花色恰好一樣時，用 n 、 $n+1$ 兩張牌的牌背代表此花色，可以猜對 2 張；當 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌兩張花色不一樣時，雖然只能猜對 1 張，但可分為猜對前面那張或猜對後面那張兩種，設猜對前面那張為 1、猜對後面那張為 0，等於是多了一個額外的訊息。
- 五、 用 n 、 $n+1$ 兩張牌的牌背猜 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌，如果事先知道 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌是表 8 中的哪一類，猜牌時就可以藉由表 8 猜中兩張牌，如果有 $4n+1$ 組，用兩張牌背代表最好的一類，猜測時就至少會有 $n+1$ 組猜中兩張。
- 六、 根據鴿籠原理，在組中，最多的至少有 $n+1$ 張；且當最多的一類恰好有組時，會有另一類也恰好有 $n+1$ 組，等於是多了一個額外的訊息；用兩張牌背代表最多的那一組，猜測時就可以猜中最多組。
- 七、 使用鴿籠原理， $4n+2$ 組比 $4n+1$ 組好，但 $4n+2$ 組的限制較多，也有許多不同的狀況。
- 八、 用 n 、 $n+1$ 兩張牌猜 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌，只猜對一張，並產生一個額外的訊息，這個訊息又可以和一張牌的牌背猜中此張牌共兩張，如果運用策略只猜對一張，有 4 種方法。
- 九、 鴿籠原理可以用較少的牌猜較多的牌，但猜中的牌數很少。
- 十、 用 n 、 $n+1$ 兩張牌猜 $n+1$ 、 $n+2$ 兩張牌，可以增加訊息，如果使用表 8，又可

以多幾張空牌，但耗牌量多。

十一、使用故意猜錯一張的方法猜牌，雖然猜中率很高，但前面必須要有大量其他的猜牌法起頭，所以猜中的張數不會大量增加。

十二、此猜牌魔術，小田保證可以猜中 26 張花色。

陸、應用及推廣

雖然本研究已保證可猜中 26 張，至於 27 張或大於 27 張的結論是「保證可以猜中」或「可證明一定猜不中」，目前仍無定論，但卻是我日後繼續研究及探討的方向。

柒、參考資料

一、九章數學教育基金會討論區網址：

http://www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?topic_id=494&forum=6

二、甲生猜法：九章數學教育基金會討論區 2004-05-13 08:45

http://www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?mode=viewtopic&topic_id=494&forum=6&start=10&viewmode=flat&order=0

三、乙生猜法：九章數學教育基金會討論區 2004-05-27 09:55

http://www.chiuchang.org.tw/modules/newbb/viewtopic.php?mode=viewtopic&topic_id=494&forum=6&start=20&viewmode=flat&order=0

評語

思考嚴密清楚，題目活潑有趣，建議結合電腦程式與密碼學加強理論的應用價值。