臺灣二ＯＯ六年國際科學展覽會

科　　　別：數學科

作 品 名 稱 ：生生不息-正五邊形的繁衍法則

得 獎 獎 項 ：第三名

學校 / 作者　：高雄市立高雄高級中學　　劉玠暘

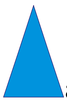
作者簡介

我從小就對科學有濃厚的興趣，國中時自然科學表現優異，參加很多比賽及科學展覽，得到高雄市科展 43 屆應用科學第二名、44 屆物理科第三名及最佳團隊合作獎、45 屆數學科佳作、自然學科能力競賽佳作…等許多獎項，尤其數學更是突出，獲 2005 青少年數學國際城市邀請賽銅牌獎，並在澳洲 AMC 數學能力檢定爲前 2%。期許自己能在高中階段獲得更多的數學知識與能力，並在未來能將數學應用於各方面以造福社會。

英文摘要(Abstract)

Endlessly Propagating

--The multiplication methods of regular pentagon

This study was to explore the nature of two basic constitutes of the regular pentagon, A  and B . With these two constitutes, the regular pentagon could be multiplied into any times. We used four multiplication methods ($m_2 = 2m_1 + n_1$ 、 $n_2 = m_1 + n_1$ 、 $m_2 = k^2 m_1$ ， $n_2 = k^2 n_1$ 、 $a_2 = a_1 + 1$ 、 $a_2 = a_1 + \frac{1}{\varphi}$) to show how the regular pentagon could enlarge and to verify that the enlarged regular pentagons derived from computer did exist. By integrating these four multiplication methods, we were able to arrange regular pentagon of any length of side, and evidenced the equation was $\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$

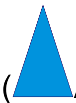
(If the side length of a regular pentagon is a form of $\left(\frac{x}{\varphi} + y\right)$ m,n is the number of A,B respectively)

We further proved that the first multiplication method could be developed into a new modified method, which could divide a regular pentagon with a given side length into a combination of A and B. But only when the x and y of side length of a regular pentagon could be divided by a natural number, k, and made x/k into an item of the Fibonacci Sequence and y/k a successive item.

When we tried to verify if any regular pentagon could be constituted by other smaller regular pentagons, we also found that it was un-dividable only if the length of pentagon side were $\frac{F_{n-1}}{\varphi} + F_n$ (the number of A, B were the 2n and 2n-1 item of Lucas Sequence). Otherwise, any regular pentagon might be able to be constituted by other smaller regular pentagons.

中文摘要

生生不息－正五邊形的繁衍法則

本研究是以正五邊形的兩個基本組成元素(A、B)作爲討論對象，利用此二元素可以將正五邊形做任意倍數的放大。我們共使用 4 種繁殖法則（$m_2 = 2m_1 + n_1$ 、$n_2 = m_1 + n_1$ 、$m_2 = k^2 m_1$ ，$n_2 = k^2 n_1$ 、$a_2 = a_1 + 1$ 、$a_2 = a_1 + \frac{1}{\varphi}$ ）來說明正五邊形的放大情形，並利用此 4 種繁殖法驗證電腦運算出的放大圖形確實存在。利用這 4 種繁殖法則的改良與整合，已達到能排出任意邊長之正五邊形的目標，並能計算並證明出其通式爲 $\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$ 。

$$\left(若正五邊形的邊長爲 \left(\frac{x}{\varphi} + y \right) 形式,m、n代表A、B的個數 \right)$$

更特別的是，我們能用第一繁殖法反推出一種方法，將給定邊長的正五邊形利用簡單的切割方式分成由 A、B 組合成的形式，但只有正五邊形邊長之 x、y 值可同除以任一自然數 k 而使 $\frac{x}{k}$ 爲費波那契數列之一項且 $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{k}}$ 爲其後一項者才可以使用。

將此想法推廣至一個正五邊形能否由比他小的其他五邊形組合而成時，我們也發現當正五邊形之邊長爲 $\frac{F_{n-1}}{\varphi} + F_n$ 時（其 A、B 個數爲盧卡斯數列之第 2n,2n-1 項），不可分解，否則應該皆可將一個正五邊形分解成比它小的其他五邊形組合（我們也可以利用這些質形檢驗出其他正五邊形是否也爲質形）。但其分解形式，不只一種，而我們推測只用兩種較小的正五邊形就能達成，我們期待能找出一或多種分解方法，能將正五邊形分解成標準的分解形式。

壹、研究動機

在我們學校有一位熱愛數學遊戲的老師，有一天他拿給了我們一套拼圖遊戲，拼圖的元件有 8 個$108^o-36^o-36^o$的三角形、6 個$36^o-72^o-72^o$的三角形，以及 3 個正五邊形。遊戲的任務是使用這些元件拼出各種大大小小的正五邊形。在我們完成了所有遊戲所要求的五邊形後，我們感到很好奇，在這些大大小小的正五邊形之中，他們的邊長、面積、組成單元是否呈現一定的規律？在玩拼圖時我們都是瞎拼瞎排，誤打誤撞地排出要求的正五邊形，那是否能夠找出好方法迅速拼排出所要求的正五邊形？關於這套遊戲各式各樣的疑問瞬間浮現，驅使著我們進行了本次研究。

貳、研究目的

一、 歸納正五邊形放大爲不同尺寸的正五邊形時，在邊長、面積、組成單元及數形關係上所展現的規律。

二、 找出正五邊形放大爲不同尺寸的正五邊形的機制。

三、 由邊長推算出正五邊形組成單元之數量。

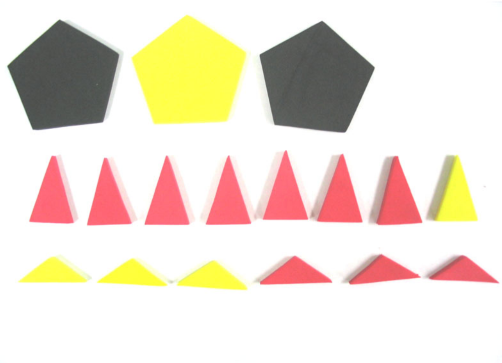
四、 探討所有存在的正五邊形是否都能夠由目的二所歸納的放大機制，解釋其產生的方式，若不能，試找出更多有用的機制來解釋它們產生的方式。

五、 藉由目的二、四所歸納的放大機制，找出能將正五邊形切割成基本組成單元的方法。

六、 將正五邊形分解成其他較小的正五邊形的組合，進而求其標準分解式。

參、研究器材

一、拼圖模型 The Puzzle of Pythagoras(如下圖所示)。

二、自製紙片模型。

三、數位相機、紙、筆。

肆、背景資料與定義

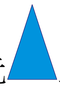
一、　背景資料

（一）正五邊形中，牽涉到許多有關黃金比例(1：$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$或$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$：1)的問題，其中 $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$稱爲φ，$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$稱爲$\frac{1}{\varphi}$。

（二）承上，$\frac{1}{\varphi}=\varphi-1$ (即$\varphi=\frac{1}{\varphi}+1$)，$\varphi+\frac{1}{\varphi}=\sqrt{5}$，$\varphi^2=\varphi+1$，$\varphi^2+\frac{1}{\varphi^2}=3$。

（三）三角形 $A\left(36^o-72^o-72^o\right)$與三角形 $B\left(108^o-36^o-36^o\right)$之邊長分別爲 1：1：$\frac{1}{\varphi}$ 和$\frac{1}{\varphi}$：$\frac{1}{\varphi}$：1。

二、　定義

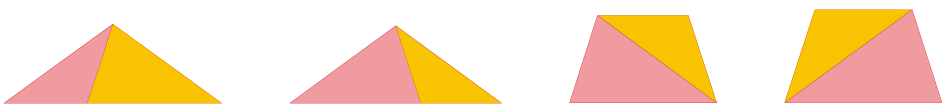
（一）研究中，稱正五邊形之組成單元三角形稱爲 A，三角形稱爲 B，欲拼之五邊形爲 C(邊長$a=\frac{x}{\varphi}+y$)，且令第一個正五邊形(邊長$a=\frac{1}{\varphi}$)爲已知。

（二）承（一），本研究中，令較長之邊長(即三角形 A 之斜邊、三角形 B 之底邊)爲 1，則較短之邊長(即三角形 A 之底邊、三角形 B 之斜邊)爲$\frac{1}{\varphi}$。

（三）承（一），本研究中 A 的個數以 m 表示，B 的個數爲以 n 表示。

（四）本研究中有很多正五邊形都可以衍生出另一個正五邊形，我們定義前者爲「親代」，後者爲「子代」，而此過程稱爲「繁殖」。至於繁殖的方法，則稱爲「繁殖法則」。換言之，正五邊形是經由各式各樣之繁殖法則(包括邊長、排列方式等變化)由親代繁殖出來的。

（五）我們發現，在由一個 A 和一個 B 組成的等腰梯形和等腰三角形中(見下圖)，其 A,B 之相對位置可以互換，我們稱它爲「交換圖形」。



（六）在「正五邊形的分解與再合成」中，我們稱無法由其他更小的正五邊形組成的正五邊形稱爲「質形」。當可以分解時，稱其他更小的正五邊形的標準組成方法（即其標準之分解形式）爲「標準分解式」。

伍、研究方法與步驟

一、　電腦計算

（一）了找出所有正五邊形之組成單元 A、B 個數 m、n，我們使用電腦來幫助計算！

（二）首先，因為 m 個 A 面積(a)和 n 個 B 面積(b)之和等於 C 面積(c)，即 $mA+nB=C$，

$$\Rightarrow n=\frac{C-mA}{B}\cdots\cdots\cdots(1)。$$

（三）其次，因 A=$1^2\cos 36^\circ\times\cos 18^\circ=\cos 18^\circ\times\cos 36^\circ$，B=$\frac{1}{2}\times 1^2\times\cos 18^\circ=\frac{1}{2}\times\cos 18^\circ$，

C=$2a^2\times\cos^3 18^\circ$，所以我們將三者之面積以及前述之式(1)代入 Excel 中以求 m、n 之值。

（四）由於我們既不知道 m 值也不知道 n 值，我們就以回饋的方式令 m=1,2,3,…來反求 n，

即 $n=\dfrac{2a^2\times\cos^2 18^\circ\text{-m}\times\cos 36^\circ}{1/2}=2(2a^2\cos^2 18^\circ\text{-m}\cos 36^\circ)$ 且 $m,n\in N$，只取其正整數解

(m,n)，就代表組成正五邊形的單元個數。

（五）承（四）因為 A 為 B 之 $2\cos 36^\circ$ 倍，所以其公倍數不會為自然數，故正五邊形組成單元之個數 (m,n) 必有一解或無解。

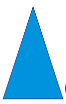
二、　徒手產生圖形並探討其規律(第一、二繁殖法則)

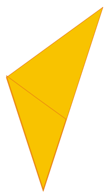
由於我們想了解正五邊形之邊長、面積等與其組成單元 A、B 的個數 (m,n) 之關係，我們列出前述之前 50 個正五邊形的資料(見附表一)，試圖找出其規律。

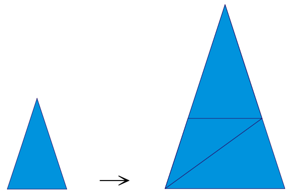
由附表一所呈現之數據，我們發現到兩個規律：

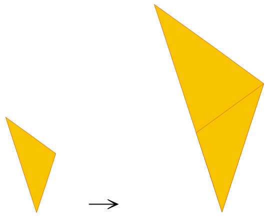
（一）第一繁殖法則

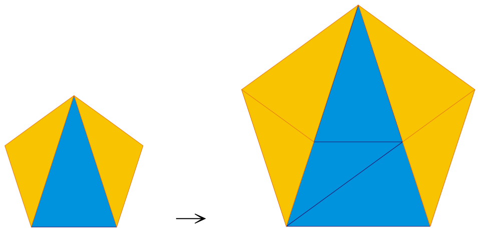
1、觀察規律

觀察 No.1 及 No.2 兩個正五邊形，我們發現 No.2 可以依照 No.1 的結構，分割成三個部份（P、Q、R），即 No.2 可以看成是由這三個部份分別放大之後拼組成的：

P 部分由 No.1 至 No.2 的放大情形:  → 

Q 部分由 No.1 至 No.2 的放大情形: 

R 部分由 No.1 至 No.2 的放大情形: 

整個正五邊形由 No.1 至 No.2 的放大情形: 

分析其組成單元，其變化如下：

P 部分由 No.1 至 No.2 的放大情形: $1個B \to 1個A+1個B$

Q 部分由 No.1 至 No.2 的放大情形: $1個A \to 2個A+1個B$

R 部分由 No.1 至 No.2 的放大情形: $1個B \to 1個A+1個B$

整個正五邊形由 No.1 至 No.2 的放大情形: $1個A+2個B \to 4個A+3個B$

分析其邊長，其變化如下：

P 部分由 No.1 至 No.2 的放大情形：$\left(\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi},1\right) \to \left(1,1,1+\frac{1}{\varphi}\right)$ 即 $(1,1,\varphi)$

Q 部分由 No.1 至 No.2 的放大情形：$\left(1,1,\frac{1}{\varphi}\right) \to \left(1+\frac{1}{\varphi},1+\frac{1}{\varphi},1\right)$ 即 $(\varphi,\varphi,1)$

R 部分由 No.1 至 No.2 的放大情形：$\left(\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi},1\right) \to \left(1,1,1+\frac{1}{\varphi}\right)$ 即 $(1,1,\varphi)$

整個正五邊形由 No.1 至 No.2 的放大情形：$\frac{1}{\varphi} \to 1$

※經計算可知子代五邊形為親代五邊形放大 φ 倍的結果。

<u>2、歸納並延伸規律</u>

（1） 觀察上述之變化，我們能夠發現：

使用 2 個 A 及 1 個 B 可拼出使原本的 A 放大為 φ 倍的三角形

使用 1 個 A 及 1 個 B 可拼出使原本的 B 放大為 φ 倍的三角形

而將一個已經拼成的正五邊形，利用上述放大方法將每一個 A 及每一個 B 放大 φ 倍，即可排出一個邊長為原來正五邊形 φ 倍的放大正五邊形。

（2） 進一步探討正五邊形放大時 A 與 B 個數的變化以使結論一般化：

假設一正五邊形其組成，A 的個數為 m，B 的個數為 n，

每 1 個 A 放大爲φ倍需要 2 個 A 及 1 個 B→m 個 A 分別放大爲φ倍共需要 2m 個 A 及 m 個 B

每 1 個 B 放大爲φ倍需要 1 個 A 及 1 個 B→n 個 B 分別放大爲φ倍共需要 n 個 A 及 n 個 B

故放大此正五邊形爲原來的φ倍，共需要$(2m+n)$個 A 及$(m+n)$個 B，A 及 B 的總個數爲$(3m+2n)$

※往後即定義此規律爲『第一繁殖法則』

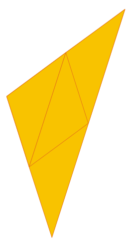
3、實際使用規律

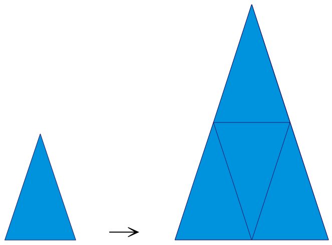
舉例：若以正五邊形 No.1 爲親代，其邊長爲$\frac{1}{\varphi}$，組成單元爲 1 個 A+2 個 B，利用第一繁殖法則可推算出其繁殖出來的子代，邊長爲$\frac{1}{\varphi}\times\varphi=1$，組成單元爲$(2\times1+2)$個A+$(1+2)$個B，即4個A+3個B。若再以此子代正五邊形做爲親代，利用第一繁殖法則進一步繁殖，則可推算出其繁殖出來的子代，邊長爲$1\times\varphi=\varphi$ (即$1+\frac{1}{\varphi}$)，組成單元爲$(2\times4+3)$個A+$(4+3)$個B，即11個A+7個B。

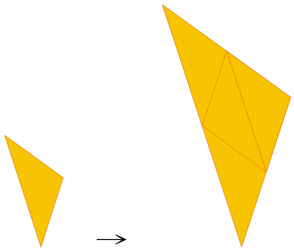
（二）第二繁殖法則

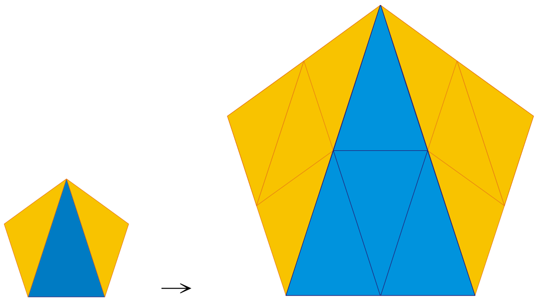
1、觀察規律

觀察 No.1 及 No.3 兩個正五邊形，我們發現 No.3 可以依照 No.1 的結構，分割成三個部份（ P、Q、 R），即 No.3 可以看成是由這三個部份分別放大之後拼組成的：

P 部分由 No.1 至 No.3 的放大情形:  → 

Q 部分由 No.1 至 No.3 的放大情形: 

R 部分由 No.1 至 No.3 的放大情形: 

整個正五邊形由 No.1 至 No.3 的放大情形: 

分析其組成單元，其變化如下：

P 部分由 No.1 至 No.3 的放大情形: 1個B $\rightarrow$ 4個B

Q 部分由 No.1 至 No.3 的放大情形: 1個A $\rightarrow$ 4個A

R 部分由 No.1 至 No.3 的放大情形: 1個B $\rightarrow$ 4個B

整個正五邊形由 No.1 至 No.3 的放大情形: 1個A+2個B $\rightarrow$ 4個A+8個B

分析其邊長，其變化如下：

P 部分由 No.1 至 No.3 的放大情形：$\left(\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi},1\right)\rightarrow\left(\frac{2}{\varphi},\frac{2}{\varphi},2\right)$

Q 部分由 No.1 至 No.3 的放大情形：$\left(1,1,\frac{1}{\varphi}\right)\rightarrow\left(2,2,\frac{2}{\varphi}\right)$

R 部分由 No.1 至 No.3 的放大情形：$\left(\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi},1\right)\rightarrow\left(\frac{2}{\varphi},\frac{2}{\varphi},2\right)$

整個正五邊形由 No.1 至 No.2 的放大情形：$\frac{1}{\varphi}\rightarrow\frac{2}{\varphi}$

※經計算可知子代五邊形爲親代五邊形放大 2 倍的結果。

<u>2、歸納並延伸規律</u>

（1） 觀察上述之變化，我們能夠發現：

使用$1+3\left(即2^2=4\right)$個 A 可拼出使原本的 A 放大為 2 倍的三角形

使用$1+3\left(即2^2=4\right)$個 B 可拼出使原本的 B 放大為 2 倍的三角形

觀察圖形變化中的數形關係可以繼續推出：

使用$1+3+5\left(即3^2=9\right)$個 A 可拼出使原本的 A 放大為 3 倍的三角形

使用$1+3+5\left(即3^2=9\right)$個 B 可拼出使原本的 B 放大為 3 倍的三角形

使用$1+3+5+7\left(即4^2=16\right)$個 A 可拼出使原本的 A 放大為 4 倍的三角形

使用$1+3+5+7\left(即4^2=16\right)$個 B 可拼出使原本的 B 放大為 4 倍的三角形

依此規律，推廣到一般化可得：

使用$1+3+5+\cdots+(2k-1)(k\in N)$，即 k^2 個 A 可拼出使原本的 A 放大為 k 倍的三角形

使用$1+3+5+\cdots+(2k-1)(k\in N)$，即 k^2 個 B 可拼出使原本的 B 放大為 k 倍的三角形

而將一個已經拼成的正五邊形，利用上述放大方法將每一個 A 及每一個 B 放大 k 倍，即可排出一個邊長為原來正五邊形 k 倍的放大正五邊形。

（2） 進一步探討正五邊形放大時 A 與 B 個數的變化以使結論一般化：
假設一正五邊形由 m 個 A、n 個 B 組成，

每 1 個 A 放大為 k($k\in N$)倍需要k^2個 A→m 個 A 分別放大為 k 倍共需要個mk^2個 A

每 1 個 B 放大為 k($k\in N$)倍需要k^2個 B→n 個 B 分別放大為 k 倍共需要nk^2個 B

故放大此正五邊形為原來的 k 倍，共需要mk^2個 A 及nk^2個 B，A 及 B 的總個數為$\left(mk^2+nk^2\right)$

※往後即定義此規律為『第二繁殖法則』

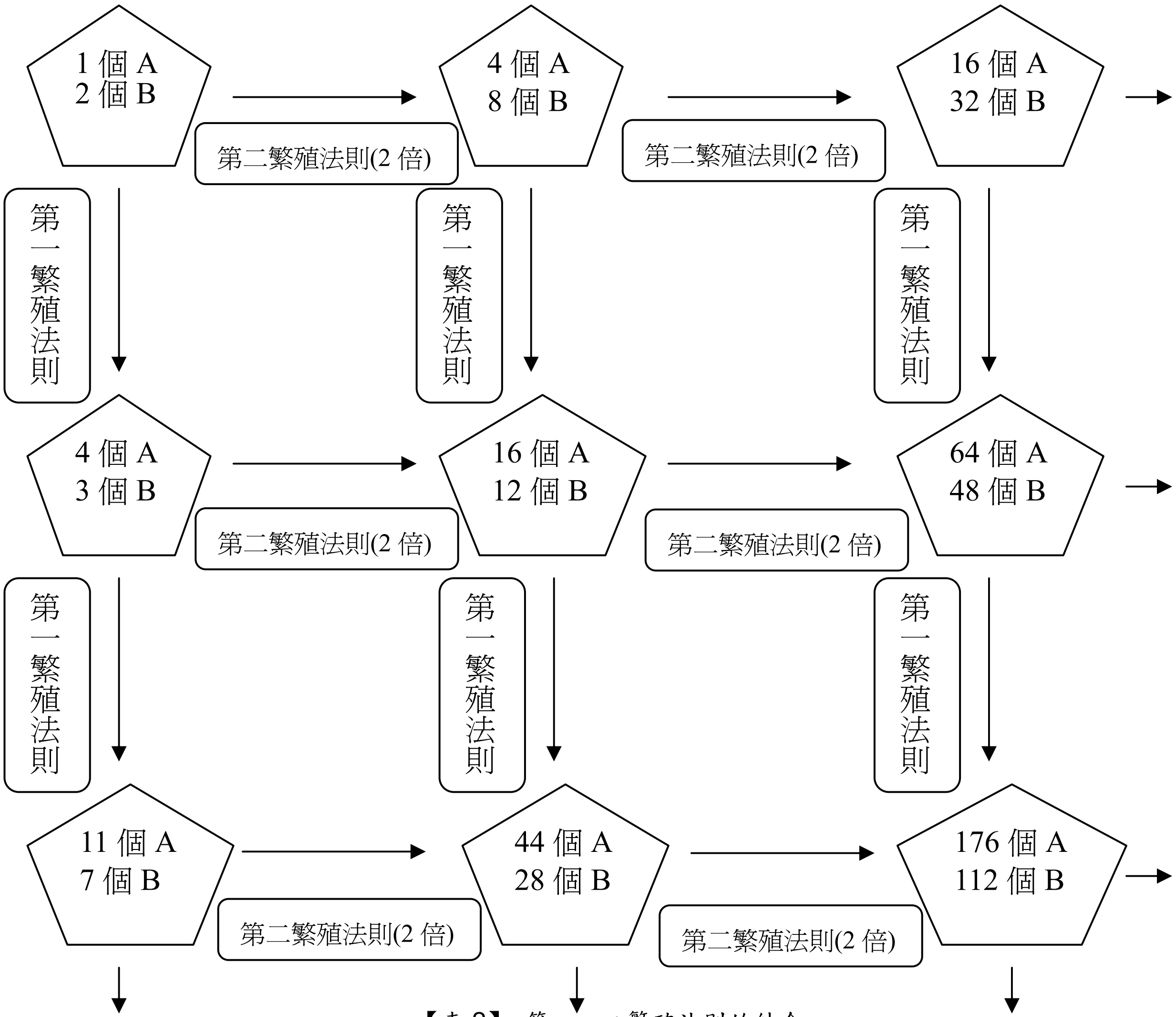
<u>3、實際使用規律</u>

舉例：若以正五邊形 No.1 為親代，其邊長為$\dfrac{1}{\varphi}$，組成單元為 1 個 A+2 個 B，利用第二繁殖法則可推算出母體放大 2 倍的子代，其邊長為$\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)\times2=\dfrac{2}{\varphi}$，組成單元為$\left(1\times2^2\right)$個A+$\left(2\times2^2\right)$個B，即 4 個 A+8 個 B。若仍以正五邊形 No.1 為親代，利用第二繁殖法則可繼續繁殖出母體放大 3 倍的子代，其邊長為$\left(\dfrac{1}{\varphi}\right)\times3=\dfrac{3}{\varphi}$，組成單元為

(1×3^2)個A+(2×3^2)個B，即 9 個 A+18 個 B。

（三）繁殖法則的結合

在第一繁殖法則與第二繁殖法則之間有相互影響的現象，以下我們舉例說明：



【表 2】 第一、二繁殖法則的結合

1. 任何一個五邊形都能夠由兩種不同的繁殖法則而分別繁殖出兩種不同的五邊形，例如五邊形 No.5 利用兩種繁殖法則分別繁殖出五邊形 No.6 及五邊形 No.8
2. 同一個五邊形可能由不同的繁殖歷程演變而來，例如五邊形 No.6 可以是由五邊形 No.1→五邊形 No.2→五邊形 No.3→五邊形 No.6 繁殖而來，也可以是由五邊形 No.1→五邊形 No.4→五邊形 No.5→五邊形 No.6 繁殖而來。
3. 繁殖歷程中產生的各五邊形不盡相同，但只要最原始的母體與最終的子代相同，則經歷過的各繁殖法則次數必相同，例如雖然五邊形 No.6 可以是由五邊形 No.1→五邊形 No.2→五邊形 No.3→五邊形 No.6 繁殖而來，也可以是由五邊形 No.1→五邊形 No.4→五邊形 No.5→五邊形 No.6 繁殖而來，但是在兩種繁殖歷程中同樣都是經歷了一次第一繁殖法則與兩次第二繁殖法則。

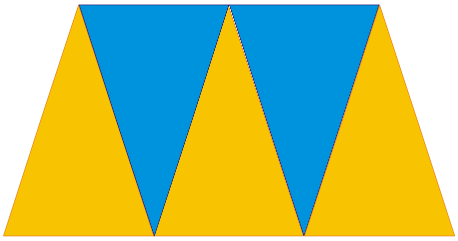
三、找出更多規律(第三、四繁殖法則)

我們發現有一些正五邊形雖然存在(利用電腦計算出來)卻不能由第一及第二繁殖法則解釋其產生的方式，於是我們針對這些正五邊形，試著拼拼看。拼排後確定它們真的拼的出來，因此我們去尋找更多規律，及更多繁殖法則來解釋這些正五邊形產生的模式。

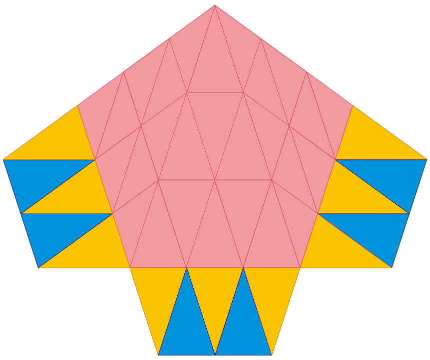
（一）第三繁殖法則

先排出一個正五邊形其邊長爲$\dfrac{x}{\varphi}$(這裡用$\dfrac{3}{\varphi}$代表)

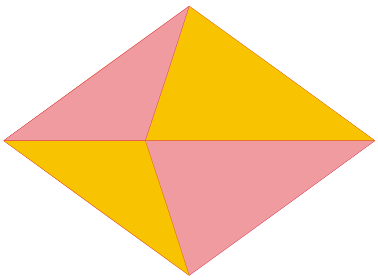
1. 首先，用$2x-1$個 A 拼成三個相同的等腰梯形，邊長爲$\left(\dfrac{x}{\varphi},1,\dfrac{x-1}{\varphi},1\right)$



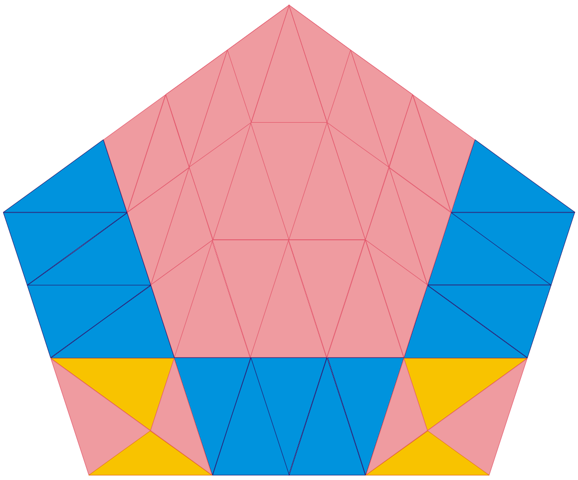
2. 將此三個等腰梯形的$\dfrac{x}{\varphi}$之邊長分別與親代正五邊形的相鄰三邊相連接



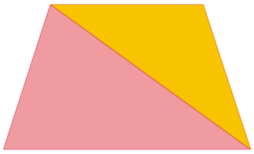
3. 其次，用 2 個 A 和 2 個 B 拼成兩個相同的菱形，邊長爲$(1,1,1,1)$



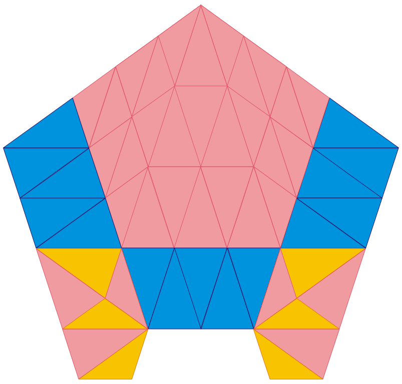
4. 將這兩個相同的菱形分別排在兩個角落(步驟二所作等腰梯形兩兩之間)



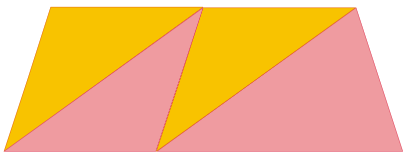
5. 再來，用 1 個 A 和 1 個 B 拼成兩個相同的等腰梯形，邊長爲$\left(\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi},1\right)$



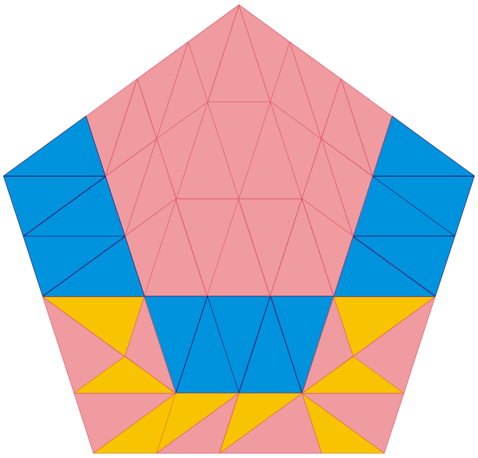
6. 將其邊長爲 1 的邊與前述之菱形之底相連接



7. 然後，用 1 個 A 和$2x-3$個 B 拼成一個等腰梯形，邊長爲$\left(\frac{1}{\varphi},\frac{x-1}{\varphi},\frac{1}{\varphi},1+\frac{x-2}{\varphi}\right)$



8. 將此等腰梯形排在步驟 5 所作之兩等腰梯形之間

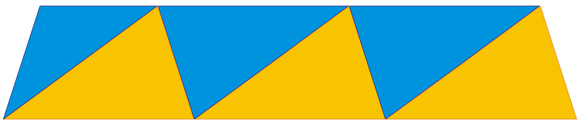


9. 最後我們所排出的子代正五邊形邊長即爲親代正五邊形邊長+1(即$\frac{x}{\varphi}+1$)

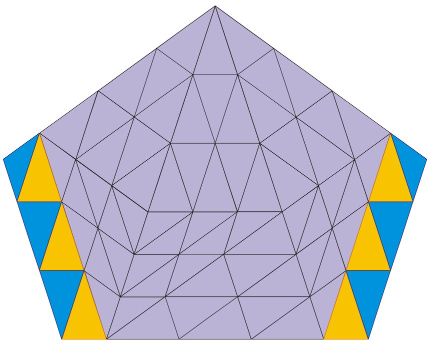
（二）第四繁殖法則

先排出一個正五邊形其邊長爲x(這裡用 3 代表)

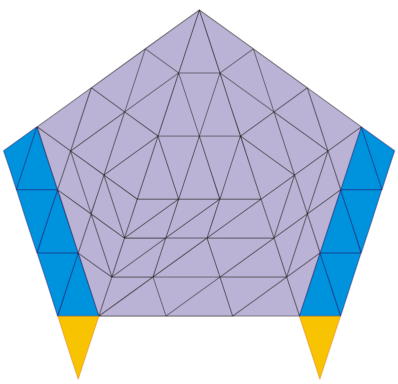
1. 首先，用$2y-1$個 A 和 1 個 B 拼成兩個相同等腰梯形，邊長爲$\left(\frac{1}{\varphi},\frac{1}{\varphi}+x-1,\frac{1}{\varphi},x\right)$



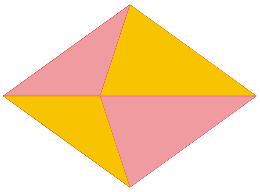
2. 將此兩個等腰梯形的x之邊長分別與親代正五邊形的其中兩邊相連接



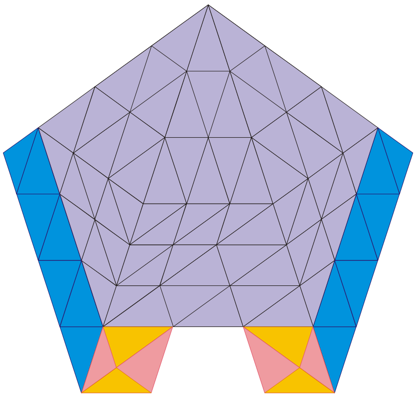
3. 其次，將 2 個 A 倒過來排在前述(步驟 2)所作等腰梯形底下



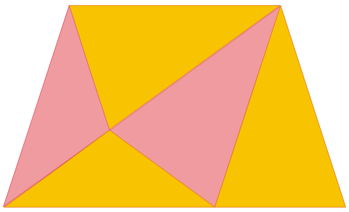
4. 再來，用 2 個 A 和 2 個 B 拼成兩個相同的菱形，邊長爲$(1,1,1,1)$



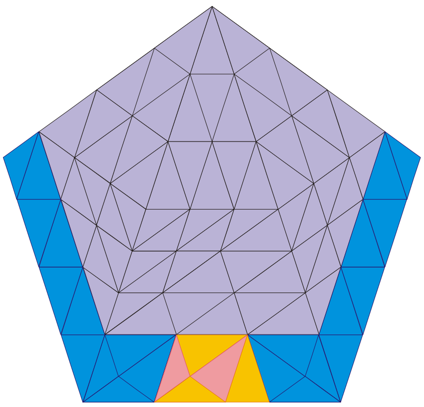
5. 將這兩個相同的菱形分別排在步驟 4 兩個 A 側面(同側)



6. 然後，將 1 個 A 與$x-2$個菱形組合成一個等腰梯形，邊長爲$\left(1,x-2,1,x-2+\dfrac{1}{\varphi}\right)$



7. 將此等腰梯形拼入前述兩個菱形之間



8. 最後我們所排出的子代正五邊形邊長即爲親代正五邊形邊長+$\dfrac{1}{\varphi}$(即$\dfrac{1}{\varphi}+x$)

陸、研究結果

一、電腦計算

（一）我們發現不同邊長的正五邊形其組成單元 A,B 之個數都可以用此回饋方式求出。

（二）由此方法我們後來發現，仍有很多圖形是不屬於第一、二繁殖法則之方法，因爲並非所有邊長之間都是 φ 倍的關係，這使我們突破很多瓶頸和迷思。

（三）由於我們是以回饋的方式求得 m、n 之值，所以我們無法確定其恰有一解(也就是說，每個五邊形之組成單元 A,B 之個數只有一種狀況)，不過由方法與步驟二中我們可以確定此解是唯一的。

（四）承上，因爲我們不能確定是不是每一組 m、n 值都能拼出所要的正五邊形(也就是此解存在)，所以我們必須找出一種以上的規律，足以涵蓋所有的正五邊形或者證明出部分正五邊形是不確定是否能夠排出來，於是我們進行了後面的實驗。

二、徒手產生圖形並探討其規律(第一、二繁殖法則)

在拼湊、排列正五邊形的過程中，我們發現：

（一）一個五邊形 C_1 (邊長爲 **1/φ**)是由 1 個 A 和 2 個 B 組成。

（二）由 2 個 A 和 1 個 B 可以組成一個 A 的放大圖 A'，由 1 個 A 和 1 個 B 可組成一個 B 的放大圖 B' ，而此二者又可拼成一個正五邊形 C_2 。

（三）由以上討論可得第一繁殖法則： $m_2 = 2m_1 + n_1$ ， $n_2 = m_1 + n_1 \Rightarrow m_2 + n_2 = 3m_1 + 2n_1$ 。

（四）承（二），因爲 A 到 A' 邊長由 1,1,**1/φ** 變成 **1/φ+1,1/φ+1,1**(即 **φ,φ,1**)，B 到 B' 邊長由 **1/φ,1/φ,1** 變成 1,1, **1/φ+1**(即 **1,1,** φ)，所以 C_2 的邊長爲 C_1 邊長之 φ 倍。

（五）由第 1,3,5,8 和第 2,6 個正五邊形可看出，當一個正五邊形之邊長爲其親代之 k 倍時，其組成單元之個數 m、n 會變爲 k^2 倍，我們將其定義爲「第二繁殖法則」。

（六）由第一繁殖法則和第二繁殖法則可以繁殖出一種第二子代(見前表 2)，此第二子代是由親代經 3m+2n 後再乘以 k^2 所求出的。

（七）我們發現，A、B 之個數除了放大 k^2 倍之外，尚可放大 5 倍，此時其邊長會放大 $\sqrt{5}$ 倍。

可將其改爲旋轉對稱後能相接之形式，再將 5 個相同的圖形連接。但由於

$\left(\frac{x}{\varphi}+y\right)\bullet\sqrt{5}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\varphi}x+y\right)\bullet\sqrt{5}=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{\varphi}\right)\bullet(2y-x)+(2x+y)$，故 $2y<x$ 時不能使用。

（八）第一繁殖法則和第二繁殖法則可以以任何正五邊形爲親代繁殖出下一子代。

（九）在排列前 10 個正五邊形之過程中，我們發現有一種「交換圖形」的現象，我們推測可以使用它來使同一個圖形呈現不同的排列方式，而且同一個正五邊形之不同排列方式都可以用交換圖形的方式加以取代(也就是基本上它是同一個排列方式)。

（十）我們想要找出一或數種繁殖法則解決其他不適用於第一、二繁殖法則的正五邊形不確定是否能夠排出來(見表 3)，所以繼續了後面的實驗。

No.	7	10	14	15	17	19	22	23
邊長	$2/\varphi+1$	$3/\varphi+1$	$1/\varphi+3$	$4/\varphi+1$	$3/\varphi+2$	$5/\varphi+1$	$4/\varphi+2$	$1/\varphi+4$
m	20	31	44	55	61	59	80	89
n	15	27	43	35	42	63	60	58
No.	24	28	30	31	33	34	35	36
邊長	$6/\varphi+1$	$5/\varphi+2$	$7/\varphi+1$	$4/\varphi+3$	$1/\varphi+5$	$6/\varphi+2$	$3/\varphi+4$	$8/\varphi+1$
m	76	101	95	124	131	124	145	116
n	87	82	115	83	87	108	90	147
No.	38	40	41	43	44	45	48	50
邊長	$5/\varphi+3$	$2/\varphi+5$	$7/\varphi+2$	$9/\varphi+1$	$1/\varphi+6$	$6/\varphi+3$	$8/\varphi+2$	$5/\varphi+4$
m	151	164	149	139	181	180	176	209
n	107	103	138	183	122	135	172	138

【表 3】無法用第一繁殖法則排出來的正五邊形(前 50 個中)

三、找出更多規律(第三、四繁殖法則)

（一）針對那些不確定是否能夠排出的正五邊形，我們找出了三種繁殖法則：一種是子代正五邊形爲親代邊長+1(第三繁殖法則)，一種是子代正五邊形爲親代邊長+1/φ(第四繁殖法則)。

（二）繁殖法則 3 是由邊長爲$\frac{y}{\varphi}$的正五邊形作親代繁殖出其子代(其邊長爲$\frac{y}{\varphi}+1$)，繁殖法則 4 是由邊長爲y的正五邊形作親代繁殖出其子代(其邊長爲$\frac{1}{\varphi}+y$)。

（三）承（二），由於我們可以使用繁殖法則一、二來繁殖出邊長爲$\frac{y}{\varphi}$和y之正五邊形做爲親代，所以可以使用第三、四繁殖法則繁殖出邊長爲$\frac{y}{\varphi}+1$及$\frac{1}{\varphi}+y$之子代$\left(y\in N\right)$

（四）承（二），不同於第一、二繁殖法則，第三、四繁殖法則只在特定圖形上可以使用，也就是其親代是有條件限制的。

（五）承（三），由於我們可以繁殖出邊長爲$\frac{y}{\varphi}+1$及$\frac{1}{\varphi}+y$之子代正五邊形，所以我們無法排出的情形變的少之又少(前 50 個中只剩 5 個)。

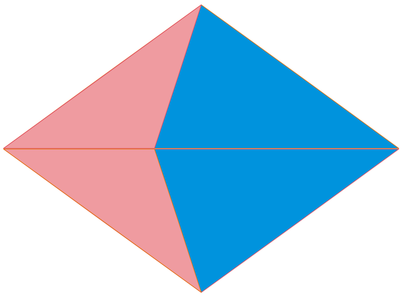
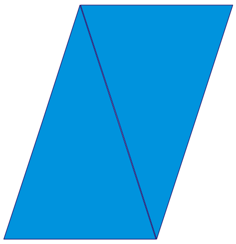
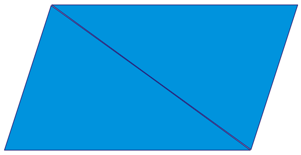
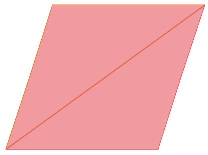
（六）我們希望能夠藉由第三、四繁殖法則的合併使用，衍生出一種方法可以繁殖出任何一種邊長之正五邊形，並藉此計算出其組成元素 A、B 之個數。

（七）實際上，我們不只做了四種繁殖法則，我們發現了將近 10 種，只是因爲我們發現它們都和其他五種重複，所以未把它們列入。

柒、討論

一、繁殖法則的改良(第三、四繁殖法則)

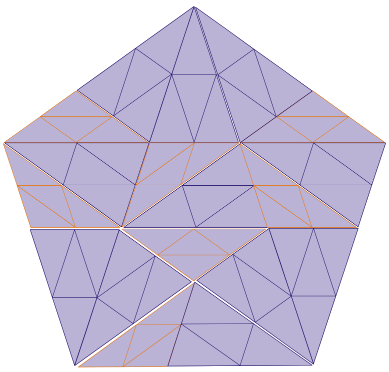
我們發現在第三及第四繁殖法則當中，子代都是由親代向外平移擴張後加上一些轉折、補綴部分而形成的，這些「外掛」的部分可由一些平行四邊形和固定的「配件」來合成，其中平行四邊形的部份我們發現可以使用 4 種「替換邊長平行四邊形」D、E、F、G(實際上 E、F 是同一平行四邊形排成不同方向)，如下圖。將原先親代邊長有所限制之第三、第四繁殖法則轉換成可以任何邊長的正五邊行爲親代使用的形式。

			
D	E	F	G

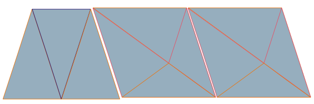
(一) 第三繁殖法則的改良

經過整理及替換，我們將第三繁殖法則修正如下：

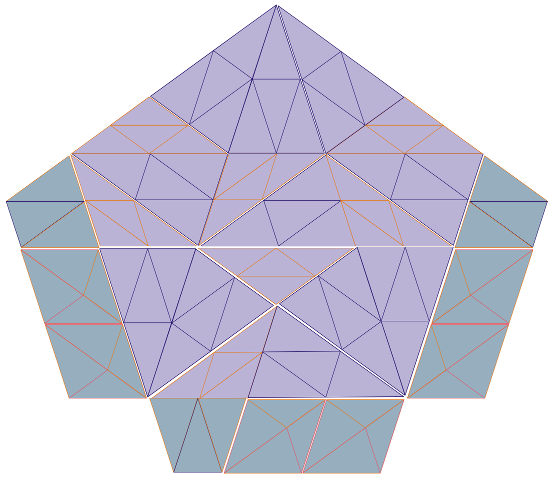
1. 首先，排出一個正五邊形其邊長爲 $x/\varphi+y$(這裡用 $2/\varphi+2$ 代表)。



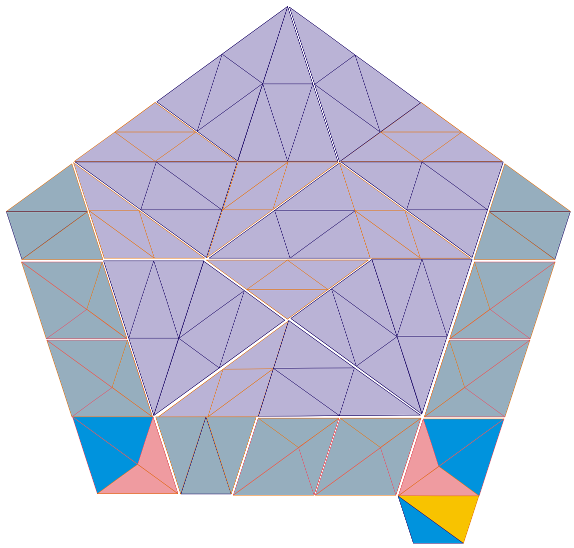
2. 其次，用 1 個 A、x-1 個 E 和 y 個 D 拼成三個相同的等腰梯形，邊長爲(1，$\frac{x-1}{\varphi}+y$，1，$\frac{x}{\varphi}+y$)。



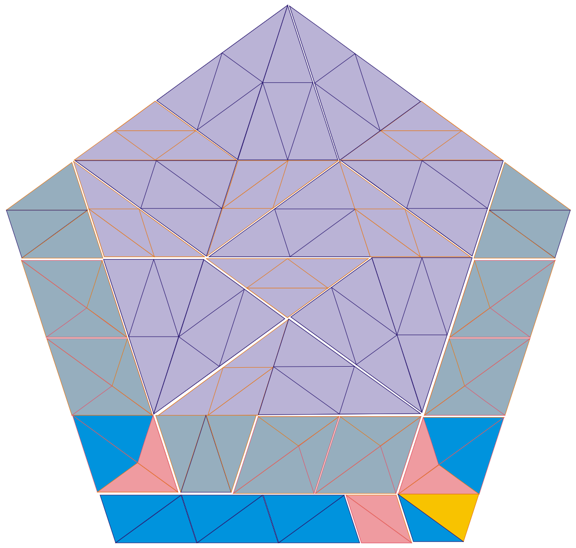
3. 將這三個等腰梯形的 $\frac{x}{\varphi}+y$ 之邊長分別與母代正五邊形的相鄰三邊相連接



4. 再來，將 2 個 D 分別排在 2 個角落(步驟 2 所作等腰梯形兩兩之間)，並用 1 個 A 和 1 個 B 拼成邊長爲($\frac{1}{\varphi}$ ， $\frac{1}{\varphi}$ ， $\frac{1}{\varphi}$ ，1)的等腰梯形，置於其中 1 個 D 下。



5. 然後，用 x-1 個 G 和 y+1 個 F 拼成一個平行四邊形，邊長爲($\frac{1}{\varphi}$ ， $\frac{x-1}{\varphi}+y+1$ ， $\frac{1}{\varphi}$ ， $\frac{x-1}{\varphi}+y+1$)，並將此平行四邊形排在步驟 4 所作之等腰梯形旁。

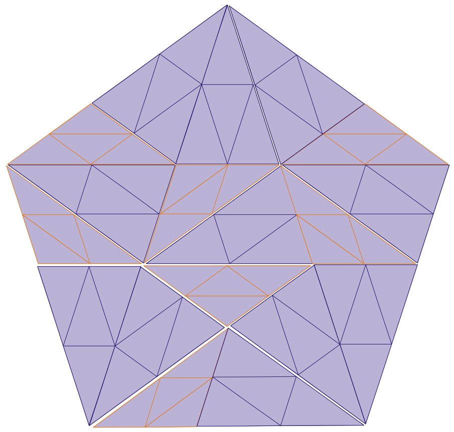


6. 最後我們所排出的子代正五邊形邊長即爲親代之邊長+1 (即$\frac{x}{\varphi}+y+1$)。

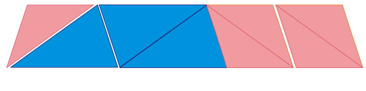
（二）第四繁殖法則的改良

經過整理及替換，我們將第四繁殖法則修正如下：

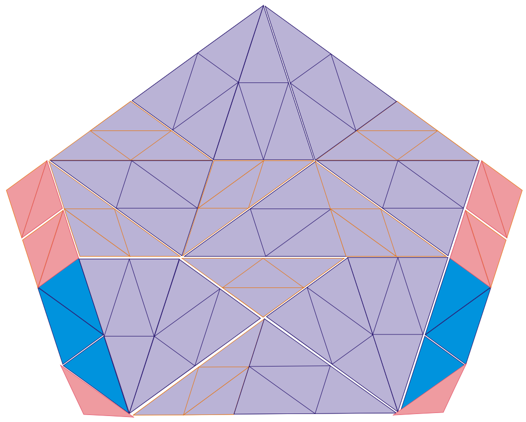
1. 首先，排出一個正五邊形其邊長爲 x/φ+y(這裡用 2/φ+2 代表)。



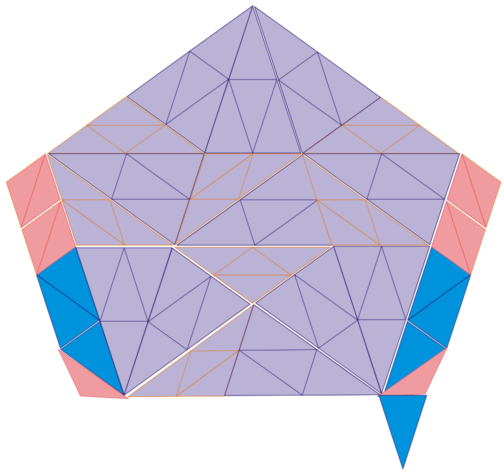
2. 其次，用 1 個 A、1 個 B、x 個 G 和 y-1 個 F 拼成兩個相同的等腰梯形，邊長爲($\frac{1}{\varphi}$，$\frac{x+1}{\varphi}+y-1$，$\frac{1}{\varphi}$，$\frac{x}{\varphi}+y$)。



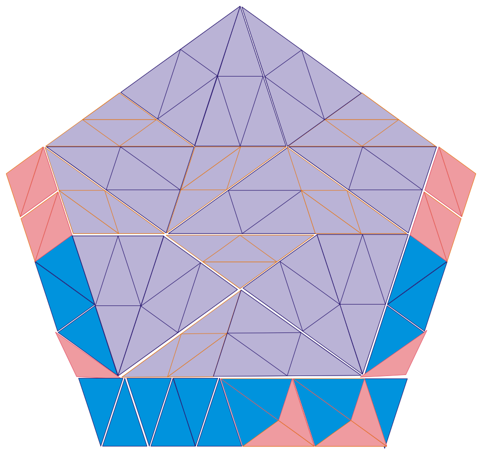
3. 將這兩個等腰梯形的$\frac{x}{\varphi}+y$之邊長分別與母代正五邊形的不相鄰兩邊相連接



4. 再來，將 1 個 A 排在步驟 2 所作的其中一個等腰梯形之下方。



5. 然後，用 x+1 個 E 和 y 個 D 拼成一個平行四邊形，邊長為(1，$\frac{x+1}{\varphi}+y$，1，$\frac{x+1}{\varphi}+y$)，並將此平行四邊形排在步驟 4 之 A 旁。



6. 最後我們所排出的子代正五邊形邊長即為親代之邊長+$\frac{1}{\varphi}$(即$\frac{x+1}{\varphi}+y$)。

利用第二繁殖法則、改良後的第三繁殖法則，以及改良後的第四繁殖法則的整合，我們能夠排出邊長爲 $\frac{x}{\varphi}$+y（x, y 爲任意正整數）的正五邊形，步驟如下。並且運用前面各繁殖法則中組成單元之變化(m、n 值之變化)的結果運算後，更可以得到邊長爲 $\frac{x}{\varphi}$+y （x、y 爲任意正整數）的正五邊形之組成單元(m、n）之值。

（三）第二繁殖法則與第三繁殖法則的結合

1. 我們已知邊長爲 $\frac{1}{\varphi}$ 的正五邊形其組成單元之 A 的個數 $m=1$、B 的個數 $n=2$。
2. 利用第二繁殖法則的結論，我們排出邊長爲 $\frac{x}{\varphi}$ 的正五邊形，而其 A 的個數 $m=x^2$、B 的個數 $n=2x^2$，再利用修改後的第三繁殖法則，做 y 次的外擴步驟。
3. 由第三繁殖法則可知每做一次外擴步驟其組成的變化爲 $m_2=m_1+6x+8y+4$、$n_2=n_1+2x+6y+3$，且每一次外擴，x 之值恆不變，y 之值則由第一次外擴時的 0、第二次外擴時的 1，一直增加到第 y 次外擴時的 y−1，由此可得將邊長爲 $\frac{x}{\varphi}$ 的正五邊形外擴 y 次後的組成單元如下：

$$m=x^2+(6x+4)\times y+\left\{\frac{\left[1+(y-1)\right]\times(y-1)}{2}\right\}\times 8=x^2+6xy+4y^2$$

$$n=2x^2+(2x+3)\times y+\left\{\frac{\left[1+(y-1)\right]\times(y-1)}{2}\right\}\times 6=2x^2+2xy+3y^2$$

4. 最後就能排出邊長爲 $\frac{x}{\varphi}$+y的正五邊形。

（四）第二繁殖法則與第四繁殖法則的結合

1. 我們已知邊長爲 1 的正五邊形其組成單元之 A 的個數 $m=4$、B 的個數 $n=3$
2. 利用第二繁殖法則的結論，我們排出邊長爲 y 的正五邊形，而其 A 的個數 $m=4y^2$、B 的個數 $n=3y^2$，再利用修改後的第四繁殖法則，做 x 次的外擴步驟。
3. 由第四繁殖法則可知每做一次外擴步驟其組成的變化爲 $m_2=m_1+2x+6y+1$、$n_2=n_1+4x+2y+2$，且每一次外擴，y 之值恆不變，x 之值則由第一次外擴時的 0、第二次外擴時的 1，一直增加到第 x 次外擴時的 x−1，由此可得將邊長爲 $\frac{x}{\varphi}$ 的正五邊形外擴 x 次後的組成單元如下：

$$m=4y^2+(6y+1)\times x+\left\{\frac{\left[1+(x-1)\right]\times(x-1)}{2}\right\}\times 2=x^2+6xy+4y^2$$

$$n=3y^2+(2y+2)\times x+\left\{\frac{[1+(x-1)]\times(x-1)}{2}\right\}\times 4=2x^2+2xy+3y^2$$

4. 最後就能排出邊長爲$\frac{x}{\varphi}$+y的正五邊形。

（五）第三繁殖法則與第四繁殖法則的結合

1. 我們先利用第一繁殖法則作出邊長爲$\frac{1}{\varphi}+1$的正五邊形，其中 A 的個數$m=11$、B 的個數$n=7$。

2. 利用第三繁殖法則的結論，做 x-1 次的外擴步驟即可排出邊長爲$\frac{x}{\varphi}+1$的正五邊形。依照結論，每做一次外擴步驟其組成的變化爲$m_2=m_1+2x+6y+1$、$n_2=n_1+4x+2y+2$，且每一次外擴，y 之值恆爲 1，x 之值則由第一次外擴時的 1、第二次外擴時的 2，一直增加到第 x-1 次外擴時的 x-1，由此可得邊長爲$\frac{x}{\varphi}+1$的正五邊形其組成單元：

$$m=11+\frac{[1+(x-1)](x-1)}{2}\times 2+(6\times 1+1)\times(x-1)=x^2+6x+4$$

$$n=7+\frac{[1+(x-1)](x-1)}{2}\times 4+(2\times 1+2)\times(x-1)=2x^2+2x+3$$

3. 利用第三繁殖法則的結論，做 y-1 次的外擴步驟即可排出邊長爲$\frac{x}{\varphi}+y$的正五邊形。依照結論，每做一次外擴步驟其組成的變化爲$m_2=m_1+6x+8y+4$、$n_2=n_1+2x+6y+3$，且每一次外擴，x 之值恆不變，y 之值則由第一次外擴時的 1、第二次外擴時的 2，一直增加到第 y-1 次外擴時的 y-1，由此可得邊長爲$\frac{x}{\varphi}+y$的正五邊形其組成單元：

$$m=x^2+6x+4+6x\times(y-1)+\frac{[1+(y-1)]\times(y-1)}{2}\times 8+4(y-1)=x^2+6xy+4y^2$$

$$n=2x^2+2x+3+2x\times(y-1)+\frac{[1+(y-1)]\times(y-1)}{2}\times 6+3(y-1)=2x^2+2xy+3y^2$$

4. 最後就能排出邊長爲$\frac{x}{\varphi}$+y的正五邊形。

補充說明：

1. 若步驟改爲先由邊長爲$\frac{1}{\varphi}+1$的正五邊形外擴排出邊長爲$\frac{1}{\varphi}+y$的正五邊形，再由邊長爲$\frac{1}{\varphi}+y$的正五邊形外擴排出邊長爲$\frac{x}{\varphi}+y$的正五邊形亦可，結果相同，在此省略。

2. 邊長爲$\frac{x}{\varphi}$和 y 之正五邊形，必須由第二繁殖法則拼排。

二、綜合討論與繁殖法則通式推導

（一）我們在使用第二、三、四繁殖法則之結合(兩兩結合)時，均可由已知之最基本正五邊形(邊長爲$\frac{1}{\varphi}$)排成。

（二）我們都是用邊長爲$\frac{1}{\varphi}$之正五邊形爲原生圖形，再使用第一繁殖法則放大兩次繁殖出邊長爲 1 和$\frac{1}{\varphi}$+1 的正五邊形做爲第二、三、四繁殖法則的結合最初的親代，因此也可以將邊長爲 1 和$\frac{1}{\varphi}+1$的正五邊形視爲已知之母圖形來使用。

（三）我們發現，無論是哪兩種繁殖法則的結合，最後所算出來的公式(x，y 與 m，n 的關係)都相同，爲$\begin{cases} m = x^2 + 6xy + 4y^2 \\ n = 2x^2 + 2xy + 3y^2 \end{cases}$。

（四）而無項$\frac{1}{\varphi}$或常數項者可視爲 x=0 或 y=0，亦可用此式計算。

三、繁殖法則通式的證明

利用$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times ab \times \sin\theta$（三角形面積公式）

令φ爲$x^2 - x - 1 = 0$的解（利用三角形相似），可得$\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$，$\varphi^2 = \varphi + 1$，

$\varphi^3 = \varphi \times \varphi^2 = \varphi \times (\varphi + 1) = \varphi^2 + \varphi = 2\varphi + 1$

已知$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{1}{2\varphi}$

又$B = \frac{1}{2} \times a^2 \times \sin 108^\circ = \frac{1}{2} \times a^2 \times cos18^\circ$

若$a = \frac{1}{\varphi}$，則$B = \frac{1}{2\varphi^2} \times cos18^\circ$（令$a = \frac{1}{\varphi}$爲正五邊形邊長）

$A = \frac{1}{2} \times (\varphi a)^2 \times \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \times (\varphi a)^2 \times 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ$

$= (\varphi a)^2 \times \sin 18 \times^\circ \cos 18^\circ = (\varphi a)^2 \times \frac{1}{2\varphi} \times \cos 18^\circ = \frac{1}{2}\varphi a^2 \times \cos 18^\circ$

若$\varphi a = 1$，則$A = \frac{1}{2\varphi} \times \cos 18^\circ$

五邊形面積=A+2B=$\frac{1}{2}\varphi a^2 \times \cos 18^\circ + 2 \times \left(\frac{1}{2} \times a^2 \times \cos 18^\circ \right) = \left(1 + \frac{\varphi}{2} \right) a^2 \times \cos 18^\circ$

若正五邊形邊長爲$\left(\frac{x}{\varphi}+y\right)$,

則五邊形面積=$\left(1+\frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{x}{\varphi}+y\right)^2\times\cos18^\circ=\left(1+\frac{\varphi}{2}\right)\times\left(\frac{x^2}{\varphi^2}+\frac{2xy}{\varphi}+y^2\right)\times\cos18^\circ$

$=\left(\frac{2x^2+4xy\varphi+2y^2\varphi^2+x^2\varphi+2xy\varphi^2+y^2\varphi^3}{2\varphi^2}\right)\times\cos18^\circ$

$=\left(\frac{2x^2+4xy\varphi+2y^2(\varphi+1)+x^2\varphi+2xy(\varphi+1)+y^2(2\varphi+1)}{2\varphi^2}\right)\times\cos18^\circ$

$=\left(\frac{(x^2+6xy+4y^2)\varphi+(2x^2+2xy+3y^2)}{2\varphi^2}\right)\times\cos18^\circ$

若以A及B爲基本圖形，要拼出邊長爲$\left(\frac{x}{\varphi}+y\right)$的正五邊形，則分別需要m個A及n個$B$，

可得算式$\left(\frac{(x^2+6xy+4y^2)\varphi+(2x^2+2xy+3y^2)}{2\varphi^2}\right)\times\cos18^\circ=m\left(\frac{1}{2\varphi}\times\cos18^\circ\right)+n\left(\frac{1}{2\varphi^2}\times\cos18^\circ\right)$

$=\left(\frac{m\varphi+n}{2\varphi^2}\right)\times\cos18^\circ$

$$\Rightarrow\begin{cases}m=x^2+6xy+4y^2\\n=2x^2+2xy+3y^2\end{cases}$$

由於我們可以使用面積的方法證明通式的正確性(即以排列方式計算出的公式和以面積計算出的不謀而合)，因此我們可以確定這個公式是正確的，而無法用第三、四繁殖法則排出(邊長爲$\frac{x}{\varphi}$或 y)之正五邊形也都可以適用。

四、利用繁殖法則尋找切割方法

我們想利用已知的繁殖法則來反推出一種方法能將給定邊長的正五邊形利用簡單的切割方式分成由 A、B 組合成的形式，而最適合的就是第一繁殖法則。

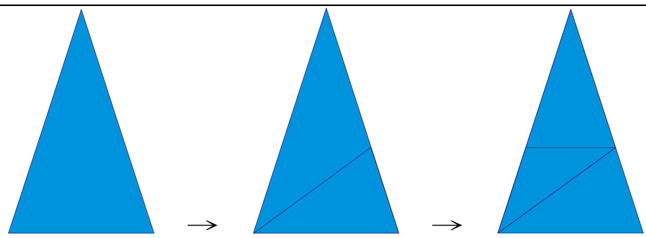
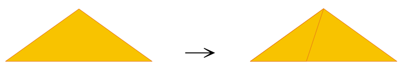
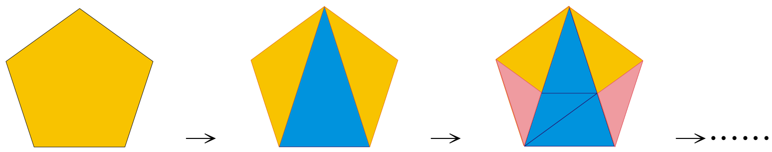
（一）爲 $\frac{1}{\varphi}\times\varphi=1$,$1\times\varphi=\frac{1}{\varphi}+1$，所以所有正五邊形之邊長($\frac{x}{\varphi}+y$)中 x 爲<u>費波那契數列</u>之一項且 y 爲其後一項者都可以使用第一繁殖法則。

（二）承上，所有正五邊形邊長之 x、y 值可同除以任一自然數而符合其條件者都可以使用第一繁殖法則與第二繁殖法則的結合。

（三）承上，由於 $\left(\frac{x}{\varphi}+y\right)\div\varphi=\left(\frac{x}{\varphi}+y\right)(\varphi-1)=\frac{y-x}{\varphi}+x$ 所以只有 $y\geq x$ 的正五邊形才能使用第一繁殖法則與第二繁殖法則的結合分割，否則無法用 A、B 排出此邊長。

（四）承上，視 $y-x,x$ 爲 x_2,y_2，因 $\left(\frac{x_2}{\varphi}+y_2\right)\div\varphi=\frac{y_2-x_2}{\varphi}+x_2=\frac{x-(y-x)}{\varphi}+(y-x)$ 所以只有 $2x\geq y$ 的正五邊形才能使用第一繁殖法則與第二繁殖法則的結合繼續分割下去。

（五）由於視 $x_2=y_1-x_1,y_2=x_1$，所以圖形之邊長必須一直符合 $y\geq x,2x\geq y,2y\geq 3x,5x\geq 3y,5y\geq 8x,\ldots\ldots$(其 x 的係數爲前一項 x、y 係數之和，y 的係數等於前一項的 x 係數，故 x 係數爲 1,2,3,5…y 係數爲 1,1,2,3…，皆爲<u>費氏數列</u>，且 x、y 的方向一直互換)直到分割成 $\frac{x}{\varphi}$ 的邊長時才可以使用此切割方法，也因此只有符合前述（一）、（二）之條件者適用此方法，餘者會在中途無法切割。

A 之切割規則	
B 之切割規則	
正五邊形之切割規則	

五、正五邊形的分解與再合成

（一）由之前的討論我們想到，這些正五邊形是否能分解開來，再將其重組，合成若干個較小的正五邊形？於是我們將各個正五邊形分解成一個個組成單元 A,B 再合成更小的正五邊形，而我們所研究的範圍僅限由大的正五邊形分解成小的正五邊形且沒有剩下的單元 A,B。

（二）我們利用正五邊形之 A,B 的個數 m,n 來計算。因爲若一正五邊形可完全由若干小正五邊形合成，其 m,n 值必等於各個小五邊形 m,n 值的和。

（三）我們將之前的研究過程中所求得的各正五邊形 m,n 值，帶入 Excel 電腦程式中，用回饋的方式，先同時減去 m_2,n_2 的若干倍數後再同時除以 m_1,n_1 或者 m_4,n_4，取得到的數值相同的一組解，即可看出所求的標準分解式。

（四）我們將各正五邊形的 m,n 值一一輸入儲存格內計算，再將結果記錄下來，做成了表格。

No.	1-C1	2-C2	3	4-C4	5	6	7	8
邊長	$1/\varphi$	1	$2/\varphi$	$1/\varphi+1$	$3/\varphi$	2	$2/\varphi+1$	$4/\varphi$
m	1	4	4	11	9	16	20	16
n	2	3	8	7	18	12	15	32
C1	1	0	4	0	9	0	0	16
C2	0	1	0	0	0	4	5	0
C4	0	0	0	1	0	0	0	0
No.	9-C9	10	11	12	13	14	15	16
邊長	$1/\varphi+2$	$3/\varphi+1$	3	$5/\varphi$	$2/\varphi+2$	$4/\varphi+1$	$1/\varphi+3$	$6/\varphi$
m	29	31	36	25	44	44	55	36
n	18	27	27	50	28	43	35	72
C1	0	3	0	25	0	8	0	36
C2	0	7	9	0	0	9	0	0
C4	0	0	0	0	4	0	5	0
No.	17	18	19	20-C20	21	22	23	24
邊長	$3/\varphi+2$	4	$5/\varphi+1$	$2/\varphi+3$	$7/\varphi$	$4/\varphi+2$	$1/\varphi+4$	$6/\varphi+1$
m	61	64	59	76	49	80	89	76
n	42	48	63	47	98	60	58	87
C1	0	0	15	0	49	0	0	24
C2	7	16	11	0	0	20	3	13

C4	3	0	0	0	0	0	7	0
No.	25	26	27	28	29-4*C9	30	31	32
邊長	$3/\varphi+3$	$8/\varphi$	5	$5/\varphi+2$	$2/\varphi+4$	$7/\varphi+1$	$4/\varphi+3$	$9/\varphi$
m	99	64	100	101	116	95	124	81
n	63	128	75	82	72	115	83	162
C1	0	64	0	5	0	35	0	81
C2	0	0	25	24	0	15	9	0
C4	9	0	0	0	0	0	8	0
No.	33	34	35-5*C9	36	37	38	39	40-7*C9
邊長	$1/\varphi+5$	$6/\varphi+2$	$3/\varphi+4$	$8/\varphi+1$	6	$5/\varphi+3$	$10/\varphi$	$2/\varphi+5$
m	131	124	145	116	144	151	100	164
n	87	108	90	147	108	107	200	103
C1	0	12	0	48	0	0	100	0
C2	8	28	0	17	36	24	0	1
C4	9	0	0	0	0	5	0	4
No.	41	42	43	44	45	46	47-C47	48
邊長	$7/\varphi+2$	$4/\varphi+4$	$9/\varphi+1$	$1/\varphi+6$	$6/\varphi+3$	$11/\varphi$	$3/\varphi+5$	$8/\varphi+2$
m	149	176	139	181	180	121	199	176
n	138	112	183	122	135	242	123	172
C1	21	0	63	0	0	121	0	32
C2	32	0	19	15	45	0	0	36
C4	0	16	0	11	0	0	0	0

（五）我們將無法以比本身小的正五邊形合成之正五邊形稱爲「質形」，每個正五邊形化成由質形合成的標準方式，稱爲其「標準分解式」。

（六）舉例來說：我們以第 1,2,3 個正五邊形(C_1,C_2,C_4)，其邊長 $a=\frac{1}{\varphi},1,\frac{1}{\varphi}+1$(即 φ)爲基本的「質形」，將每個正五邊形做「質因形分解」列出其「標準分解式」，不能分解成更小的五邊形者，就是質形，也可以作爲更大的正五邊形的「質因形」。

（七）因爲 $C_1+C_4= 3*C_2$，所以在含有 C_1,C_2,C_4 的標準分解式之表達上，僅以 pC_1+qC_2 或 $rC_2+ sC_4$ 來表示，C_1,C_4 不會同時出現。

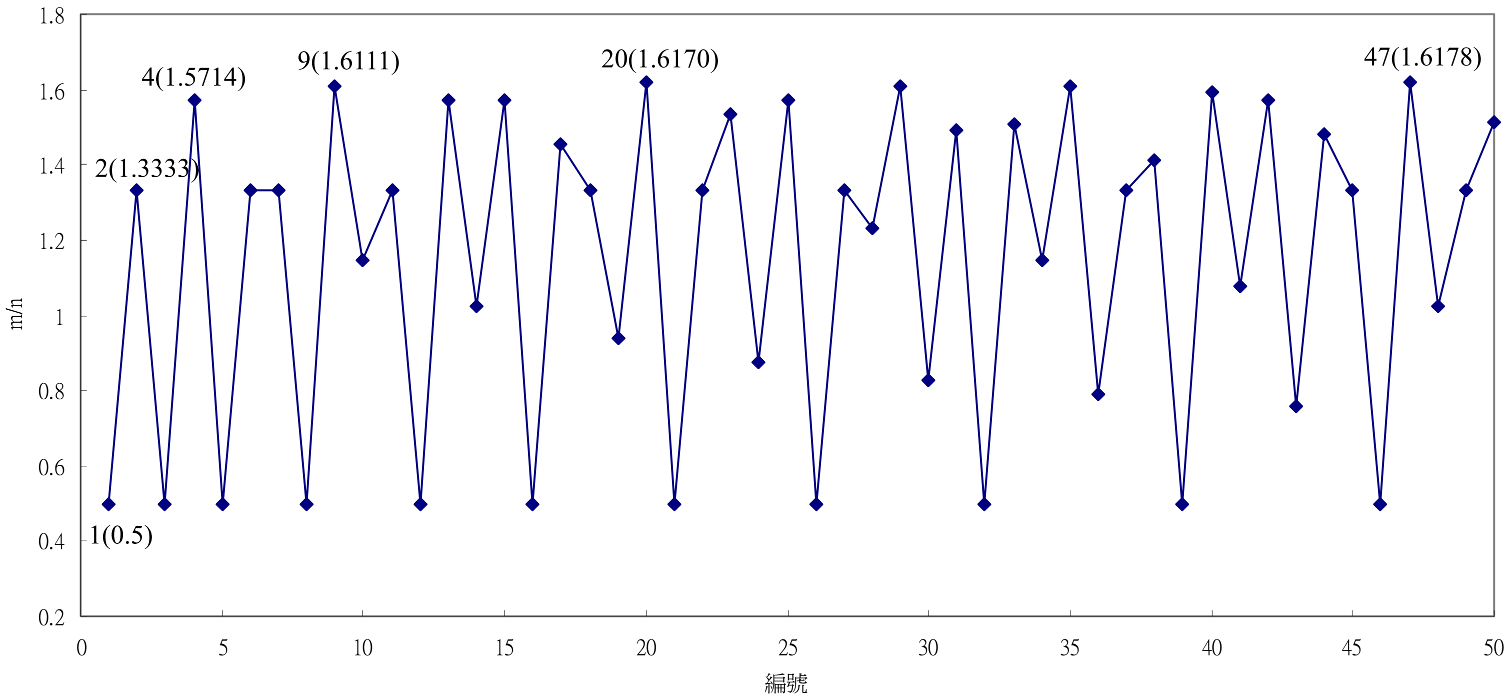
（八）表格中 C1、C2、C4 三個欄位皆出現 0 時，該組無法以 C1、C2、C4 組合而成。此時應可分成兩種情況討論。

1. 出現「質形」：如 C9 無法用比 C9 小的「質形」分解；C20 無法用比 C20 小的「質

形」分解，即無法用 C1、C2、C4、C9 分解。

2. 可用除了 C1、C2、C4 三種「質形」來表示，如 C29、C35 可用 C9 分解。
3. 因一開始是用 C1、C2、C4 三種「質形」作爲檢驗對象，隨著數量增加，「質形」便會相繼出現，出現新「質形」時就將「質形」的檢驗對象擴大，相對於將數字做質因式分解而言，有異曲同工之妙。

（九）我們將「質形」出現時的 m,n 比值做成圖表觀察，發現當 m,n 比值有創新高的現象時，也就是比值比之前的數值都高時，「質形」就會出現。



（十）觀察「質形」出現時的 x、y 值，我們意外的發現數對（x、y）恰爲費氏數列中相鄰兩項，而數對(m、n）爲盧卡斯數列中相鄰兩項(不同的是，爲 a_{2n}, a_{2n-1})。

0	C1	C2	C4	C9	C20	C47
（x、y）	（1，0）	（0，1）	（1，1）	（1，2）	（2，3）	（3，5）
（m、n）	（1、2）	（4、3）	（11、7）	（29、18）	（76、47）	（199、123）

我們想要証明，若(x,y)爲(F_{n-1},F_n)，則(m,n)爲盧卡斯數列中之(a_{2n},a_{2n-1})，其過程如下：

設兩正五邊形之 x、y 值 x_1,y_1 及 x_2,y_2 爲費氏數列中連續三項，其中
$x_2 = y_1, y_2 = x_1 + y_1$......(1)

又由 m,n 與 x,y 的關係式 $\begin{cases} m=x^2+6xy+4y^2 \\ n=2x^2+2xy+3y^2 \end{cases}$

知 $\begin{cases} m_1=x_1^{\ 2}+6x_1y_1+4y_1^{\ 2} \\ n_1=2x_1^{\ 2}+2x_1y_1+3y_1^{\ 2} \end{cases}$, $\begin{cases} m_2=x_2^{\ 2}+6x_2y_2+4y_2^{\ 2} \\ n_2=2x_2^{\ 2}+2x_2y_2+3y_2^{\ 2} \end{cases}$ ，將(1)代入後式

得 $\begin{cases} m_2=y_1^{\ 2}+6y_1(x_1+y_1)+4(x_1+y_1)^2=11y_1^{\ 2}+14x_1y_1+4x_1^{\ 2} \\ n_2=2y_1^{\ 2}+2y_1(x_1+y_1)+3(x_1+y_1)^2=7y_1^{\ 2}+8x_1y_1+3x_1^{\ 2} \end{cases}$

而 $\begin{cases} m_1+n_1=3x_1^{\ 2}+8x_1y_1+7y_1^{\ 2}\text{恰}=n_2 \\ m_1+n_2=4x_1^{\ 2}+14x_1y_1+11y_1^{\ 2}\text{恰}=m_2 \end{cases}$

由此可知 $\begin{cases} m_2=m_1+n_2 \\ n_2=m_1+n_1 \end{cases}$ 可看出其為一延伸數列

又 $\because$ 當(x,y)=(1,0)時，(m,n)=(2,1)

$\therefore$ 此類正五邊形之 m,n 值會構成盧卡斯數列

（十一）承上，因此我們大膽推測下一個質形出現時應為 $5/\varphi+8$，經過 EXCEL 檢驗發現確實無法用 C1、C2、C4、C9、C20 及 C47 做分解；另外檢驗 m,n 比值發現比值為 1.6180⋯，也出現創新高的情形，與之前的結果符合。

我們認為，所有的(x、y)恰為(F_{n-1},F_n)的正五邊形皆為質形，於是作出了以下的証明：

設 F_{n-1},F_n 為費波那契數列的連續兩項， $p,q\in Z$ ， $0<p\le F_{n-2},0<q\le F_{n-3}$ ， $n\ge 2$

欲証明 $\dfrac{(F_{n-1}-p)^2+6(F_{n-1}-p)(F_n-q)+4(F_n-q)^2}{2(F_{n-1}-p)^2+2(F_{n-1}-p)(F_n-q)+3(F_n-q)^2}<\dfrac{F_{n-1}^{\ 2}+6F_{n-1}F_n+4F_n^{\ 2}}{2F_{n-1}^{\ 2}+2F_{n-1}F_n+3F_n^{\ 2}}$

而 $\dfrac{(F_{n-1}-p)^2+6(F_{n-1}-p)(F_n-q)+4(F_n-q)^2}{2(F_{n-1}-p)^2+2(F_{n-1}-p)(F_n-q)+3(F_n-q)^2}$

$$=\frac{F_{n-1}^{\ 2}+6F_{n-1}F_n+4F_n^{\ 2}+(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq}{2F_{n-1}^{\ 2}+2F_{n-1}F_n+3F_n^{\ 2}+(-4p-2q)F_{n-1}+(-2p-6q)F_n+(2p^2+q^2)+2pq}$$

又$(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq$,

與$(-4p-2q)F_{n-1}+(-2p-6q)F_n+(2p^2+q^2)+2pq$ 皆<0

且$1<\dfrac{F_{n-1}^{\ 2}+6F_{n-1}F_n+4F_n^{\ 2}}{2F_{n-1}^{\ 2}+2F_{n-1}F_n+3F_n^{\ 2}}<\varphi$

$\therefore$ 一旦 $\dfrac{(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq}{(-4p-2q)F_{n-1}+(-2p-6q)F_n+(2p^2+q^2)+2pq}\ge\varphi$,

$\dfrac{(F_{n-1}-p)^2+6(F_{n-1}-p)(F_n-q)+4(F_n-q)^2}{2(F_{n-1}-p)^2+2(F_{n-1}-p)(F_n-q)+3(F_n-q)^2}$ 必 $<\dfrac{F_{n-1}^{\ 2}+6F_{n-1}F_n+4F_n^{\ 2}}{2F_{n-1}^{\ 2}+2F_{n-1}F_n+3F_n^{\ 2}}$

當$\dfrac{(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq}{(-4p-2q)F_{n-1}+(-2p-6q)F_n+(2p^2+q^2)+2pq}\ge\varphi$ 時,

$$\Leftrightarrow(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq$$
$$\le(-4\varphi p-2\varphi q)F_{n-1}+(-2\varphi p-6\varphi q)F_n+(2\varphi p^2+\varphi q^2)+2\varphi pq$$
$$\Leftrightarrow(-2p+4\varphi p-6q+2\varphi q)F_{n-1}+(-6p+2\varphi p-8q+6\varphi q)F_n$$
$$+(1-2\varphi)p^2+(4-\varphi)q^2+(6-2\varphi)pq\le 0$$
$$\Leftrightarrow(-2\varphi+1)p^2+2p(-F_{n-1}+2\varphi F_{n-1}-3F_n+\varphi F_n)$$
$$+2q(-3F_{n-1}+\varphi F_{n-1}-4F_n+3\varphi F_n)+(4-\varphi)q^2+(6-2\varphi)pq\le 0\text{...合}$$

$$\left(\begin{array}{l}\because 0<p<F_{n-2},0<q<F_{n-3}\\ \Rightarrow(4-\varphi)q^2+(6-2\varphi)pq\\ <<(2\varphi-1)p^2-2p(-F_{n-1}+2\varphi F_{n-1}-3F_n+\varphi F_n)-2q(-3F_{n-1}+\varphi F_{n-1}-4F_n+3\varphi F_n)\end{array}\right)$$

由次可知，$\dfrac{(-2p-6q)F_{n-1}+(-6p-8q)F_n+(p^2+4q^2)+6pq}{(-4p-2q)F_{n-1}+(-2p-6q)F_n+(2p^2+q^2)+2pq}\ge\varphi$

$$\Rightarrow\frac{(F_{n-1}-p)^2+6(F_{n-1}-p)(F_n-q)+4(F_n-q)^2}{2(F_{n-1}-p)^2+2(F_{n-1}-p)(F_n-q)+3(F_n-q)^2}<\frac{F_{n-1}{}^2+6F_{n-1}F_n+4F_n{}^2}{2F_{n-1}{}^2+2F_{n-1}F_n+3F_n{}^2}$$

由以上証明，我們獲知以$\dfrac{F_{n-1}}{\varphi}+F_n$爲邊長之正五邊形，其 m,n 比值皆大於邊長介於$\dfrac{F_{n-1}}{\varphi}+F_n$和$\dfrac{F_{n-3}}{\varphi}+F_{n-2}$(含)之間的正五邊形之 m,n 比值，故當$x=F_{n-1},y=F_n$時，m,n 比值大於所有邊長之$x<F_{n-1},y<F_n$的正五邊形之 m,n 比值。至於當$x<F_{n-1},y>F_n$或$x>F_{n-1},y<F_n$時，在後方的敘述中會言明。而我們又猜想，質形之邊長必爲$\dfrac{F_{n-1}}{\varphi}+F_n$。

（十二）此時我們由圖表中也發現 m,n 比值都介於 1/2 與 1.618…之間，似乎與黃金比例φ有著密切的關係，於是我們嘗試著去尋找 m,n 比值的範圍：

首先，我們已知正五邊形繁殖法則通式(即 AB 個數與邊長的關係)爲

$$\begin{cases}m=x^2+6xy+4y^2\\ n=2x^2+2xy+3y^2\end{cases}$$

設 m 爲 n 之 k 倍

$$\Rightarrow\left(x^2+6xy+4y^2\right)=k\left(2x^2+2xy+3y^2\right)$$
$$\Rightarrow(2k-1)x^2+(2ky-6y)x+\left(3ky^2-4y^2\right)=0$$
$$\because x\in R\therefore D\ge 0$$
$$\Rightarrow(2ky-6y)^2-4(2k-1)\left(3ky^2-4y^2\right)\ge 0$$
$$\Rightarrow -20k^2y^2+20ky^2+20y^2\ge 0$$
$$\Rightarrow y^2\left(k^2-k-1\right)\le 0\Rightarrow k^2-k-1\le 0$$

$\Rightarrow \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \le k \le \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi$

又$k=\dfrac{m}{n}=\dfrac{x^2+6xy+4y^2}{2x^2+2xy+3y^2}=\dfrac{x^2+xy+1.5y^2}{2x^2+2xy+3y^2}+\dfrac{5xy+2.5y^2}{2x^2+2xy+3y^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2.5(2xy+y^2)}{2x^2+2xy+3y^2}$,

且$x,y\ge 0, x+y>0 \Rightarrow 2x^2+2xy+3y^2 \ne 0$　　$\therefore$ 當$y=0$時,k有最小值$\dfrac{1}{2}$

故$\dfrac{1}{2}\le k\le\varphi$，但由於$m,n\in N$，$\therefore \dfrac{1}{2}\le\dfrac{m}{n}<\varphi$。

總而言之，我們發現，當$\dfrac{x}{y}=\varphi$時，$\dfrac{m}{n}=\varphi$，且若$\dfrac{x}{y}$越接近φ，$\dfrac{m}{n}$也越接近φ，因此當 x, y 皆為費氏數列的一項，且 y 為 x 之後一項時，其$\dfrac{m}{n}$必大於所有較小的正五邊形之$\dfrac{m}{n}$，故此種以$\dfrac{F_n}{\varphi}+F_{n+1}$為邊長之正五邊形，必為質形。而我們也可以利用這些質形檢驗出其他正五邊形是否也為質形。

（十三）為了推論的完整性，我們從另一個面向思考，若(x, y)非費氏數列中相鄰兩項，則必可用比他小的質形做分解，我們想要嘗試著去證明，不過這個部分尚未完成。

（十四）另外在分解過程中，除了（七）所提的 $3*C_2=C_1+C_4$ 之外，尚有 $3*C_9=C_4+C_{20}$，因此導致分解成質因形的方式並不是唯一的，因此在「標準分解式」中將 C_1+C_4 都代換成 $3*C_2$，C4+C20 都代換成 3*C9…以此類推，僅以 pC_1+qC_2 或 rC_2+sC_4 來表示，C_1,C_4 不會同時出現，以確保分解式的唯一性。

（十五）承上，我們除了發現中間一質形的三倍與其前後質形之和可以互相代換，還由此推出連續四質形中，首末兩者之和與中間兩者之和的兩倍等價…等質形之間的關係，因此我們猜想，一個正五邊形，應該能(或改)由一或二種不同之質形組成，而其$\dfrac{m}{n}$值介於(或等於)該質形$\dfrac{m}{n}$值之間。

（十六）由前面的討論，我們想出幾個做「質因形分解」，求標準分解式的方法，其一是用輾轉相除法的方式，逐次減去比其$\dfrac{m}{n}$值大的質形，使其剩餘之$\dfrac{m}{n}$值越來越小，直至分解完畢（現在使用之）。其二是先將欲求出標準分解式之正五邊形及的 m,n 之差值以 C1 填補後再計算之。

（十七）因為我們認為，一正五邊形，能改由二種質形組成（猜測為相鄰兩個質形）故應能以 m,n 值為係數列出二元一次聯立方程式，其解即為需使用之質形的個數。

捌、結論

一、 我們總共發現了四種繁殖法則，分別是：$m_2=2m_1+n_1, n_2=m_1+n_1$(法則一)、$m_2=k^2m_1, n_2=k^2n_1$(法則二)、$a_2=a_1+1$(法則三)、$a_2=a_1+\frac{1}{\varphi}$(法則四)。

二、 第一繁殖法則和第二繁殖法則可以以任何正五邊形為親代繁殖出下一個子代，也就是其親代是無條件限制的。而第三、四、五繁殖法則只在特定圖形上可以使用，也就是其親代是有條件限制的。

三、 我們發現有一種「交換圖形」的現象，推測可以使用它來使同一個圖形呈現不同的排列方式，而且同一個正五邊形之不同排列方式都可以用交換圖形的方式加以取代(也就是基本上它是同一個排列方式)。

四、 改良後的第三、四繁殖法則可以以任何邊長之正五邊形為親代使其產生邊長邊長加 1 或$\frac{1}{\varphi}$的子代，且藉由其與第二繁殖法則的合併使用，衍生出一種方法可以繁殖出任何一種邊長之正五邊形，並藉此計算出其組成元素之個數。

五、 起初我們是以回饋的方式用電腦求得每一個正五邊形之 m、n 值，所以我們原本無法確定其恰有一解(因為我們無法確定其存在)，但我們可以確定此解是唯一的。但現在我們已經能證明出任何一種邊長之正五邊形都能以 A、B 兩種基本元素排出(即 m、n 必有解)因此我們現在能確定 m、n 值恰有一解。

六、 我們已經確定 A、B 兩種基本元素能繁殖出任何一種邊長之正五邊形，且計算並證明出其通式，為

$$\begin{cases} m=x^2+6xy+4y^2 \\ n=2x^2+2xy+3y^2 \end{cases} \left(\text{若正五邊形的邊長為}\left(\frac{x}{\varphi}+y\right)\text{形式，m、n代表A、B的個數}\right)$$

七、 第一繁殖法則能反推出一種方法能將給定邊長的正五邊形利用簡單的切割方式分成由 A、B 組合成的形式，但只有正五邊形邊長之 x、y 值可同除以任一自然數k而使$\frac{x}{k}$為<u>費波那契數列</u>之一項且$\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{k}}$為其後一項者才可以使用。

八、 我們發現所有正五邊形$\frac{m}{n}$值都介於$\frac{1}{2}$和φ之間，關係為$\frac{1}{2}\leq\frac{m}{n}<\varphi$。

九、 令 F_n 為<u>費波那契數列</u>的第 n 項，則若$a=\frac{x}{\varphi}+y=\frac{F_n}{\varphi}+F_{n+1}$，則此正五邊形必為「質形」，且其 m,n 值為<u>盧卡斯數列</u>之第 2n,2n-1 項，我們也可以利用這些質形檢驗出其他正五邊形是否也為質形。

十、 因為質形本身之間具有 $C_1+C_4=3*C_2$，$C_4+C_{20}=3*C_9$ 等的關係，致分解成質因形的方式並非唯一，因此在「標準分解式」中將前者都代換成後者，方便紀錄及計算。

玖、展望

一、我們希望能利用已知的繁殖法則來反推出一種方法能將給定邊長的正五邊形利用簡單的切割方式分成由 A、B 組合成的形式，而最適合的第一繁殖法則卻無法涵蓋所有的正五邊形，因此期望能利用各種繁殖法則的結合及計算方法的改良來達到此目標(也可以研發出一種方法來得到 1 或 $\frac{1}{\varphi}$ 的邊長做切割)。

二、我們希望能證明所有質形之邊長 $\frac{x}{\varphi}+y$ 中的數對(x、y)皆為費氏數列中的連續兩項(F_{n-1},F_n)（同時，(m,n)為盧卡斯數列中之連續兩項(a_{2n},a_{2n-1})）。也希望能證明若數對（x、y）非費氏數列中相鄰兩項，則必可被比它小的質形分解，且可以僅用兩種或以下的質形來做分解。

拾、參考資料

一、謝夢寰、馬靖威（2003）初等代數鏡頭下的 Fibonacci Sequence。台灣 2003 國際科學展覽會。高雄市私立國光高級中學。

二、吳映澄、黃靖琪、廖健琮（2004）圖形 DNA—正多邊形的疊套生成圖概論。第 44 屆高雄市中小學科展。高師附中。

三、THE PUZZLE OF PYTHAGORAS 說明書。

四、網站”A Formula for the nth Fibonacci number”對費氏數列之介紹。

評語

作品結合拼圖遊戲與傳統 Fibonacci 數列、Lucas 數列的方法，十分具有趣味性及教育價值。