

臺灣二〇〇六年國際科學展覽會

科 別：地球與太空科學

作 品 名 稱：星系團照妖鏡

得 獎 獎 項：第一名
美國正選代表:美國第 57 屆國際科技展覽會

學 校 / 作 者：臺北市立第一女子高級中學 陳欣榆



從小學當上天文小尖兵之後，我就開始對天文產生濃厚的興趣，不只是看星星，我想更進一步去研究他。高中加入地球科學研究社，又藉由數理資優班專題研究的機會和天文物理所的教授學習做研究，讓我對天文、物理都有了不同的認識。對我而言，做這個研究是教授、學長與老師的耐心指導、家裡的支持、我眾多的時間精力和幾分的運氣共同砌成的，除了感恩之外，我也認定了這是一條值得走下去的路。

目 錄

摘要	1
壹、前言	2
一、研究動機	2
二、研究目的	2
三、研究設備及器材	2
貳、研究過程和方法	2
一、研究原理	2
二、研究方法及步驟	3
參、研究結果	6
一、與星系團中心距離和 S-Z 強度的關係	15
二、與星系團中心距離和質量密度的關係	19
三、星系團總質量與其中心 S-Z 強度的關係	22
四、星系團總質量與總 S-Z 強度的關係	23
五、S-Z 效應與時間的關係	24
肆、討論	25
伍、結論與應用	26
陸、參考資料	27
附件	28

Magic Mirror for Clusters

星系團照妖鏡

英文摘要

We study the important properties of the galaxy clusters and our universe by using numerical simulations for the Sunyaev-Zel'dovich effect in the Cosmic Microwave Background. We found that:

1. The S-Z effect is $\Delta T(r) = \Delta T(0) \left[1 + (r/b)^2 \right]^c$, where r is the distance to the cluster center, $c = -1.24 \pm 0.28$, $b = 10^{-4.73 \pm 1.08} \times M_{total}^{0.410 \pm 0.079}$, and M_{total} is the total mass of the cluster in Solar mass.
2. The mass density of a cluster is $\rho(r) = \rho(0) \left[1 + (r/b_M)^2 \right]^{c_M}$, where $c_M = -0.686 \pm 0.115$, $b_M = 10^{-3.50 \pm 0.77} \times M_{total}^{0.306 \pm 0.056}$.
3. The total mass of a cluster and its central SZ effect ΔT_C (in K) are related as:
$$M_{total} = 10^{18.2 \pm 0.4} \times \Delta T_C^{1.00 \pm 0.08} \quad (\text{in a universe with dark energy})$$
$$M_{total} = 10^{15.6 \pm 1.1} \times \Delta T_C^{0.69 \pm 0.29} \quad (\text{in a universe without dark energy})$$
4. The total mass of a cluster and its totally integrated SZ effect ΔT_{total} are related as:
$$M_{total} = 10^{-12.4 \pm 2.0} \times \Delta T_{total}^{0.60 \pm 0.05} \quad (\text{in a universe with dark energy})$$
$$M_{total} = 10^{-5.88 \pm 4.11} \times \Delta T_{total}^{0.55 \pm 0.12} \quad (\text{in a universe without dark energy})$$

These results can be applied to the observations in the near future, in order to reveal the total mass of clusters, their mass density profile, and the dark energy of our universe.

中文摘要

我們藉由電腦模擬來研究宇宙微波背景輻射中之 Sunyaev-Zel'dovich 效應，以探討星系團及宇宙的一些根本性質。重要的發現有：

1. S-Z 效應強度 $\Delta T(r) = \Delta T(0) \left[1 + (r/b)^2 \right]^c$ ，其中 r 為至星系團中心的距離， $c = -1.24 \pm 0.28$ ， $b = 10^{-4.73 \pm 1.08} \times M_{total}^{0.410 \pm 0.079}$ ， M_{total} 為星系團總質量（單位為太陽質量）。
2. 星系團的質量密度 $\rho(r) = \rho(0) \left[1 + (r/b_M)^2 \right]^{c_M}$ ，其中 $c_M = -0.686 \pm 0.115$ ， $b_M = 10^{-3.50 \pm 0.77} \times M_{total}^{0.306 \pm 0.056}$ 。
3. 星團總質量和其中心 S-Z 強度 ΔT_C （單位為 K）的關係：
$$M_{total} = 10^{18.2 \pm 0.4} \times \Delta T_C^{1.00 \pm 0.08} \quad (\text{有黑暗能量的宇宙})$$
$$M_{total} = 10^{15.6 \pm 1.1} \times \Delta T_C^{0.69 \pm 0.29} \quad (\text{無黑暗能量的宇宙})$$
4. 星團總質量和總積分 ΔT （即 ΔT_{total} ）的關係：
$$M_{total} = 10^{-12.4 \pm 2.0} \times \Delta T_{total}^{0.60 \pm 0.05} \quad (\text{有黑暗能量的宇宙})$$
$$M_{total} = 10^{-5.88 \pm 4.11} \times \Delta T_{total}^{0.55 \pm 0.12} \quad (\text{無黑暗能量的宇宙})$$
相同質量之星系團，於較早期形成者，其總 S-Z 效應較強。

以上的結果，將可在短期的未來直接應用在許多期待中的觀測結果上，以揭開星團的總質量、質量密度、以及宇宙中的黑暗能量等神祕面紗。

壹、前言

一、研究動機

在國中及高中的課本，以及多次的觀星經驗中，感覺**星系團**（龍騰版基礎地球科學課本第十章第二節）一直帶著神祕的色彩，它們既龐大又遙遠。後來在展望系列演講以及科學人雜誌中得知，我們可以利用高中所學的**宇宙微波背景輻射**（龍騰版基礎地球科學課本第十章第二節）以及**康普頓散射效應**（南一版高中物理下冊第二十三章第五節），來進一步探究星系團的本質，因此引起我強烈的興趣，決定作進一步的深入研究。

二、研究目的

宇宙微波背景輻射來自大霹靂後約 40 萬年，它是宇宙因為降溫而被釋放出來的光子（龍騰版基礎地球科學課本第十章第二節），這些光子在到達地球前的約 140 億年間，如果有經過高溫的星系團核心（龍騰版基礎地球科學課本第十章第二節），則會藉由康普頓散射（南一版高中物理下冊第二十三章第五節）吸收高溫游離電子的能量，而使其能量隨頻率的分布，偏離原本符合黑體輻射定律的普朗克分布（南一版高中物理下冊第二十三章第三節），這個現象叫做 Sunyaev-Zel'dovich 效應（簡稱 S-Z 效應）。本研究的目的，是要藉由電腦模擬的手段，來探討 S-Z 效應和星系團本質之間的關係，並期望能將這些結論運用在實際的觀測上，以揭開星系團的神祕面紗。S-Z 效應的探測，目前是世界上宇宙學領域中最熱門的競爭之一，所以我們的研究成果，將可在短期的未來，直接應用在這些期待中的觀測結果上。

三、研究設備及器材

1. 軟體：Hydra 軟體、C 語言程式、Matlab 分析軟體
2. 硬體：Sun Blade 2000 電腦工作站、Pentium 個人電腦

貳、研究過程和方法

一、研究原理：

本研究主要是利用宇宙微波背景輻射和星系團作用後所產生的S-Z效應，來探討星系團的本質。所謂的S-Z效應，就是宇宙微波光子在通過星系團中的高溫電子之後，因平均溫度升高而偏離**普朗克分布曲線**之現象。星系團的局部溫度越高，所造成的S-Z效應就越強，因此偏離普朗克分布的程度就越大。定量而言，如果宇宙微波光子原本的溫度隨頻率之分布為 $T_0(\nu)$ （如圖一之黑色曲線，其中 ν 為光子頻率、 T_0 為無S-Z效應之溫度），經過S-Z效應後之溫度為 $T_0(\nu) + \Delta T(\nu)$ （如圖一之紅色曲線），則S-Z效應所造成的溫度變化量可定義為（Runyan et al., 2003; Silva et al., 2000）：

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\nu) = g(x)y \quad (\text{公式 1})$$

其中

$$x = \frac{h\nu}{kT}, \quad g(x) = \left(x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4\right), \quad y = \frac{k\sigma_T}{m_e c^2} \int n_e T_e dl \quad (\text{公式 2})$$

k ：波茲曼常數 $\approx 1.38 \times 10^{-16}$ erg/K

h ：卜朗克常數

T : 宇宙微波背景輻射的溫度

y : Compton-y parameter, 正比於光子和電子發生散射的機率

σ_T : Thomson cross section $\approx 6.65 \times 10^{-25} \text{ cm}^2$

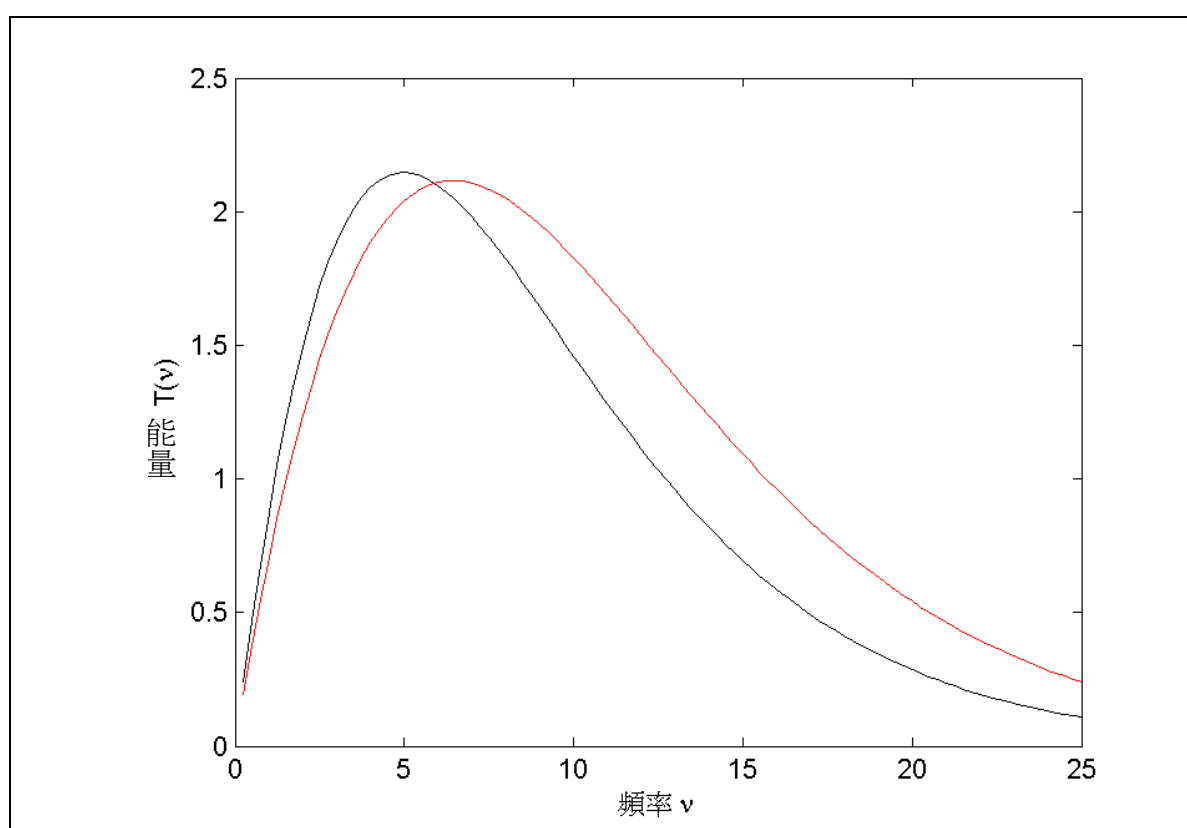
c : 光速

m_e : 電子質量 $\approx 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$

n_e : 電子個數密度

T_e : 電子溫度

利用電腦模擬，我們將可以找出S-Z效應強度（即上述之溫度偏移量）和星系團本質之間的關聯性，以便將來運用在觀測上。



圖一、S-Z效應所造成之卜朗克溫度分布的偏移。

二、研究方法及步驟：

我們的研究方法，基本上是先利用Hydra軟體模擬出數個小宇宙，裡面各形成了數個星系團，接著再利用自己所撰寫的程式，計算出宇宙微波光子在通過這些星系團時，所產生的S-Z效應強度。接著針對這些S-Z效應的強度及分布，來探討和星系團的質量、溫度分等之間的關係。

Hydra 軟體是專業天文物理界中所普遍使用的電腦程式，它主要是透過多體運動的計算，來模擬宇宙結構的形成。目前學術界利用 Hydra 所做出來的研究論文不下百篇，例如有近幾年來的 R.E. Smith et al., 2003; Silva et al., 2000; T.Theuns et al., 1998; A.

Jenkins et al., 1998; P.A.Thomas et al., 1998; Barber A. J.,2002; Barber A. J.,2003 等等。本軟體允許使用者改變各種宇宙參數，模擬出一個充滿質點的宇宙箱子，讓它隨著時間依質點間的萬有引力作用而演化。在我們的電腦模擬中，所使用的初始條件是目前宇宙學界所普遍接受的數值，也就是同時具有黑暗能量和黑暗物質，其中黑暗能量（也就是 Λ ，又稱宇宙常數）占宇宙總能量的 73%，黑暗物質（簡記作 DM）占宇宙總能量的 22.5%，一般物質（即重子）占宇宙總能量的 4.5%。黑暗能量提供萬有斥力，黑暗物質提供重力，此二者皆與光子沒有任何交互作用；代表一般物質的每一顆粒子可看成是一小團具有球對稱性的雲氣（簡稱雲氣球），具有重力和氣體壓力的作用。質點的總數為 2×64^3 個（一般物質共 64^3 個，黑暗物質共 64^3 個），初始時間的紅位移值 $z=19$ ，哈伯常數 $=71 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ （ $1\text{Mpc} = 3.26 \times 10^3$ 光年），光子頻率 $\nu = 100\text{GHz}$ （此數值接近台灣 AMIBA 計畫的觀測頻率）。我們總共將模擬四個小宇宙：

1. 第一個宇宙：邊長 $70h^{-1}\text{Mpc}$ ，每個一般物質質量 $2.29 \times 10^{10} \text{ Msun}$ ，每個黑暗物質質量 $1.145 \times 10^{11} \text{ Msun}$ 。其中 $\text{Msun} = 2 \times 10^{33} \text{ g}$ ，為太陽質量。
2. 第二個宇宙：邊長 $35h^{-1}\text{Mpc}$ ，每個一般物質質量 $2.862 \times 10^9 \text{ Msun}$ ，每個黑暗物質質量 $1.4325 \times 10^{10} \text{ Msun}$ 。
3. 第三個宇宙：邊長 $35h^{-1}\text{Mpc}$ ，每個一般物質質量 $2.862 \times 10^9 \text{ Msun}$ ，每個黑暗物質質量 $1.4325 \times 10^{10} \text{ Msun}$ 。
4. 第四個宇宙：邊長 $140h^{-1}\text{Mpc}$ ，每個一般物質質量 $2.29 \times 10^{10} \text{ Msun}$ ，每個黑暗物質質量 $1.145 \times 10^{11} \text{ Msun}$ 。

另外我們並假設黑暗能量不存在，而以黑暗物質替代，採用第二個宇宙之模型做模擬（稱為第七個宇宙），以期將來得到觀測結果後作為比較對照，驗證黑暗能量的存在與否。

在每一次的電腦模擬中，我們讓程式執行 2000 個時間步（time step），每 50 步紀錄一次，紀錄中包含每個質點（包括了一般物質和黑暗物質）的質量、溫度、位置、速度和雲氣球半徑。我們可以用 Hydra 的附屬程式 tippy 來畫出指定時期的質點分布狀況，以作為必要時的參考。

接著，我們利用自行撰寫的 C 程式(如附件)，來計算出星系團的 S-Z 效應。以下為這個程式的執行步驟：

1. 我們使用極高的解析度（一般約為 128^3 或 256^3 ）來計算 S-Z 效應。我們將前三個模擬的宇宙切割成 1024^3 個正立方小盒子、最後一個宇宙分成 2048^3 個(因為其質量較大，需要較高的解析度)。接著讀入 Hydra 的執行結果，求出每一個小盒子中心到雲氣球中心（即 Hydra 模擬中的質點）的距離：

$$x = |\bar{r} - \bar{r}_i| / h_i \quad (\text{公式 3})$$

其中 \bar{r} 為小盒子中心的座標， \bar{r}_i 為雲氣球中心的座標（即質點的位置）， h_i 為和雲氣球半徑的一半(即 smoothing length，以大宇宙的邊長為單位)。

2. 在雲氣球內，至球心距離 xh_i 上的單位體積內之質量為 $m_{\text{gas}} \times W$ ，其中 W 函數描述雲氣球內質量的分佈，即：

$$W(x, h_i) = \frac{1}{4\pi h_i^3} \begin{cases} 4 - 6x^2 + 3x^3, 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)^3, 1 < x \leq 2 \\ 0, x > 2 \end{cases} \quad (\text{公式 4})$$

3. 計算 (公式 2) 中的電子密度 (Silva et al., 2000):

$$n_e = (\text{重子密度}) \times (\text{每個重子有幾個電子}) \\ = \left(\frac{m_{\text{gas}} \times W}{m_p + 0.88m_e} \right) \times 0.88 \approx \left(\frac{m_{\text{gas}} \times W}{m_p} \right) \times 0.88 \quad (\text{公式 5})$$

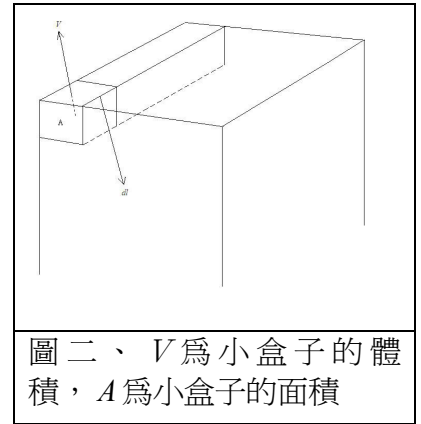
在這裡重子是指質子和中子，根據理論計算，在早期的宇宙中，當質子中子形成氫原子及氦原子的時候，其質子和中子的質量比值約為 7:1，若當時的宇宙為電中性，則每個質子應該就要有一個相對應的電子，也就是說平均每個重子可以分到 7/8 個電子，大約是 0.875，也就是這裡的 0.88。這裡假設當溫度夠高時電子會全部由氫原子中被游離出來。

4. 接著可以把 V 當作小盒子的體積， A 當作小盒子的截面積，則 $dl = \frac{V}{A}$ (見圖二)。

因此

$$y = \frac{k\sigma_T}{m_e c^2} \int n_e T_e dl \Rightarrow y = \frac{k\sigma_T}{m_e c^2} \frac{V}{A} \sum_{\alpha} \sum_i T \left(\frac{m_{\text{gas}} \times W}{m_p} \times 0.88 \right) \quad (\text{公式 6})$$

這裡的 \sum_i 是把對於一個小盒子中心有貢獻的粒子之效應全部加起來；因為我們沿某方向所觀測到的宇宙微波背景輻射，為三維空間中的 S-Z 效應疊加到二維空間中的結果(成為平面疊加圖)，因此， \sum_{α} 是沿著視線的方向把所有小盒子上的 S-Z 效應疊加起來。我們將雲氣球(每個雲氣球大小不同)沿每個半徑方向都取 400 個等距的點，將這些點代入(公式 4)並乘以體積而得到質量(因點和點之間皆不連續，故可視為佔有一定體積)後，沿視線方向相加，再將其換算成 1024^3 的解析度的小盒子應佔有的質量，即可代入(公式 6)求出 y (即 Compton-y parameter)。



圖二、 V 為小盒子的體積， A 為小盒子的面積

5. 將所得到的 y 值帶入 (公式 1)，最後可求出 S-Z 效應的溫度變化量 ΔT 。

本程式所使用的單位皆為 CGS 制。Hydra 輸出的粒子座標皆以宇宙的長度為單位(輸出的皆為 comoving coordinate 的長度)，所以都在 [0,1] 之間。Hydra 在作計算的時候，也是使用同樣的數值，但是在計算真正的物理量的時候要乘上宇宙的長度才是真正 comoving coordinate 的長度，然後再乘上 scale factor $a(t)$ 才會把 comoving coordinate 的長度轉換成真正的 physical coordinate 的長度。除了座標以外，Hydra 輸出的其他物理量都是用真正 comoving coordinate 的長度，所以不必再乘上宇宙的長度。因此宇宙的長度為： $\frac{box100}{h100} Mpc$ 。

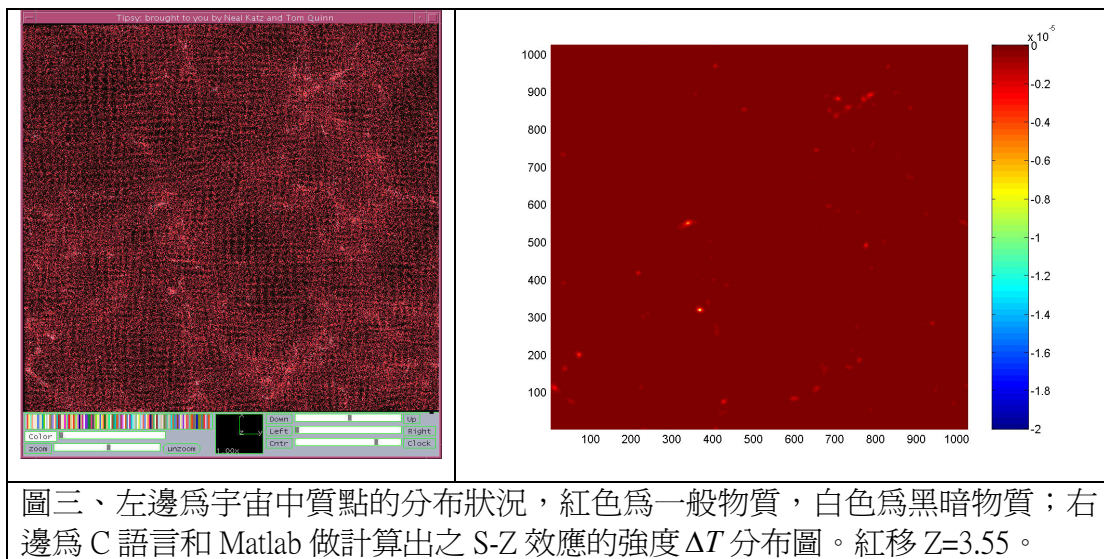
最後利用 Matlab 程式將自己撰寫之程式所輸出的溫度變化 ΔT 畫成圖形，並作以下之分析：

- 1.比較一個星系團在不同形成階段的差異。
- 2.比較與星系團中心距離 r 和 S-Z 強度間的關係。撰寫程式求出星系團的中心位置，以此中心向外畫出不同半徑的同心圓，求出各個同心圓圓周上(即為各個與星系團中心不同距離 r)之 ΔT 的平均值；接著使用 $\Delta T = a \left[1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]^c$ (Jones,C. et al., 1984)的數學模型讓 Matlab 去找出它的 a 、 b 、 c ， a 代表了距離 r 逼近 0 的時候之 ΔT /中心溫度(應為 1)， b 為斜率由極大轉入平緩的臨界值， c 為影響曲線走向(衰退)的指數。
- 3.比較與星系團中心距離 r 和質量密度的關係。用類似 (2) 的方法求出各個半徑同心圓的質量密度平均值，再用質量密度= $a \left[1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]^c$ 的模型去找出 a 、 b 、 c ，其中 a 代表了距離 r 逼近 0 的時候之質量密度/中心質量密度(應為 1)。
- 4.比較星系團總質量與其中心 S-Z 強度的關係。
- 5.比較星系團總質量與總 ΔT 的關係。
- 6.比較 S-Z 效應與時間的關係。

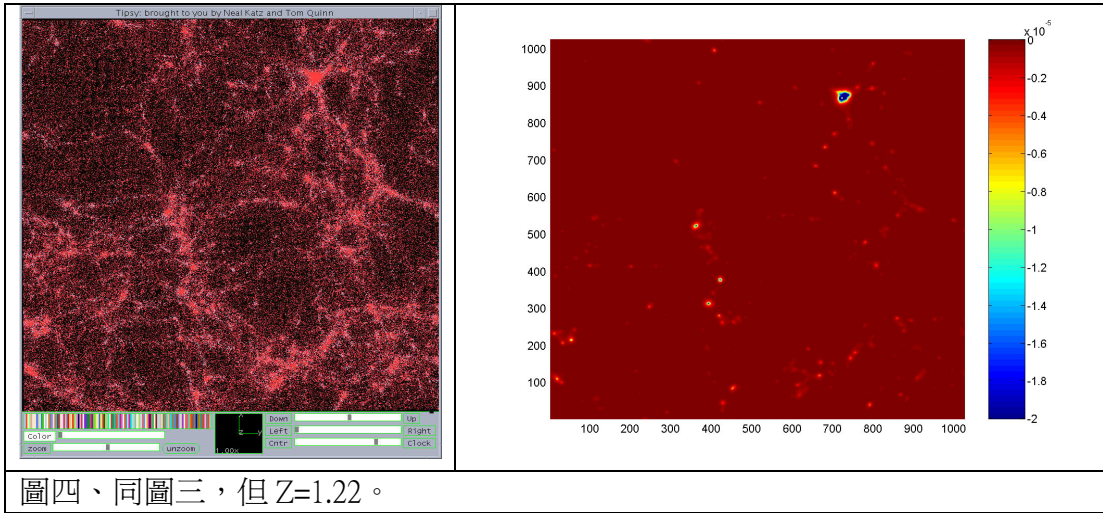
參、研究結果

以下為我們所模擬出的前四個宇宙之結果，因為在所考慮的光子頻率上(100GHz)之 ΔT 為負值，所以 ΔT 越小 (ΔT 絕對值越大)，代表溫度越低，S-Z 強度越強。在這裡時間是以紅移 z (red shift) 來定義。因為星系團的中心部份常有極高溫的數個質點，為了在圖中看清楚其他較低溫區之溫度梯度變化，我們透過 Matlab 選取了溫度的著色範圍。四個模擬宇宙之結果如下：

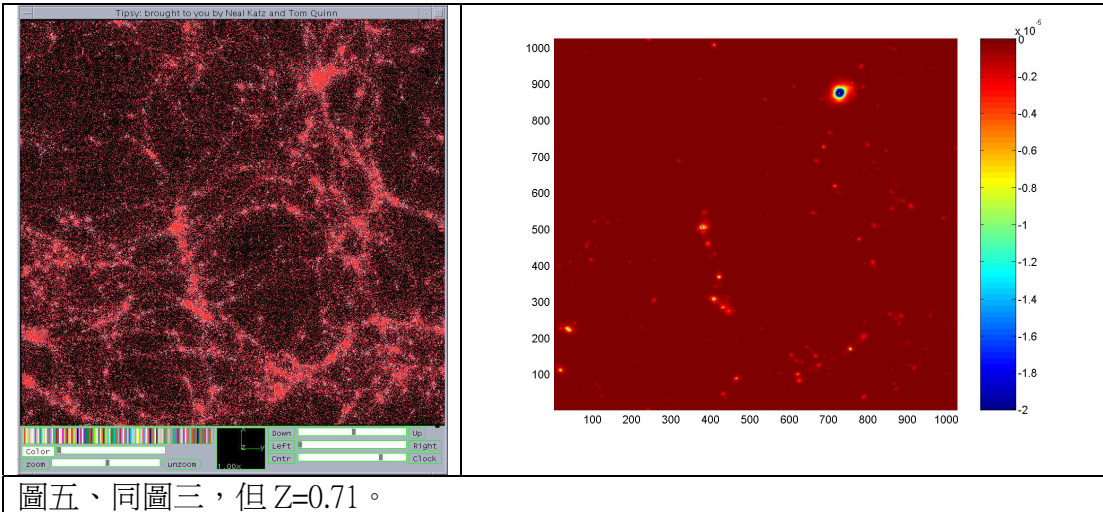
- 一、 第一個模擬宇宙：溫度之著色範圍為 -2×10^{-5} K 至 0K。



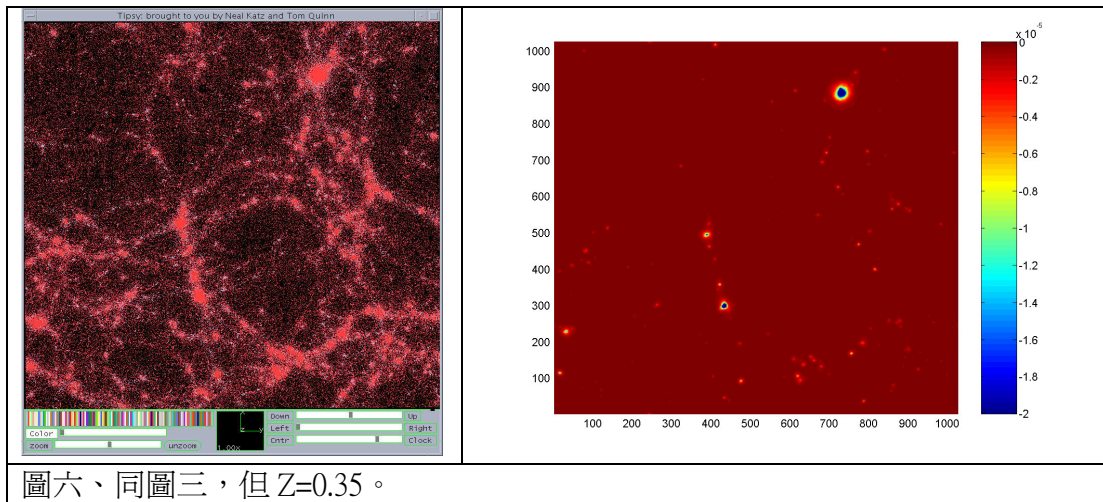
圖三、左邊為宇宙中質點的分布狀況，紅色為一般物質，白色為黑暗物質；右邊為 C 語言和 Matlab 做計算出之 S-Z 效應的強度 ΔT 分布圖。紅移 $Z=3.55$ 。



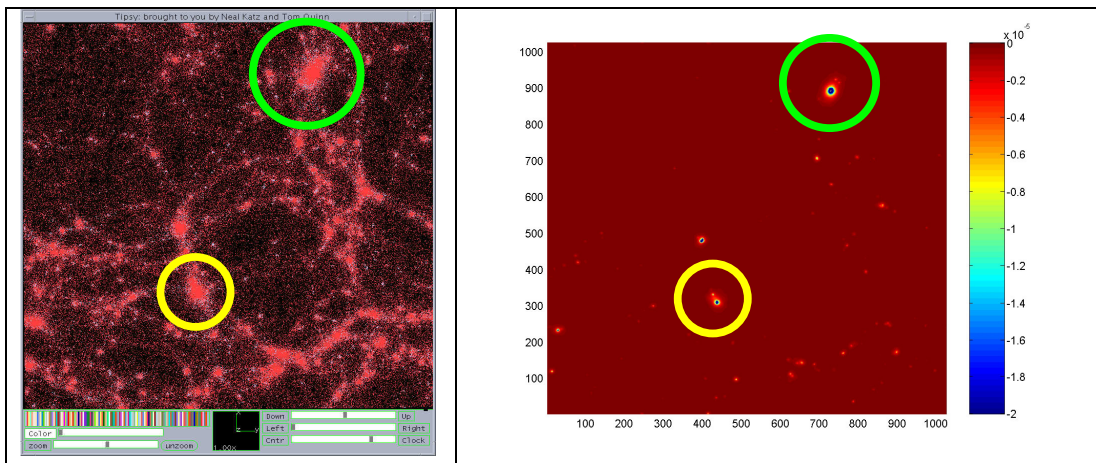
圖四、同圖三，但 $Z=1.22$ 。



圖五、同圖三，但 $Z=0.71$ 。



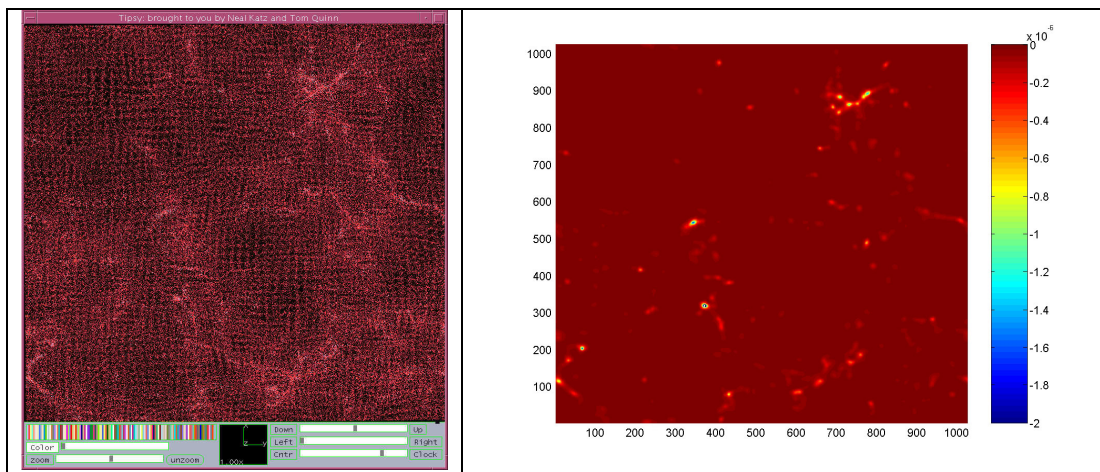
圖六、同圖三，但 $Z=0.35$ 。



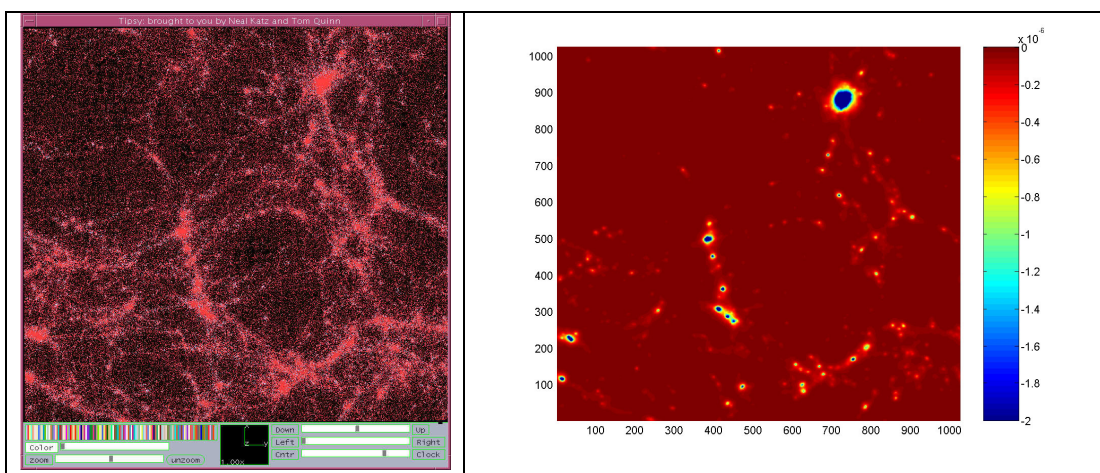
圖七、同圖三，但 $Z=0$ 。

左右相同顏色的圈標示同一個星系團的粒子分布圖(左)和 S-Z 效應的分布圖(右)。

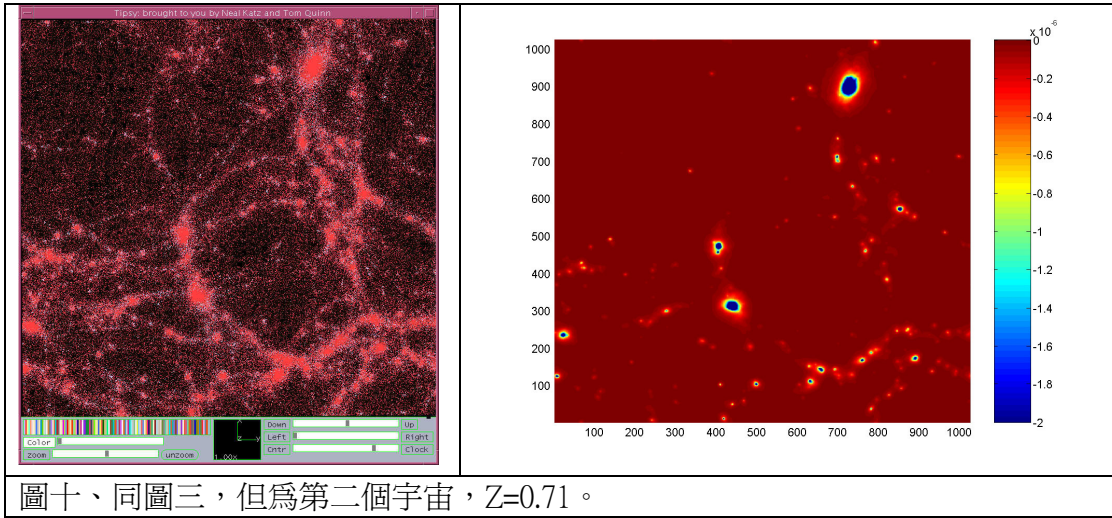
二、 第二個模擬宇宙：溫度之著色範圍為 -2×10^{-6} K 至 0K。



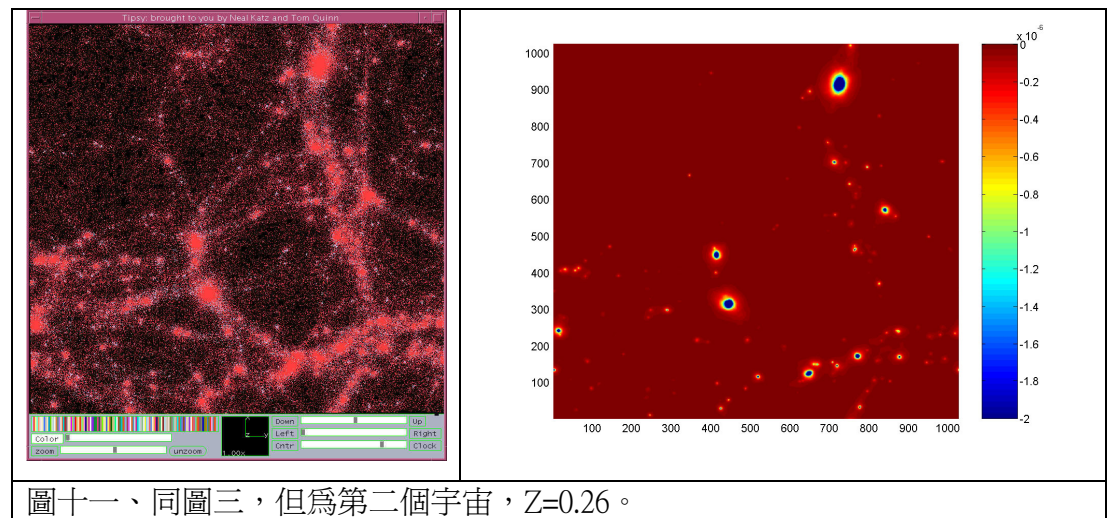
圖八、同圖三，但為第二個宇宙， $Z=4.65$ 。



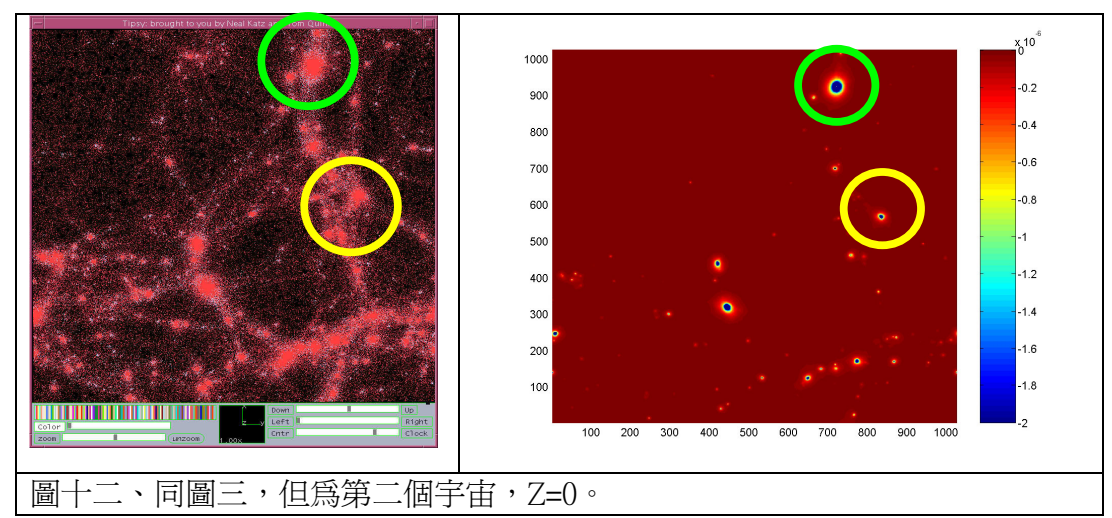
圖九、同圖三，但為第二個宇宙， $Z=1.56$ 。



圖十、同圖三，但為第二個宇宙， $Z=0.71$ 。



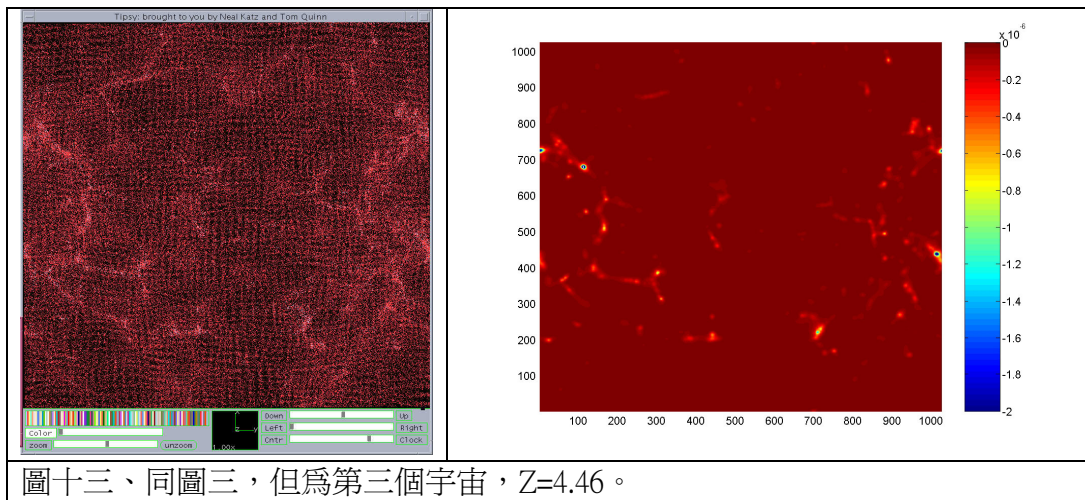
圖十一、同圖三，但為第二個宇宙， $Z=0.26$ 。



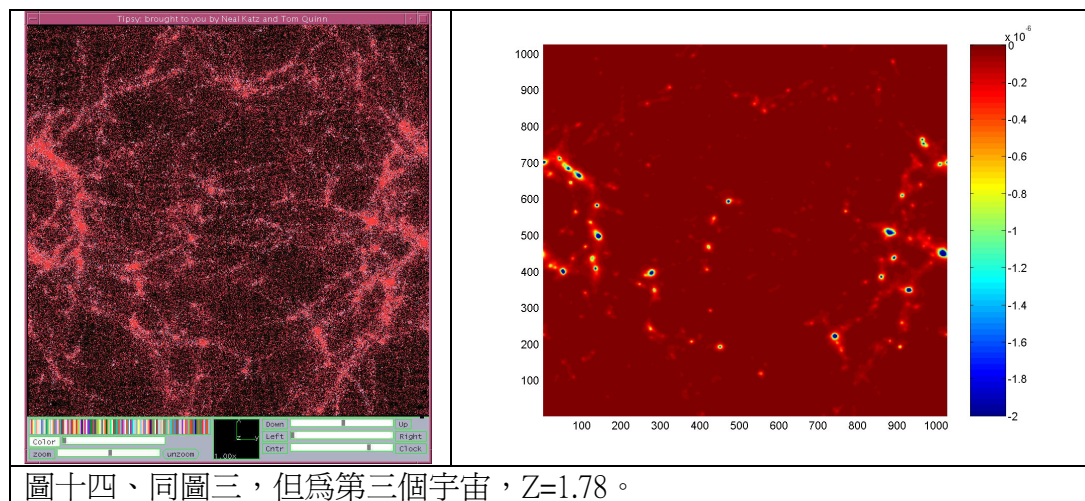
圖十二、同圖三，但為第二個宇宙， $Z=0$ 。

左右相同顏色的圈標示同一個星系團的粒子分布圖(左)和 S-Z 效應的分布圖(右)。

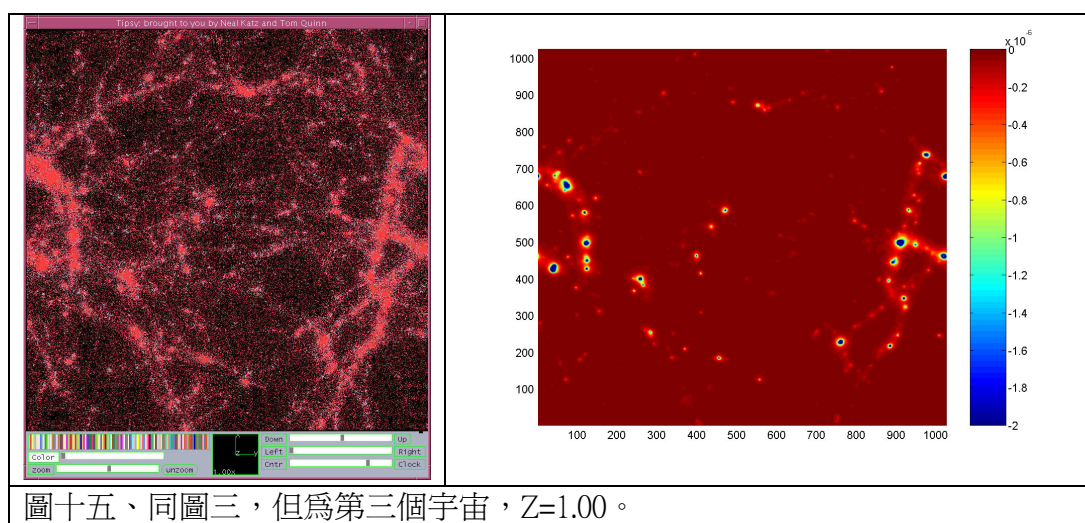
三、 第三個模擬宇宙：溫度之著色範圍為 -2×10^{-6} K至 0K。



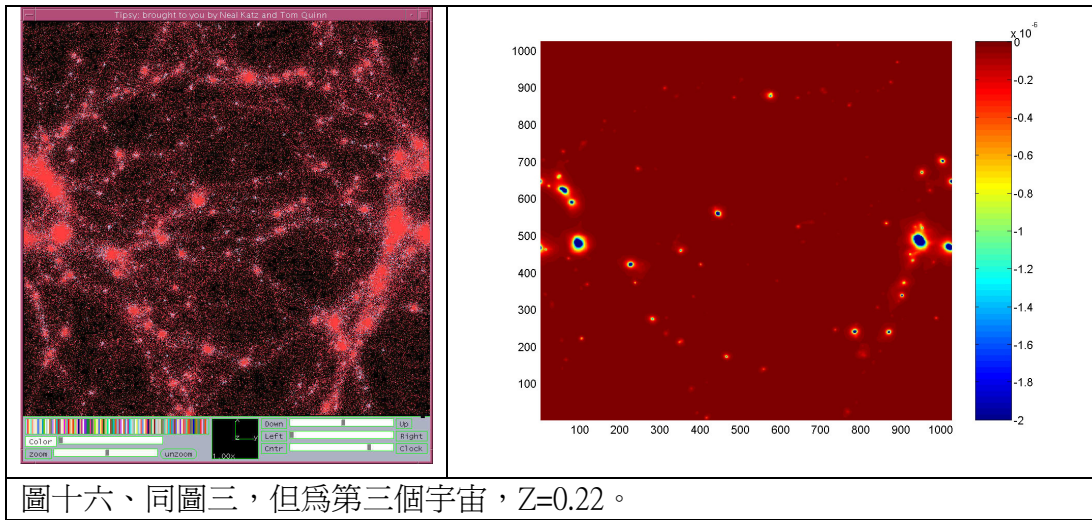
圖十三、同圖三，但為第三個宇宙， $Z=4.46$ 。



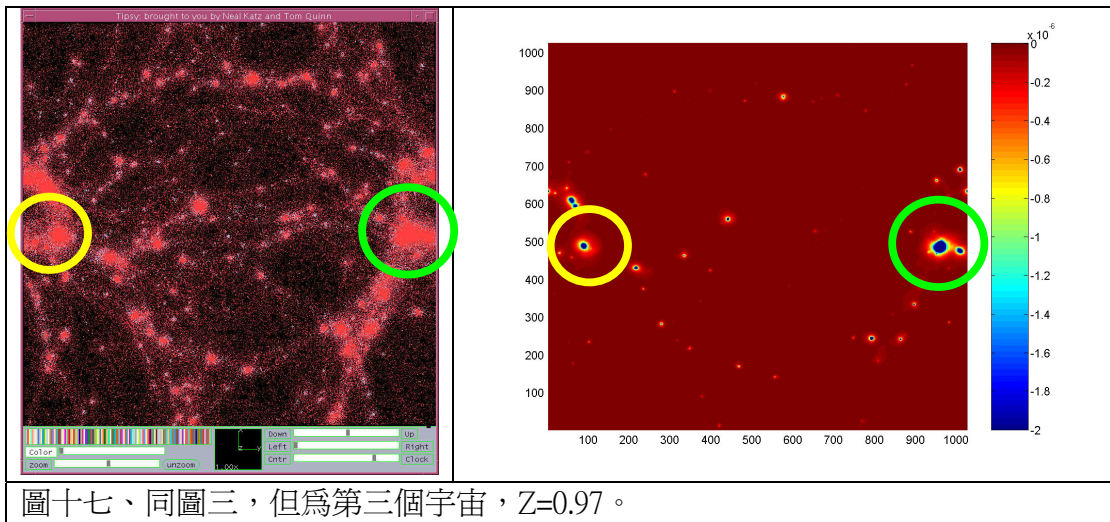
圖十四、同圖三，但為第三個宇宙， $Z=1.78$ 。



圖十五、同圖三，但為第三個宇宙， $Z=1.00$ 。



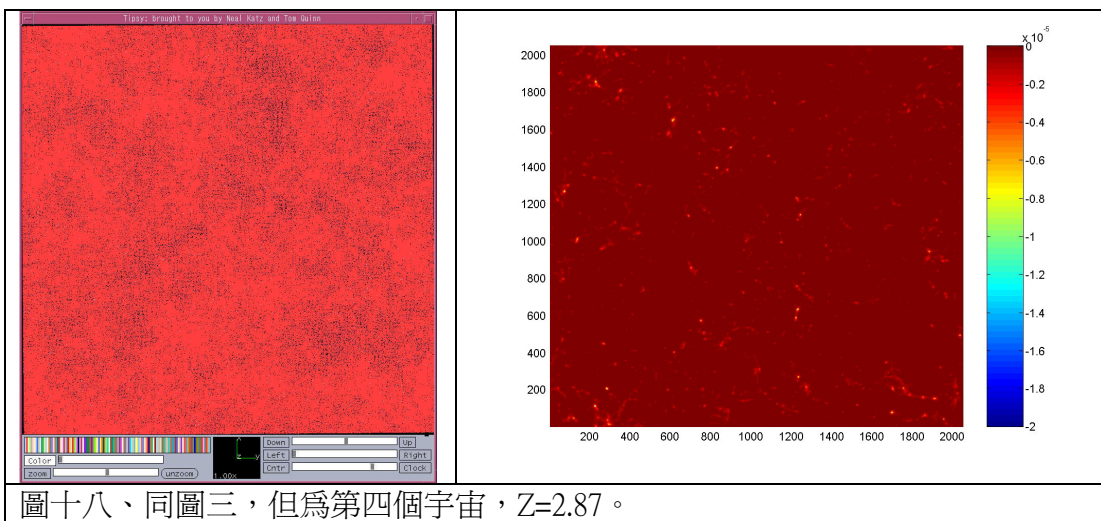
圖十六、同圖三，但為第三個宇宙， $Z=0.22$ 。



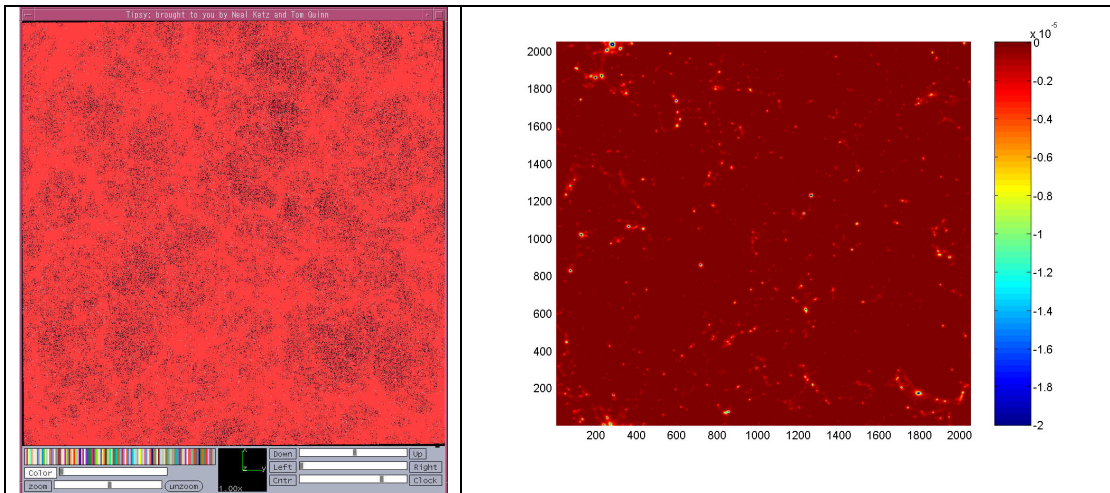
圖十七、同圖三，但為第三個宇宙， $Z=0.97$ 。

左右相同顏色的圈標示同一個星系團的粒子分布圖(左)和 S-Z 效應的分布圖(右)。

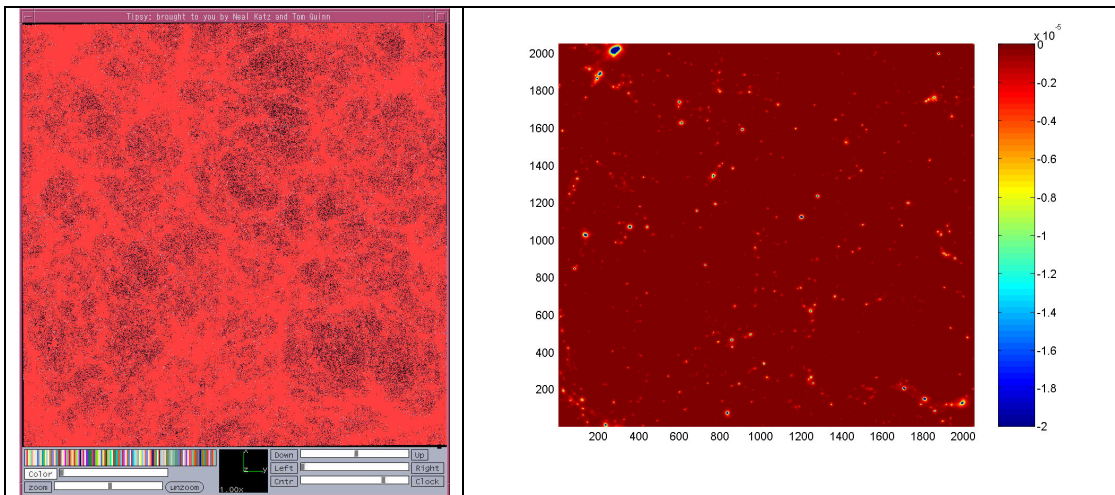
四、 第四個宇宙：溫度之著色範圍為 -2×10^{-5} K 至 0K。



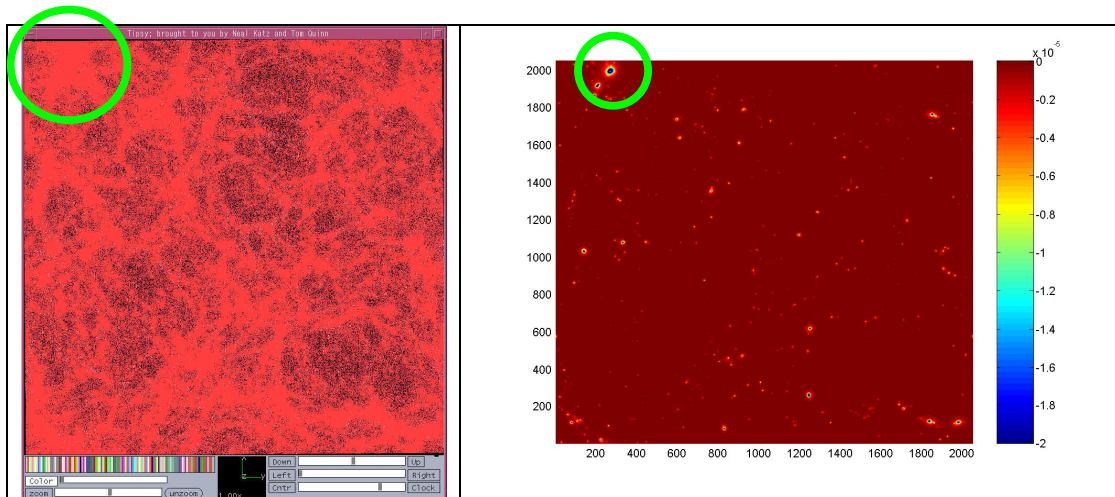
圖十八、同圖三，但為第四個宇宙， $Z=2.87$ 。



圖十九、同圖三，但為第四個宇宙， $Z=1.22$ 。



圖二十、同圖三，但為第四個宇宙， $Z=0.49$ 。



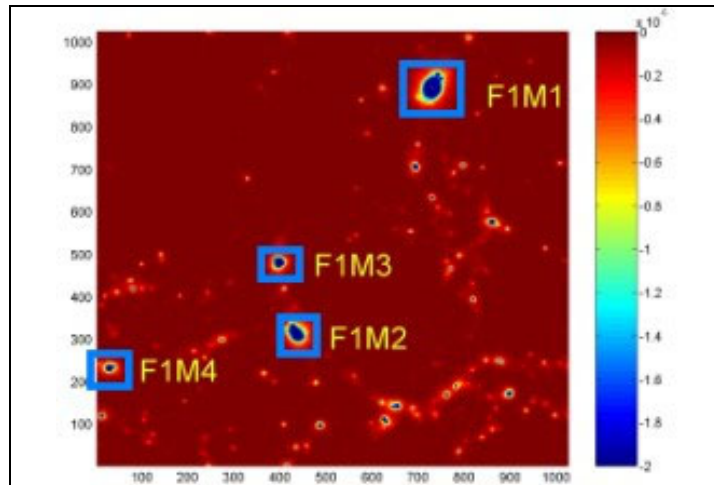
圖二十一、同圖三，但為第四個宇宙， $Z=0$ 。

左右相同顏色的圈標示同一個星系團的粒子分布圖(左)和 S-Z 效應的分布圖(右)。

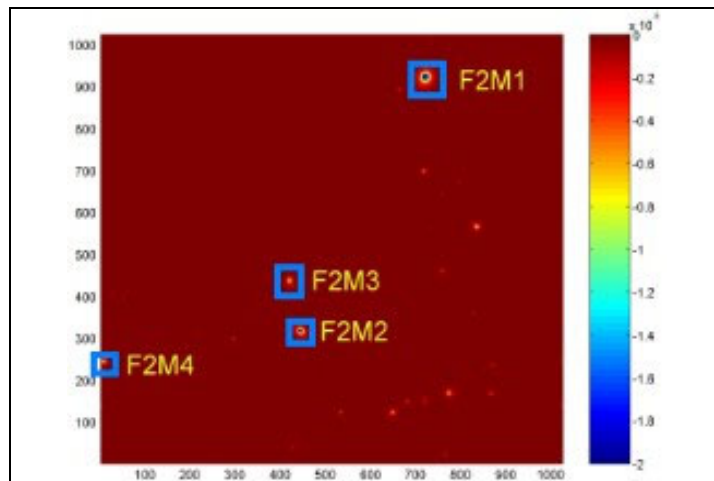
由以上之結果可看出：

- 一、 星系團演化的後期之 S-Z 效應的高溫區會比星系演化前期來的集中。
- 二、 S-Z 效應（即 ΔT 不為 0）只出現在質點密集區，質點稀疏的部分 S-Z 效應就很不明顯。
- 三、 在質量較小的宇宙中（即第二個檔案和第三個檔案），其星系團的高溫區溫度比質量較大的宇宙中的星系團來的低。

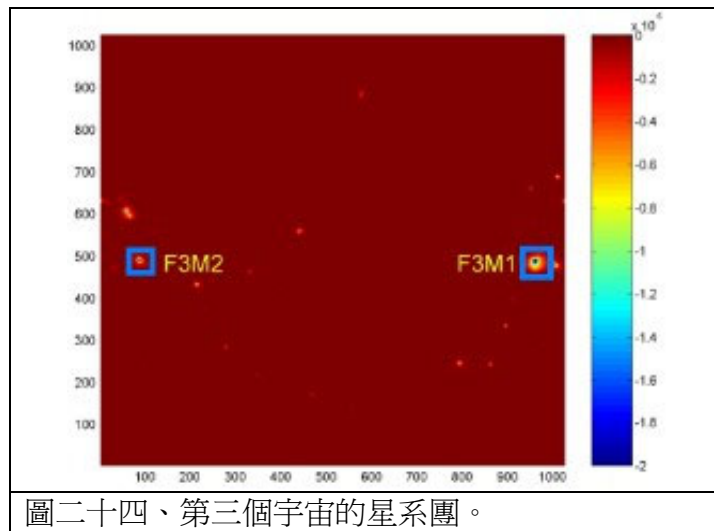
接著我們在五個宇宙（加上第七個宇宙）中選了 32 個（F1M1、F1M2、F1M3、F1M4、F2M1、F2M2、F2M3、F2M4、F3M1、F3M2、F5M1、F5M2、F5M3、F5M4、F5M5、F5M6、F5M7、F5M8、F5M9、F5M10、F5M11、F5M12、F5M13、F5M14、F5M15、F5M16、F5M17、F5M18、F7M1、F7M2、F7M3、F7M4）質量為 $10^{13} \sim 10^{16}$ 倍太陽質量的星系團來做分析，分別如下圖。



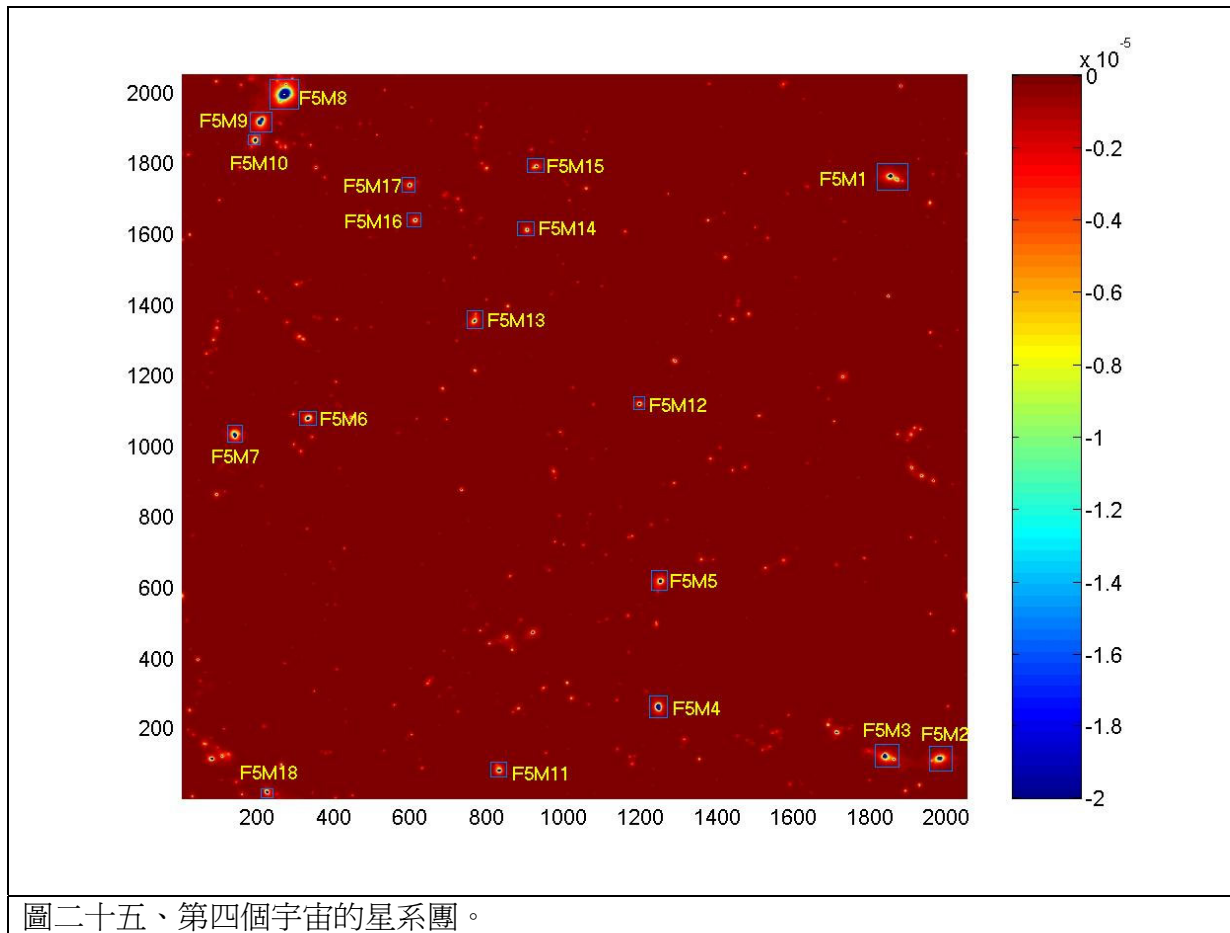
圖二十二、第一個宇宙的星系團。



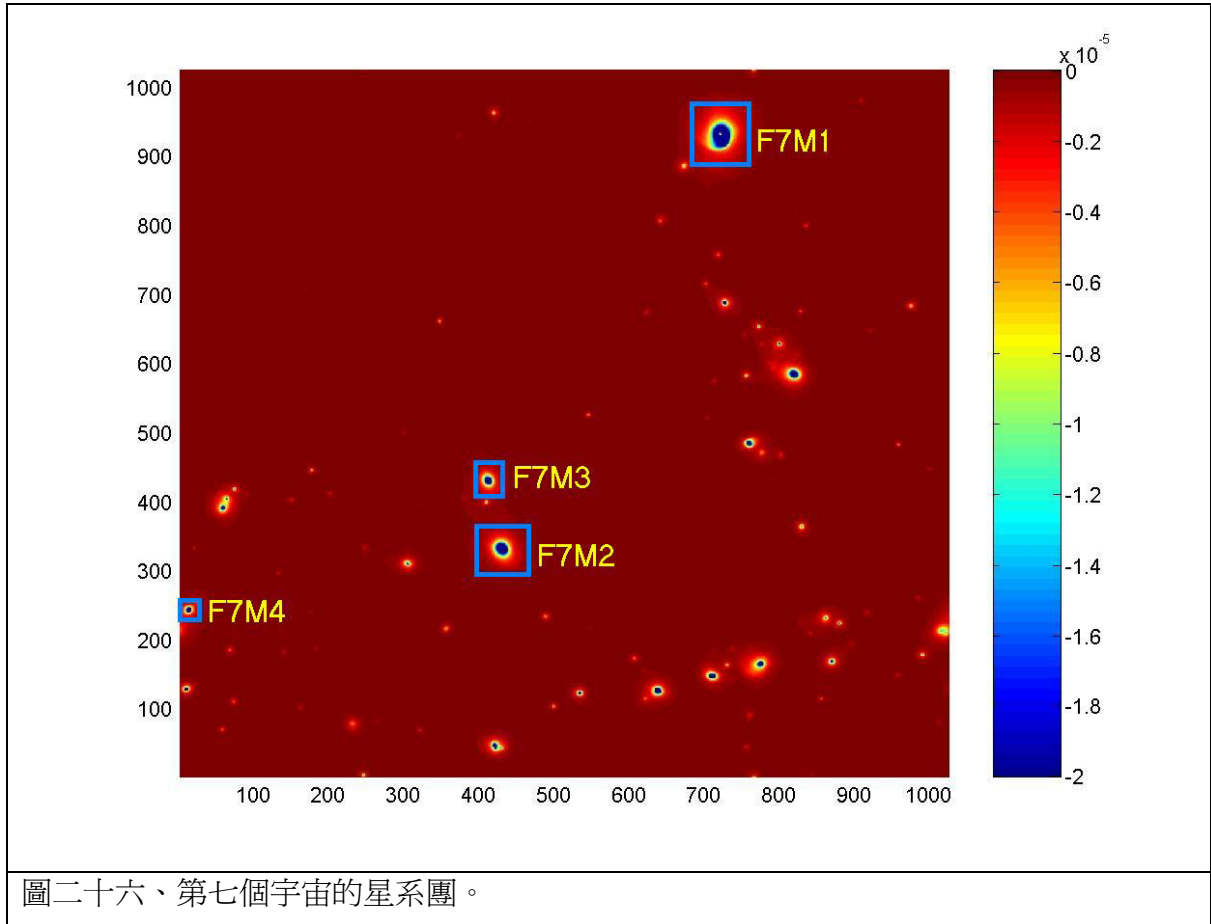
圖二十三、第二個宇宙的星系團。



圖二十四、第三個宇宙的星系團。



圖二十五、第四個宇宙的星系團。

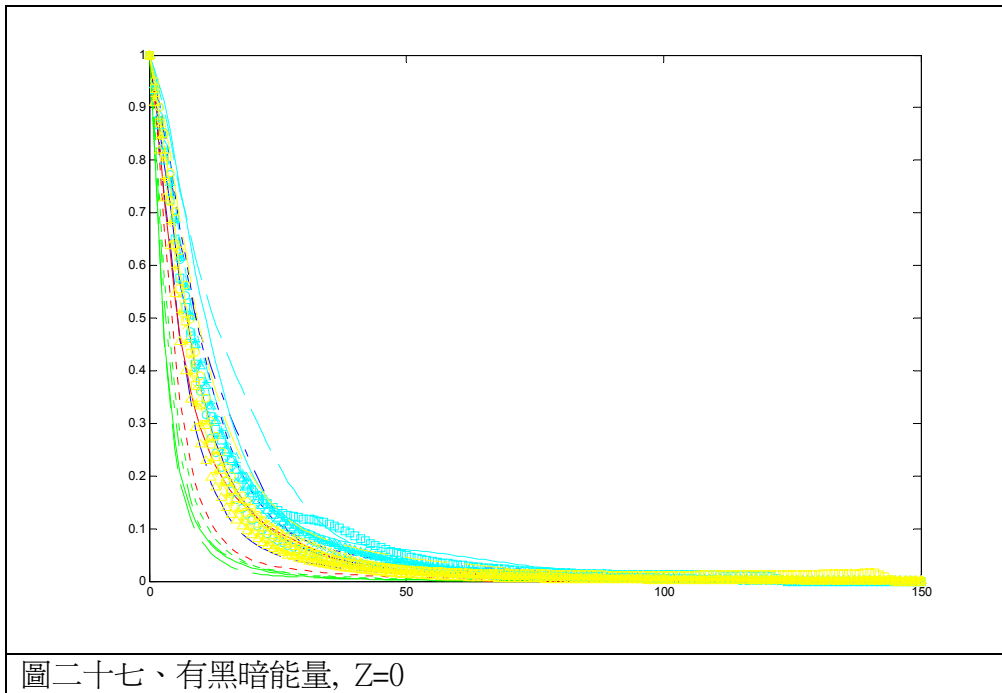


接著進行以下四項的分析：

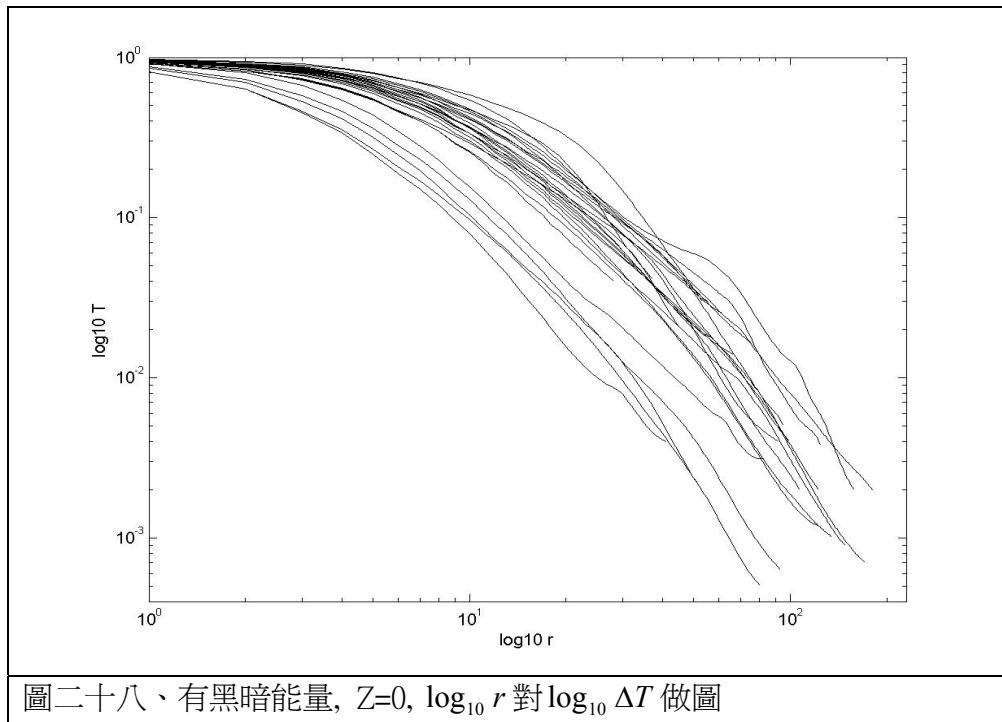
一、 與星系團中心距離和 S-Z 強度的關係

以下圖中的縱座標為 $\Delta T(r)$ / 中心溫度，橫座標為距離星系團中心的距離 r (單位是 $35h^{-1}Mpc / 1024$)。各星系團之標色如下表：

F1M1 藍色實線	F1M2 藍色點	F1M3 藍色點+虛線	F1M4 藍色虛線	
F2M1 綠色實線	F2M2 綠色點	F2M3 綠色點+虛線	F2M4 綠色虛線	
F3M1 紅色實線	F3M2 紅色點			
F5M1 青色實線	F5M2 青色點	F5M3 青色點+虛線	F5M4 青色虛線	F5M5 青色圈
F5M6 青色叉	F5M7 青色三角	F5M8 青色星號	F5M9 青色方形	F5M10 黃色實線
F5M11 黃色點	F5M12 黃色點+虛線	F5M13 黃色虛線	F5M14 黃色圈	F5M15 黃色叉
F5M16 黃色三角	F5M17 黃色星號	F5M18 黃色方形		

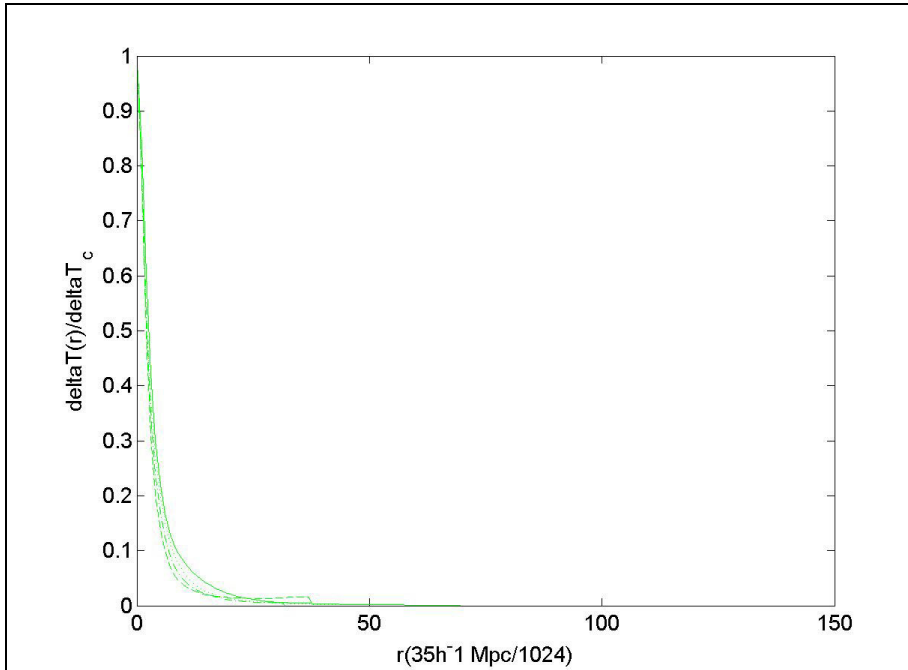


觀察其曲線的遞減趨勢，我們將兩座標取了 \log_{10} 得下圖：



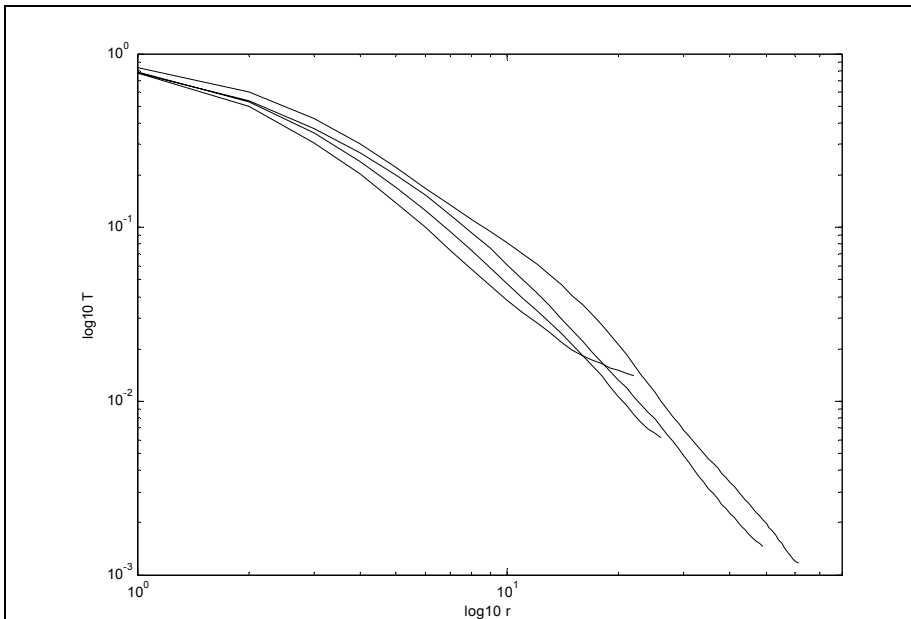
利用 $\Delta T = a \left[1 + (r/b)^2 \right]^c$ 的數學模型，讓 Matlab 去找出它的 a 、 b 、 c 。 a 的平均值為 0.823，標準差為 0.118； b 因為受各個星系團總質量大小的影響而有很大的起伏； c 的平均值為 -1.24，標準差為 0.28。

F7M1 綠色實線 F7M2 綠色點 F7M3 綠色點+虛線 F7M4 綠色虛線



圖二十九、無黑暗能量, Z=0

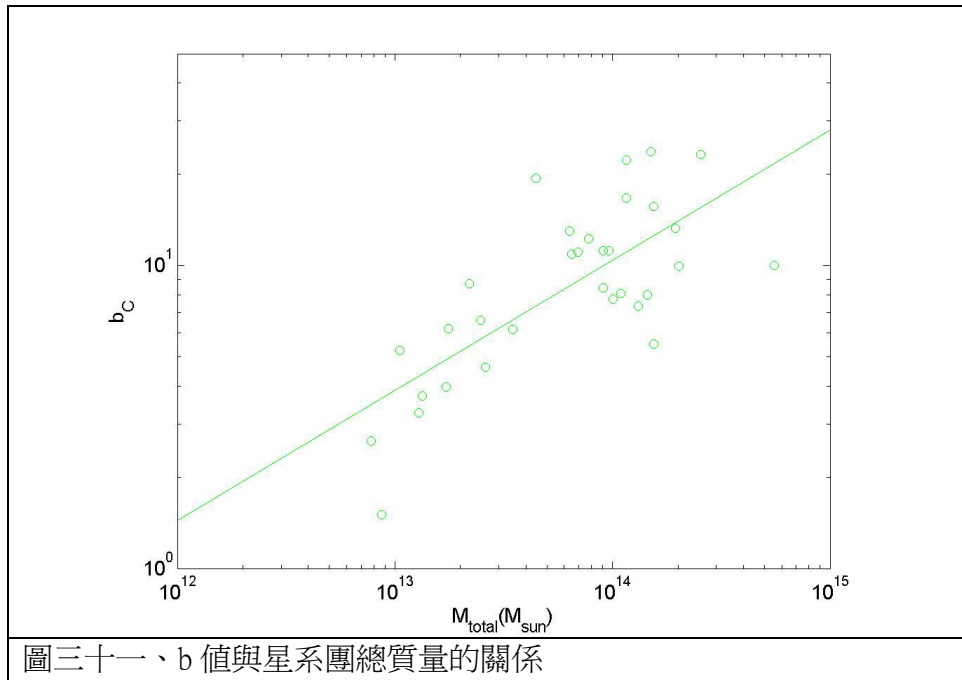
觀察其曲線的遞減趨勢，我們將兩座標取了 \log_{10} 得下圖：



圖三十、無黑暗能量, Z=0, $\log_{10} r$ 對 $\log_{10} \Delta T$ 做圖

沒有黑暗能量的宇宙中形成的星系團 在 Z=0 時的分析結果為： a 的平均值為 0.882，標準差為 0.142； c 的平均值為 -1.10，標準差為 0.18。

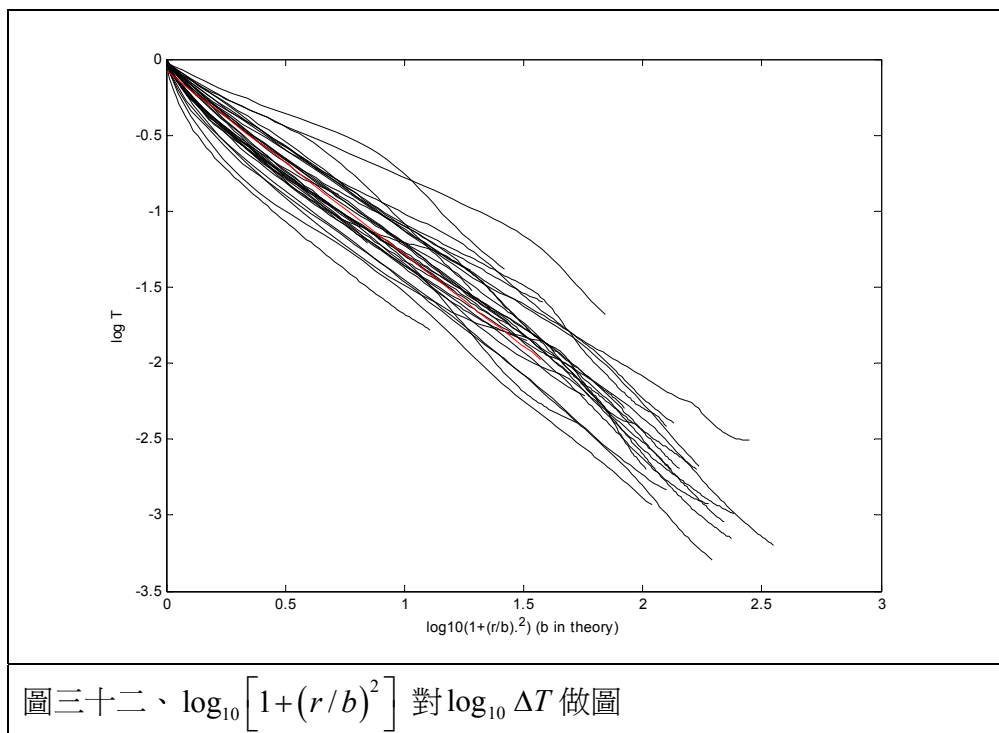
另外，我們更進一步探討 b 值與星系團總質量的關係，下圖的縱座標是 b ，橫座標是質量(單位太陽質量)，在兩邊取過 \log_{10} 後如下圖：



由上圖中的明顯線性帶狀分布，可算出其 b 值與星系團總質量 (M_{total}) 的

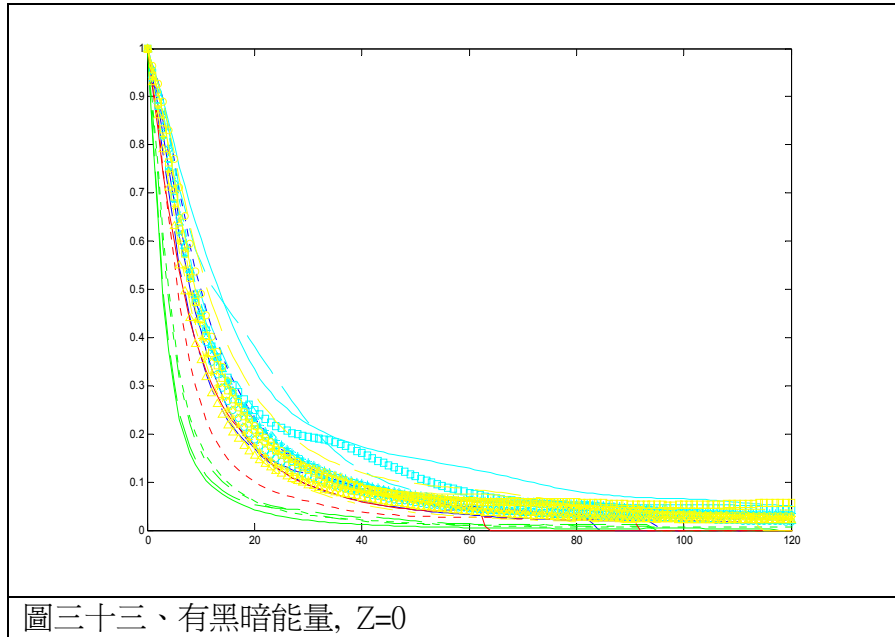
關係為：
$$b = 10^{-4.73 \pm 1.08} \times M_{total}^{0.410 \pm 0.079} \quad (\text{公式 7})$$

以橫座標為 $\log_{10} [1 + (r/b)^2]$ (其中的 b 值來自 (公式 7))，縱座標為 $\log_{10} \Delta T$ (實際模擬的數值) 的圖形來驗證 a 和 c 的準確度，得下圖，其中紅線是由 a 和 c 的平均值畫出。

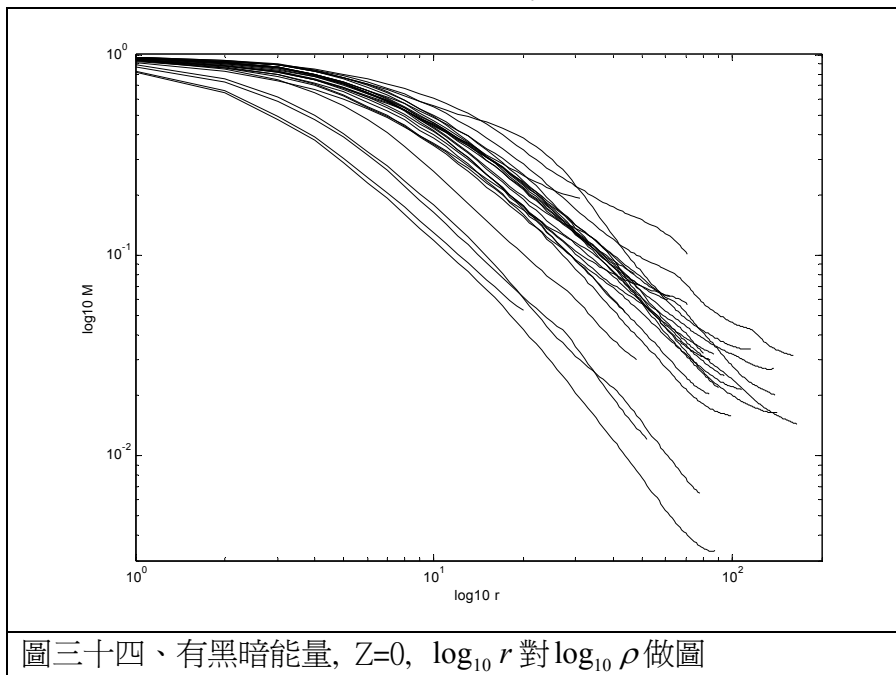


二、 與星系團中心距離和質量密度的關係

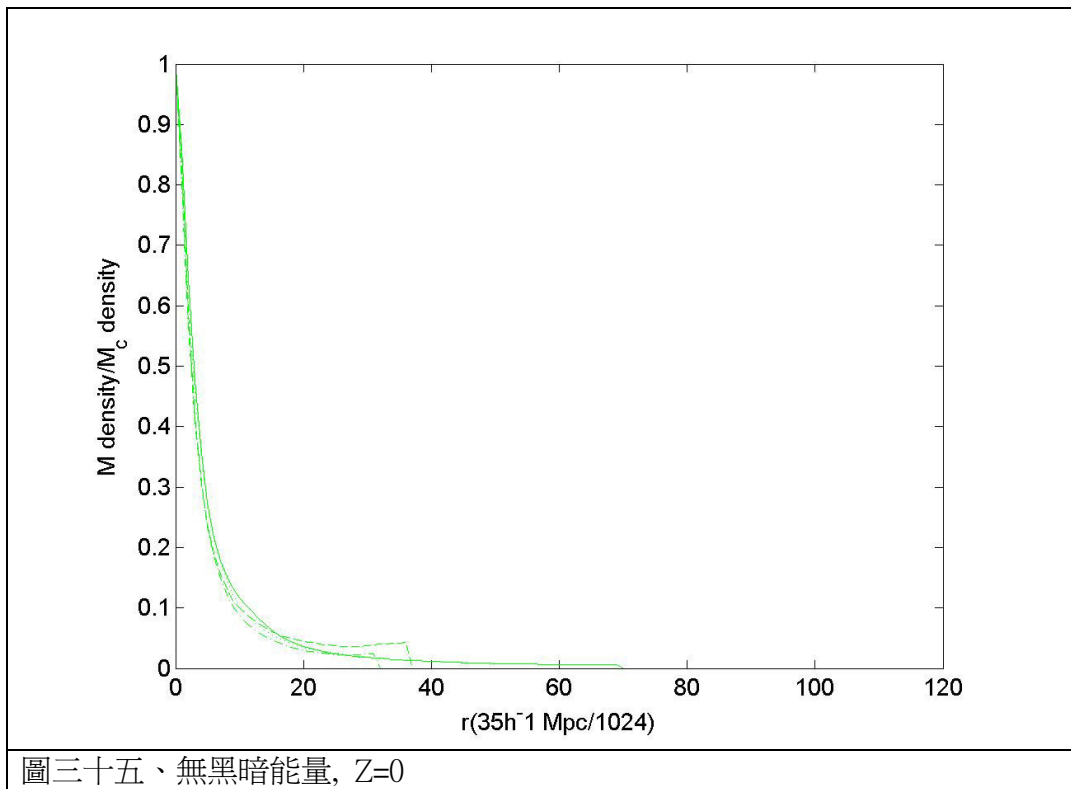
以下圖中的縱座標是質量密度／中心質量密度，橫座標是與星系團中心的距離 r （單位是 $35h^{-1}Mpc/1024$ ）。曲線顏色所代表的意義如前。



觀察其曲線的遞減趨勢，我們將兩座標取了 \log_{10} 得下圖：

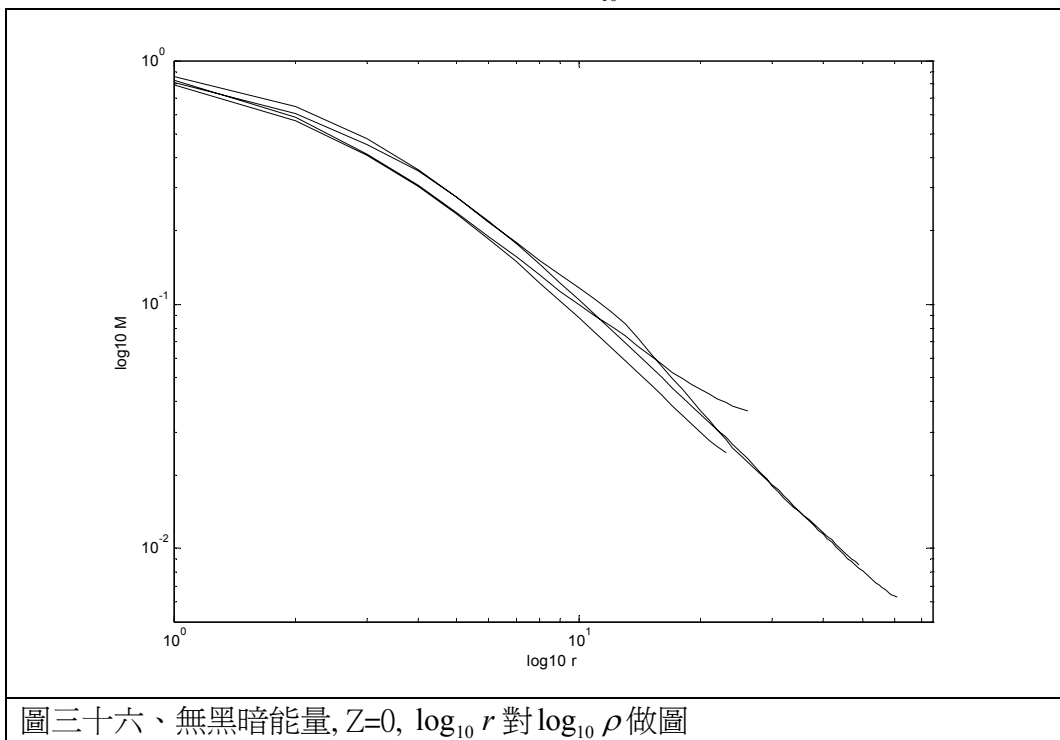


利用質量密度 $= a \left[1 + (r/b)^2 \right]^c$ 的數學模型，讓 Matlab 去找出它的 a 、 b 、 c ， a 的平均值為 0.965，標準差為 0.062； b 因為受各個星系團總質量大小的影響而有很大的起伏； c 的平均值為 -0.686，標準差為 0.115。



圖三十五、無黑暗能量, Z=0

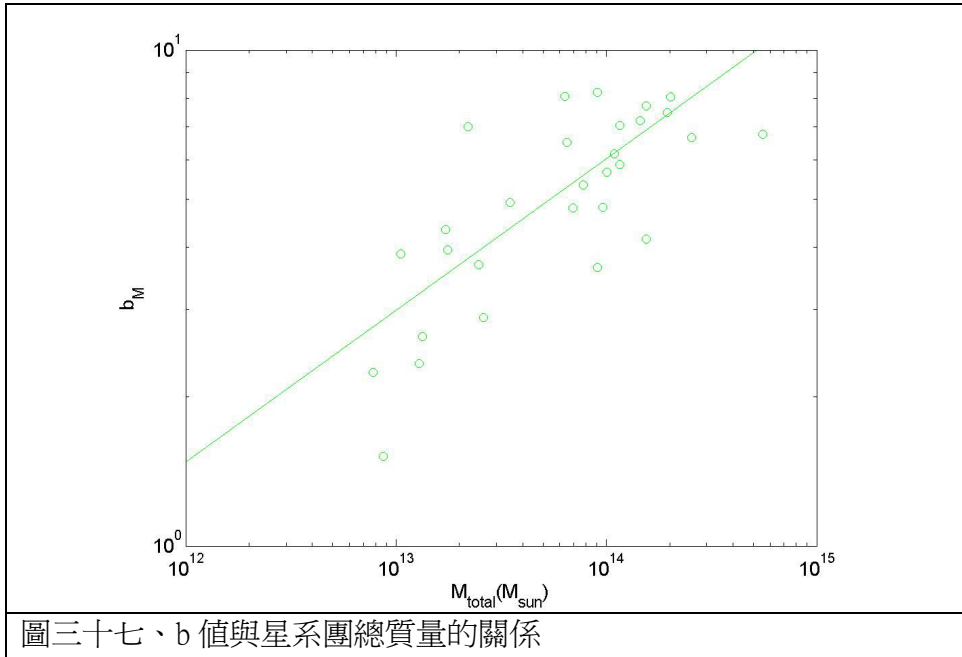
觀察其曲線的遞減趨勢，我們將兩座標取了 \log_{10} 得下圖：



圖三十六、無黑暗能量, Z=0, $\log_{10} r$ 對 $\log_{10} \rho$ 做圖

沒有黑暗能量的宇宙中形成的星系團 在 Z=0 時的分析結果為： a 的平均值為 0.959，標準差為 0.050； c 的平均值為 -0.757，標準差為 0.103。

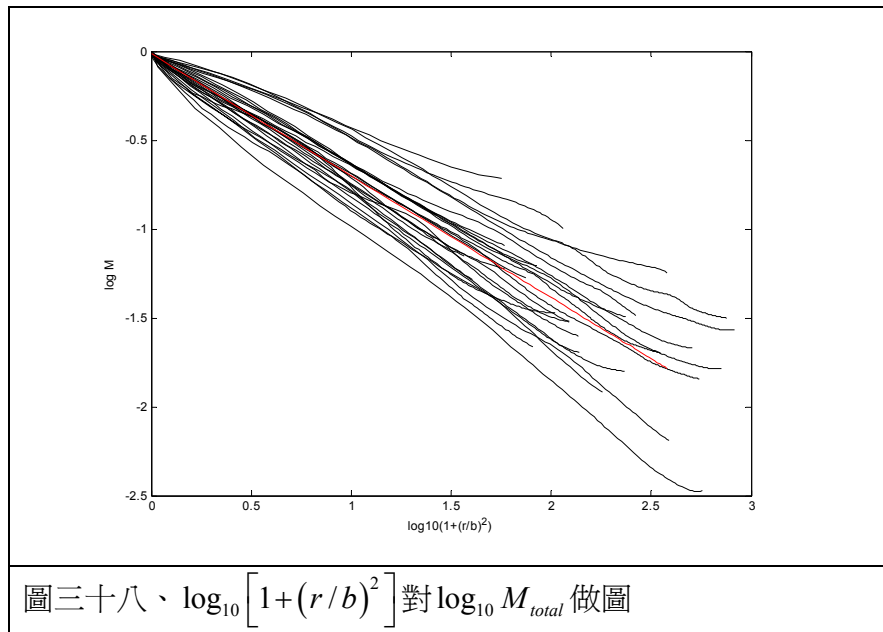
另外，我們更進一步探討 b 值與星系團總質量的關係，下圖的縱座標是 b ，橫座標是質量(單位太陽質量)，在兩邊取 \log_{10} 過後如下圖：



由上圖中的明顯線性帶狀分布，可算出其 b 值 (b_M) 與星系團總質量的關係為：

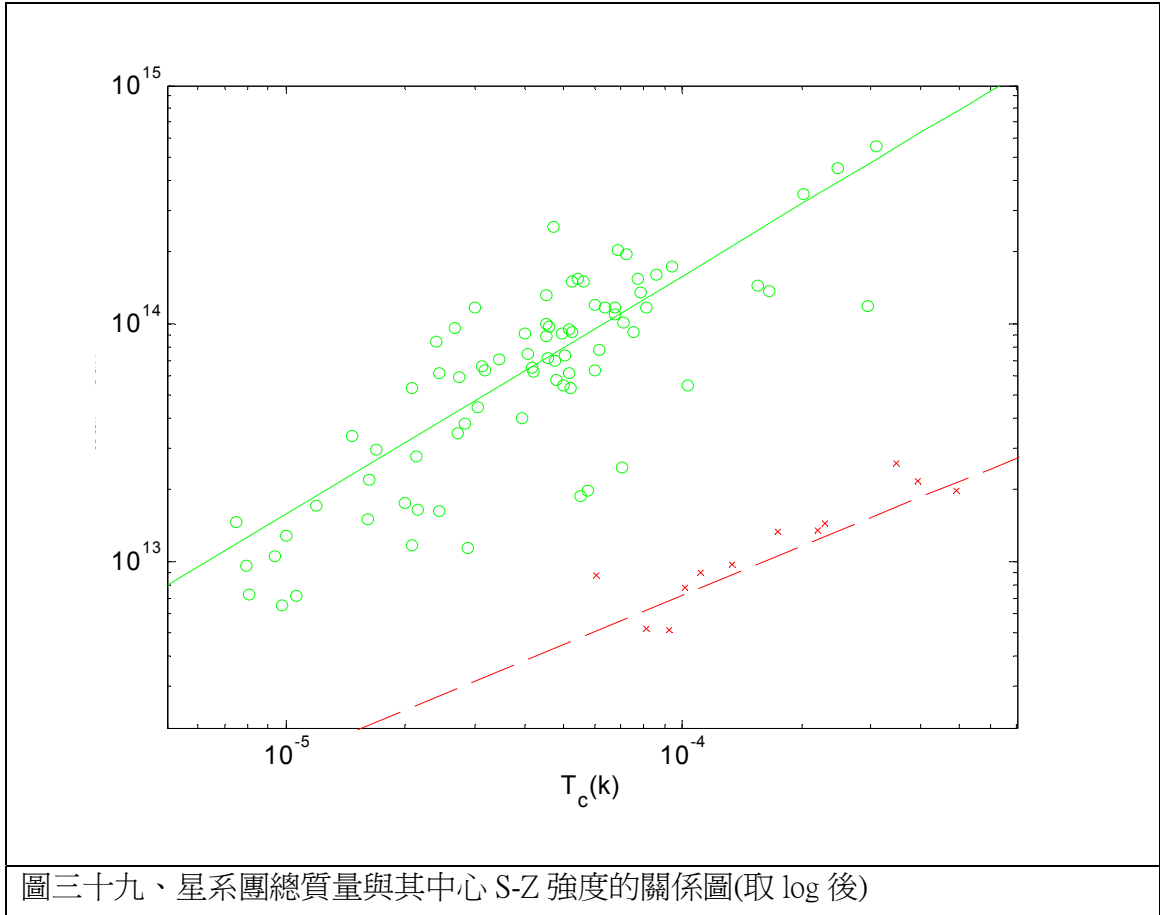
$$b_M = 10^{-3.50 \pm 0.77} \times M_{total}^{0.306 \pm 0.056} \quad (\text{公式 8})$$

以橫座標為 $\log_{10} [1 + (r/b)^2]$ (b 值來自 (公式 8))，縱座標為 $\log_{10} M_{total}$ (實際模擬的數值) 的圖形來驗證 a 和 c 的準確度，得下圖，其中紅線是由 a 和 c 的平均值畫出。



三、 星系團總質量與其中心 S-Z 強度的關係

下圖的縱座標是質量(單位太陽質量)，橫座標是 ΔT (單位 k)，其中所取的時間點除 $Z=0$ 外，並增加了 $Z=0.35$ 和 $Z=0.46$ 以增加樣本數。由於做出來其結果並沒有線性關係，所以我們將兩邊取了 \log_{10} 。綠色：有黑暗能量的宇宙之星系團 紅色：無黑暗能量的宇宙之星系團。



圖三十九、星系團總質量與其中心 S-Z 強度的關係圖(取 log 後)

由上圖中的明顯線性帶狀分布，可算出有黑暗能量的宇宙形成之星系團總質量與其中心 SZ 溫度(ΔT_C)的關係為：

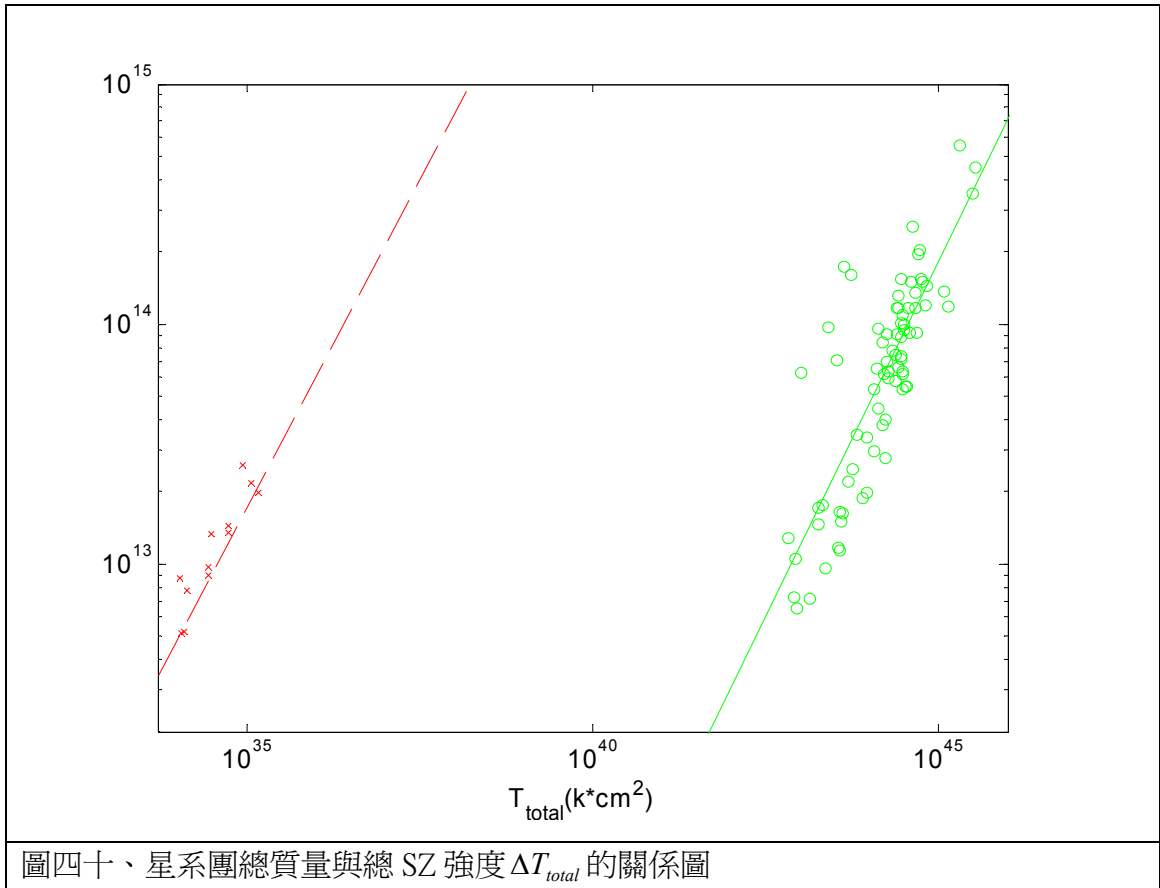
$$M_{total} = 10^{18.2 \pm 0.4} \times \Delta T_C^{1.00 \pm 0.081} \quad (\text{公式 9})$$

無黑暗能量的宇宙形成之星系團總質量與其中心溫度(ΔT_C)的關係為：

$$M_{total} = 10^{15.6 \pm 1.1} \times \Delta T_C^{0.69 \pm 0.29} \quad (\text{公式 10})$$

四、 星系團總質量與總 SZ 強度的關係

下圖的縱座標是質量(單位太陽質量)，橫座標是 ΔT (單位為 $k \times cm^2$)，其中所取的時間點除 $Z=0$ 外，並增加了 $Z=0.35$ 和 $Z=0.46$ 以增加樣本數。由於做出來其結果並沒有線性關係，所以我們將兩邊取了 \log_{10} 。綠色：有黑暗能量的宇宙之星系團 紅色：無黑暗能量的宇宙之星系團。



圖四十、星系團總質量與總 SZ 強度 ΔT_{total} 的關係圖

由上圖中的明顯線性帶狀分布，可算出有黑暗能量的宇宙形成之星系團總質量與其總 ΔT (ΔT_{total})的關係為：

$$M = 10^{-12.4 \pm 2.0} \times \Delta T_{total}^{0.593 \pm 0.046} \quad (\text{公式 11})$$

無黑暗能量的宇宙形成之星系團總質量與其總 ΔT (ΔT_{total})的關係為：

$$M = 10^{-5.88 \pm 4.11} \times \Delta T_{total}^{0.547 \pm 0.119} \quad (\text{公式 12})$$

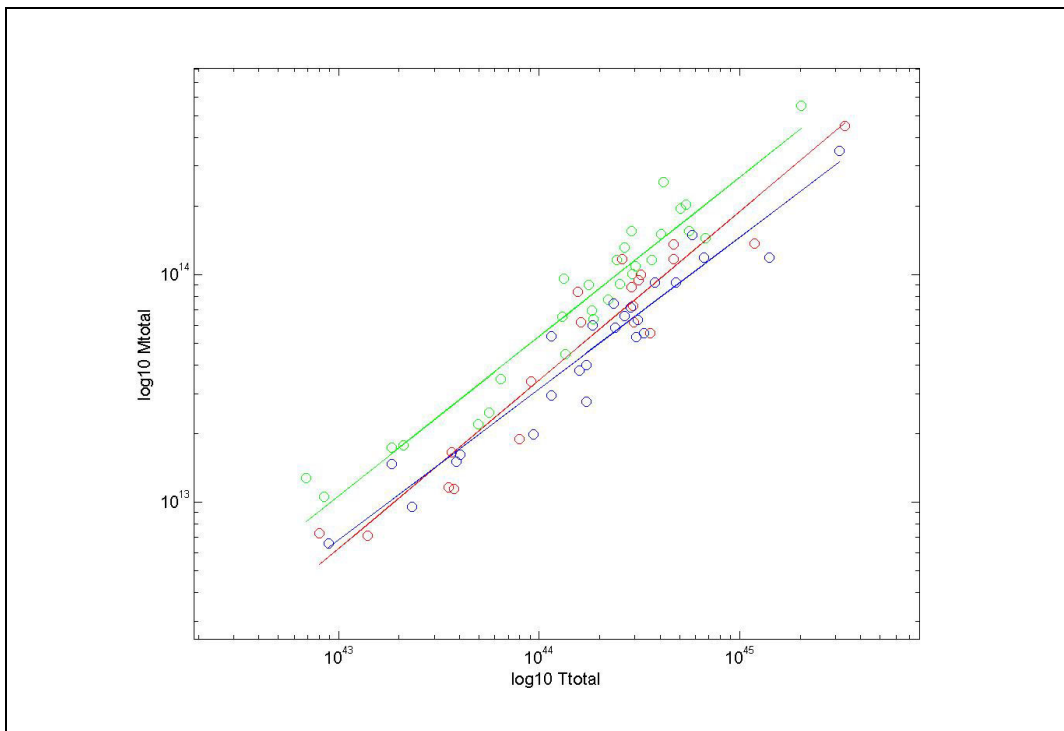
五、 S-Z 效應與時間的關係

我們採用(一)和(二)的研究方法，計算時間在 $Z=0.35$ 和 $Z=0.46$ 的結果，取所有星系團的 a 和 c 分別在三個時間的平均值，如下表：

	a_T	c_T	a_M	c_M
$Z=0$	0.99 ± 0.02	-1.01 ± 0.14	0.94 ± 0.03	-0.71 ± 0.07
$Z=0.35$	0.96 ± 0.02	-1.00 ± 0.28	0.97 ± 0.02	-0.72 ± 0.10
$Z=0.46$	0.97 ± 0.02	-1.00 ± 0.23	0.97 ± 0.02	-0.69 ± 0.09

由以上結果可看出，時間對 a 和 c 沒有影響。

接著，我們採用(四)的研究方法，計算時間在 $Z=0.35$ 和 $Z=0.46$ 的結果，以橫座標為 ΔT (單位為 $k \times cm^2$)，縱座標為質量(單位太陽質量)，在取過 \log_{10} 後如下圖：



圖四十一、星系團總質量與總 SZ 強度 ΔT_{total} 在三個時間的關係圖

$$Z = 0 \quad (\text{綠色}) \text{ 的關係式為: } M_{total} = 10^{-17.1 \pm 2.7} \times \Delta T_{total}^{0.70 \pm 0.04} \quad (\text{公式 13})$$

$$Z = 0.35 \text{ (紅色) 的關係式為: } M_{total} = 10^{-19.1 \pm 2.3} \times \Delta T_{total}^{0.74 \pm 0.05} \quad (\text{公式 14})$$

$$Z = 0.46 \text{ (藍色) 的關係式為: } M_{total} = 10^{-15.8 \pm 1.8} \times \Delta T_{total}^{0.67 \pm 0.04} \quad (\text{公式 15})$$

肆、討論

- 一、由模擬出的四個宇宙之比較，星系團演化的後期之 S-Z 效應的高溫區會比星系演化前期來的集中，又對照粒子分布圖，發現前者的粒子亦有逐漸集中的現象，這是因為粒子較集中的區域其電子溫度較高，而根據（公式 2）可知，其 S-Z 效應也因而較強。
- 二、在質量較小的星系團中，其星系團的高溫區溫度比質量較大的星系團來的低，其原因同上。
- 三、本分析中所選的星系團之大小及質量均符合觀測。
- 四、第四個宇宙以 F5 編號是因為原先使用的 F4 宇宙的質量過大，粒子數過少，而致每個粒子的質量超過一個星系，有許多不正常的現象發生。但在增加粒子數後(F5)，此現象已獲得明顯改善。
- 五、茲就『伍、研究結果』中之四項主要分析，分別討論如下：
 1. 與星系團中心距離和 S-Z 強度的關係：
詳下(請見以下(二)中之綜合討論)
 2. 與星系團中心距離和質量密度的關係：
 - (1) a 的平均值相當接近 1，符合以最高溫中心項四周取同心圓計算溫度的模型。
 - (2) c 值描述了溫度和質量密度隨著與中心距離的增加而快速遞減的現象，相對描述了星系團粒子和溫度的集中情形。
 - (3) 圖二十七~圖三十、圖三十三~圖三十六中，其曲線有些微不正常的突起和下降，推測這是因為星系團附近仍有其他較小的結構，在計算時一併影響到結果，或者兩個星系團過於靠近，而有互相影響的現象，所以在選取範圍時，對資料範圍有加以取捨而致；也因此我們所注重的是靠近星系團中心部份的變化，過於外圍的部分可以加以省略。
 - (4) 圖三十二和圖三十八的驗證之所以無法完全與紅線密合，推測是因為 c 值也受到星系團總質量或者其他因素的影響而有所差異，還需要做進一步探討，密合的程度就會提高，所以 $a \left[1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]^c$ 這個數學模型仍然是一個適合描述這種關係的模型。
 - (5) 在清楚了解 a 、 b 、 c 三者後，將來觀測上若能得到星系團的質量或密度，即可透過 b 值和 c 值的運用得到其總質量和此星系團隨著半徑增加其各點質量和溫度的分布關係。
 3. 星系團總質量與其中心 S-Z 強度的關係：
由此計算出的公式，在觀測技術進步後，若能得到一個星系團中心的 S-Z 效應強度(轉換為溫度)，即可得到此星系團的總質量。
 4. 星系團總質量與總 ΔT 的關係：
 - (1) 圖四十的分布比圖三十九更為接近線性，因此其線性模型可較準確地描述此模擬結果。所以在觀測上，可利用（公式 11）或（公式 12）求得星系團總質量。
 - (2) 由於每個星系團開始演化的時間並不相同，所以增加時間點並不是為了增加較年輕的星系團，而是為了增加更多不同演化階段的樣本。

- 六、 以上所得到的結果應與觀測結果加以比較 (例如：利用 (公式 11) 及 (公式 12) 得到的星系團總質量、實際星系團是否符合 $a \left[1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]^c$ 、 b 值和 c 值等)，若與其他觀測方式所得到的資料符合，即表示我們目前所採信的宇宙模型和宇宙參數，又獲得進一步地驗證；若不符，則表示我們目前對宇宙的了解，仍需要修正並作進一步地探討。
- 七、 以下是我們未來可從事的進一步研究及探討：
1. 探討 S-Z 效應和星系團演化階段的關係。
 2. 探討 S-Z 效應和星系團與地球的距離關係。

伍、結論與應用

本研究藉由電腦的多體模擬及分析等技術，獲得以下關於星系團的結論：

- 一、 星系團演化的後期之 S-Z 效應會比演化前期來得集中。
- 二、 S-Z 效應只出現在宇宙中密度高的區域，也就是星系團所在的區域。
- 三、 星系團的 S-Z 效應之強度 $\Delta T(r) = \Delta T(0) \left[1 + (r/b)^2 \right]^c$ ，其中 r 為至星系團中心的距離， $c = -1.24 \pm 0.28$ ， $b_c = 10^{-4.73 \pm 1.08} \times M_{total}^{0.410 \pm 0.079}$ ， M_{total} 為星系團總質量。
- 四、 星系團的質量密度 $\rho(r) = \rho(0) \left[1 + (r/b_M)^2 \right]^{c_M}$ ， $c_M = -0.686 \pm 0.115$ ，且 $b_M = 10^{-3.50 \pm 0.77} \times M_{total}^{0.306 \pm 0.056}$ 。
- 五、 有黑暗能量的宇宙形成之星系團總質量與其中心溫度的關係為： $M = 10^{18.2 \pm 0.36} \times \Delta T_C^{1.00 \pm 0.08}$ ；無黑暗能量的宇宙形成之星系團總質量與其中心溫度的關係為： $M = 10^{15.6 \pm 1.1} \times \Delta T_C^{0.69 \pm 0.29}$ 。
- 六、 有黑暗能量的宇宙形成之星系團總質量與其總積分 ΔT (ΔT_{total}) 的關係為： $M = 10^{-12.4 \pm 2.0} \times \Delta T_{total}^{0.59 \pm 0.05}$ 無黑暗能量的宇宙形成之星系團總質量與 ΔT_{total} 的關係為： $M = 10^{-5.88 \pm 4.11} \times \Delta T_{total}^{0.55 \pm 0.12}$
- 七、 相同質量之星系團，於較早期形成者，其總 S-Z 效應較強。
- 八、 以後將可根據以上的結果，來推算出所觀測到之 S-Z 星系團的質量。

以上這些研究成果，將可在短期的未來，直接應用在許多期待中的國內、外之觀測結果上，以揭開星系團的神祕面紗。

陸、參考資料

A.Jenkins, C.S.Frenk, F.R.Pearce, P.A.Thomas, J.M.Colberg, S.D.M.White, H.M.P Couchman, J.A.Peacock, G.Efstathiou, and A.H.Nelson (The Virgo Consortium), (1998) 'Evolution of Structure in Cold Dark Matter Universes' *Astrophysical Journal*,499,20-40.

Barber A. J.,(2002), 'The redshift and scale dependence of the cosmic shear signal from numerical simulations' , *MNRAS*, 335, 909 (astro-ph/0108273).

Barber A. J. and Taylor A. N., (2003), 'Shear and magnification angular power spectra and higher-order moments from weak gravitational lensing' , *MNRAS*, 344, 789 (astro-ph/0212378).

Carlstrom, J.E., Holder, G.P., Reese, E.D. (2002) 'Cosmology with the Sunyaev-Zel'dovich Effect' , *Ann.Rev.Astron. Astrophys.* 40, 643

Chiueh, T.H., Wu, J.H.P (2002) 'Array for Microwave Background Anisotropy: A Frontier Microwave-Background Telescope' , *A.A.P.P.S. Bulletin*, 12, 21

Hydra website: <http://coho.physics.mcmaster.ca/hydra>

Jones,C.& Fprman W. (1984)*ApJ*. 276,384

Kolb, E.W., Turner, M.S., 'The Early Universe' , 2nd Ed., Addison-Wesley Publishing Company, 383, 1994

P.A.Thomas,J.M.Colberg,H.M.P Couchman, G.Efstathiou, C.S.Frenk, A. Jenkins, A.H.Nelson, R.M.Hutchinhgs, J.A.Peacock, F.R.Pearce, S.D.M.White, (1998), 'The structure of galaxy clusters in various cosmologies' , *MNRAS*,296,1061

Runyan, M.C., et al. (2003) 'ACBAR: The Arcminute Cosmology Bolometer Array Receiver' , *Astrophys. J. Suppl.*, 149, 265

Silva, A.C., Barbosa, D., Liddle, A.R., Thomas, P.A. (2000) 'Hydrodynamical simulations of the Sunyaev-Zel'dovich effect' , *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 317, 37

Spergel, D.N. et al. (2003) 'First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters' , *Astrophys.J.Suppl.* 148, 175

T.Theuns, A.Leonard, J.Schaye, G.Efstathiou, F.Pearce, and P.Thomas (1998) 'P3M-SPH simulations of the Ly-alpha forest' , *MNRAS*,301,478

附件

自行撰寫計算 S-Z 效應的溫度變化量 ΔT 的 C 語言程式碼如下：

```

#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include<math.h>

#define MAPSIZE 1024
#define HHBOTTOM 5500.0
#define BALLSIZE 401

extern double sqrt();

double tempd4;
double W(double X, double hi)

{
    double W,H;
    if(X<=1.0)
        H=4.0-6.0*X*X+3.0*X*X*X;
    else if((X>1.0)&&(X<=2.0))
        H=(2.0-X)*(2.0-X)*(2.0-X);
    else if(X>2.0)
        H=0.0;
    W=H ;
    return W;
}
/*此段為計算公式 4 中 W 值的函數*/

int main(void)
{
int nxl,nxr,nyl,nyr,nzl,nzr,aa,i,j,k,o,V,i1,j1,k1,times, idx,idx1;
char filenamer[256],filenamee[256],filenameehh[256],filename[256];
double x,y,z,hi,X,h,Mpc,dif1,dif2;
double lb,bxl,bxr,byl,byr,bzl,bzr,msun,mratio,vratio;
double l0,me,mp,kb,sigmaT,c,T,X2,g,hp,E, tempd1,tempd2,tempd3, const1, const2;
double boxsize,mgas,r[3],e,a[34],hh,deltaT,deltaT0,Y[MAPSIZE+2][MAPSIZE+2];
double ball[BALLSIZE+2][(BALLSIZE-1)*2+3],dd1,dd2,dd3;
float bb,cc1,cc2,cc3;
FILE *fptr1,*fptr2,*fptr3,*fptr4;
h=7.1e-1; /*哈伯常數*/
Mpc=3.086e24; /*長度單位*/
boxsize=(70.0/h*Mpc); /*箱子大小*/
mgas= 0.166666672; /*gas 的質量*/
vratio=705105723.0; /*速度單位換算*/
mratio=1.37398219E+11; /*質量單位換算*/
lb=1.0/((double)MAPSIZE);/*小箱子邊長*/
l0=lb/2.0; /*小箱子的中心*/
me=9.1e-28; /*電子質量*/
mp=me*1840.0; /*質子質量*/
msun=2.0e33; /*太陽質量*/
kb=1.38e-16; /*波茲曼常數*/
sigmaT=6.65e-25; /*Thomson scattering cross section */
c=3.0e10; /*光速*/
E=(kb*sigmaT/(me*c*c))*(boxsize/((double)MAPSIZE));
hp=6.62618e-27; /*普朗克常數*/

```

```

tempd4=boxsize;
tempd4=tempd4*tempd4*tempd4;
const1=(2.0e-24)*(vratio*vratio)/(3.0*kb);
const2=E* (mgas*msun*mratio)*0.88 / mp;

for(i=0;i<BALLSIZE;i++){
    tempd1=((double)i)/(((double)(BALLSIZE-1))/2.0);
    for(j=0;j<(BALLSIZE*2-1);j++){
        tempd2=((double)j)/(((double)(BALLSIZE-1))/2.0)-2.0;
        X=sqrt(tempd1*tempd1+tempd2*tempd2);
        ball[i][j]=W(X,1.0);
    }
}
for(i=0;i<BALLSIZE;i++){
    for(j=1;j<(BALLSIZE*2-1);j++){
        ball[i][0] += ball[i][j];
        ball[i][0] *= const2/(4.0*tempd4*M_PI);
    }
}
for(V=20;V>=0;V--){
if(V==0){
fptr1=fopen("r0000","r");
fptr2=fopen("e0000","r");
fptr3=fopen("hh0000","r");
}
if (V==1){
fptr1=fopen("r0050","r");
fptr2=fopen("e0050","r");
fptr3=fopen("hh0050","r");
}
if (V==2){
fptr1=fopen("r0100","r");
fptr2=fopen("e0100","r");
fptr3=fopen("hh0100","r");
}

/*中間略過*/

if (V==19){
fptr1=fopen("r0950","r");
fptr2=fopen("e0950","r");
fptr3=fopen("hh0950","r");
}
if (V==20){
fptr1=fopen("r0969","r");
fptr2=fopen("e0969","r");
fptr3=fopen("hh0969","r");
}

printf("V=%d ", V);
for(i=0;i<MAPSIZE;i++)
for(j=0;j<MAPSIZE;j++)
    Y[i][j]=0.0;
for(o=0;o<262144;o++)
{
    fscanf(fptr1,"%f%f%f",&cc1,&cc2,&cc3);
    r[0]=(double)cc1;
    r[1]=(double)cc2;
    r[2]=(double)cc3;
}

```

```

fscanf(fptr2,"%f", &cc1);
e=(double)cc1;

fscanf(fptr3,"%f", &cc1);
hi=(double)cc1;
if (o%10000 ==0)
printf("%d ", o); fflush(stdout);

bxl=r[0]-2.0*hi;
bxr=r[0]+2.0*hi;
byl=r[1]-2.0*hi;
byr=r[1]+2.0*hi;

nxl=(int)floor(bxl/lb);
nxr=(int)ceil(bxr/lb);
nyl=(int)floor(byl/lb);
nyr=(int)ceil(byr/lb);

/*計算每個雲氣球所會影響到的箱子*/
T=e*const1;
for(i=nxl;i<nxr+1;i++)
{
    tempd1=l0+((double)i)*lb-r[0];
    i1=i;
    if(i1<0) i1 += MAPSIZE;
    if(i1>MAPSIZE-1) i1 -= MAPSIZE;

for(j=nyl;j<nyr+1;j++)
{
    tempd2=l0+((double)j)*lb-r[1];
    X=sqrt(tempd1*tempd1+tempd2*tempd2)/hi;/*計算 W 函數中需要的 x*/
    if(X<=2){
        dd1 = (X*(((double)BALLSIZE)-1.0)/2.0);
        idx = (int)dd1;
        dif1 = dd1 - floor(dd1);
        dif2 = 1.0 - dif1;
        dd2 = ball[idx][0]*dif2+ball[idx+1][0]*dif1;
    }else{
        dd2=0.0;
    }
    j1=j;
    if(j1<0) j1 += MAPSIZE;
    if(j1>MAPSIZE-1) j1 -= MAPSIZE;
    Y[i1][j1]=Y[i1][j1]+(hi/lb)/((double)BALLSIZE) * T*dd2/(hi*hi*hi);
}
}/*計算正比於電子發生散射的機率 y*/
}

fclose(fptr1);
fclose(fptr2);
fclose(fptr3);

X2=hp*1.0e11/(kb*2.7);/*計算與 CMB 頻率溫度有關的 x 值*/
g=(X2*(exp(X2)+1.0)/(exp(X2)-1.0))-4.0;/*將上方 x 值帶入 g(x)函數*/

FILE *output;

if(V==0)

```

```

output=fopen("output0000.txt","w");
if (V==1)
output=fopen("output0050.txt","w");

/*中間略過*/

if (V==19)
output=fopen("output0950.txt","w");
if (V==20)
output=fopen("output0969.txt","w");

for(i=0;i<MAPSIZE;i++)
{
for(j=0;j<MAPSIZE;j++)
{
deltaT=2.7*g*Y[i][j];
fprintf(output, "%e ", deltaT);
}
fprintf(output, "\n");
}
fclose(output);
printf("\n");
}
}/*計算溫度變化量  $\Delta T$  並輸出*/

```

Magic Mirror for Galaxy Clusters

Hsin-Yu Chen

Question being addressed

To understand the universe has been a challenging task for centuries. Equipped with modern technology and new cosmological models, we have enhanced our knowledge about the cosmos much better than ever in the past decade. Among the new development, the Sunyaev-Zel'dovich (S-Z) effect in the Cosmic Microwave Background (CMB) has theoretically proven to be very useful in investigating the galaxy clusters. However, constrained by the computation power and by the observational technology, the detailed study of the S-Z effect has always been quite limited. With detailed simulations of the S-Z effect employing the modern computation power, will the forthcoming CMB observations provide important information not only for the galaxy clusters but also for the universe? If yes, such information may be complementary to that from traditional observational methods.

Hypothesis and Goals

The CMB is the primary photons coming from the Big Bang. Before the photons reach us, they may have interacted with the contents in the universe along the paths, and thus have recorded the cosmic evolution history. One possibility is that the photons interacted with the ionized electrons in the cores of galaxy clusters through the inverse-Compton scattering. This would result in the heating up of the photons along the line of sight of an observer, and this is called the S-Z effect. This effect may have not only recorded the information about galaxy clusters but also encoded some intrinsic properties of the cosmos, such as the energy densities of the dark matter and of the dark energy. If the S-Z effect has pronounced dependence on the intrinsic properties of the clusters and the universe, we may use it as a tool via which to study them.

Tools used

Software: HYDRA, C code, Matlab, FOF

Hardware: Sun Blade 2000 work station, Pentium personal computer

Theory

CMB originated roughly four hundred thousand years after the Big Bang. It is made up of photons released during the cooling down of the Universe. If these photons passed through the high-temperature cores of galaxy clusters in the past fourteen billion years, they would absorb energy from the high-temperature ionized electrons via the inverse Compton scattering. Their energy distribution would then depart from the typical Planck distribution of blackbody radiation. This deviation is called the S-Z effect (Fig. 1).

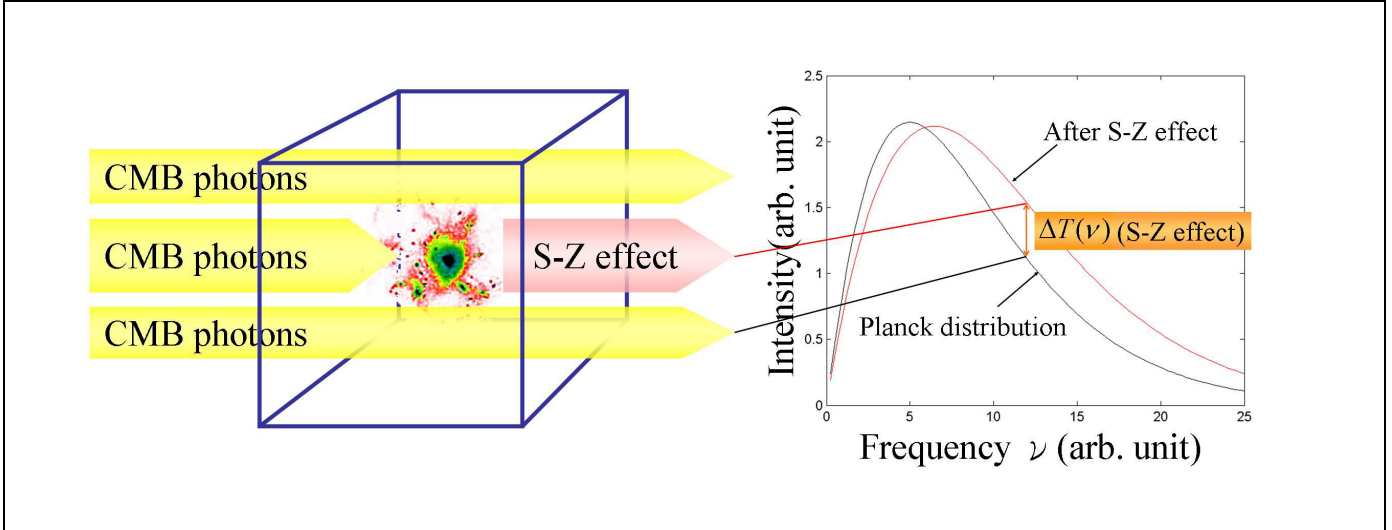


Fig.1

If we define the original CMB temperature as T_0 , and the temperature change due to the S-Z effect as ΔT , then the S-Z effect can be quantified by the following equation(Sunyaev R. A., Zel'dovich Ya. B.,1980):

$$\frac{\Delta T}{T_0}(\nu) = g(x)y \quad (1)$$

$$x = \frac{h\nu}{kT}, g(x) = \left(x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4\right), y = \frac{k\sigma_T}{m_e c^2} \int n_e T_e dl$$

y : Compton-y parameter	c : speed of light
ν : photon frequency	m_e : electron mass
n_e : electron number density	T : CMB temperature
T_e : electron temperature	σ_T : Thomson cross section
k : Boltzmann constant	h : Planck constant
l : length along the line of sight	

In our study, we will compute the Compton-y parameter to indicate the strength of the S-Z effect.

Methods

A. We used an N-body simulation program HYDRA to simulate several universes. HYDRA is widely used by astrophysicists to simulate the evolution of cosmic structure. It allows us to change the cosmological parameters. It incorporates gravity and hydrodynamics to simulate the formation of large-scale structure.

The initial time for the simulation is at redshift $z=19$. We used a Hubble constant of $71 \text{ km/s} \cdot \text{Mpc}$ ($1\text{Mpc} = 3.26 \times 10^6$ light year). At redshift larger than 19, the perturbations in the content of the Universe were very small, and it was in a linear regime. We can use a transfer function to transfer the initial perturbation to $z=19$. After $Z=19$, the Universe may enter the nonlinear regime, and we can no longer use this function. Our simulation should therefore start before the nonlinear regime, then use N-body simulation to estimate the evolution in the nonlinear regime.

We considered four different cases according to the relative portion of dark energy and dark matter. Through CMB observation in 2001, it was found that the total energy density of the universe Ω_{total} equals 1. Further with the observation of supernova in 1998, cosmologists found that with different choices of parameters: $\Omega_{DE} = 0.73$ and $\Omega_M = 0.27$. To verify it, we generated 10 universes with different choice of parameters

1. $\Omega_{DE} = 0.73$ $\Omega_{DM} = 0.225$ $\Omega_b = 0.045$
2. $\Omega_{DE} = 0.35$ $\Omega_{DM} = 0.605$ $\Omega_b = 0.045$
3. $\Omega_{DE} = 0$ $\Omega_{DM} = 0.955$ $\Omega_b = 0.045$

In all cases, Ω_{total} is set to 1.

HYDRA output a set of particles for dark matter and baryons with their positions, velocities, and temperatures.

B. We used C-code to simulate the S-Z effect from the output universes of HYDRA.

a. Calculate electron number density n_e

1. Due to the nature of the simulation, the mass distribution is necessarily discrete. Thus, to get a more realistic continuous mass distribution, we need to do some coarse graining. With each particle occupying a volume of radius $2h_i$, we used the following function to describe the spatial distribution of the masses of the particles:

$$W(x, h_i) = \frac{1}{4\pi h_i^3} \begin{cases} 4 - 6x^2 + 3x^3, 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)^3, 1 < x \leq 2 \\ 0, x > 2 \end{cases} \quad x = |\vec{r} - \vec{r}_i|/h_i \quad (2)$$

where \vec{r} is the position of the cube center, \vec{r}_i is the position of a particle.

Then the mass distribution around the particle in $2h_i$ equals $m_{gas} \times W$.

2. Next we attempt to calculate the electron number density n_e . The total mass of baryons in the Universe is mainly composed of protons and neutrons. Theoretically, when protons and neutrons combine to form hydrogen and helium, their ratio is 7:1. Since the Universe is electrically neutral, there would be the same number of electrons as protons. In other

words, there are 7/8 electrons for each baryon in the universe. We took this number to be roughly 0.88. We also assumed that all the electrons are ionized.

$n_e = \text{baryon number density} \times 0.88$

$$= \left(\frac{m_{\text{gas}} \times W}{m_p} \right) \times 0.88 \quad (3)$$

b. Calculate the electron temperature T_e

We assumed the temperature in the volume occupied by the particle is the same.

c. We used equation (1) to obtain the Compton-y parameter which describes the strength of S-Z effect in each cube, and summed the values up along the line of sight.

C. We used Matlab to draw the S-Z map, and implemented the following analysis:

- a. Profile of the S-Z effect for individual clusters
- b. Profile of mass density for individual clusters
- c. Total mass of galaxy clusters versus their central S-Z effect
- d. Total mass of galaxy clusters versus their integrated S-Z effect
- e. Dependence of S-Z effect on time

Results

We use redshift Z to describe the time. The larger the Z is, the earlier the Universe is.

We chose within these simulated universes a total of 42 galaxy clusters with masses ranging from 10^{13} to 10^{16} solar masses. Then we carried out the following analysis:

A. Profile of the S-Z effect for individual clusters

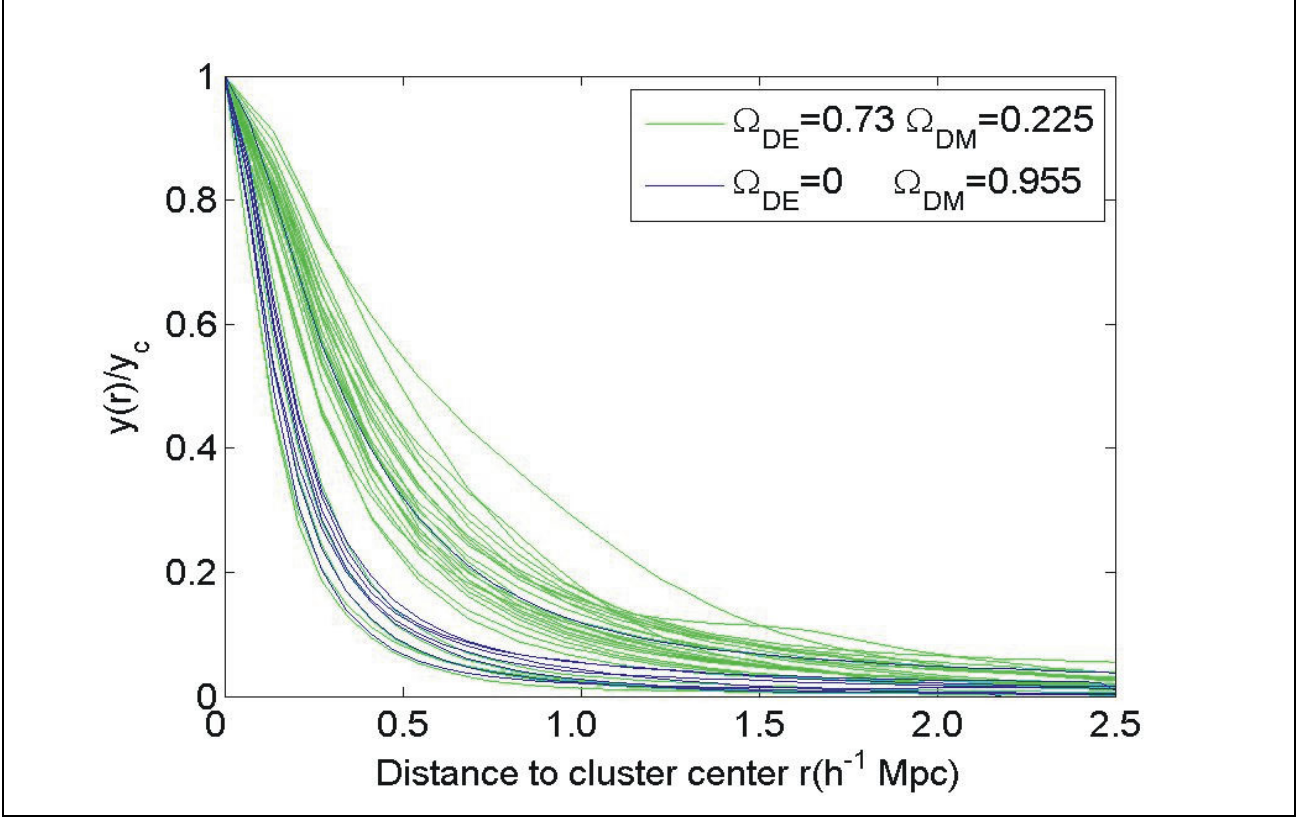


Fig.2 The strength of the S-Z effect as a function of distance to the center of a galaxy cluster

- We fitted the data to
$$\frac{y(r)}{y(0)} = \left[1 + \left(\frac{r}{b_y} \right)^2 \right]^{c_y} \quad (4)$$

$(\Omega_{DE}, \Omega_{DM})$	b_y	c_y
$(0.73, 0.225)$	$10^{-4.73 \pm 1.08} \times M_{total}^{0.40 \pm 0.08}$	-1.24 ± 0.28
$(0, 0.955)$	$10^{-2.48 \pm 1.14} \times M_{total}^{0.22 \pm 0.09}$	-1.10 ± 0.18

Table 1

In this equation, b gives the magnitude for the r when the temperature deviation starts to decay, and c indicates the level of this decay.

We have verified the accuracy of this fit, and fig.3 showed that our fitting formula is indeed accurate. The black line was drawn for the simulated data, while the red line was drawn using the formula with a and c taking their respective mean values.

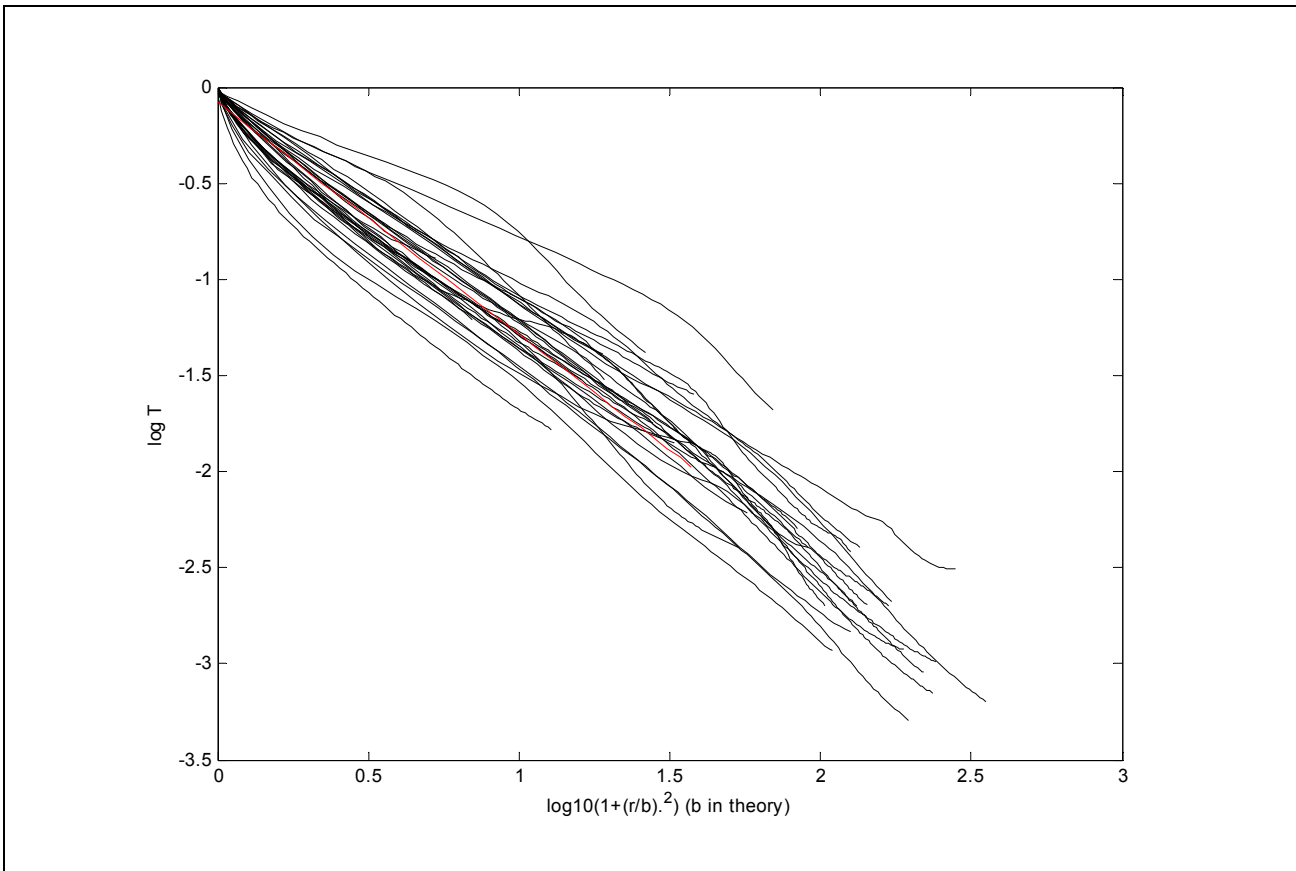


Fig.3 $\log_{10} \left[1 + \left(\frac{r}{b} \right)^2 \right]$ versus $\log_{10} \Delta T$

B. Profile of Mass density for individual clusters

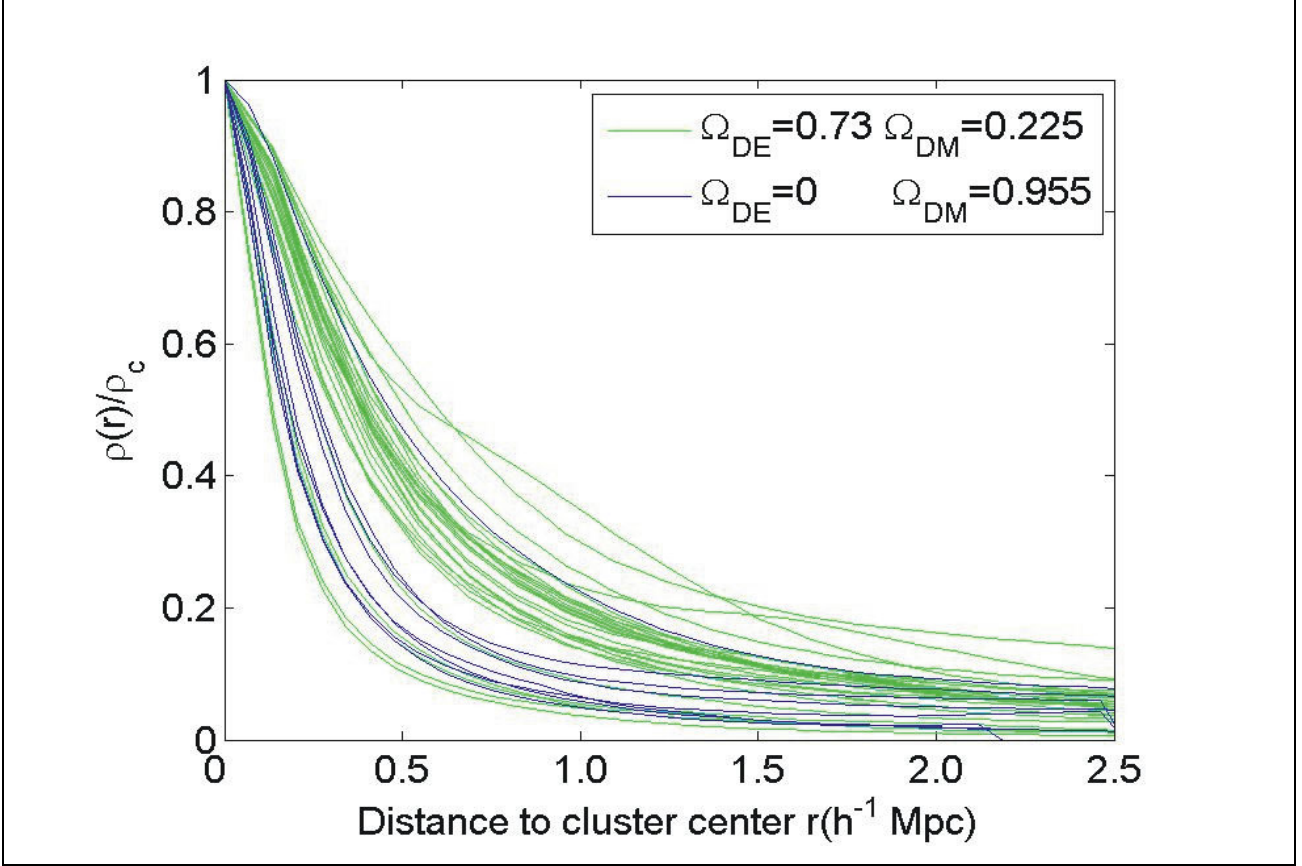


Fig.4 The mass density as a function of the distance to the center of a galaxy cluster

- We fitted the data to $\frac{\rho(r)}{\rho(0)} = \left[1 + \left(\frac{r}{b_M} \right)^2 \right]^{c_M}$ (5)

$(\Omega_{DE}, \Omega_{DM})$	b_M	c_M
(0.73, 0.225)	$10^{-3.50 \pm 0.77} \times M_{total}^{0.31 \pm 0.06}$	-0.69 ± 0.12
(0, 0.955)	$10^{-0.88 \pm 0.29} \times M_{total}^{0.10 \pm 0.02}$	-0.76 ± 0.10

Table 2

We have verified the accuracy of this fit, and fig.5 showed that our fitting formula is indeed accurate. The black line was drawn for the simulated data, while the red line was drawn using the formula with a and c taking their respective mean values.

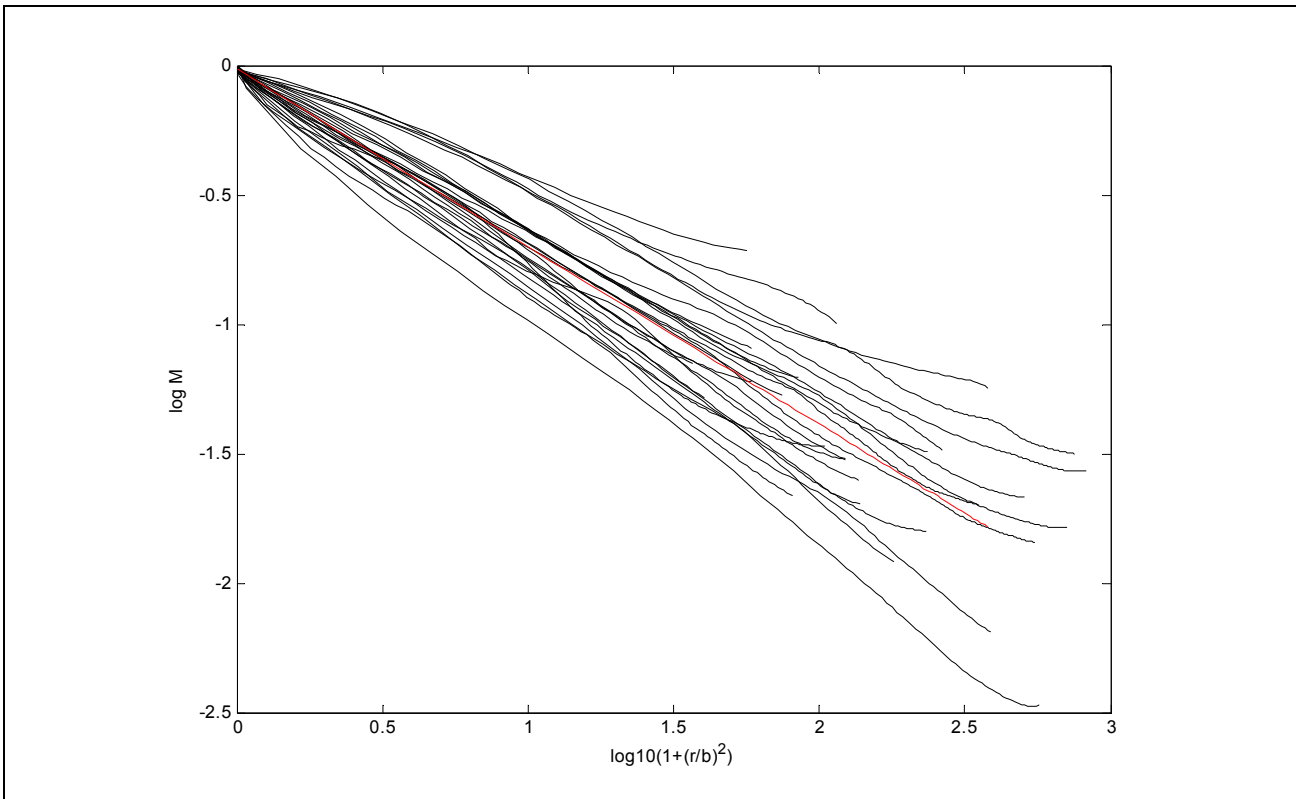


Fig. 5 $\log_{10} \left[1 + (r/b)^2 \right]$ versus $\log_{10} M_{total}$

C. Total mass of galaxy clusters versus their central S-Z temperatures

- We fitted the data to $M_{total} = y_c^m \times 10^{n_1}$ (6)

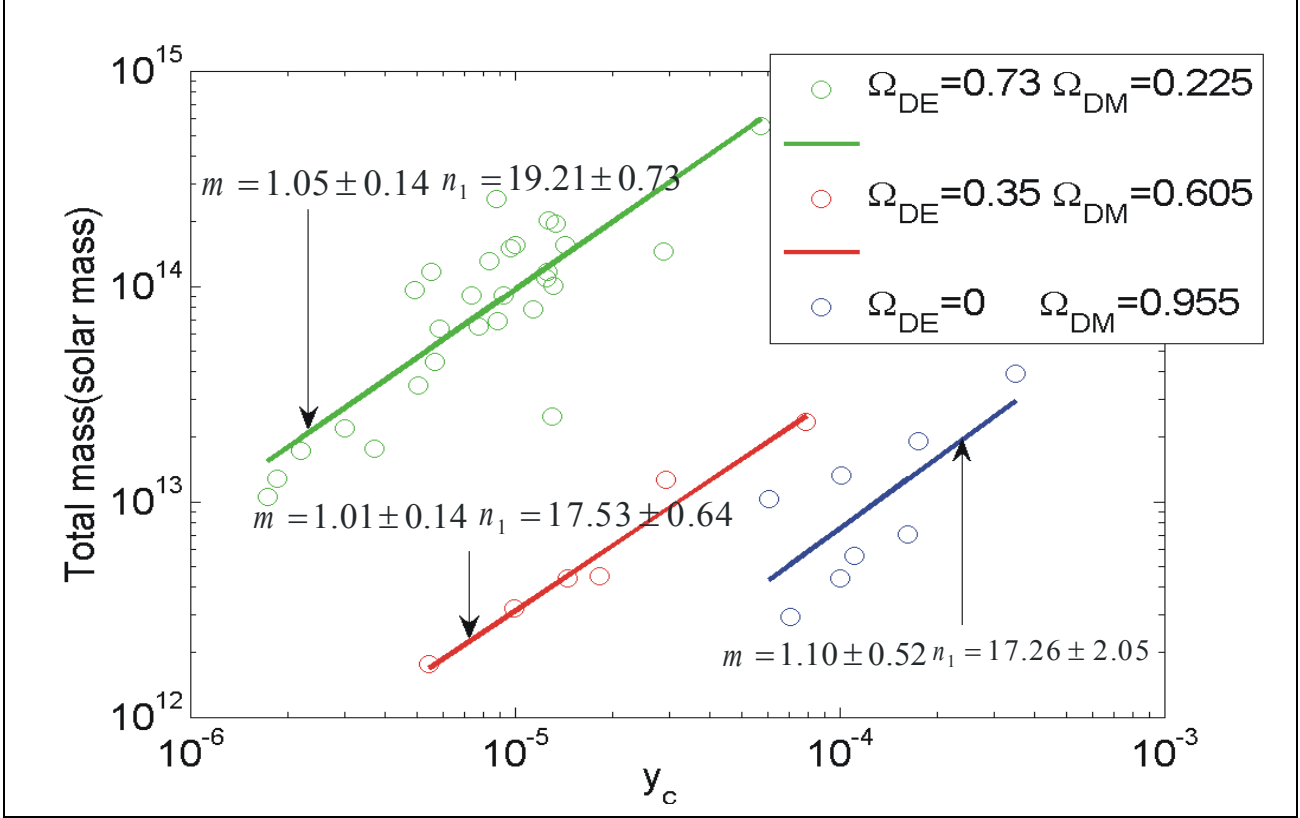


Fig. 6

$(\Omega_{DE}, \Omega_{DM})$	m	n_1
(0.73, 0.225)	1.05 ± 0.14	19.21 ± 0.73
(0.35, 0.605)	1.01 ± 0.14	17.53 ± 0.64
(0, 0.955)	1.10 ± 0.52	17.26 ± 2.05

Table 3

→ Table 3 shows that this result is dependent on the portion of dark energy and dark matter.

D. Total mass of galaxy clusters versus their integrated S-Z temperatures

● Data are fitted to: $M_{total} = y_{total}^{0.7} \times 10^{n_2}$ (7)

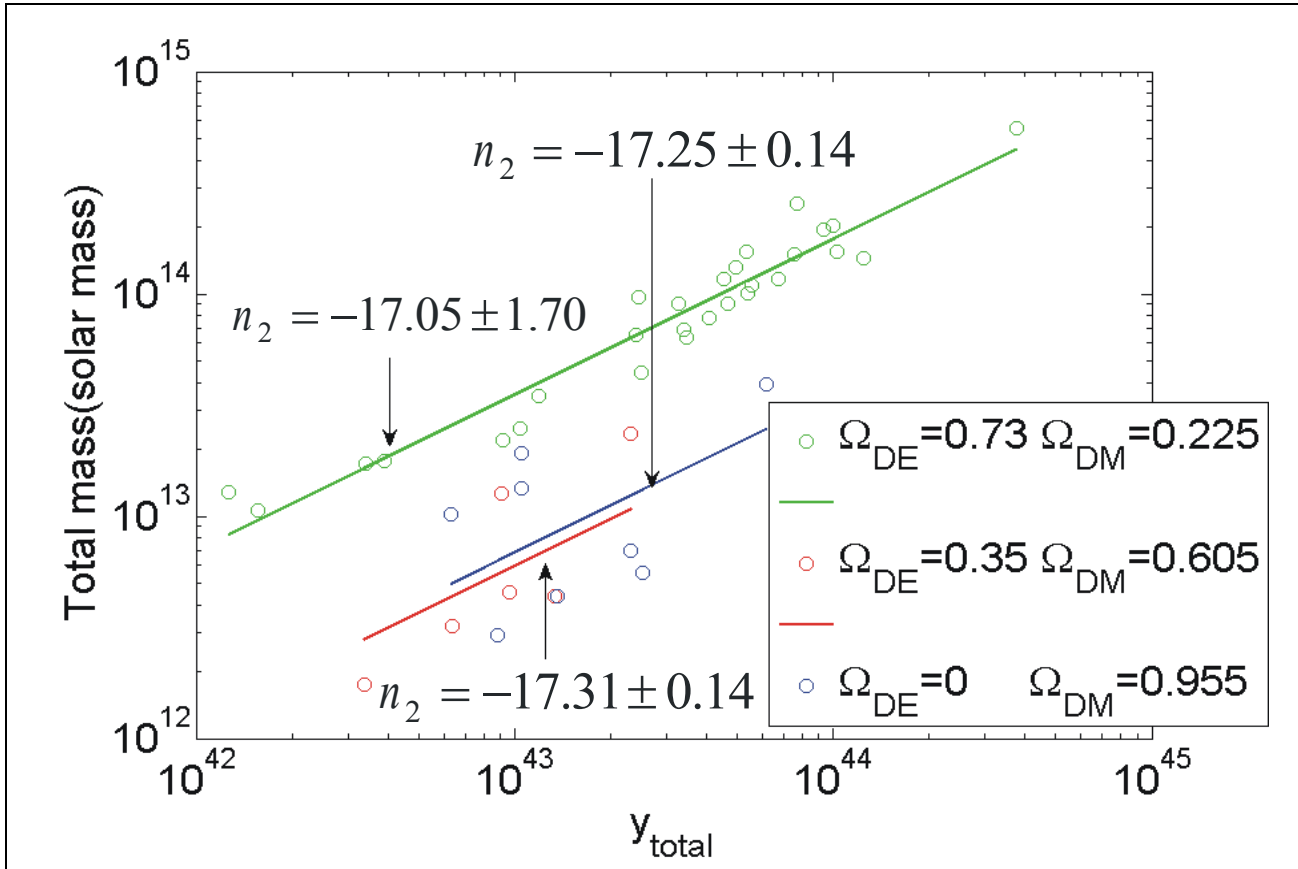


Fig.7

$(\Omega_{DE}, \Omega_{DM})$	n_2
(0.73,0.225)	-17.05 ± 1.70
(0.35,0.605)	-17.31 ± 0.14
(0,0.955)	-17.25 ± 0.14

Table 4

→ Table 4 shows that this result is dependent on the portion of dark energy and dark matter.

E. Time dependence of the S-Z effect

Time dependence of results A, B, and D

Redshift	c_y	c_M	n_2
0	-1.01 ± 0.14	-0.71 ± 0.07	-16.5 ± 1.7
0.35	-1.00 ± 0.28	-0.72 ± 0.10	-18.5 ± 2.3
0.46	-1.00 ± 0.23	-0.69 ± 0.09	-15.3 ± 1.8

Table 5

→ Table 5 shows that these results are time independent.

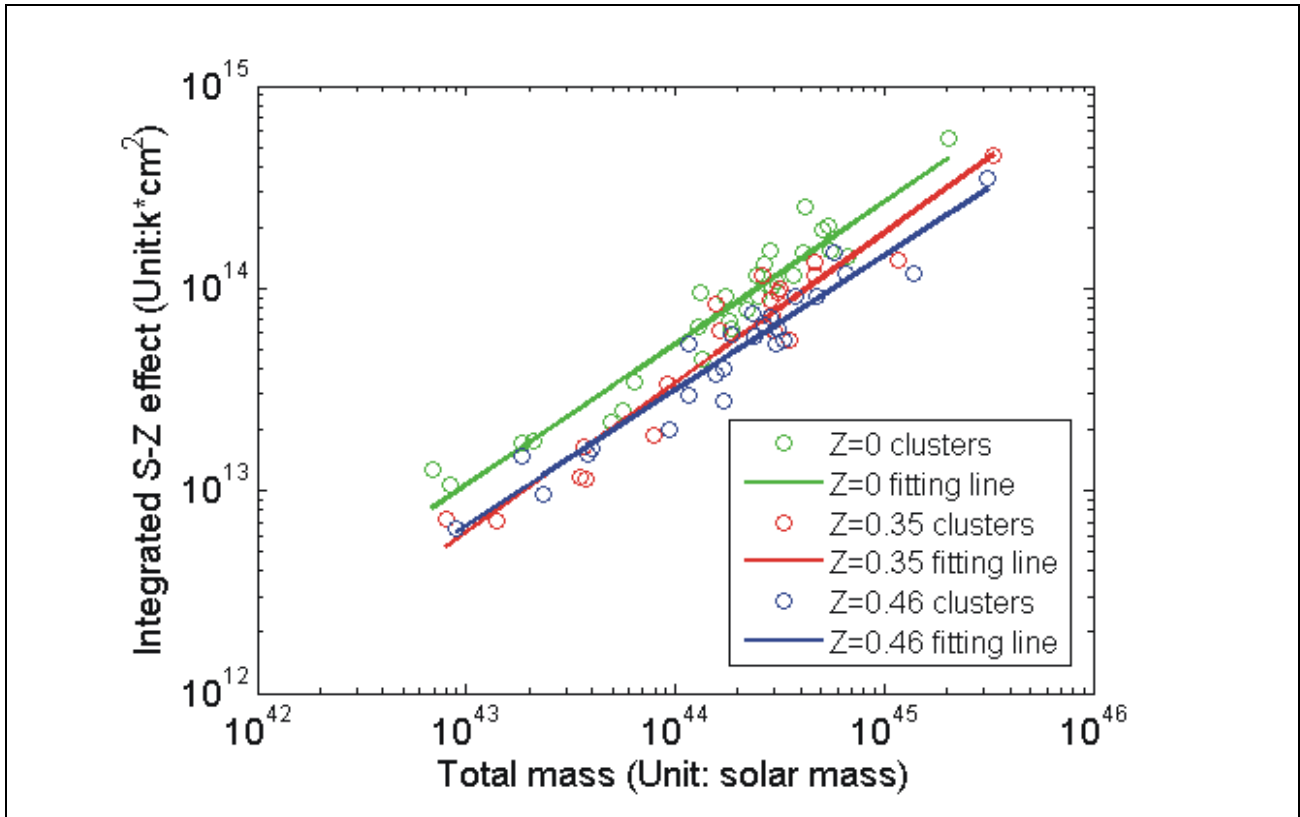
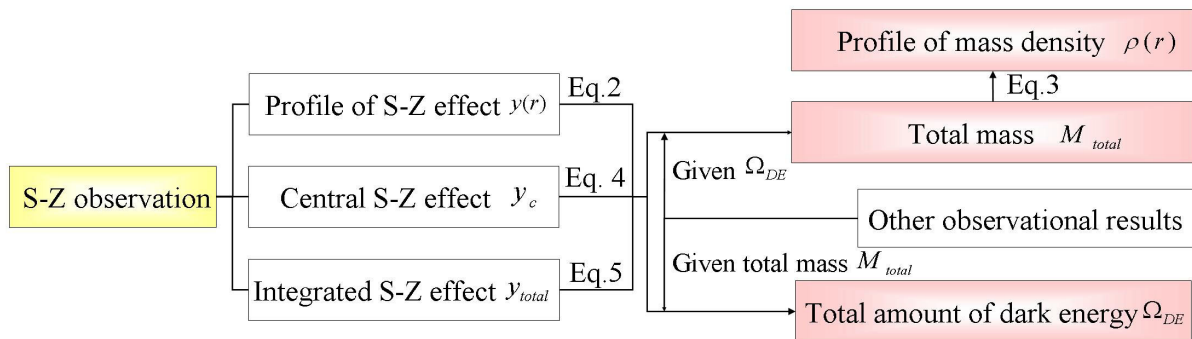


Fig. 8 Time dependence of results D

Discussion

- The parameter c in equations 1 and 2 indicates the level of clustering for the S-Z effect and the mass density of a cluster.
- When we obtain observational results in the near future, we will be able to do the following things:
 - Use equation 4, 6, and 7 to find Ω_{DE} from other observational results to obtain the total mass of galaxy cluster.
 - Substitute estimated total mass into equation 5 to get mass density profile of cluster.
 - Because results C and D are dependent on the portion of dark energy, we can compare our results with M_{total} from other observational results to obtain the total amount of dark energy in our Universe.



Conclusion

- Our project could be used to analyze the observation of the S-Z effect for galaxy clusters in the near future, thereby obtaining the following important information:
 - Profile of mass density for individual clusters
 - Total mass of a galaxy clusters
 - Total amount of dark energy in our Universe
- The following results are time independent:
 - Profile of S-Z effect for individual clusters
 - Profile of mass density for individual clusters
 - The relationship between total mass of galaxy clusters and their integrated S-Z effect

Future work

- Apply our results to future S-Z observations, such as AMiBA and APEX.
- Probe into the relationship between S-Z effect and formation stages of galaxy clusters.

References

- Carlstrom, J.E., Holder, G.P., Reese, E.D. (2002) 'Cosmology with the Sunyaev-Zel'dovich Effect', *Ann.Rev.Astron. Astrophys.* 40, 643
- Chiueh, T.H., Wu, J.H.P (2002) 'Array for Microwave Background Anisotropy: A Frontier Microwave-Background Telescope', *A.A.P.P.S. Bulletin*, 12, 21
- Hugh Couchman, Frazer Pearce, Peter Thomas, Rob Thacker (Hydra website: <http://coho.physics.mcmaster.ca/hydr>)
- Jones C. and Forman W. (1984) 'The Structure of Clusters of Galaxies observed with Einstein', *APJ*, 276, 38
- Silva, A.C., Barbosa, D., Liddle, A.R., Thomas, P.A. (2000) 'Hydrodynamical Simulations of the Sunyaev-Zel'dovich Effect', *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 317, 37
- Sunyaev R. A., Zel'dovich Ya. B., 1980, *ARA&A*, 18,537
- Spergel, D.N. et al. (2003) 'First Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters', *Astrophys.J.Suppl.* 148, 175

評語

本項研究目的在探討星系團結構與演化，和宇宙微波背景輻射交互作用的關聯，是目前世界上宇宙等領域尖端的課題之一，與國內台大及中研院追求卓越計劃「AmiBA」密切相關。該生思路清楚，對本課題有深入了解表達能力強，整體水準優於其他各組，且外語能力佳，可推薦至國際參賽但仍應加強輔導，尤其在對於「AmiBA」計劃各主要研究方向的了解，及「S-Z 效應」物理機制的詳細了解上。