

# 臺灣二〇〇六年國際科學展覽會

科 別：數學科

作品名稱：拖線溜點

得獎獎項：佳作

學校 / 作者：國立彰化高級中學 楊子正

## 作者簡介



我是彰化高中楊子正，現讀三年級二十班。從小在彰中校區內長大，時常接觸各式各樣的學生、師長。因此，也無形中使我醞釀出對於學術的興趣，和研究的精神。國中畢業後很幸運地考上離家不過數公尺的彰中，也開始了我多采多姿的高中生活。進入高中後，我的數學老師王聖輝老師給了我很大的啟發，他不但讓數學變的深入淺出，也給我更多獨立思考的機會，因而培養出科學的精神。屢次參加環球城市數學競賽已檢測自己對於數學的敏感度，並且參加各式科學競賽如：物理奧林匹亞等。高二的某個機會下，我得知了科展的訊息，也堅定了我參與科學研究的決心。藉由這次的科展，讓我有機會能夠積極投入研究，也使我對於科學研究有更深一層的認知。

# 摘要

原題目是環球城市盃中，一個圖論的問題。而題目提供了一個證明，是證明此種連線都是偶數的圖形，一定會在三的倍數邊形成立。在經過一番思考過後，我們希望能將原本的偶數連線性質加以驗證，並確定奇存在性。此時，我們也不禁聯想到：奇數是否也有所特別的性質。因此，我們也向奇數連線做研究。

就在平面得到了部分結論的同時，我們想到這個問題是否可以推廣至三維空間。然而在推至三維空間的過程中，我們又聯想到，另一種平面：球面。在球面上放點，能否也找到一些不同的性質。因此，我們分別從平面、球面、立體圖下手。

基本上，探討平面和立體問題的方法，是以土法煉鋼的方式來求出結果。然而這種圖論的問題，不可能嘗試到無限多點的情形。因此，我們是著找出一個關鍵的 key，那就是結合性質和外接合性質。以這兩種方法，我們可以將一個簡單的基本圖形，推向無限多點和無限多邊的情況。

接下來，還有討論一些特殊狀況，例如： $\deg v = 3n+1$ ，探討其結果。

最後得到的結論是：

- 1、平面偶圖成立的條件為：此多邊形為三倍數邊形，而且除了內部一、二、四點以外，其他點數都可以成為偶圖。
- 2、平面奇圖成立的條件為：奇數邊形的情形下，除了三點以外，其他的內部奇數點的都可以成為奇圖。偶數情形下，除了四點以外，其他的內部奇數點的都可以成為偶圖。
- 3、三角形平面圖， $\deg n$  皆為  $m$  成立的條件： $2 < m < 6 (m \in N)$
- 4、三角形內外任意點  $\deg$  皆為  $3n (n \in N)$  的成立條件：  
三角形內部  $4x+1$  個點 ( $x \in N$ )。
- 5、三角形內外任意點  $\deg$  皆為  $3n+1 (n \in N)$  的成立條件：  
三角形內部  $3x$  個點 ( $x \in N$ )。
- 6、立體偶圖  $n$  頂點 ( $n > 4$ ) 面體的成立條件為：  
內部點數為  $5m+n-3$ 、 $5m+n-1$ 、 $5m+n$ 、 $5m+n+1$ 、 $5m+n+3$ 。(  $m$  為大於或等於零的整數)
- 7、立體奇圖四面體的成立條件為：內部點數為偶數皆存在。

# Abstract

The original problem is a question of Graph Theory in IMTOT ,which provides a proof that proving the figure which its linking-line number is even ,should also be contented in the triple-sides figure. After profound consideration ,we try to make sure the existence of the properties the we mentioned above. Meanwhile ,it also occurs to us that whether the properties would be contented ,in the figure which its linking-line number is odd. So we make our way to it. Additionally ,three-dimensional and spherical figures are part of our research as well.

Basically ,we discuss the problem in two-dimensional and three-dimensional aspects with the simplest method .However ,it is impossible to discuss the problem in unlimited dots .Hence , we are going to find a “key” to solve this problem .As a result ,we can find a simple basic-picture , and expand to infinite-multiple lateral pictures.

Next step ,we also discussed some special situations , for example: for each point  $v$  ,  $\deg v=3n+1$ .

At last the conclusion is following:

- 1 、 The conditions of linking-line number is even: triple-sides. And the amount of points inside the figure is without 1,2,and 3.
- 2 、 The conditions of linking-line number is odd: In the odd-sides figure , all number of the points inside the figure can be content without 3 point. In the even-sides figure , all number of the points inside the figure can be content without 4 point.
- 3 、 In a triangle , each point's deg is the same number  $m$ :  $2 < m < 6$
- 4 、 In a triangle , each point's deg is  $3m$ : the amount of the points inside the figure is  $4X+1$ .
- 5 、 In a triangle , each point's deg is  $3m+1$ : the amount of the points inside the figure is  $3X$ .
- 6 、 The three-dimensional figure's whose amount of climax is  $n$  amount of the point is even: the amount of the points inside the figure is  $5^{m+n-3}$  、  $5^{m+n-1}$  、  $5^{m+n}$  、  $5^{m+n+1}$  、  $5^{m+n+3}$  。
- 7 、 The three-dimensional figure's whose amount of climax is  $n$  amount of the point is odd: no matter how many points are inside the figure.

## 壹、研究動機

我們题目的靈感是來自於環球城市盃中，一個和圖論有關的問題(附件一)：在一四邊形內部取若干個點，並連接這些點及四邊形頂點，將四邊形分成數個三角形。每個點接不在線段上，且線段皆不相交。計算每個點連出的線段，是否有可能全是偶數的。

在原題目所附上的證明中，有提到：若多邊形中，各點連線數皆為偶數( $\deg v = 2n$ )，則此多邊形的邊之數目，必為三的倍數。從此結論中，我不禁聯想到：多邊形內部有多少點？怎麼樣的多邊形？才絕對成立。這些問題也喚起我更多的靈感了。

## 貳、研究目的

- 一、找出各點連線皆為偶數的多邊形內部有多少點？怎麼樣的多邊形？
- 二、若各點連線數皆為奇數( $\deg v = 2n + 1$ )，探討其結果。
- 三、對於各點連線數，加上更多的限制(例如  $\deg v = 3n + 1$ )，探討其結果。
- 四、推廣到空間中，討論各點的連線，探討其結果。

## 參、研究器材

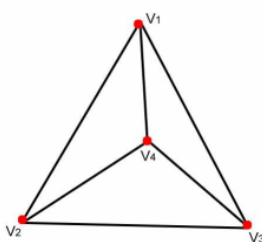
GSP

## 肆、研究方法及過程

### 一、預備知識及符號說明

#### (一)deg

圖一為一三角形， $v_1$ 、 $v_2$ 、 $v_3$ 為三角形的三頂點， $v_4$ 為三角形內部一點。可以觀察到： $v_1$ 有連接三條線分別至 $v_2$ 、 $v_3$ 、 $v_4$ 。為了方便表示，我們使用deg來表示。 $\deg v_1$ 表示 $v_1$ 的連線數，因此， $\deg v_1 = 3$ 。



圖一

#### (二)相關名詞定義

我們的研究目的是討論各點的奇偶性，因此，我們定義：

1. 偶圖：平面圖或立體圖多邊形上任意一點的連線之數目皆為偶數。
2. 奇圖：平面圖或立體圖多邊形上任意一點的連線之數目皆為奇數。
3. 內偶外奇：一平面多邊形其內部任意點的連線數，皆為偶數；而多邊形的任意頂點的連線數，皆為奇數。

- 4 · 內奇外偶：一平面多邊形其內部任意點的連線數，皆為奇數；而多邊形的任意頂點的連線數，皆為偶數。
- 5 · 偶結合性質：將三角形偶圖取代任意偶圖中的三角形(此三角形內無點)。
- 6 · 奇結合性質：將三角形內奇外偶圖取代任意奇圖中的三角形(此三角形內無點)。
- 7 · 偶外接合性質：將偶圖外側加上三角形，擴充其邊數。
- 8 · 奇外接合性質：將奇圖外側加上奇圖，擴充其邊數。

## 二、研究想法

我們先不斷嘗試來尋找出基本的存在性，然後再藉由一些另外發現的性質(如：偶結合性質)來擴充出更多結果。

## 三、研究過程

### (一) 平面圖形

#### 1、偶圖情形

##### (1) 基本證明

證明偶圖成立的多邊形，其邊數必為三的倍數。

環球城市盃提供的證明：

假設P是依題設方法，利用其內部數點及其頂點，將它自身分割成許多三角形的多邊形，並且這些三角形的頂點不會在任何二個頂點的連線段上，從每個三角形的每一個頂點連結出去的線段數都是偶數。也就是假設存在有多邊形可以滿足題設。

那麼，對於P的每一個邊，我們將包含該邊的三角形都一一切除，可以得到新的多邊形Q。因為操作中，多邊形P的每個頂點處所移除的線段數都是2，所以，這個操作並不影響頂點連結線段數的奇偶性。因此，多邊形Q同樣符合題設條件。

當從多邊形P切除三角形時，可能的情形有三種：(1) 切除只含有P的某一個邊的三角形；(2) 切除含有P的某二個相鄰邊的三角形；(3) 切除含有P的三個邊的三角形。最後這種情形只有當多邊形P的邊數為3時才可能發生。從多邊形P開始，因為三角形數是有限的，所以持續這種操作則有

$P \rightarrow O_{k_1} \rightarrow O_{k_2} \rightarrow \dots \rightarrow O$ ，其中 $k_i$ 表示多邊形 $Q_{k_i}$ 的邊數。不

難發現，若多邊形P的邊數為 $n$ ， $n > 3$ ，則 $Q_{k_i}$ 的邊數為

$$m + 2(n - 2m) = 2n - 3m$$

其中 $m$ 為在多邊形P被移除的三角形中，含有二個邊為原多邊形P的某個二鄰邊的三角形個數。而且只有當 $n$ 為3的倍數時， $2n - 3m \equiv n \pmod{3}$ 。

如果 $n$ 不是3的倍數，則無限次地持續這種操作過程，將導致矛盾。

由此可知：  
 要達到偶圖，必須是 3 的倍數邊形。  
 得證 #

**自創的證明：**

假設  $n$  邊形  $P$  為一個偶圖，並令多邊形的頂點為  $p_i (i = 1, 2, 3 \dots n)$ 。

令內部的點為  $k_j (j = 1, 2, 3 \dots m)$ 。

$$\text{則 } \frac{\sum_{i=1}^n \deg p_i + \sum_{j=1}^m \deg k_j}{2} = S_l$$

先將每個點所連出的線條的總和求出。由於每條線都是由兩個點構成，因此，將  $\sum_{i=1}^n \deg p_i + \sum_{j=1}^m \deg k_j$  除以 2，便可得到線段的個數  $S_l$ 。

由觀察可得到：

多邊形的頂點所連接的三角形個數，會比此點所連接的線段數少 1。而內部的點，所連接的三角形個數，會和此點所連接的線段數相等。

因此，可以得到下式：

$$\frac{\sum_{i=1}^n \deg p_i - n + \sum_{j=1}^m \deg k_j}{3} = S_\Delta$$

由於每個頂點所連接的三角形個數，比此點所連接的線段數少 1。因此，每一個頂點都會少 1，所以我將線段

和  $\sum_{i=1}^n \deg p_i + \sum_{j=1}^m \deg k_j$  減  $n$ 。

多邊形偶圖內的三角形都是由三個頂構成的，因此，我將

$\sum_{i=1}^n \deg p_i - n + \sum_{j=1}^m \deg k_j$  除以 3。便可得到多邊形內三角形個數  $S_\Delta$ 。

由上述得：

$$2\left(\sum_{i=1}^n \deg p_i + \sum_{j=1}^m \deg k_j\right)$$

$$3\left(\sum_{i=1}^n \deg p_i - n + \sum_{j=1}^m \deg k_j\right)$$

若欲證明  $n$  為三的倍數。則必須證明

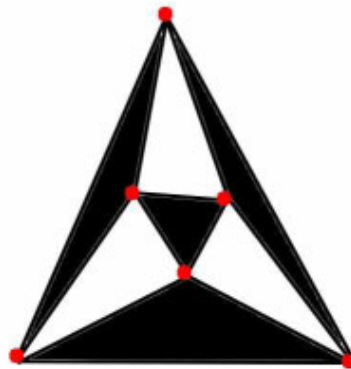
$$3\left(\sum_{i=1}^n \deg p_i + \sum_{j=1}^m \deg k_j\right)。$$

由 單墀著的《趣味的圖論問題》p83 提到，兩色圖的充要條件是每個頂點的  $\deg$  都是偶數。

證明：

使用數學歸納法來證明。

對圖  $G$  的圈數  $r$  用歸納法。 $r=1$  或  $0$ ，命題顯然成立。假設命題對圈數  $r-1$  ( $r \geq 1$ ) 時已成立，那麼將去掉  $G$  的一個圈，得圈  $Q$ ， $Q$  的每個頂點的次數與這個點在  $G$  的次數相等(如果這點不在所去的圈上)或少二(如果這點在所去的圈上)，根據歸納法，可以用兩種顏色將  $Q$  塗好，使得相鄰的區域顏色保持不變，而圈內的顏色均改為與原來不同的顏色，這樣就可以用兩色將  $G$  塗完。



圖二

由圖二可觀察到：

黑色的三角形正好可以佔有所有的線段。

顯而易見的：所有偶圖都會成立這種情形。因為每個

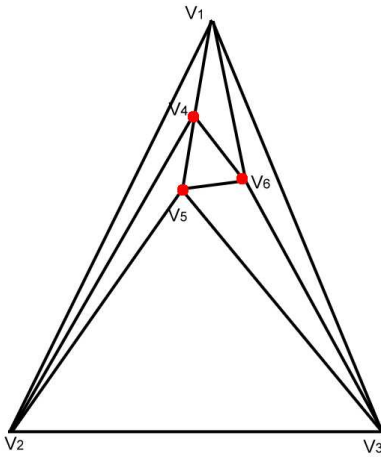
黑色三角形外一定是白色三角形。

因此，可以求得，偶圖的所有線段數為三的倍數。

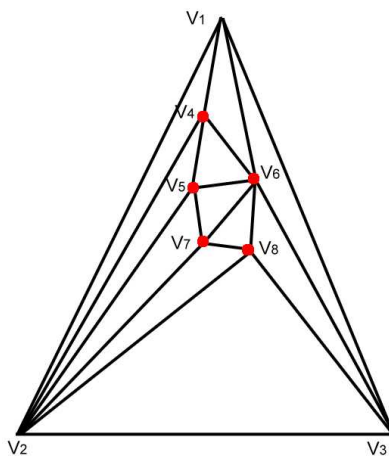
由此可知， $n$  也為三的倍數。

得證 #

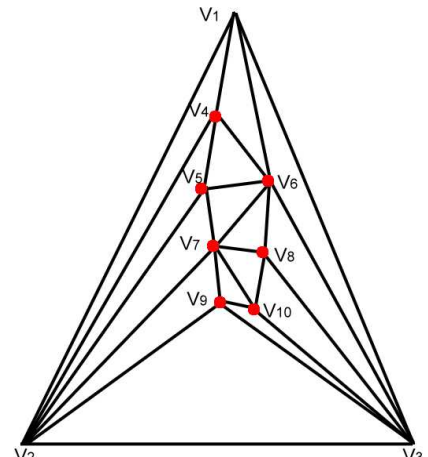
(2) 三角形奇數點



圖三



圖四



圖五

圖一為內部一點的三角形，很顯然不為偶圖。但這也是內部一點時的唯一連法。因此，內部放一點的三角形，不會成為偶圖。

試證：除了內部一點以外，只要三角形內部的點數為奇數，便可成為偶圖。

由圖一觀察，可看出，內部一點的三角形，無法成為偶圖。

因此，以數學歸納法證明內部奇數點三角形偶圖的存在性

- 1、若在三角形內部放入三點（圖三），很顯然成立。
- 2、假設在三角形內部放入  $2n+1$  點，三角形也能夠成為偶圖。

3、則三角形內部放入  $2n+3$  個點的圖形，便可由  $2n+1$  的圖形推得（以圖三及圖四來解釋）：

若將圖三中的線段  $\overline{v_3v_5}$  去除，並加上點  $v_7$  和  $v_8$ 。連結起來，便可化成圖四。圖四推向圖五也如上類推，因此  $2n+3$  也可以由  $2n+1$  推得。

由數學歸納法 1、2、3 得證：

除了內部一點以外，只要三角形內部的點數為奇數，便有偶圖的存在性。

### (3) 偶結合性質

說明：

假設  $v_1$ 、 $v_2$ 、 $v_3$  為偶圖中某一三角形  $V$ (內部無點)的三頂點。 $p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  為某一三角形偶圖  $P$  的三頂點。

因此， $\deg v_1$ 、 $\deg v_2$ 、 $\deg v_3$ 、 $\deg p_1$ 、 $\deg p_2$ 、 $\deg p_3$  皆為偶數。

若將  $P$  取代  $V$ ，則  $p_1$  取代  $v_1$  令為  $x_1$ 、 $p_2$  取代  $v_2$  令為  $x_2$ 、 $p_3$  取代  $v_3$  令為  $x_3$ ，

$$\text{deg } x_1 = \deg v_1 + \deg p_1 - 2$$

$$\text{deg } x_2 = \deg v_2 + \deg p_2 - 2$$

$$\text{deg } x_3 = \deg v_3 + \deg p_3 - 2$$

由上述得知：

使用結合的方法，並不會影響圖形的奇偶性。

因此，我們可以應用奇偶性質，來擴充圖形內的點數。

例如：一個內部三點的偶圖，填上一個內部三點的三角偶圖。因為結合性質成立，所以可以將點擴充到  $3 + 3 = 6$  個。

在三角形奇數點中提到：除了 1 以外的奇數點，都可以成為偶圖。所以，配合結合性質，可以將點數相加。

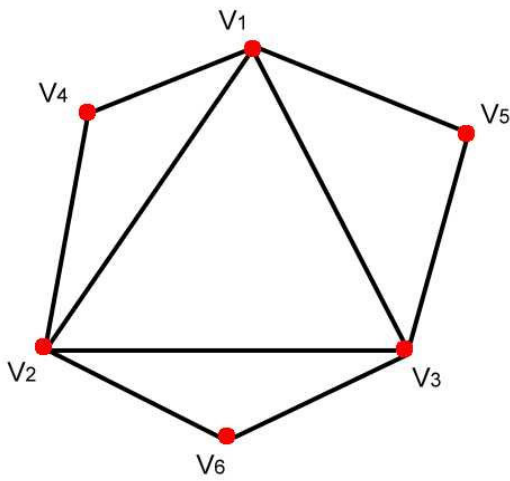
所有的偶數均可作分成兩個奇數和，而我們目前有所有的奇數(除了 1 以外)可用。故除了二和四外，其他的偶數都可以結合出來。

由以上結論得知：

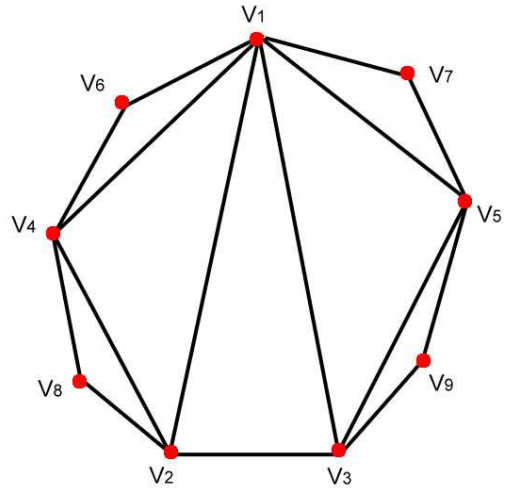
三角形中除了一、二、四點外，其他的點數都可以成立偶圖。

(4) 偶外接合性質

說明：



圖六



圖七

如圖六所示，在  $\Delta V_1V_2V_3$  外面加上  $\Delta V_1V_4V_2$ 、 $\Delta V_1V_5V_3$ 、 $\Delta V_2V_6V_3$  三個三角形，便可使三角形  $\Delta V_1V_2V_3$  變為六邊形  $V_1V_4V_2V_6V_3V_5$ 。而且不影響其奇偶性質。

如圖七所示，在  $\Delta V_1V_2V_3$  外面加上  $\Delta V_1V_4V_2$ 、 $\Delta V_1V_5V_3$ 、 $\Delta V_1V_6V_4$ 、 $\Delta V_1V_7V_5$ 、 $\Delta V_4V_8V_2$ 、 $\Delta V_5V_9V_3$  六個三角形，便可使三角形  $\Delta V_1V_2V_3$  變為九邊形  $V_1V_6V_4V_8V_2V_3V_9V_5V_7$ 。而且不影響其奇偶性質。

由以上例子可以輕易觀察到，若以這種方法，便可以連接出所有三的倍數邊形，並且不影響原本的奇偶性質。

上述提到，藉由結合性質，可以得到三角形中達到偶圖的點數。

因此，配合偶外接合性質，就可以擴充多邊形的邊數。

由此可見，所有的三倍數邊形都可以藉由此方式推演出來，而且不改變內部點的個數。

因此，所有的三倍數邊形，除了內部一、三、四點以外，都可以成為偶圖。

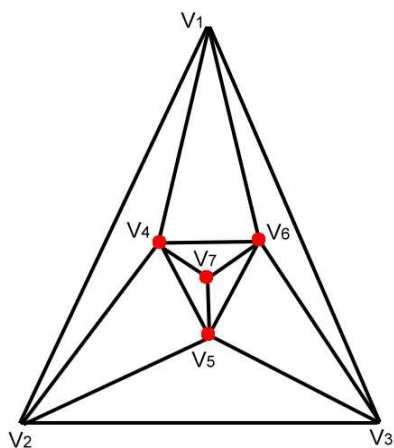
## 2、奇圖情形

### (1) 奇結合性質

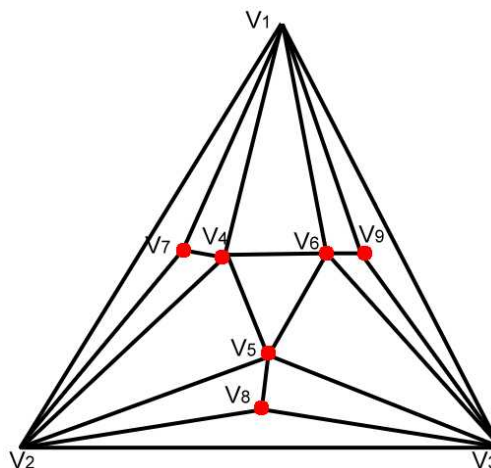
說明：

之前提過的偶結合性質，是在偶圖中加入偶圖。但若在奇圖中加入奇圖的話，很顯然會影響到圖形的奇偶性。因為，奇數 + 奇數 = 偶數。

因此，若欲使用結合的方式來增加點數的話，就必須改變加入的圖形。這時，想到使用「內奇外偶」的圖形(圖八、圖九)來解決。



圖八



圖九

假設  $v_1, v_2, v_3$  為奇圖中某一三角形  $V$  (內部無點) 的三頂點。 $p_1, p_2, p_3$  為某一內奇外偶三角形  $P$  的三頂點。

因此， $\deg v_1, \deg v_2, \deg v_3$  皆為奇數。 $\deg p_1, \deg p_2, \deg p_3$  皆為偶數。

若將  $P$  取代  $V$ ，則  $p_1$  取代  $v_1$  令為  $x_1$ 、 $p_2$  取代  $v_2$  令為  $x_2$ 、 $p_3$  取代  $v_3$  令為  $x_3$ ，

$$\text{deg} x_1 = \text{deg} v_1 + \text{deg} p_1 - 2$$

$$\text{deg} x_2 = \text{deg} v_2 + \text{deg} p_2 - 2$$

$$\text{deg} x_3 = \text{deg} v_3 + \text{deg} p_3 - 2$$

由上述得知：

使用結合的方法，並不會影響圖形的奇偶性。

為了完成奇結合性質，找到了兩個內奇外偶三角形：內部四點和內部六點。

更進一步也不難發現，在內部一點的三角形可以連成奇圖三角形。

因此，使用這兩個元素來切入主題。

若以內奇外偶圖取代內部一點之奇圖三角形中的三角形，則可以產生另一個奇圖。因此，配合內部四點、內部六點這兩種內奇外偶三角形，便可得到：

$$K = 1 + 4N + 6M$$

內部  $K$  點的三角形，可以成為奇圖。

而  $4N + 6M$  ( $N, M$  為正整數或零) 可以組合出除了 2 以外所有的偶數。

因此，除了三點以外，其他的內部奇數點的三角形都可以成為奇圖。

內部偶數點的三角形是否也有可能成為奇圖呢？

結論：若奇數邊形內部為偶數點，則無法成為奇圖。

證明：

假設奇數形  $P$  為一個奇圖，並令多邊形的頂點為  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots n$ )。

令內部的點為  $k_j$  ( $j = 1, 2, 3 \dots m$ )。

則  $\deg p_i$ 、 $\deg k_j$  皆為奇數。

$$\text{而 } \frac{\sum_{i=1}^n \deg p_i + \sum_{j=1}^m \deg k_j}{2} = S_l$$

其中  $S_l$  為此多邊形的線段數

因此， $2 | (\sum_{i=1}^n \deg p_i + \sum_{j=1}^m \deg k_j)$ 。

由於  $p_i$  ( $i = 1, 2, 3 \dots n$ ) 皆為奇數，且  $n$  也是奇數，故  $\sum_{i=1}^n \deg p_i$  為奇數。

因此， $\sum_{j=1}^m \deg k_j$  也是奇數。

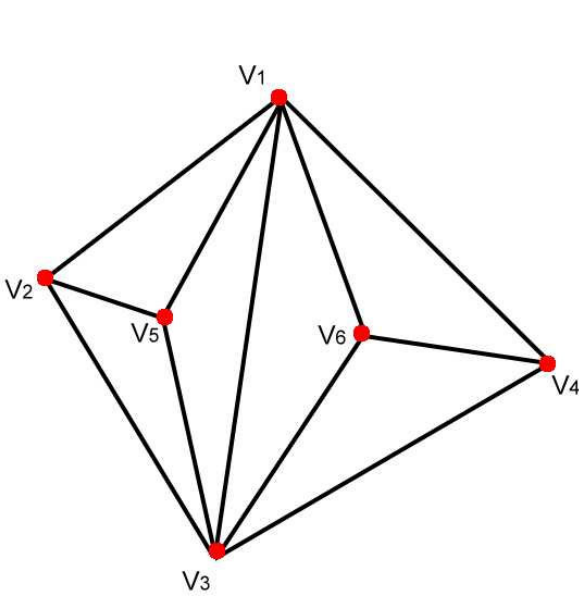
然而，若  $j$  為偶數的話， $\sum_{j=1}^m \deg k_j$  必為偶數。

故  $j$  為奇數。

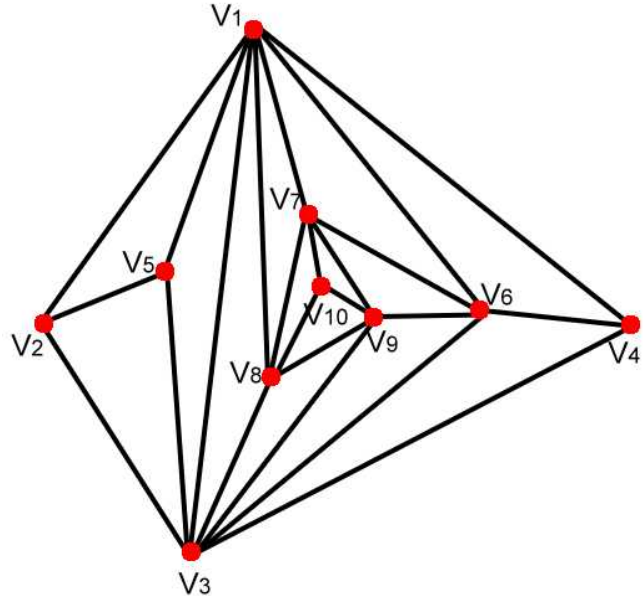
得證 #

## (2) 奇外接性質

說明：



圖十



圖十一

圖十為一個內部有兩點的四邊形，而從另一角度來看，可以將四邊形  $V_1V_2V_3V_4$  視為一  $\triangle V_1V_2V_3$  和  $\triangle V_1V_4V_3$  相接合而成。

由  $\triangle V_1V_2V_3$  看來：尙未接上  $\triangle V_1V_4V_3$  之前， $\deg v_1=3$ 、 $\deg v_2=3$ 、 $\deg v_3=3$ 。而接上  $\triangle V_1V_4V_3$  之後， $v_1$ 、 $v_3$  個別加上兩線段。故  $\deg v_1=5$ 、 $\deg v_2=3$ 、 $\deg v_3=5$ ，依然為奇圖。而且，可以觀察到兩三角形之線段  $v_1v_3$  相重合，導致  $v_1$  只加上線段  $v_1v_6$  和線段  $v_1v_4$ 、 $v_3$  只加上線段  $v_3v_6$  和線段  $v_3v_4$ 。顯而易見可觀察到：將兩三角形接合，並不影響奇圖的存在性。

由上述結論可以很直觀的推論：兩奇圖相接合，並不影響其奇偶性。

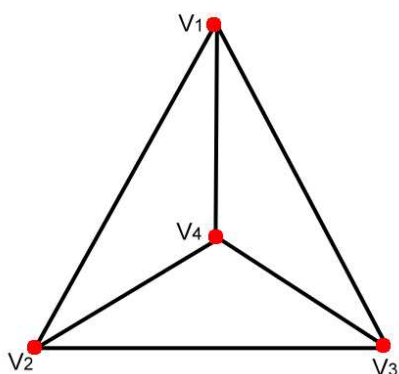
圖十一是內部一點奇圖三角形和內部四點奇圖三角形相接的情況，也為奇外接性質成立的例子。

由以上性質可以推斷出一個結果：倘若將奇圖相連接，勢必可以不斷擴充多邊形的邊數。

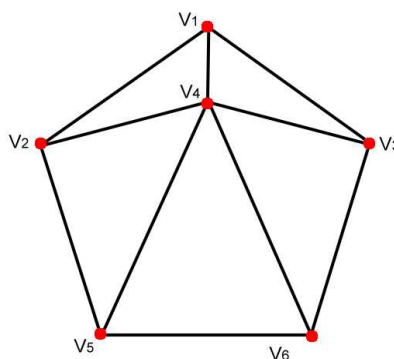
然而，這個方法會遇到一個問題：點數會不斷得增加。因為，每個奇圖中，都至少含有一個點。

因此，為了改善點數增加的問題，藉由多次嘗試後，發現了以下的性質。

### (3) 外擴性質



圖十二

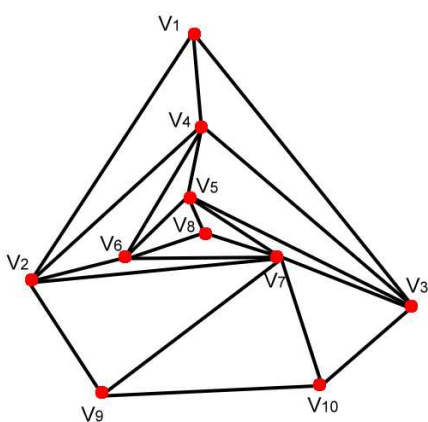


圖十三

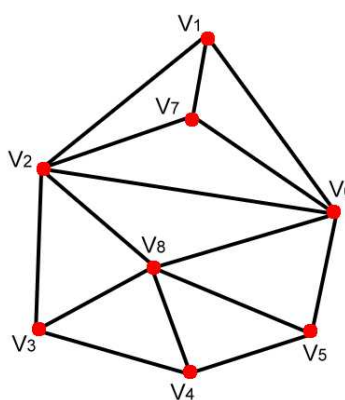
圖十二為內部一點之奇圖三角形。

圖十三為內部一點之奇圖五邊形。

由這兩圖的比較可以發現一個小規則：若將圖十二的線段  $V_1V_2$  去掉，且在原先線段  $V_1V_2$  的下方找出任意兩點  $V_5$ 、 $V_6$ 。然後，將此兩點連接起來，並再將  $V_2$  和  $V_5$ 、 $V_3$  和  $V_6$  連接起來，且線段  $V_2V_5$  與線段  $V_3V_6$  並沒有相交。最後將  $V_4$  與  $V_5$ 、 $V_6$  連接起來，便可以將圖十二變為圖十三。



圖十四



圖十五

圖十四也可以使用上述方法，將內部五點的奇圖三角形，如法炮製成內部五點的奇圖五邊形。

圖十五是一個六邊形，它也是由四邊形以相同手法推導過來的。很顯然的，也有相同的結果。

由以上程序，可推出：可以用任意的奇圖  $n$  邊形 ( $n \geq 3, n \in N$ )，推出所有  $2m+n$  ( $m > 0$ ) 邊形也可以成為奇圖。我們稱此方法所得到的結果為**外擴性質**。

由於，每次所增加的邊數都是 2。所以，無法使用偶數推出奇數、奇數推出偶數。故必須將偶數和奇數分成兩個部分來討論。

因為，需要所有的圖形結論。所以，基礎的圖形邊數越少越好。

故奇數取三角形為基本的圖形、偶數取四邊形為基本的圖形。

奇數：奇圖三角形中，所得到的結論為：除了 3 點以外，其他的內部奇數點的三角形都可以成為奇圖。而若使用外擴性質，則可以在不增加任何內點數的情形下，無限制的增加邊數，並可以由三角形推演到所有的奇數邊形。因此，奇數圖形所得到的結果，和三角形是相同的。

討論偶數的情形前，先探討四邊形成為奇圖的條件。

由圖十和圖十一可以發現到：若將三角形接合便可成為四邊形，而其內點數便會相加。因此，從三角形的結果（除了三點以外，其他的內部奇數點的三角形都可以成為奇圖）可以歸納出，除了 4 點之外，四邊形內部有偶數點數，都可以成為奇圖。

結論：若偶數邊形內部為奇數點，則無法成為奇圖。

證明：

假設邊數為偶數的多邊形  $P$  為一個奇圖，並令多邊形的頂點為  $p_i (i = 1, 2, 3 \cdots n)$ 。

令內部的點為  $k_j (j = 1, 2, 3 \cdots m)$ 。

則  $\deg p_i$ 、 $\deg k_j$  皆為奇數。

$$\text{而 } \frac{\sum_{i=1}^n \deg p_i + \sum_{j=1}^m \deg k_j}{2} = S_l$$

其中  $S_l$  為此多邊形的線段數

因此， $2 | (\sum_{i=1}^n \deg p_i + \sum_{j=1}^m \deg k_j)$ 。

由於  $p_i (i = 1, 2, 3 \cdots n)$  皆為奇數，但  $n$  為偶數，故  $\sum_{i=1}^n \deg p_i$  為偶數。

因此， $\sum_{j=1}^m \deg k_j$  也為偶數。

然而，若  $j$  為奇數的話， $\sum_{j=1}^m \deg k_j$  必為奇數。

故  $j$  為偶數。

得證 #

偶數：四邊形所得到的結論為：除了 4 點之外，四邊形內部有偶數點數，都可以成為奇圖。因此，若配合外擴性質，並可將四邊形推演到所有的偶數邊形。而且它們所得到的結論和四邊形是相同的。

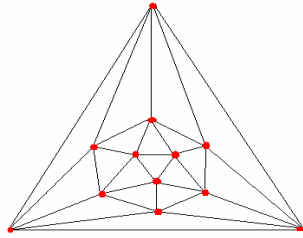
3、deg n (n 為多邊形內外任何的點)皆相同情形

(1) 三角形

以上討論過偶圖和奇圖的各式圖形，而在觀察圖形變化的過程中，發現到一種十分漂亮的圖形。那就是對任意點  $n(n=1、2、3、\dots)$ ，deg n 皆相等。

首先，討論的情形為三角形：

三角形內部一點很明顯便是一個例子(圖一)。除此之外，還發現到 deg n=4(圖三)以及 deg n=5(圖十六)的情形。



圖十六

欲證明：在三角形中對於任意點  $n$ ，deg n 皆相同的條件下。若  $\text{deg } n > 5$ ，三角形偶圖不存在。

預備定理：三角形內部加入  $x$  點並三角化後(內部切割為三角形)，三角形圖形內外的連線線數為  $3x+3$ 。

證明：

設三角形內部的點數為  $m$  點

三角形內部的連線數為  $n$  條 ( $m, n \in N$ )

則三角形三角化後的三角形個數為  $\frac{2n+3}{3}$ 。

由尤拉公式：頂點數 + 內部面的個數 - 線的個數 = 1

因此，得： $(m+3) + (\frac{2n+3}{3}) - (n+3) = 1$

即： $n=3m$

回到原證明，設三角形內部有  $k$  個點，那麼總連線數便為  $3k+3$ 。

則因為每個點所連線的數目都固定，故設 deg n 皆為  $s$ 。

可知  $3k+3 = \frac{(k+3) \times s}{2} \rightarrow k(6-s) = 3(s-1)$

因此， $s > 5$ ，則  $k$  沒有固定的解。

故可得證：在三角形中對於任意點  $n$ ，deg n 皆相同的條件下。若  $\text{deg } n > 5$ ，三角形不存在。

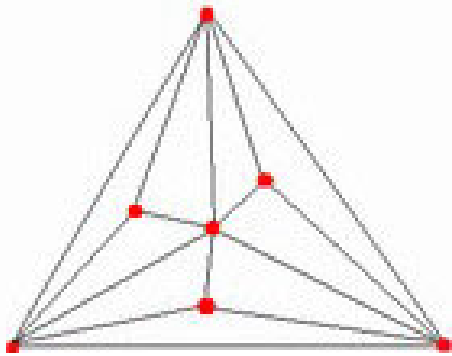
## (2)多邊形

由於任意多面體皆可由三角形構成，因此可以歸出一個簡單的結論： $n$  邊形( $n \in N$ )內部加入  $x$  點並三角化後(內部切割為三角形)，三角形圖形內外的連線線數為  $3x+3+(n-3)$ 。

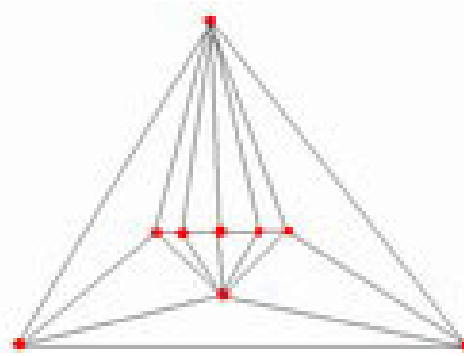
配合尤拉公式，可以得到一個結論：

任意  $n(n > 3)$  邊形只有可能作出  $\text{deg}$  皆為 3 或 4 的圖形。然而，配合鴿籠原理便可以證明出， $n$  邊形不可能出現  $\text{deg}=3$  或 4 的圖形。

因此， $n(n > 3)$  邊形不可能出現  $\text{deg}$  皆相同的圖形。



圖十七



圖十八

### 4、三角形中 $\text{deg } v$ ( $v$ 為三角形形內外任何的點)皆為 $3n$

圖一對於各點  $\text{deg } v$  皆為 3。因此，倘若能找到一個圖形：三角形三頂點的  $\text{deg}$  為 3 的倍數加上 2，內部點的  $\text{deg}$  皆為三的倍數。則可以由圖一，延伸出無限多的圖形。

圖十七便是一個適用的圖形，而其內部有四個點。因此，每次加入一個這樣的圖形，就可以在原圖形內增加 4 個點。

配合尤拉公式，便可得證：只有  $4x+1$  ( $x \in N$ ) 數個點，才可能出現各點  $\text{deg}$  皆為三的倍數的圖形。

因此，三角形中  $\text{deg } v$  皆為  $3n$ ，的成立條件是：內部  $4x+1$  個點( $x \in N$ )。

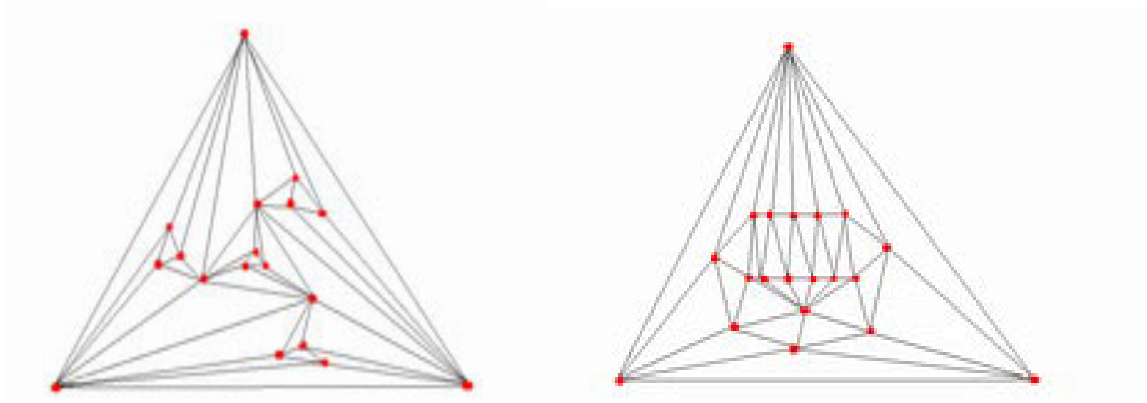
### 5、三角形中 $\text{deg } v$ ( $v$ 為三角形形內外任何的點)皆為 $3n+1$

圖三對於各點  $\text{deg } v$  皆為 4。

配合尤拉公式，便可以得證：只有  $3x$  ( $x \in N$ ) 數個點，才可能出現各點  $\text{deg}$  皆為 3 的倍數加 1 的圖形。

因此，我嘗試做出圖十八的圖形。

比較對照圖三和圖十八可以發現一個規則性。那就是在圖形中加入三個點，可以同時增加兩個點的  $\text{deg}$  數，使每個點  $\text{deg}$  依然是  $3n+1$ 。再來依照這個方法配合圖三的圖形，便可以不斷加上 3 個點。使得三角形內部  $3x$  個點的情形，存在圖形對於圖形上任意點其  $\text{deg}$  數皆為 3 的倍數加 1。



圖十九

圖二十

6、三角形中  $\deg v$  ( $v$  為三角形形內外任何的點)皆為  $4n$

圖三對於各點  $\deg v$  皆為 4。

因此，我在圖三的圖形中尋找規則，發現到：將圖三中的  $\triangle V_1V_2V_4$ 、 $\triangle V_1V_3V_6$ 、 $\triangle V_4V_5V_6$ 、 $\triangle V_2V_3V_5$  皆加上點，使得此四個三角形皆變成圖三的形状。也就是圖十九。

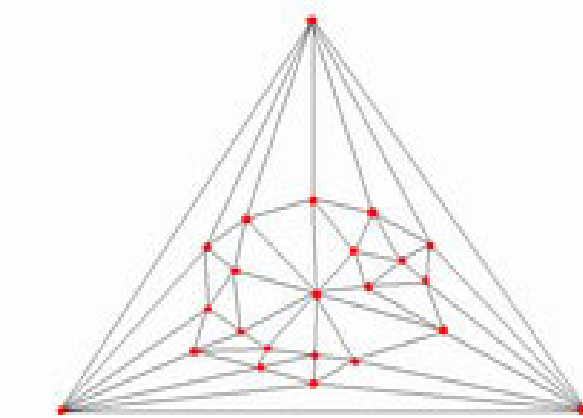
然後再以此規則，加入圖十九，便可以做出一個內部 27 個點的圖形。以此類推，則可以無限增加點數。因此，使得三角形內部  $3+12x$  ( $x \in N$ ) 個點的情形，存在一圖形對於圖形上任意點其  $\deg$  數皆為 4 的倍數。

7、三角形中  $\deg v$  ( $v$  為三角形形內外任何的點)皆為  $4n+1$

圖十六對於各點  $\deg v$  皆為 5。

我嘗試作出圖二十。並且比較圖十六和圖二十，可以發現一個作圖的規律，那就是：固定三角形的其中兩頂點的連線數，變化另一頂點的連線數，一次增加 4，則可以藉由改變內部的點數來連線出符合所求的圖形。

經歸納以後，得到結論：三角形內部  $9+8x$  ( $x \in N$ ) 個點的情形，存在一圖形對於圖形上任意點其  $\deg$  數皆為 4 的倍數加 1。



圖二十一

8、三角形中  $\deg v$  ( $v$  為三角形形內外任何的點)皆為  $5n$

圖十六對於各點  $\deg v$  皆為  $5$ 。因此，倘若能找到一個圖形：三角形三頂點的  $\deg$  為  $5$  的倍數加上  $2$ ，內部點的  $\deg$  皆為  $5$  的倍數。則可以由圖十六，延伸出無限多的圖形。

圖二十一便是一個適用的圖形，而其內部有  $20$  個點。因此，每次加入一個這樣的圖形，就可以在原圖形內增加  $20$  個點。

因此，三角形內部  $9+20x$  ( $x \in N$ )個點的情形，存在一圖形對於圖形上任意點其  $\deg$  數皆為  $5$  的倍數。

## (二) 立體圖形

定義：

在空間中任意面皆為三角形的立體圖內部，放入點。並將點與點相連(包括立體圖的頂點)，但是三個點所成的平面不能相交，兩點所成的線也不得穿越其他的面。因此，可以將此立體多面體，劃分成若干個四面體。在此定義下，欲探討每個點的連線數之奇偶關係。

### 1、立體偶圖

(1)結合性質

在空間中，也有結合性質的存在。現在所要探討的是偶圖的情形，因此，必須找出四面體頂點為奇數，而內部點為偶數的四面體。

說明：

假設  $v_1、v_2、v_3、v_4$  為偶圖中某一四面體  $V$ (內部無點)的四頂點。 $p_1、p_2、p_3、p_4$  為某一內偶外奇四面體  $P$  的四頂點。

因此， $\deg v_1、\deg v_2、\deg v_3、\deg v_4$  皆為偶數。 $\deg p_1、\deg p_2、\deg p_3、\deg p_4$  皆為奇數。

若將  $P$  取代  $V$ ，則  $p_1$  取代  $v_1$  令為  $x_1$ 、 $p_2$  取代  $v_2$  令為  $x_2$ 、 $p_3$  取代  $v_3$  令為  $x_3$ 、 $p_4$  取代  $v_4$  令為  $x_4$ ，

$$\text{則 } \deg x_1 = \deg v_1 + \deg p_1 - 3$$

$$\deg x_2 = \deg v_2 + \deg p_2 - 3$$

$$\deg x_3 = \deg v_3 + \deg p_3 - 3$$

$$\deg x_4 = \deg v_4 + \deg p_4 - 3$$

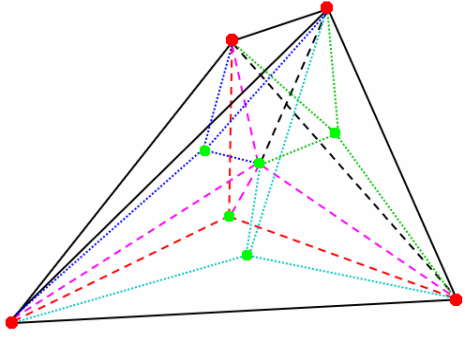
由上述得知：

使用結合的方法，並不會影響原來偶圖圖形的奇偶性。

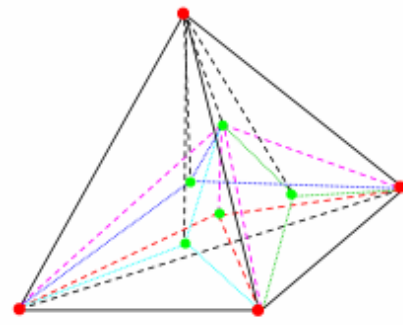
為了使用立體圖結合性質，必須找出基本點數和內偶外奇圖。

內偶外奇圖：

目前所發現的內偶外奇是內部五點的四面體(圖二十二、圖二十三)



圖二十二



圖二十三

由此可知：

多面體偶圖，若加上五個點，也為多面體偶圖。

因此，必須尋找的情況，便是  $1+5n$ 、 $2+5n$ 、 $3+5n$ 、 $4+5n$ 、 $5n$  這幾個基本點數。

當然，找出的基本點數，若點數越少，能成立的圖形便越多。

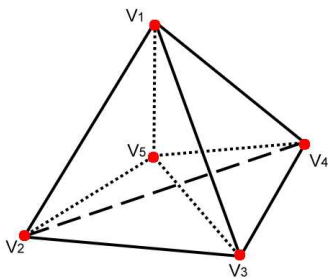
基本點數：

發現的基本點數為 1、7、3、4

而 5 個點的情況還尚未發現結果，因此暫不列入討論。

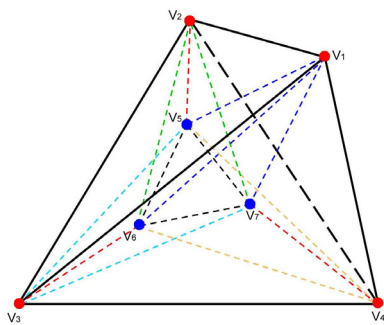
以下為各點所形成的圖形：

一個點(圖二十四)

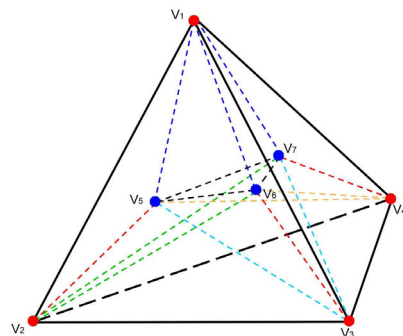


圖二十四

三個點(圖二十五、圖二十六)

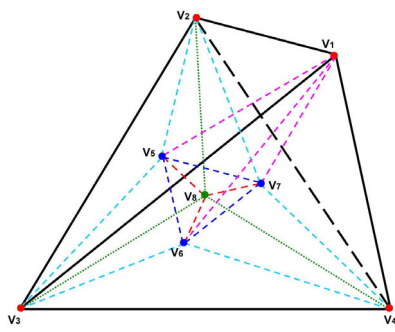


圖二十五

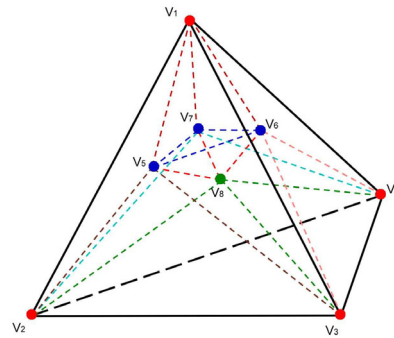


圖二十六

四個點(圖二十七、圖二十八)

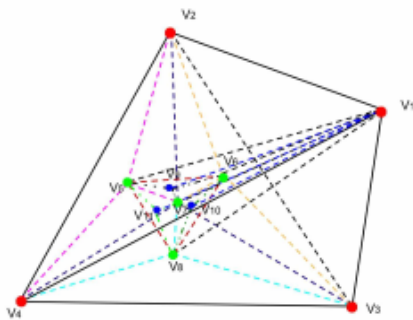


圖二十七

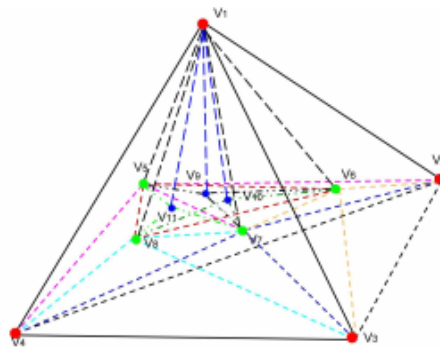


圖二十八

七個點(圖二十九、圖三十)



圖二十九



圖三十

由上述結果可得：

四面體中，若有  $1 + 5n$ 、 $7 + 5n$ 、 $3 + 5n$ 、 $4 + 5n$  ( $n$  為自然數) 點數的話，都存在偶圖。

對於  $5n$  的猜測：上述提到對於四面體內部  $5n$  個點時，是否存在偶圖還沒有完整的證明。因此，在此我猜測可以成為偶圖。

我們先假設一個四面體  $G$  內部已經填入若干個點，而這些點也已經將四面體四面體化了。接下來，我們在四面體內部不重合於任一點的情況下，再加入一個點  $P$ 。並且將點  $P$  與圖形  $G$  中本已存在的每個點都做連接。此時，將每個被穿透的面取消掉，重新組成新的四面體。我猜測，重新組成四面體後，依然可以將此四面體四面體化。在這個假設下，我可以將接下來會提到的內部 4 點的立體奇圖做以上步驟的重組，就可以產生另一個內部五點的立體偶圖。

## (2) 外接合性質

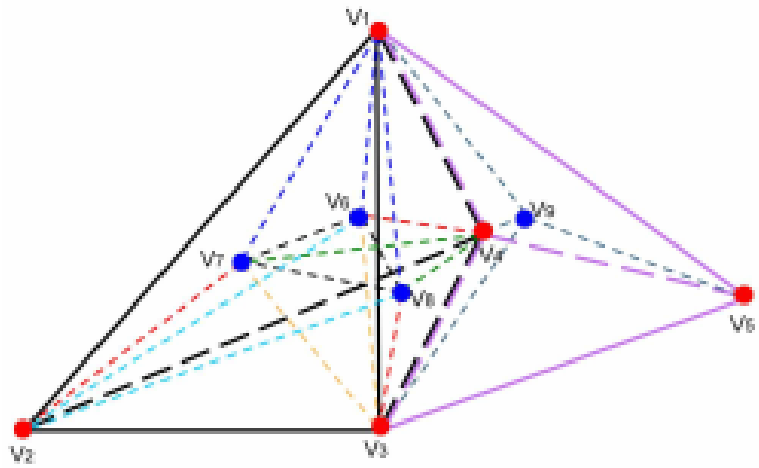
若欲由四面體所得到的結果推導到更多面體的話，就必須使用外接合性質。

說明：

假設  $v_1$ 、 $v_2$ 、 $v_3$  為多面體偶圖中某一三角形面的三頂點。

$p_1$ 、 $p_2$ 、 $p_3$  為一四面體偶圖的某一三角形面的三頂點。  
 因此， $\text{deg}v_1$ 、 $\text{deg}v_2$ 、 $\text{deg}v_3$ 、 $\text{deg}p_1$ 、 $\text{deg}p_2$ 、 $\text{deg}p_3$  皆為偶數。  
 若將四面體偶圖疊合在多面體偶圖上，則兩三角形必須重合。  
 造成  $p_1$  取代  $v_1$  令為  $x_1$ 、 $p_2$  取代  $v_2$  令為  $x_2$ 、 $p_3$  取代  $v_3$  令為  $x_3$ 、 $p_4$  取代  $v_4$  令為  $x_4$ ，  
 則  $\text{deg}x_1 = \text{deg}v_1 + \text{deg}p_1 - 2$   
 $\text{deg}x_2 = \text{deg}v_2 + \text{deg}p_2 - 2$   
 $\text{deg}x_3 = \text{deg}v_3 + \text{deg}p_3 - 2$

由上述得知：  
 使用外接合的方法，並不會影響原來偶圖圖形的奇偶性。  
 例如：圖三十一便是由內部 1 點四面體和內部 3 點四面體，  
 外接合而成的五點偶圖多面體。



圖三十一

由上述得知：  
 可以利用這個方式，來增加多面體的頂點數。  
 但是由於接合的四面體內部，本身也有點。因此，若使用  
 外接合性質，則會增加其內部的總點數。  
 例如：五點多面體(圖三十八)可以由，一個內部 1 點四面體  
 和一個內部 3 點四面體接合而成，故其點得總和為  $1 + 3 = 4$ 。

多點多面體的情況：  
 五個點多面體可以由兩個四面體接合而成。由於結合性  
 質有提到，可以由內部 5 點的內偶外奇圖來填充多面體。  
 因此，不需要討論基本點數以上的點。故其內部成立的點  
 數可以由 1、3、4、7 組合成。

例如： $1+1=2$ 、 $1+3=4$ 、 $1+4=5$ 、 $1+7=8$ 、 $3+3=6$   
 $3+4=7$ 、 $3+7=10$ 、 $4+4=8$ 、 $4+7=11$ 、 $7+7=14$

因此，五個點多面體可以成立的點為：

2、4、5、6、7、8、10、11、14。

由於結合性質有提到，可以由內部 5 點的內偶外奇圖來填充多面體。因此，實際有作用的點數為：2、4、5、6、8。

六個頂點的多面體則是利用三個四面體接合而成的，故需要使用三個四面體的基本點數來組合。

組合後，可以得到：3、5、6、7、9。

由上述兩個情形可以觀察到：多面體頂點數每加 1 個點，每個基本點數都會增加 1。因為，基本點數是一系列中最小的數。所以，每次加上 1 是最小的變化量。

故可推出：

頂點數為  $n(n>4)$  的多面體，其內部可成立的點數為：

$2+(n-5)+5m$ 、 $4+(n-5)+5m$ 、 $5+(n-5)+5m$ 、 $6+(n-5)+5m$ 、  
 $8+(n-5)+5m$ 。也就是  $5m+n-3$ 、 $5m+n-1$ 、 $5m+n$ 、 $5m+n+1$ 、  
 $5m+n+3$ 。

## 2、立體奇圖

在此先討論四面體的情形。

立體奇圖的解決方式就簡單多了，因為，每個立體奇圖都可以互相結合，而不改變每個點  $\text{deg}$  的奇偶性。

先證明：四面體內部數點的情況下，才有奇圖的存在性。

設四面體內部有  $n$  個點。

那麼所有的連線數為  $\frac{\sum \text{deg } n}{2}$ ，然而對於任意

點之  $\text{deg}$  皆為奇數。因此，若此四面體內有奇數

個點，則  $\sum \text{deg } n$  明顯為奇數，便無法成立。因此，四

面體內部數點的情況下，才有奇圖的存在性。

再來，發現到一內部兩點的四面體奇圖。因此，可以藉由數個此四面體結合，來無限增加內部的點數。故對於任何內部點數為偶數的四面體，皆有奇圖的存在性。

## 伍、研究結果及討論

### 一、研究結果

- 1、平面偶圖成立的結果爲：此多邊形爲三倍數邊形，而且除了內部一、二、四點以外，其他點數都可以成爲偶圖。
- 2、平面奇圖成立的條件爲：奇數邊形的情形下，除了三點以外，其他的內部奇數點的都可以成爲奇圖。偶數情形下，除了四點以外，其他的內部奇數點的都可以成爲偶圖。
- 3、三角形平面圖， $\deg n$  皆爲  $m$  成立的條件： $2 < m < 6 (m \in N)$
- 4、三角形內外任意點  $\deg$  皆爲  $3n (n \in N)$  的成立條件：三角形內部  $4x+1$  個點 ( $x \in N$ )。
- 5、三角形內外任意點  $\deg$  皆爲  $3n+1 (n \in N)$  的成立條件：三角形內部  $3x$  個點 ( $x \in N$ )。
- 6、三角形內部  $3+12x (x \in N)$  點數的情形，存在一圖形對於三角形內外任意點其  $\deg$  數皆爲  $4n$ 。
- 7、三角形內部  $9+8x (x \in N)$  點數的情形，存在一圖形對於三角形內外任意點其  $\deg$  數皆爲  $4n+1$ 。
- 8、三角形內部  $9+20x (x \in N)$  點數的情形，存在一圖形對於三角形內外任意點其  $\deg$  數皆爲  $5n$ 。
- 9、立體偶圖四面體的成立的條件爲：內部點數爲  $1+5n$ 、 $7+5n$ 、 $3+5n$ 、 $4+5n (n \in N)$  的話，都存在偶圖。
- 10、立體偶圖  $n$  頂點 ( $n > 4$ ) 面體的成立條件爲：內部點數爲  $5m+n-3$ 、 $5m+n-1$ 、 $5m+n$ 、 $5m+n+1$ 、 $5m+n+3$ 。(  $m$  爲大於或等於零的整數)
- 11、立體奇圖四面體的成立條件爲：內部點數爲偶數皆存在。

### 二、討論

- 1、立體偶圖還沒有完整的證明和完整的結論，因此，希望能在更深入的探討。
- 2、立體奇圖還沒有完全發展，希望能往此方向發展，並得出完整的結論。
- 3、可以加入一筆劃原理，來討論出更深入的結果。
- 4、目前討論到一些條件有加以限制的平面圖，然而部份還未完整證明(例如： $\deg=4n$ ) 因此，希望能加以證明。而且這方面未來還有很多的變化和發展方向，並且希望能找到大一統的公式。
- 5、探討每一種圖形， $\deg$  爲偶數和  $\deg$  爲奇數的點數差。

## 陸、結論與應用

這件作品大多都先不斷的嘗試，得到一些基本的要素和條件，再開始歸納、整理。整體來說，都是使用一個小條件，推到無限大的結果，使結果更加趨於完整。雖然免不了土法煉鋼的部份，但推廣和聯繫的部份也有靈巧的技巧。而研究的過程中，也讓我了解到：只有嘗試，才能更上一層樓。

## 柒、參考資料

- 1、單樽 著 <趣味的圖論問題> 第二版 凡異文化事業有限公司 第 83 頁 八十三年三月出版
- 2、2003 年環球城市盃春季賽高中組高級卷第七題

## 評語

採用建構法，內容方法富有創意。可惜在口頭報告中未能利用到電腦展示來輔助演變的過程。