

臺灣二〇〇六年國際科學展覽會

科 別：數 學 科

作 品 名 稱：兄弟樹性質探討 - 偶完全三連結、漢米頓可蕾斯圖

得 獎 獎 項：第二名
美國正選代表:美國第 57 屆國際科技展覽會

學 校 / 作 者：國立新竹高級中學 郭博鈞

自我簡介



我是郭博鈞，就讀新竹高中數理資優班三年級，從小就對數學、物理、資訊有高度熱忱。喜愛探索未知的事物，也時常閱讀書籍。高二時是數學研習社的社長，也因為參與數研社，才踏入圖論這個未曾接觸過的領域。由於非常不喜歡考試，又易樂於思考，我在高一便開始做物理科展，因此，曾經參加 2005 年臺灣國際科展物理科。

原先研究此題目並非參賽，純粹是因個人對數學的喜愛而接觸，而這次參加數學科，希望有更多更有趣的收獲。

Abstract

Assume that n is any positive integer. The Brother Tree $BT(n)$ is an interesting family of 3-regular planar bipartite graphs recently proposed by Kao and Hsu [10]. In any $BT(n)$, we prove that there exist three internally-disjoint spanning paths joining x and y whenever x and y belong to different partite sets; for any three nodes x , y , and z of the same partite set, there exist three internally-disjoint spanning paths of $BT(n)-\{z\}$ joining x and y . We also prove that there exists a hamiltonian path between two vertex x and y from different partite set. Moreover, for any two nodes x , y in the same partite set and z in the other partite set, there exist a hamiltonian path of $BT(n)-\{z\}$ between x and y . Furthermore, there is a hamiltonian cycle pass through any three given edges in $BT(n)$.

摘要

設 n 為正整數，引人興趣的兄弟樹 $BT(n)$ 是由高欣欣和徐力行教授不久前在[10]所提出的三正則二分圖。本報告證明在兄弟樹 $BT(n)$ 中，任兩異色點之間存在三條連結線，彼此不相交且經過所有的點；若除去圖中任一點，則與此點同色之任意兩點之間也存在三條連結線，且彼此不相交並經過所有的點。此外，證明在 $BT(n)$ 中，任兩異色點之間存在一條路徑並經過圖中所有點；若除去圖中任一點，則與此點異色之任意兩點之間也存在一條路徑並經過圖中所有點。除此之外，還證明兄弟樹中存在一漢米頓圈經過任三條邊。

目錄

壹、研究動機.....	P.1
貳、研究目的.....	P.1
參、定義：	
一、名詞定義.....	P.2
二、兄弟樹定義.....	P.3
肆、研究方法、過程：	
一、兄弟樹之偶完全三連結.....	P.5
二、兄弟樹之超偶完全三連結.....	P.11
三、兄弟樹之漢米頓可蕾斯圖.....	P.14
四、兄弟樹之超漢米頓可蕾斯圖.....	P.16
五、定理.....	P.21
六、兄弟樹之 3 邊要求漢米頓圖.....	P.22
伍、研究結果與討論：	
一、討論.....	P.27
二、研究結果.....	P.31
陸、結論.....	P.32
柒、參考資料.....	P.33
捌、附件	

壹、研究動機：

因參與數學研習社，而對社團的指導教授所教的圖論部分特別感興趣。指導教授給了一個問題「兄弟樹是否為偶完全三連結？」，在投注心思努力鑽研後，我很幸運地把它證明出來，受教授指導完成論文「兄弟樹之偶完全三連結」，並投稿於 SCIE 期刊 *Information Science*；受此鼓勵，我持續進行相關研究，因而對兄弟樹和三正則圖形之性質有許多發現。

貳、研究目的：

1. 證明兄弟樹為偶完全三連結及超偶完全三連結。
2. 證明兄弟樹為漢米頓可蕾斯圖及超漢米頓可蕾斯圖。
3. 證明或找出兄弟樹所具有的特殊性質。

參、定義：

一、名詞定義：

在本報告中，我們採用與 Harary[4]書中相同的圖形定義和符號。我們說 $G=(V,E)$ 為一圖形，其中 V 為一有限集合，而 E 是 $\{(u,v) \mid (u,v) \text{ 為 } V \text{ 中的無序組對}\}$ 的子集合。我們說 V 為圖形 G 的頂點集合，而 E 是圖形 G 之邊集合，若 $(u,v) \in E$ ，則稱 u,v 為相鄰的二點。對任一點 u ， $N(u)$ 表示 u 的鄰域(neighborhood) $\{v \mid (u,v) \in E\}$ 。對 V 中任一點 x ， $\deg_G(x)$ 表示 x 在 G 中所連接的邊數。如果對任意 $x \in V(G)$ ， $\deg_G(x)=3$ ，則稱此圖為三正則圖(3-regular)。一個二分圖(bipartite) $G=(V_1 \cup V_2, E)$ 是由 V_1 和 V_2 兩部分所構成，其中 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ，且在 G 中任一邊必連接一個 V_1 的點和一個 V_2 的點，而在本報告中，我們使用白點來表示在 V_1 中的點，而黑點表示在 V_2 中的點。另外，以符號 $P = \langle u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_k \rangle$ 來表示由 $u_0, u_1, u_2, u_3, \dots$ 到 u_k 之路徑，其中 P 內部的點為 $u_0, u_2, u_3, \dots, u_k$ ，而 P 同時也可表示路徑 $\langle u_k, u_{k-1}, \dots, u_3, u_2, u_1, u_0 \rangle$ ；而 P 經過的邊 $E(P) = \{(u_{i-1}, u_i) \mid 1 \leq i \leq k\}$ 。如果在 P_1, P_2, \dots, P_r 中沒有二個相同的內點，則路徑 P_1, P_2, \dots, P_r 為一組內部不相交(internally-disjoint)路徑。

G 的連結度(connectivity) $\kappa(G)$ ，是使 G 除去的最少點數使得 G 不連通或只剩一個點。設 $G=(V,E)$ 為一圖形且連結度 $\kappa(G)=l$ ，則稱圖形 G 之連結度為 l 。圖形 G 中的一個 k 集裝箱(k -container) $C(x,y)$ 是指在圖形 G 的內部頂點 x, y 之間的 k 條內部不相交路徑。由 Menger 定理 [5]，在一個 k 連結圖(k -connected graph)中，任意二點間存在 k 集裝箱。而如果 $C(x,y)$ 是個 k 集裝箱，並且經過圖形 G 中所有點，則稱 $C(x,y)$ 為 k^* 集裝箱(k^* -container)。在 [7] 中，Albert, Aldred, Holton 和 Sheehan 率先研究了那種在任意二點中存在 3^* 集裝箱的三正則連結圖，並且命名為完全 3^* 連結圖(globally 3^* -connected graph)。

既然每個完全 3^* 連結圖都是三正則圖，則它總共含有偶數個頂點。假設 $G=(V_1 \cup V_2, E)$ 是由 V_1 和 V_2 兩部分所構成的三正則二分圖，其中 $|V_1| \geq |V_2| \geq 2$ 。若 x 和 y 是 V_2 中不同的兩點，假設 G 存在 3^* 集裝箱 $C(x,y) = \{P_1, P_2, P_3\}$ ，其中 P_1 有 a_1 個 V_1 點， P_2 有 a_2 個 V_1 點， P_3 有 a_3 個 V_1 點。明顯地， P_1 有 a_1+1 個 V_2 點， P_2 有 a_2+1 個 V_2 點， P_3 有 a_3+1 個 V_2 點，所以在 V_1 中 $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ 共有 $a_1 + a_2 + a_3$ 個 V_1 點，而 $P_1 \cup P_2 \cup P_3$ 共有 $(a_1+1) + (a_2+1) + (a_3+1) - 4 = a_1 + a_2 + a_3 - 1$ 個 V_2 點，因此，任何的三正則二分圖皆不是完全 3^* 連結圖。

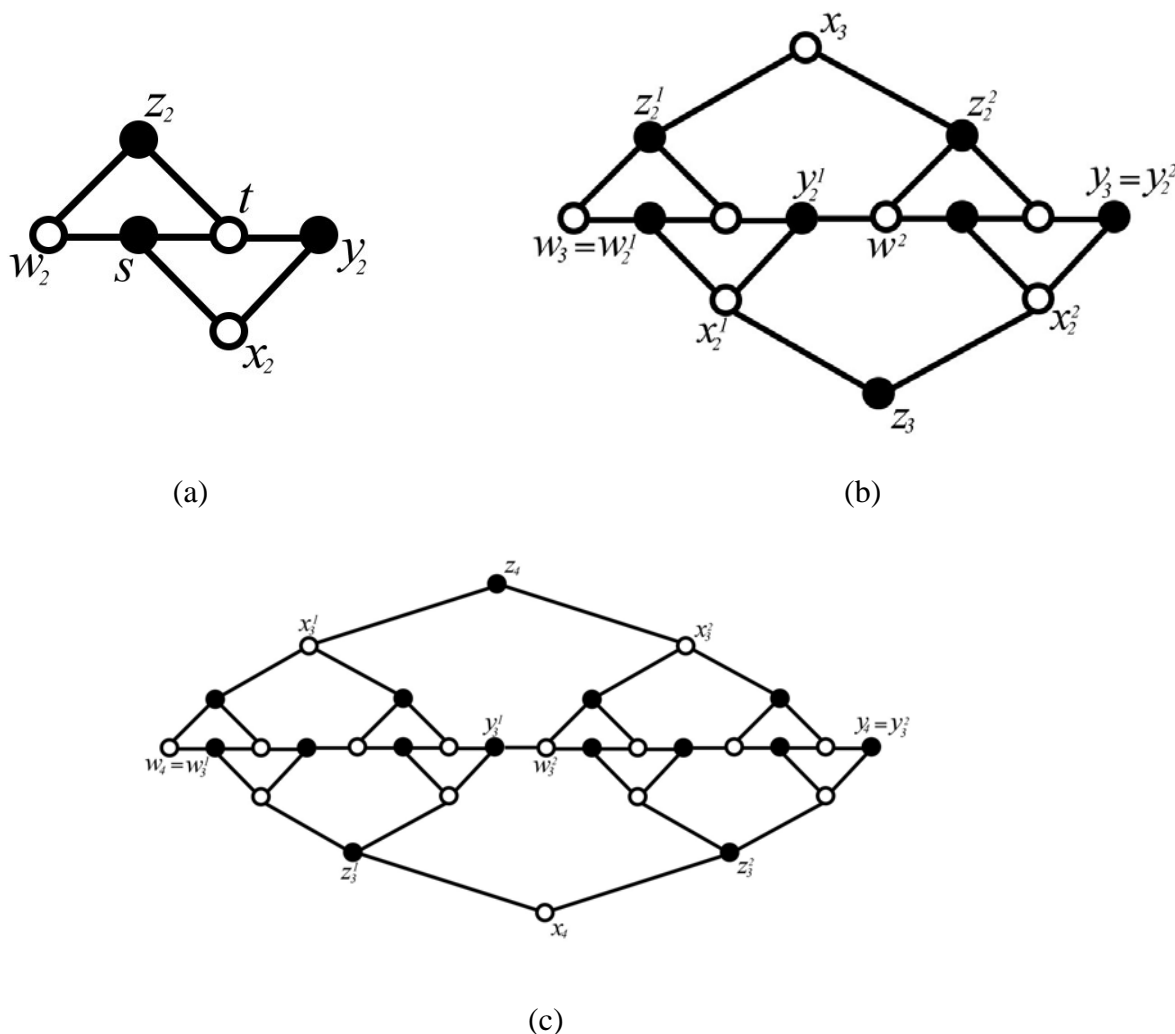
為此，如果三正則二分圖 $G=(V_1 \cup V_2, E)$ 中任兩異色點存在 3^* 集裝箱，我們就稱 G 是偶完全 3^* 連結圖 (globally bi- 3^* -connected graph)。顯然，在任何一個偶完全 3^* 連結圖 $G=(V_1 \cup V_2, E)$ 中，必有 $|V_1| = |V_2|$ 。偶完全三連結的觀念是由高欣欣等人在 [9] 所發表的，這論文中證明如果圖形是偶完全 3^* 連結，則任意去除圖中一邊，此圖仍為漢米頓圖。若三正則二分圖 $G=(V_1 \cup V_2, E)$ ，去除圖中任一點，外與除去點同色的任何兩點之間仍有 3^* 集裝箱，則稱為超偶完全三連結(hyper globally bi 3^* -connected graph)。

另外，二分圖 $G=(V_1 \cup V_2, E)$ ，對任意兩異色點，存在一漢米頓路徑，則稱此圖為漢米頓可蕾斯圖(hamiltonian laceable)；若任意去除 G 中任一點，顏色較多的任何兩點之間仍有漢米頓路

徑，則稱此圖為超漢米頓可蕾斯圖(*hyper hamiltonian laceable*)。

迴圈(*cycle*)為一路徑，且至少含有三個內點，其中第一點和最後一點為同一點。漢米頓圈為一迴圈，且迴圈上路徑內點和第一點即為圖形中所有點。若圖形 $G=(V,E)$ 中存在漢米頓圈，稱此圖為漢米頓圖(*hamiltonian graph*)。若任意去除一邊，仍存在漢米頓圈，則稱為單邊容錯漢米頓圖(*1-edge hamiltonian*)；若任意去除一點，仍存在漢米頓圈，則稱為單點容錯漢米頓圖(*1-node hamiltonian*)。而若任意除去任意一點或一邊，皆存在一漢米頓圈，則合稱為單誤容錯漢米頓圖(*1-hamiltonian*)。顯然對任意二分圖 $G=(V_1 \cup V_2, E)$ 不可能為單點容錯漢米頓圖，但若除去一對異色點後，仍有漢米頓圈，則稱為對點容錯漢米頓圖(*1-pair hamiltonian*)。而在[9]證明如果圖形是超偶完全 3*連結，則此圖也為對點容錯漢米頓圖。

二、兄弟樹定義：



圖一、(a) $BC(2)$ 、(b) $BC(3)$ 、(c) $BC(4)$

設 k 是大於或等於 2 的整數，所謂 k 階的兄弟樹生長子圖(*k-th brother cell*) $BC(k)$ 是指序組 $(G_k, w_k, x_k, y_k, z_k)$ ，其中 $G_k=(V,E)$ 是由白點和黑點所組成的二分圖，且 G_k 包含四個特定端點： w_k 、 x_k 是白色端點； y_k 、 z_k 是黑色端點。我們可以遞迴地定義 $BC(k)$ 如下：

(1) $BC(2)$ 是指序組 $(G_2, w_2, x_2, y_2, z_2)$ ，其中 $V(G_2) = \{w_2, x_2, y_2, z_2, s, t\}$ ，

$$E(G_2) = \{(w_2, s), (s, x_2), (x_2, y_2), (y_2, t), (t, z_2), (w_2, z_2), (s, t)\}。$$

(2) 當 k 大於 2 時， $BC(k)$ 是由兩個互斥的 $(k-1)$ 階的兄弟樹生長子圖

$BC^1(k-1) = (G_{k-1}^1, w_{k-1}^1, x_{k-1}^1, y_{k-1}^1, z_{k-1}^1)$ 和 $BC^2(k-1) = (G_{k-1}^2, w_{k-1}^2, x_{k-1}^2, y_{k-1}^2, z_{k-1}^2)$ 以及一個白色端

點 x_k 和一個黑色端點 z_k 所構成。更明白地說： $V(G_k) = V(G_{k-1}^1) \cup V(G_{k-1}^2) \cup \{x_k, z_k\}$ ，而 $E(G_k) =$

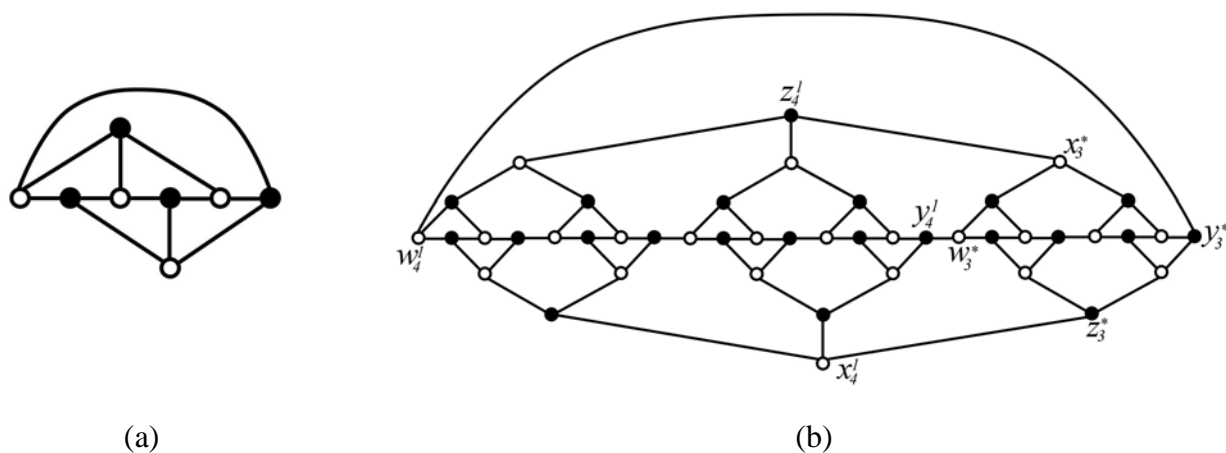
$$E(G_{k-1}^1) \cup E(G_{k-1}^2) \cup \{(z_k, x_{k-1}^1), (z_k, x_{k-1}^2), (x_k, z_{k-1}^1), (x_k, z_{k-1}^2), (y_{k-1}^1, w_{k-1}^2)\}，而 $w_k = w_{k-1}^1, y_k = y_{k-1}^2。$$$

$BC(2)$ 、 $BC(3)$ 和 $BC(4)$ 如圖一所示。當 $k \geq 3$ 時，可發現 $BC^l(k-1)$ 和 $BC^2(k-1)$ 是同構的，我們稱此特性為 $BC(k)$ 的對稱性，因而我們定義退化的情形 $BC(1)$ 如下：

$BC(1)$ 是指序組 $(G_1, w_1, x_1, y_1, z_1)$ ，其中 $V(G_1) = \{w_1, y_1\}$ ， $E(G_1) = \{(w_1, y_1)\}$ ，並使得 $x_1 = w_1, y_1 = z_1。$

另外，我們也可由二元樹(*complete binary tree*)來定義兄弟樹生長子圖，詳見[8,11]或附件一。

若 n 為大於等於 1 的整數，兄弟樹(*Brother Trees*) $BT(n)$ 由一個 $BC(n+1) = (G_{n+1}, w_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ 和一個 $BC^*(n) = (G_n^*, w_n^*, x_n^*, y_n^*, z_n^*)$ 所構成，其中 $V(G_{n+1}^1) \cap V(G_n^2) = \emptyset。$ 更清楚地說， $BT(n)$ 的 $V(BT(n)) = V(G_{n+1}) \cup V(G_n^*)$ 且 $E(BT(n)) = E(G_{n+1}) \cup E(G_n^*) \cup \{(z_{n+1}, x_n^*), (y_{n+1}, w_n^*), (x_{n+1}, z_n^*), (w_{n+1}, y_n^*)\}。$



圖二、(a) $BT(1)$ 、(b) $BT(3)$

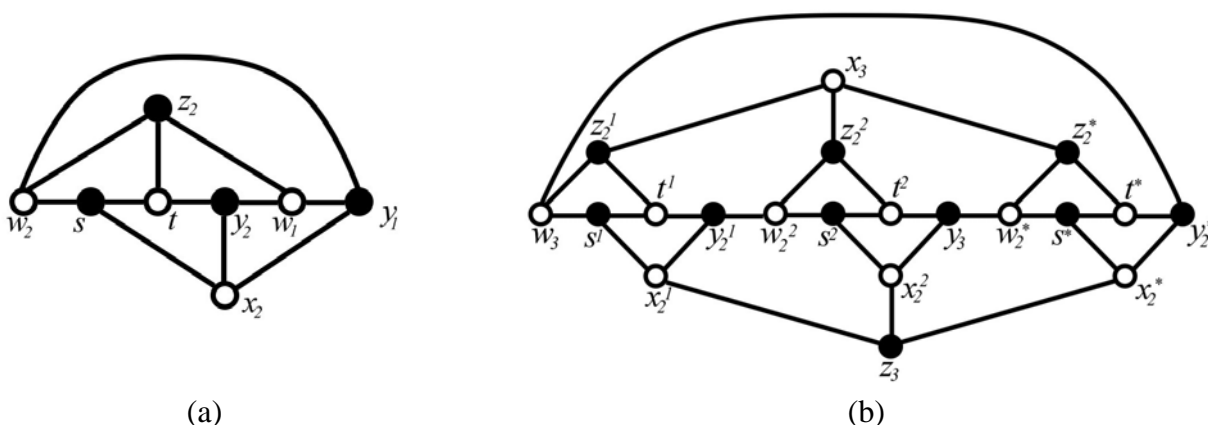
$BT(1)$ 、 $BT(3)$ 如圖二所示，顯然 $BT(n)$ 為三正則二分圖，且 $BT(n)$ 圖中點數為 $6 \times 2^n - 4。$ 又因為 $BC(n+1)$ 是由兩個互斥的 $BC(n)$ 和兩個端點所構成，所以 $BT(n)$ 是由互斥的 $BC^1(n)$ 、 $BC^2(n)$ 、 $BC^*(n)$ 和 $\{x_{n+1}, z_{n+1}\}$ 所組成。再者，在 $BT(n)$ 中， $BC^1(n)$ 、 $BC^2(n)$ 和 $BC^*(n)$ 是以環狀的次序排列著的，因此 $BT(n)$ 中的任何兩點必在 $BC^1(n)$ 、 $BC^2(n)$ 、 $BC^*(n)$ 和 $\{x_{n+1}, z_{n+1}\}$ 中的某兩集合之聯集中，因此，我們可以不失一般性地假設 $BT(n)$ 的任何兩點皆落在 $BC(n+1)$ 中。此性質被稱為 $BT(n)$ 的對稱性。

肆、研究方法、過程：

一、兄弟樹之偶完全三連結

(一) 土法煉鋼

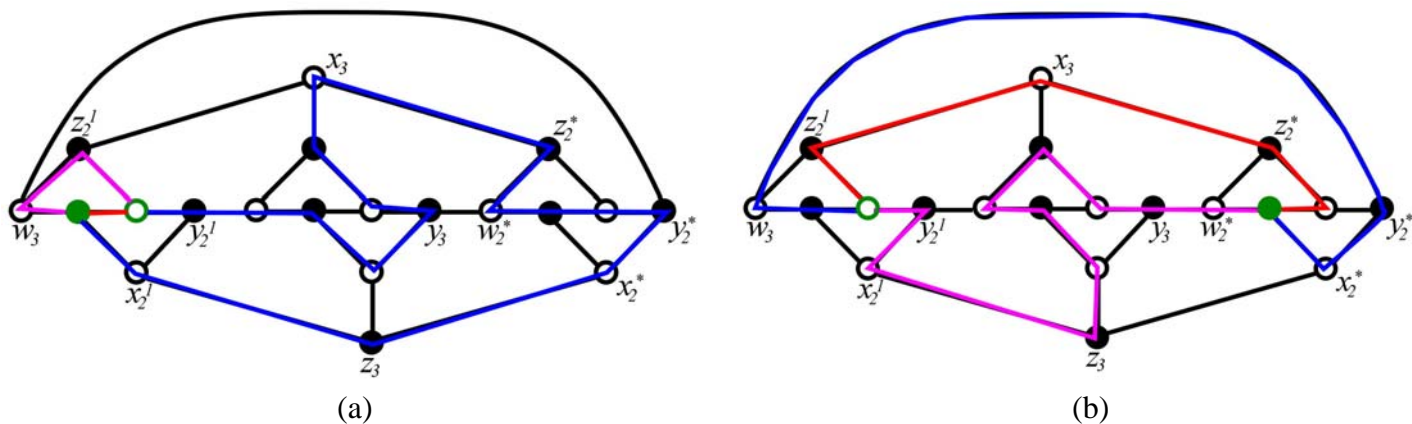
起先，對兄弟樹構造不夠熟悉，便土法煉鋼以證明較小圖形，也希望從中獲取某些資訊以利證明，不失一般性地討論 $BT(1)$ 、 $BT(2)$ 中任一對異色點，如 $BT(1)$ 中(如圖三(a))，我們分別檢查 (z_2, w_2) 、 (z_2, x_2) 、 (s, w_2) 、 (s, w_1) 之間有完全三連結；而在 $BT(2)$ 中(如圖三(b))，我們分別檢查 (x_3, z_2^1) 、 (x_3, s^1) 、 (x_3, y_2^1) 、 (x_3, z_3) 、 (w_3, z_2^1) 、 (w_3, s^1) 、 (w_3, y_2^1) 、 (w_3, z_2^2) 、 (w_3, s^2) 、 (w_3, y_3) 、 (w_3, z_2^*) 、 (w_3, s^*) 、 (w_3, y_2^*) 、 (t^1, z_2^1) 、 (t^1, s^1) 、 (t^1, y_2^1) 、 (t^1, z_2^2) 、 (t^1, s^2) 、 (t^1, y_3) 、 (t^1, z_2^*) 、 (t^1, s^*) 、 (t^1, y_2^*) 、 (x_2^1, z_2^1) 、 (x_2^1, s^1) 、 (x_2^1, y_2^1) 、 (x_2^1, z_2^2) 、 (x_2^1, s^2) 、 (x_2^1, y_3) 、 (x_2^1, z_2^*) 、 (x_2^1, s^*) 、 (x_2^1, y_2^*) 之間有完全三連結，如此土法煉鋼，我們便確定了 $BT(1)$ 、 $BT(2)$ 為偶完全三連結。



圖三、(a) $BT(1)$ ；(b) $BT(2)$

(二) 新的觀點

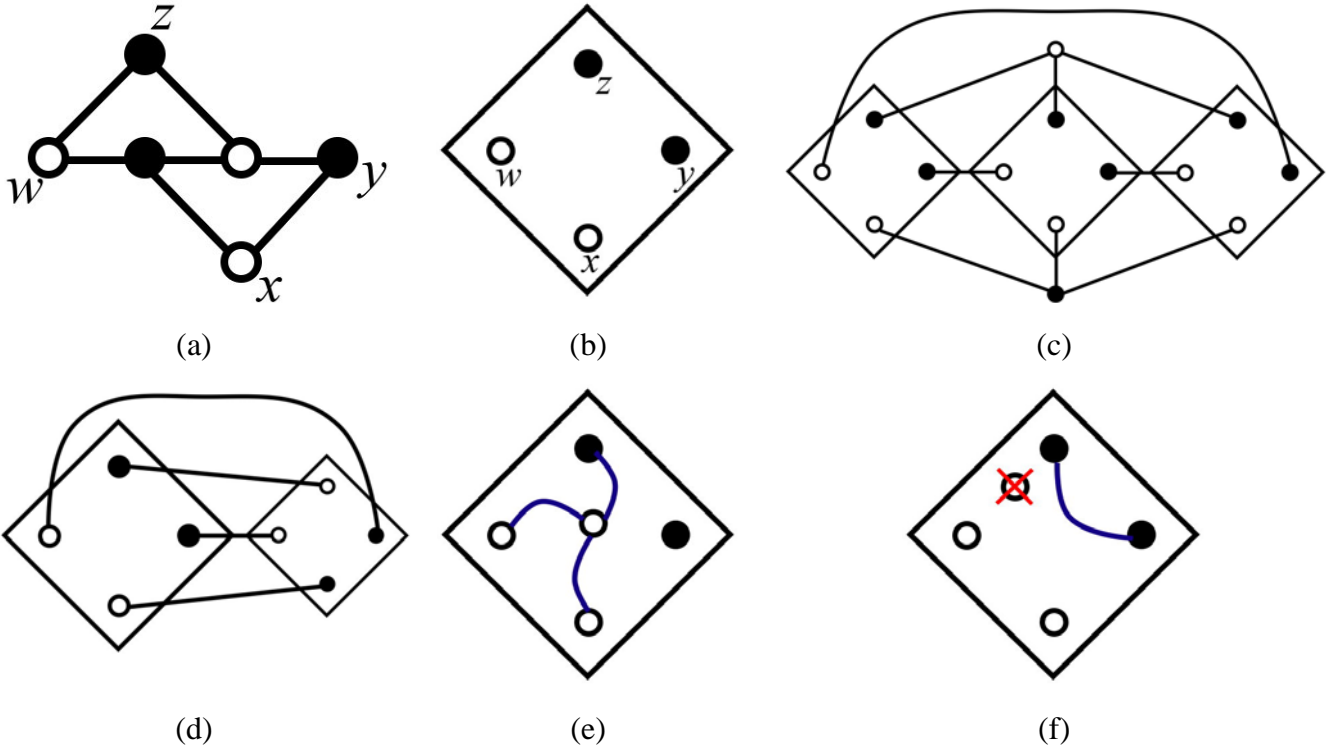
我們雖可以善用兄弟樹之對稱性來簡化須要討論的情況，但是，當 $n \geq 3$ ，就有極多情況須討論，因此，我們把焦點移至點和點之間如何連結，而不是須討論圖中的那些點。將(一)中的結果加以分析，發現：若兩點皆在 $BC^1(n)$ 中，則此兩點之間的三條路徑會有兩條都在這個 $BC^1(n)$ 中，而另一條路徑則可透過 $BC^1(n)$ 某兩端點連出，並經過 $BC^1(n)$ 以外的所有點(如圖四(a)，紅、紫線連接兩點，而藍線分別由 x_2^1 、 y_2^1 連出)；而若兩點分別在 $BC^1(n)$ 和 $BC^*(n)$ 中，則會分別透過 $BC^1(n)$ 和 $BC^*(n)$ 之三個端點彼此連結(如圖四(b)，在 $BC^1(n)$ 中的白點透過 w_3 (藍線)、 x_2^1 (紫線)、 z_2^1 (紅線)連出，也可看作在 $BC(n+1)$ 中的白點透過 w_3 (藍線)、 x_3 (紅線)、 z_3 (紫線)連出；而在 $BC^*(n)$ 中的黑點透過 w_2^* (紫線)、 y_2^* (藍線)、 z_2^* (紅線)連出)。



圖四、 $BT(2)$ 的連結性質

(三)圖形表示

由我們在(二)中的發現，配合圖形定義：兄弟樹 $BT(n)$ 由三個 $BC(n)$ 和二端點連結而成，而 $BC(n)$ 則是由二個 $BC(n-1)$ 和二個端點構成。我們注意到 $BC(n)$ 由四個端點和數個內點組成，並經由端點和另兩個 $BC(n)$ 之端點連結而成 $BT(n)$ ；因此，我們以簡化的圖形來表示 $BC(n)$ (如圖五(b))。



圖五、以圖形表示 $BC(n)$ ：(a)、(b)；以圖形表示 $BT(n)$ ：(c)、(d)； $BC(n)$ 性質圖示(e)、(f)

事實上，對任意正整數 $n \geq 2$ ，每個 $BC(n)$ 都會有某些相同的特性，接下來的部分將會有詳細的介紹。另外，我們在簡化圖形上畫一白點(如圖五(e))，代表該點為 $BC(n)$ 上任一白點(黑點亦同)；而在本報告中，只要是出現在簡化圖形 $BC(n)$ 上的線，皆代表路徑，且可經過 $BC(n)$ 所有點，如在圖五(e)的三條藍線就代表其三路徑的內點為此 $BC(n)$ 的所有點；而若在簡化圖形上有紅色叉號點，則代表其路徑之內點為 $BC(n)$ 的所有點扣除其色任意點，如圖五(f)即是將任意一白點刪去後，黑色兩端點有一漢米頓路徑。

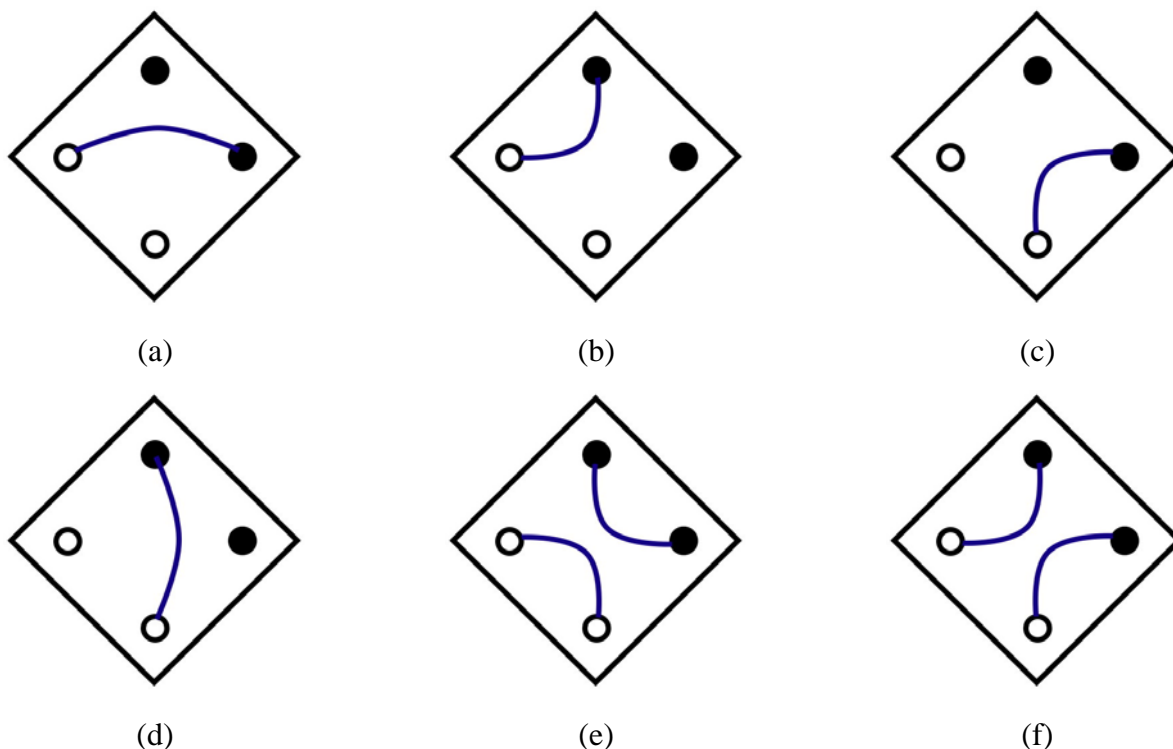
(四)引理一、二

由(二)中的發現，我們希望對所有正整數 $n \geq 2$ ， $BC(2)$ 都有這種性質，故嘗試證明是否在 $BC(n)$ 中，任一點皆有連接兩同色端點和一異色端點(引理二)，在證明此引理前，我們須要一些基本的引理(在[11]中已證明引理一)。

引理 1：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。

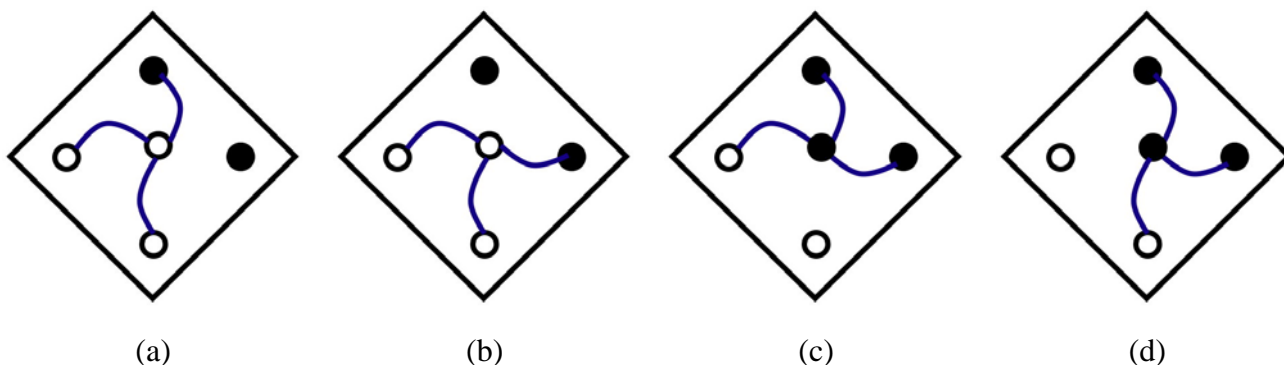
- (1) 在 $\{w_n, x_n\}$ 中任一點至 $\{y_n, z_n\}$ 中任一點之間存在漢米頓路徑。
- (2) $BC(n)$ 中存在兩路徑 P_1 和 P_2 為一組內部不相交路徑，且滿足以下兩點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 w_n 至 x_n ，(3) P_2 連接 y_n 至 z_n 。
- (3) $BC(n)$ 中存在兩路徑 P_1 和 P_2 為一組內部不相交路徑，且滿足以下兩點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 w_n 至 z_n ，(3) P_2 連接 x_n 至 y_n 。

以圖形來表示：



圖六、引理 1 所證明 $BC(n)$ 的性質：(a) w_n 至 y_n ；(b) w_n 至 z_n ；(c) x_n 至 y_n ；(d) x_n 至 z_n ；
(e) w_n 至 x_n ， y_n 至 z_n ；(f) w_n 至 z_n ， x_n 至 y_n

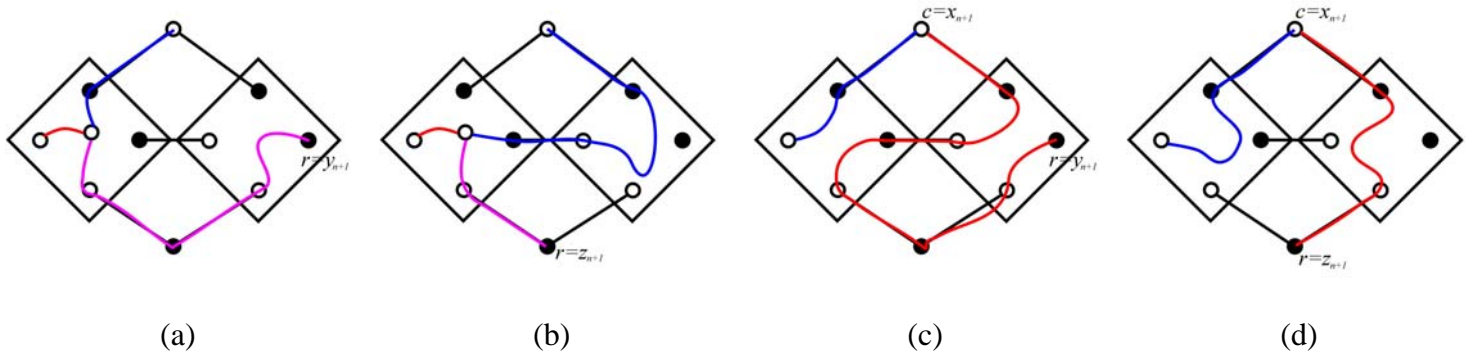
引理 2：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c 為 $BC(n)$ 中任一點。令 p, q 是 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中與 c 同色之兩點，而 r 是 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中任一與 c 異色的點。則在 $BC(n)$ 中存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3 ，且滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2, P_3 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 p ；(3) P_2 連接 c 至 q ；(4) P_3 連接 c 至 r 。



圖七、引理 2 證明 $BC(n)$ 的性質：若 c 為白點，則分別有(a) c 至 w_n, x_n, z_n ；(b) c 至 w_n, x_n, y_n ；
若 c 為黑點，則分別有(c) c 至 w_n, y_n, z_n ；(d) c 至 x_n, y_n, z_n 。

※由圖七可發現，對任意正整數 $n \geq 2$ ，因 $BC(n)$ 的對稱性，白點的連接性質和黑點的連接性質是相同的，故不失一般性，接下來的部分我們皆以白色點來表示 $BC(n)$ 的性質。

我們以數學歸納法來證明這引理，我們可以很容易地暴力檢查，確定此引理對 $n=2$ 是正確的，假設此引理對 $BC(n)$ 是正確的，由定義， $BC(n+1)$ 是由兩個 n 階的兄弟樹生成子圖 $BC^1(n)$ 和 $BC^2(n)$ 及兩異色端點 x_{n+1}, z_{n+1} 所構成。不失一般性，我們設 c 是在 $BC^1(n)$ 中的任一個白點或 $c = x_{n+1}$ ；而 $r = y_{n+1}$ 或 z_{n+1} 。我們有四種情形須討論，如圖八：



圖八、引理 2 的證明

情況一(圖八(a))： c 是 $BC^1(n)$ 中的任一個白點， $r = y_{n+1}$ 。由數學歸納法， $BC^1(n)$ 存在一組內部不相交路徑 A_1 、 A_2 、 A_3 滿足以下四點性質：(1) A_1, A_2, A_3 經過 $BC^1(n)$ 中所有點；(2) A_1 連接 c 點至 w_n^1 ；(3) A_2 連接 c 點至 x_n^1 ；而(4) A_3 連接 c 點至 z_n^1 。由引理 1， $BC^2(n)$ 存在一漢米頓路徑 B 連接 x_n^2 至 y_n^2 。則可取：(1) $R_1 = A_1$ (紅色線)；(2) $R_2 = \langle c, A_3, z_n^1, x_{n+1}^1 \rangle$ (藍色線)；而(3) $R_3 = \langle c, A_2, x_n^1, z_{n+1}^1, x_n^2, B, y_n^2 = y_{n+1} \rangle$ (紫色線)。

情況二(圖八(b))： c 是 $BC^1(n)$ 中的任一個白點， $r = z_{n+1}$ 。由數學歸納法， $BC^1(n)$ 存在一組內部不相交路徑 A_1 、 A_2 、 A_3 滿足以下四點性質：(1) A_1, A_2, A_3 經過 $BC^1(n)$ 中所有點；(2) A_1 連接 c 點至 w_n^1 ；(3) A_2 連接 c 點至 x_n^1 ；而(4) A_3 連接 c 點至 y_n^1 。由引理 1， $BC^2(n)$ 存在一漢米頓路徑 B 連接 x_n^2 至 z_n^2 。我們可取：(1) $R_1 = A_1$ (紅色線)；(2) $R_2 = \langle c, A_3, y_n^1, w_n^2, B, z_n^2, x_{n+1}^1 \rangle$ (藍色線)；而(3) $R_3 = \langle c, A_2, x_n^1, z_{n+1}^1 \rangle$ (紫色線)。

情況三(圖八(c))： $c = x_{n+1}$ ， $r = y_{n+1}$ 。由引理 1， $BC^1(n)$ 中存在一組內部不相交路徑 A_1 、 A_2 滿足以下三點性質：(1) A_1, A_2 過 $BC^1(n)$ 中所有點；(2) A_1 連接 z_n^1 至 w_n^1 ；(3) A_2 連接 x_n^1 至 y_n^1 。類似地， $BC^2(n)$ 中存在一組內部不相交路徑 B_1 、 B_2 滿足以下三點性質：(1) B_1, B_2 過 $BC^2(n)$ 中所有點；(2) B_1 連接 w_n^2 至 z_n^2 ；(3) B_2 連接 x_n^2 至 y_n^2 。則可取：
 (1) $R_1 = \langle c = x_{n+1}, z_n^1, A_1, w_n^1 = w_{n+1}^1 \rangle$ (藍色線)；(2) R_2 只有一個點 $c = x_{n+1}$ ；而
 (3) $R_3 = \langle c = x_{n+1}, z_n^2, B_1, w_n^2, y_n^1, A_2, x_n^1, z_{n+1}^1, x_n^2, B_2, y_n^2 = y_{n+1} \rangle$ (紅色線)。

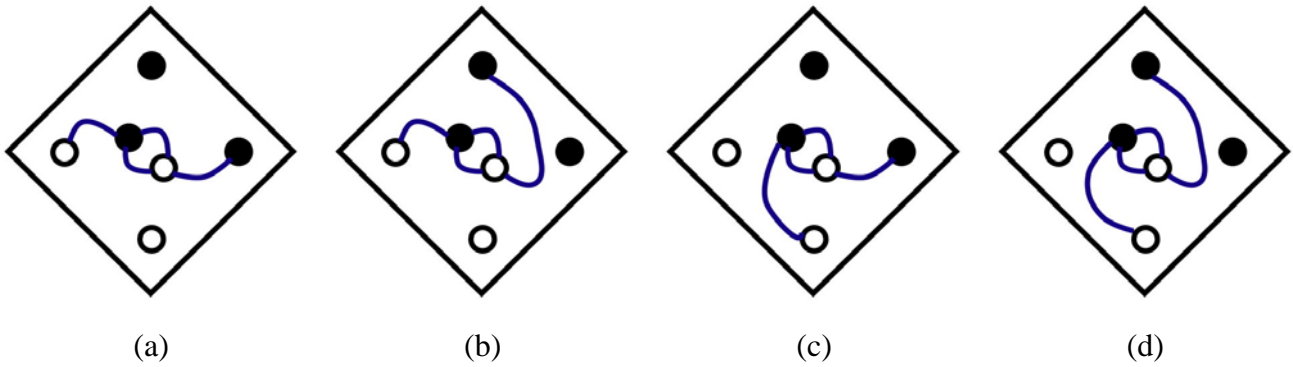
情況四(圖八(d))： $c = x_{n+1}$ ， $r = z_{n+1}$ 。由引理 1， $BC^1(n)$ 中存在一個漢米頓路徑 A 連接 z_n^1 至 w_n^1 ，而 $BC^2(n)$ 中存在一個漢米頓路徑 B 連接 z_n^2 至 x_n^2 ，則可取：(1) $R_1 = \langle c = x_{n+1}, z_n^1, A, w_n^1 = w_{n+1}^1 \rangle$ (藍色線)；(2) $R_2 =$ 只有一個點 $c = x_{n+1}$ ；而(3) $R_3 = \langle c = x_{n+1}, z_n^2, B, x_n^2, z_{n+1}^1 \rangle$ (紅色線)。

綜合以上的討論，由數學歸納法，在 $BC(n+1)$ 中此性質皆成立，故引理 2 證畢。

如此一來便證出對所有正整數 $n \geq 2$ ， $BC(n)$ 皆具有此性質。

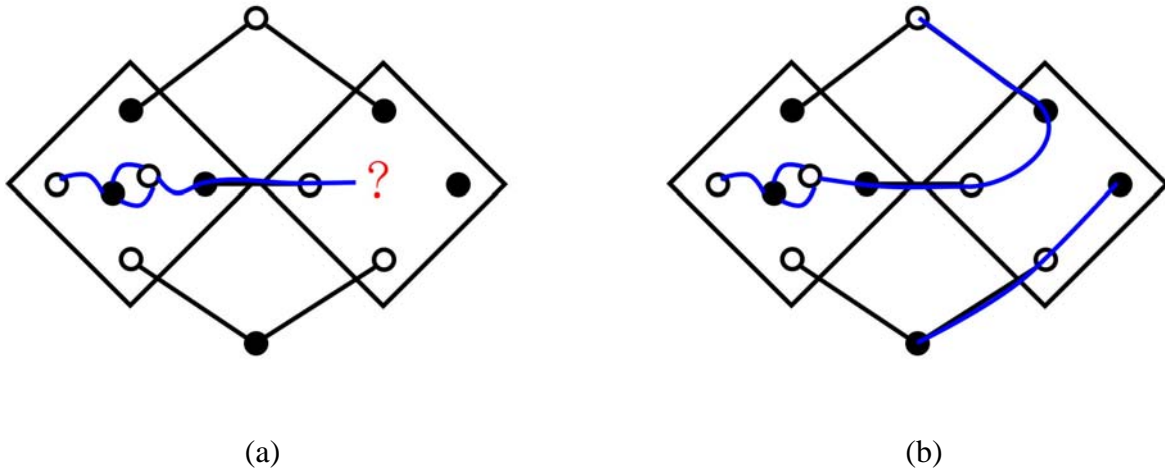
(五)引理 3

證出引理 2 之後，我們馬上想要用以證明引理 3，即至少有以下其中一性質：



圖九、引理 3 欲證明 $BC(n)$ 的性質

我們以數學歸納法來證明這引理，我們可以很容易地暴力檢查，確定此引理對 $n=2$ 是正確的，假設此引理對 $BC(n)$ 是正確的，由定義， $BC(n+1)$ 是由兩個 n 階的兄弟樹生成子圖 $BC^1(n)$ 和 $BC^2(n)$ 及兩異色端點 x_{n+1}, z_{n+1} 所構成。而我們分別討論一白點 c 和一黑點 d 分別在 $BC^1(n)$ 或 $BC^2(n)$ 中，或 $c=x_{n+1}, d=z_{n+1}$ ；但我們發現，在 c, d 同時在 $BC^1(n)$ ，便無法達到我們想證得的結果，如圖十(a)，而我們注意到可以把它改成圖十(b)，反過來修改 $BC(n)$ 我們想要的性質。



圖十、(a)引理 3 所遇到的困難；(b)修改後，可得證之結果

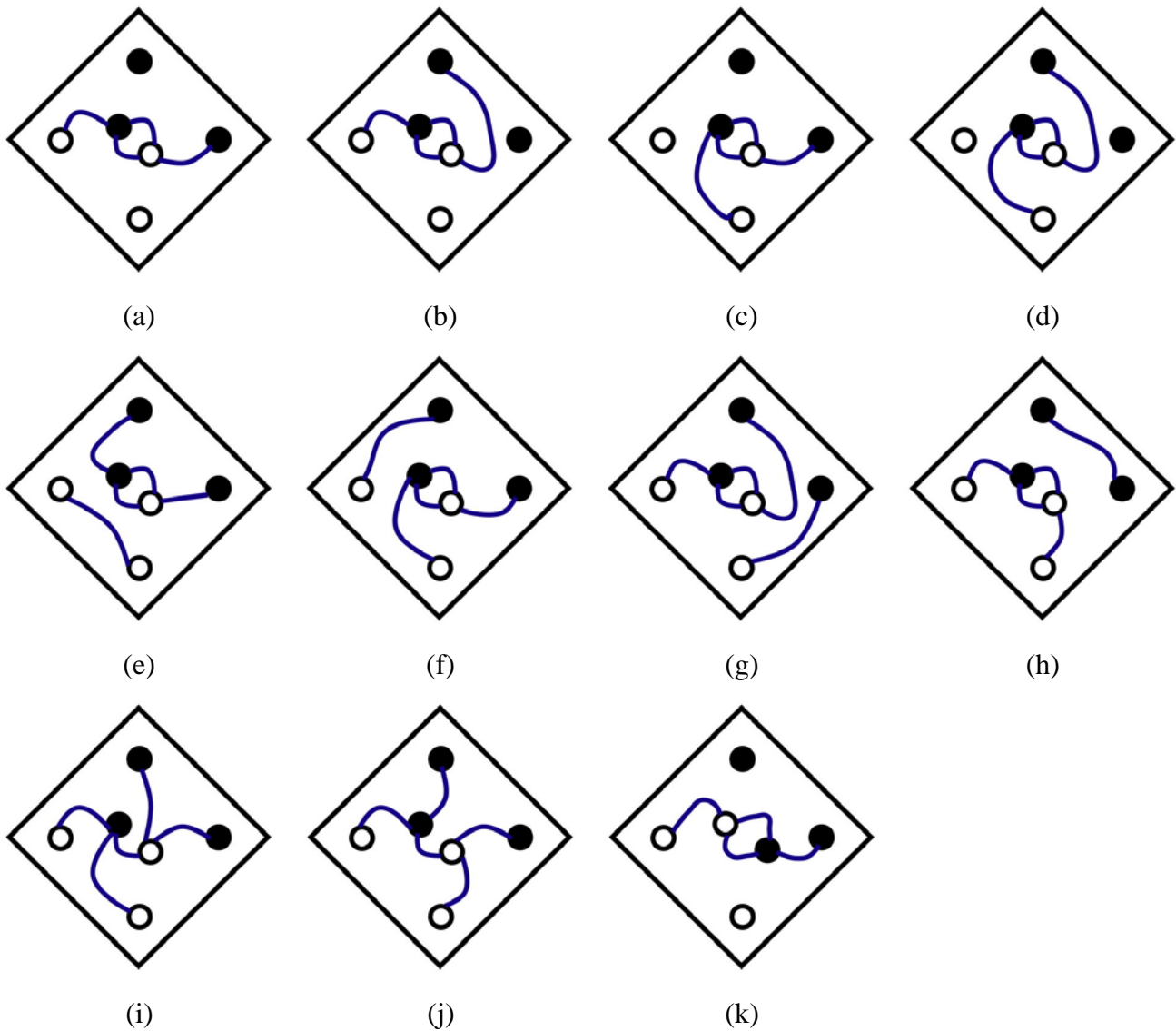
這樣反覆數次修改，我們得到更改後的引理 3 欲得之結果。

引理 3：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c 與 d 是 $BC(n)$ 中任一對異色點，則在 $BC(n)$ 中，甲、乙、丙三性質至少有一者會成立(即至少在圖十一中(a)~(j)中某一成立)：

(甲)存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3, P_4 ，且滿足以下四點性質：(1) P_1, P_2, P_3, P_4 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 和 P_2 分別連接 c 與 d ；(3) P_3 連接 c 至 p ，而 P_4 連接 d 至 q ；(4) p, q 為 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中的某兩異色點。(圖十一、(a)~(d))

(乙)存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ，且滿足以下五點性質：(1) P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 和 P_2 分別連接 c 與 d ；(3) P_3 連接 c 至 p 而 P_4 連接 d 至 q ，其中 $\{p, q\} \subset \{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ ；而(4) P_5 連結 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\} - \{p, q\}$ 中兩點。(圖十一、(e)~(h))

(丙)存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ，且滿足以下五點性質：(1) P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 與 d ；(3) P_2 連接 c 至 w_n ；(4) P_3 連接 d 至 y_n ；而(5) P_4 連結 c 至 p 而 P_5 連結 d 到 q ，其中 $\{p, q\} = \{x_n, z_n\}$ 。(圖十一、(i),(j))



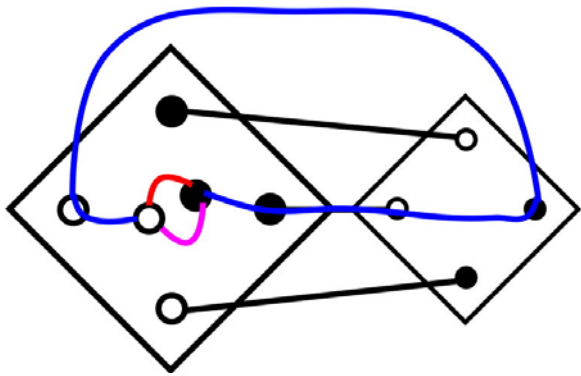
圖十一、修改引理 3 後，證明 $BC(n)$ 的性質：

甲：(a)、(b)、(c)、(d)；乙：(e)、(f)、(g)、(h)；丙：(i)、(j)

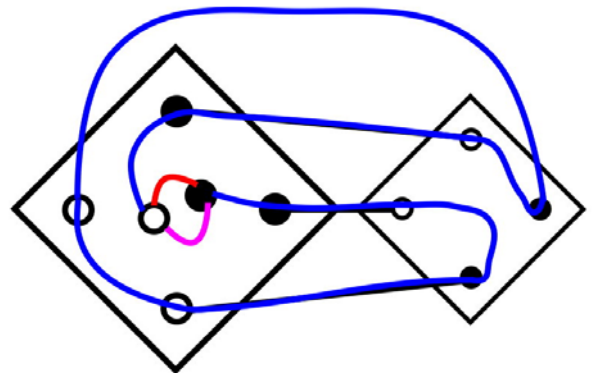
※圖上的黑白兩點是代表 $BC(n)$ 中任一對異色點，也就是圖十一中(a)和(k)所表達的意義相同。由於證明方法皆類似，故在此不詳述，而詳細嚴格的證明，在我與兩位教授所完成的論文[8](附件一)中。

(六)定理一：

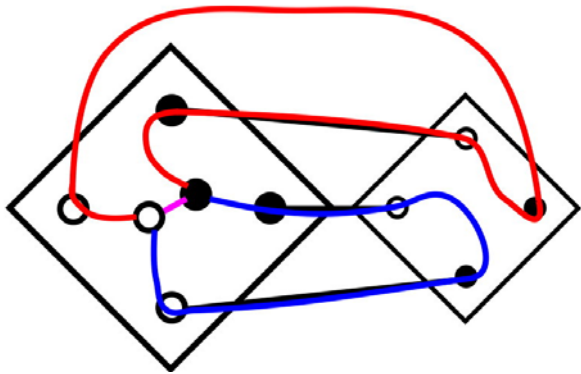
當 $n=1$ 時，我們可用暴力的檢查引理對 $n=1$ 時是正確的。由定義， $BT(n)$ 由一個 $BC(n+1)$ $= (G_{n+1}, w_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ 和一個 $BC^*(n) = (G_n^*, w_n^*, x_n^*, y_n^*, z_n^*)$ 所構成，設 c 和 d 是 $BT(n)$ 中的任一對異色點，由 $BT(n)$ 之對稱性，可不失一般性地假設 $BT(n)$ 的任兩異色點皆落在 $BC(n+1)$ 。又由引理 3，不失一般性，我們分三類情況討論：



(a)



(b)



(c)

圖十二、定理 1 的證明：

- (a) $BC(n+1)$ 是引理 3 中甲情況其中之一，而在 $BC^*(n)$ 中有引理一之漢米頓路徑
- (b) $BC(n+1)$ 是引理 3 中乙情況其中之一，而在 $BC^*(n)$ 中有引理一之漢米頓路徑
- (c) $BC(n+1)$ 是引理 3 中丙情況其中之一，而在 $BC^*(n)$ 中有引理一之漢米頓路徑

我們任意選三類情況的其中各一種情況討論，因為其它的情況皆類似於這三種證明。由以上的證明，兄弟樹為偶完全三連結。

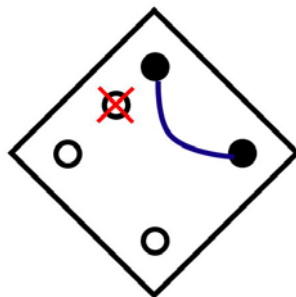
定理一：對任意正整數 n ，兄弟樹 $BT(n)$ 是偶完全三連結圖。

二、兄弟樹之超偶完全三連結

(七) 推廣引理

有了證明定理一時的種種經驗，在除去 $BT(n)$ 中任一點後，希望能有類似於之前的作法，也就是把之前的引理作修改以符合除去任一點後的情況。在討論情況時，我們不免要討論 $BC(n)$ 中去除任一點後所具有的任一點性質，而在 [11] 已證明引理 4，而此引理類似於引理 1：

引理 4：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 f 為 $BC(n)$ 中任一點。則 $BC(n) - \{f\}$ 中存在漢米頓路徑連接與 c 異色之兩端點。



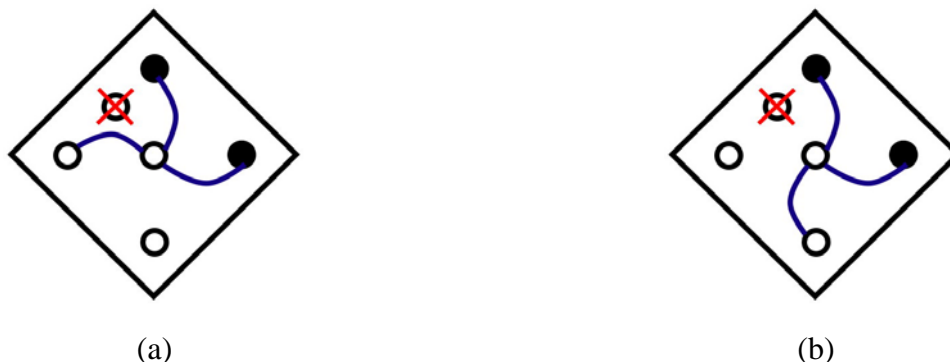
圖十三、引理 4 所證明 $BT(n)$ 的性質：

(八)引理 5

由引理 2 的經驗，我們注意到，在 $BC(2)$ 去除一點 f 後，對任一與 r 異色點 c ，在 $BC(n)$ 中存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3 ，可分別連接 c 到某一與 c 同色端點，兩個與 c 異色端點。

引理 5：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c, f 為 $BC(n)$ 中任兩同色點。而 p, q 是 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中與 c 異色的兩點，而 r 是 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中與 c 同色且非 f 的某一點，則在 $BC(n) - \{f\}$ 中存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3 滿足以下四點性質：(1) P_1, P_2, P_3 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 p ；(3) P_2 連接 c 至 q ；(4) P_3 連接 c 至 r 。

即下二圖中，其中至少一者成立：

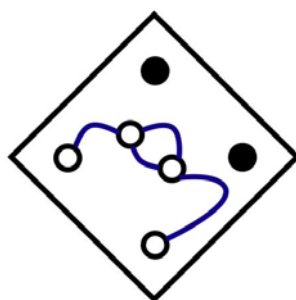


圖十四、引理 5 證明 $BC(n)$ 的性質

(九)引理 6

類似於引理 3，我們要討論在 $BC(n)$ 中兩同色點和一異色壞點的連結性質，但，在討論這之前，我們必須先討論在 $BC(n)$ 中兩同色點的連結性質，才能完整討論兩同色點和一同色壞點的連結性質，我們發現：

引理 6：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c, d 是在 $BC(n)$ 中的任一對同色點，則在 $BC(n)$ 中存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3, P_4 ，滿足以下四點性質：(1) P_1, P_2, P_3 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 和 P_2 分別連接 c 至 d ；(3) P_3 連接 c 至 p ， P_4 連接 d 至 q ，其中 $\{p, q\}$ 為 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中與 c 同色的兩點。



圖十五、引理 6 證明 $BC(n)$ 的性質

(十)引理 7

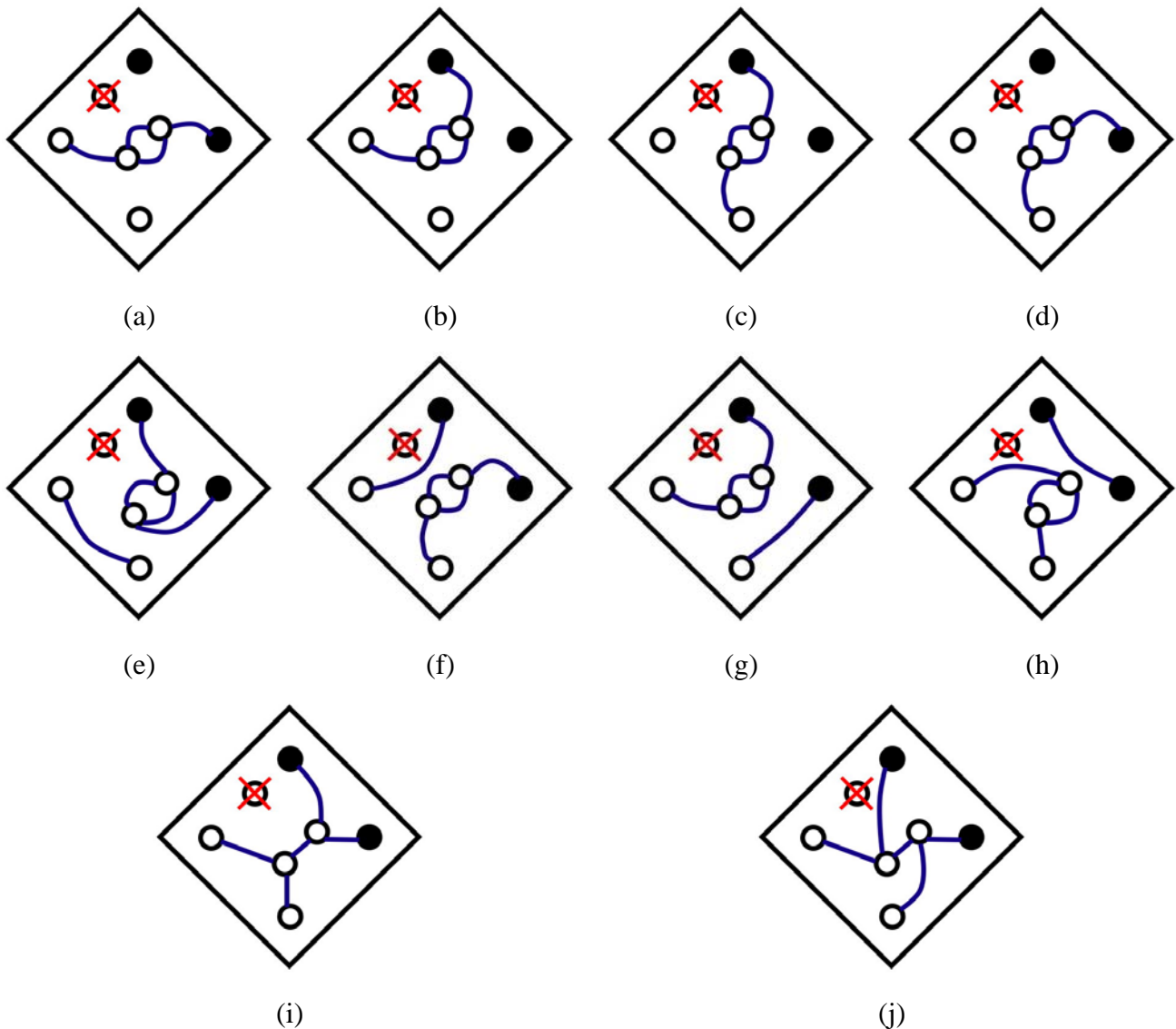
證明完引理 6 之後，因之前引理 4、5 皆有類似引理 1、2 的性質，故我們爲了避免重蹈覆轍，比較引理 3，仔細實驗在 $BC(n)$ 中任兩同色點和一異色壞點之性質，結果和引理 3 類似，也就是：

引理 7：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c, d, f 是在 $BC(n)$ 中的三個同色點，則在 $BC(n) - \{f\}$ 中，以下的甲、乙、丙三性質至少有一者會成立(即圖十六(a)~(j)至少一者成立)：

(甲)存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3, P_4 ，滿足以下四點性質：(1) P_1, P_2, P_3, P_4 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 和 P_2 分別連接 c 與 d ；(3) P_3 連接 c 至 p ； P_4 連接 d 至 q ；(4) p 為 $\{w_n, x_n\}$ 中的某一點而 q 為 $\{y_n, z_n\}$ 中的某一點。(圖十六、(a)~(d))

(乙)存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ，滿足以下四點性質：(1) P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 和 P_2 分別連接 c 與 d ；(3) P_3 連接 c 至 p 而 P_4 連接 d 至 q ，其中 $\{p, q\} \subset \{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ ；而(4) P_5 連結 $\{w_n, y_n\} - \{p\}$ 至 $\{x_n, z_n\} - \{q\}$ 。(圖十六、(e)~(h))

(丙)存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 ，滿足以下五點性質：(1) P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 與 d ；(3) P_2 連接 c 至 w_n ；(4) P_3 連接 d 至 y_n ；而(5) P_4 連結 c 至 p 而 P_5 連結 d 到 q ，其中 $\{p, q\} = \{x_n, z_n\}$ 。(圖十六、(i),(j))



圖十六、引理 7 證明 $BT(n)$ 的性質

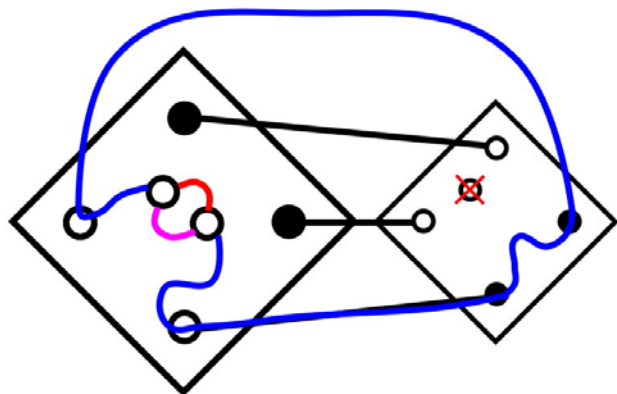
$BC(n)$ 壞一點，一對與壞點同色點的連結性質和沒有壞點的情況(引理 3)竟然極為類似！

(十一)定理二：

當 $n=1$ 時，我們可用暴力的檢查引理對 $n=1$ 時是正確的。由定義， $BT(n)$ 由一個 $BC(n+1) = (G_{n+1}, w_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ 和一個 $BC^*(n) = (G_n^*, w_n^*, x_n^*, y_n^*, z_n^*)$ 所構成，設 c 和 d 是 $BT(n)$ 中的任一對同色點，而 f 為一個與 c 同色之壞點，由 $BT(n)$ 之對稱性，可不失一般性地假設在 $BT(n)$ 中， c 、 d 、 f 三點皆落在 $BC(n+1)$ ，或是 c 和 d 落於 $BC(n+1)$ 而 f 在 $BC^*(n)$ 中。

情況一： c 、 d 、 f 三點皆落在 $BC(n+1)$ 。由引理 7，不失一般性地我們分三種情況討論，但我們注意到引理 7 的結果和引理 3 一樣，故此證明和定理一證明類似。

情況二： c 和 d 在 $BC(n+1)$ 而 f 在 $BC^*(n)$ 中。由引理 5，只有一種情況，即：



圖十七、定理 2 的證明： $BC(n+1)$ 是引理 6 中的情況，而在引理 4 中可知在 $BC^*(n)-\{f\}$ 中有一漢米頓路徑連結兩黑色端點。

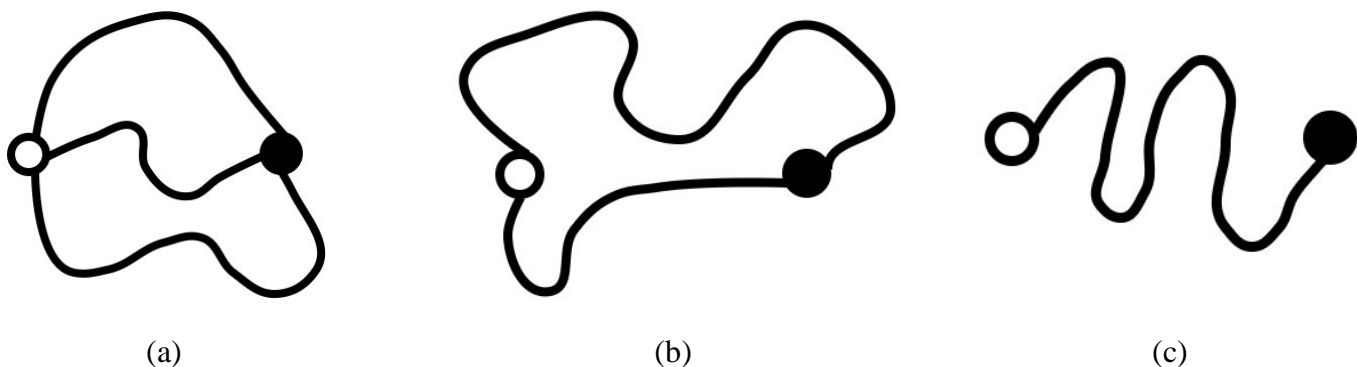
故證畢。

定理二：對任意正整數 n ，兄弟樹 $BT(n)$ 是超偶完全三連接圖。

三、兄弟樹之漢米頓可蕾斯圖

(十二)發現定理

在證明 $BT(n)$ 中任兩點有三條連結線，且為一組經過 $BT(n)$ 所有點之內部不相交路徑(如圖十八(a))；而[11]中也證明了 $BT(n)$ 中有漢米頓圈，即任兩點有兩條連結線(如圖十八(b))，且為一組經過 $BT(n)$ 所有點之內部不相交路徑；而在 $BT(n)$ 中任兩點不可能有四條連結線彼此連結(因為 $BT(n)$ 為三正則圖)，那我們便想到是否在 $BT(n)$ 中任兩點有一條連結線(如圖十八(c))，且經過 $BT(n)$ 所有點。經過實驗後， $BT(1)$ 、 $BT(2)$ 的確可能具有此性質。

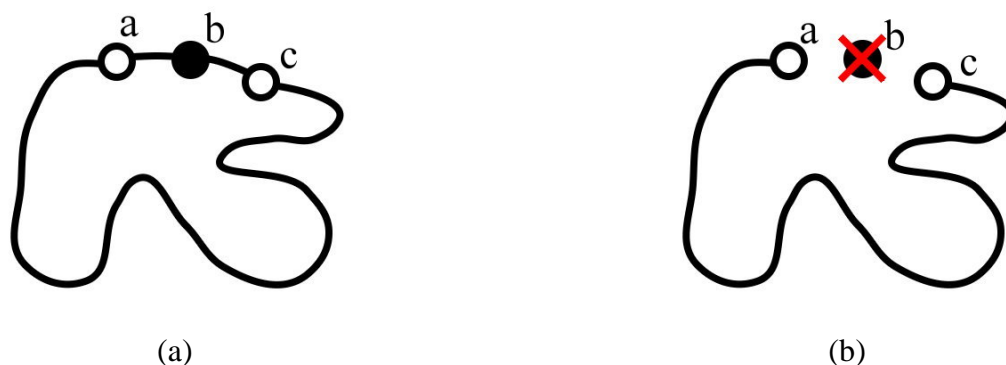


圖十八、(a)偶完全三連結；(b)漢米頓圈；(c)漢米頓路徑

(十三)退化情況

在正式埋頭於定理前，我們先討論一些退化情況，既然已知 $BT(n)$ 為漢米頓圖，那某我們可以在漢米頓圈上任找相鄰兩點，而不考慮此兩點間之路徑，則此兩點有漢米頓路徑；另外，在漢米頓圈上之路徑，任找連續三點 a 、 b 、 c ，去除中間那點 b (異色點) 後，則在 $BT(n) - \{b\}$ 中有漢米頓路徑經過 a 、 c 兩點，類似『強漢米頓可蕾斯圖』，但卻是極退化的性質。

強漢米頓可蕾斯圖：二分圖 $G=(V_1 \cup V_2, E)$ ，同色的任意兩點之間，都有一條路徑可以經過某一點以外的其餘各點，稱為強漢米頓可蕾斯圖(*strongly hamiltonian laceable graph*)。

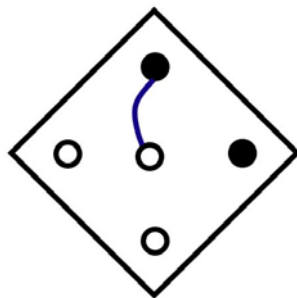


圖十九、(a)漢米頓圈；(b)強漢米頓可蕾斯路徑

(十四)引理 8

在完成[8]之後，我們已經對兄弟樹之結構、連結性質相當熟悉，因此，我們很快就觀察到對於證明漢米頓可蕾斯圖時所須之引理。

引理 8：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c 為 $BC(n)$ 中任一點。而 d 是 $\{x_n, z_n\}$ 中與 c 異色點，則在 $BC(n)$ 中存在漢米頓路徑 P 連接 c 至 d 。

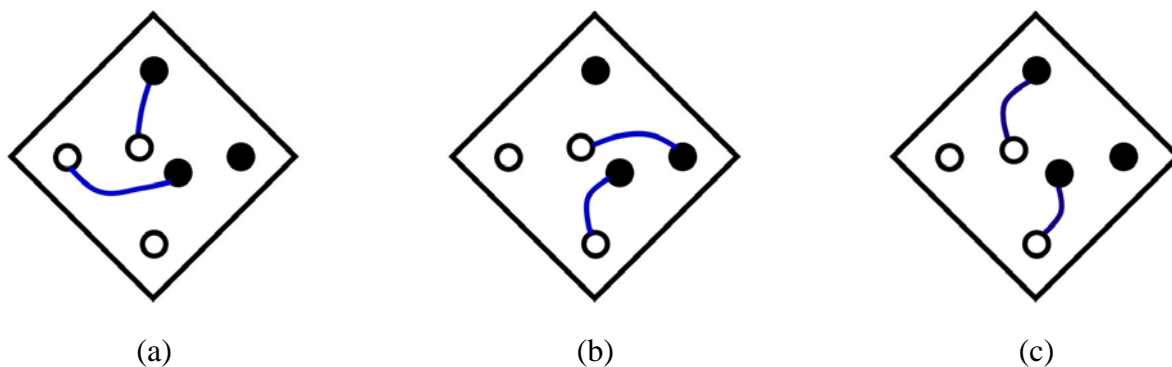


圖二十、引理 8 證明 $BC(n)$ 的性質

定理三和定理四的詳細嚴格證明，在我所完成的論文[1]中，即附件二。

(十五)引理 9

引理 9：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c 、 d 為 $BC(n)$ 中任兩異色點。而 p 、 q 是 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中某兩異色點，且 $\{p, q\} \neq \{w_n, y_n\}$ ，則在 $BC(n)$ 中存在一組內部不相交路徑 P_1 、 P_2 滿足以下二點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 p ； P_2 連接 d 至 q 。



圖二十一、引理 9 證明 $BC(n)$ 的性質

(十六)定理三

當 $n=1$ 時，我們可用暴力的檢查引理對 $n=1$ 時是正確的。由定義， $BT(n)$ 由一個 $BC(n+1) = (G_{n+1}, w_{n+1}, x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ 和一個 $BC^*(n) = (G_n^*, w_n^*, x_n^*, y_n^*, z_n^*)$ 所構成，設 c, d 是 $BT(n)$ 中的任兩異色點，由 $BT(n)$ 之對稱性，不失一般性，我們只須討論 c, d 皆落在 $BC(n+1)$ ，由引理四， $BC(n+1)$ 中存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下四點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n+1)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 p ；(3) P_2 連接 d 至 q 我們有以下三種情況：

情況一： $p=w_{n+1}, q=z_{n+1}$ ；情況二： $p=x_{n+1}, q=y_{n+1}$ ；情況三： $p=x_{n+1}, q=z_{n+1}$ 。

證明方法和定理一、二類似，只須以引理一配合即可證得。

定理三：對任意正整數 n ，兄弟樹 $BT(n)$ 是漢米頓可蕾斯圖。

四、兄弟樹之超漢米頓可蕾斯圖

(十七)屢遭困難

然而這個定理不像定理 3 一樣簡潔，和往常的不同，觀察到一些性質，卻難以證明，或是引理和引理之間無法配合：如一開始，好不容易才觀察到有引理 10、11 的性質，但卻以為至少有一者成立，雖然可得證，但在證引理 12 時卻會有情況無法解決，也無法只修改引理十二，後來才發現引理 10、11 是「至少有兩者成立，且若選擇端點時，甲情況一定成立」；在這期間，反覆修改這些引理不下二十次，才完成這些引理。

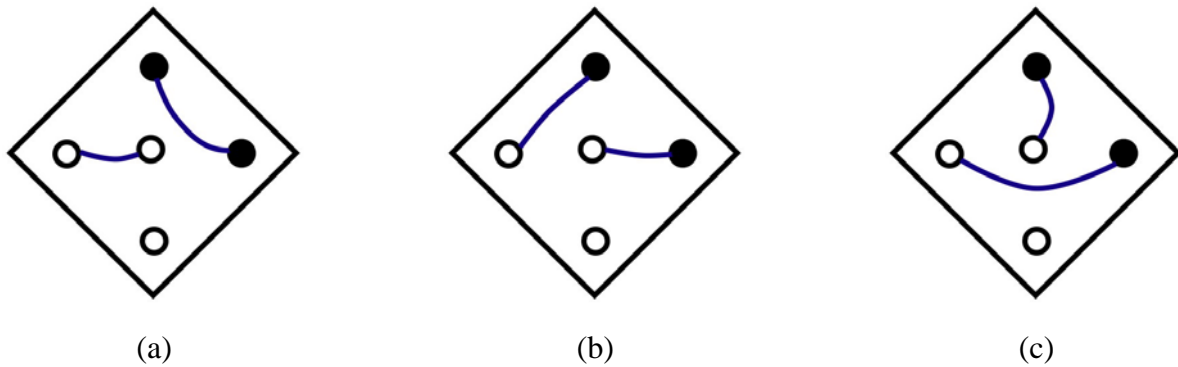
接下來的部分，引理 10~15 之證明，請見我所完成的論文[1]，即附件二。

(十八) 引理 10

引理 10：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。則在 $BC(n)$ 中，若 c 為 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中任一點，則甲成立。若 c 為 $BC(n) - \{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中任一點，則以下甲、乙、丙二性質至少二者成立：

- 甲、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 $\{w_n, y_n\}$ 中與 c 同色點；(3) P_2 連接 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中與 c 異色之兩點。(圖二十二(a))
- 乙、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 $\{w_n, y_n\}$ 與 c 異色點；(3) P_2 連接 $\{w_n, y_n\}$ 與 c 同色點至 $\{x_n, z_n\}$ 中與 c 異色點。(圖二十二(b))

丙、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 $\{x_n, z_n\}$ 中與 c 異色點；(3) P_2 連接 w_n 至 y_n 。(圖二十二(c))



圖二十二、引理 10 證明 $BC(n)$ 的性質

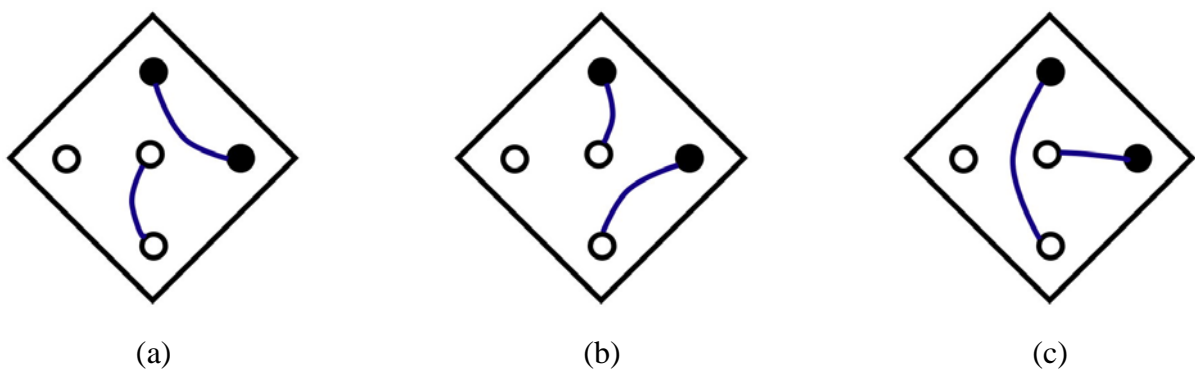
(十九)引理 11

引理 11：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c 為 $BC(n)$ 中任一點。則在 $BC(n)$ 中，若 c 為 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中任一點，則甲成立。若 c 為 $BC(n) - \{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中任一點，則以下甲、乙、丙二性質至少二者成立：

甲、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 $\{x_n, z_n\}$ 中與 c 同色點；(3) P_2 連接 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中與 c 異色兩點。(圖二十三(a))

乙、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 $\{x_n, z_n\}$ 中與 c 異色點；(3) P_2 連接 $\{x_n, z_n\}$ 中與 c 同色點至 $\{w_n, y_n\}$ 中與 c 異色點。(圖二十三(b))

丙、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 $\{w_n, y_n\}$ 中與 c 異色點；(3) P_2 連接 x_n 至 z_n 。(圖二十三(c))



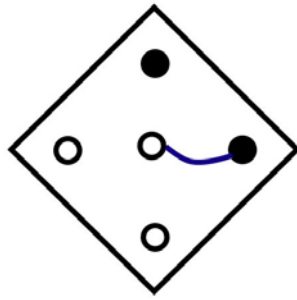
圖二十三、引理 11 證明 $BC(n)$ 的性質

(二十)引理 12

把引理 10 和 11 做完後，我們發現可用以證得一個乾淨漂亮的引理。

引理 12：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c 為 $BC(n)$ 中任一點。則在 $BC(n)$ 中

存在漢米頓路徑 P 連接 c 至 $\{w_n, y_n\}$ 中與 c 異色點。(圖二十四)



圖二十四、引理 12 證明 $BT(n)$ 的性質

(二十一)引理 13

這是一個非常複雜的引理，討論在 $BC(n)$ 中壞一個點後，一個與壞點異色的連接性質；從這個引理可以發現到，甲情況類似引理 8 和引理 12；乙情況類似引理 11；丙情況類似引理 10，非常有趣。

引理 13：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c, f 為 $BC(n)$ 中任兩異色點。若 c 為白點，令 $p = w_n, q = x_n, r = y_n, s = z_n$ ；若 c 為黑點，令 $p = z_n, q = y_n, r = x_n, s = w_n$ 。則在 $BC(n) - \{f\}$ 中，以下甲、乙、三性質中，至少有兩者成立：(即圖二十五中有兩者成立)

甲、存在一漢米頓路徑 P 連接 c 至 p ， p 為 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中與 c 同色之某一點。

乙、以下三情況，至少有一者成立：

(一)、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 p ；(3) P_2 連接 q 至 r 。

(二)、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 q ；(3) P_2 連接 p 至 r 。

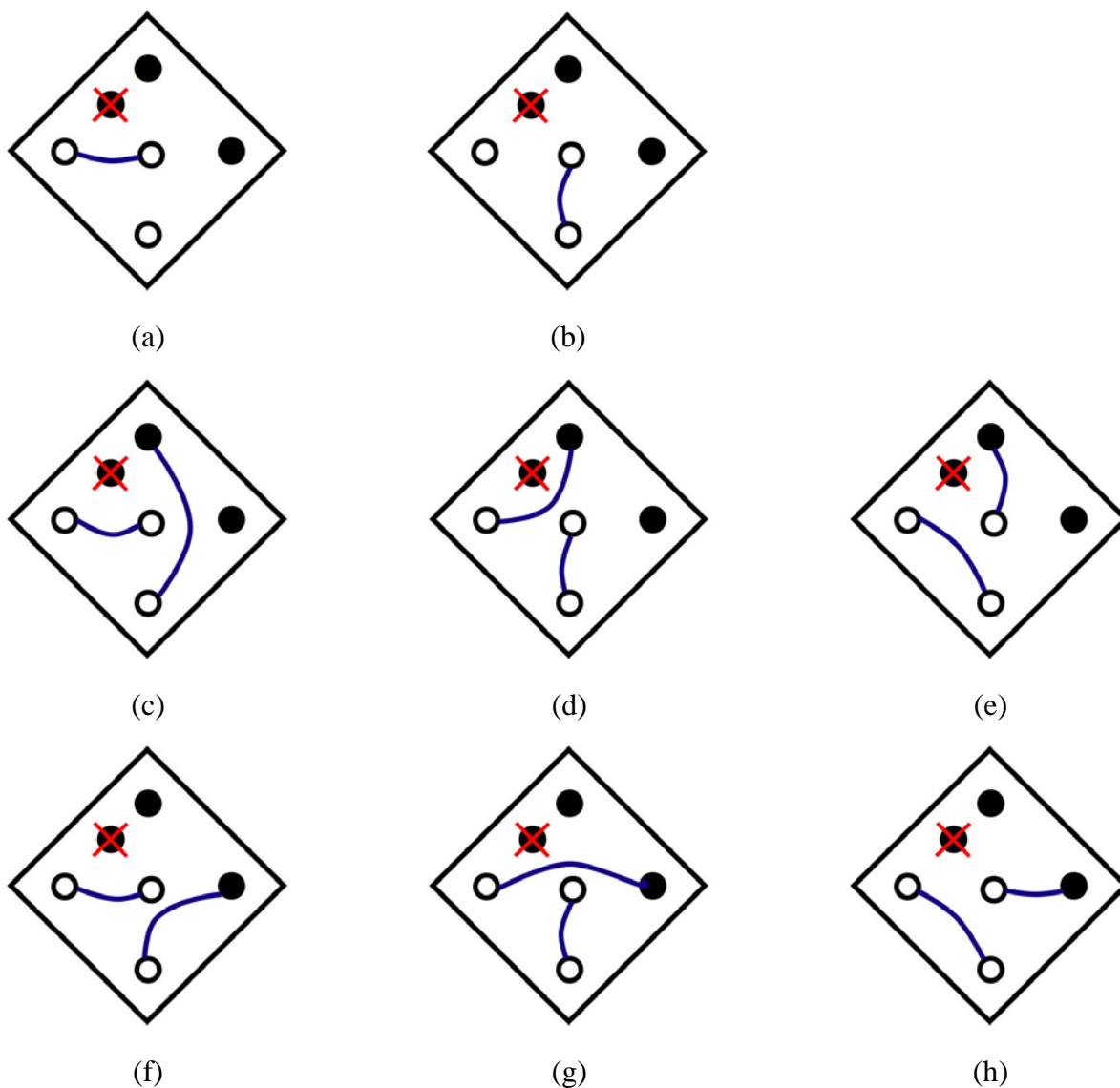
(三)、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 r ；(3) P_2 連接 p 至 q 。

丙、以下三情況，至少有一者成立：

(一)、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 p ；(3) P_2 連接 r 至 s 。

(二)、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 q ；(3) P_2 連接 p 至 s 。

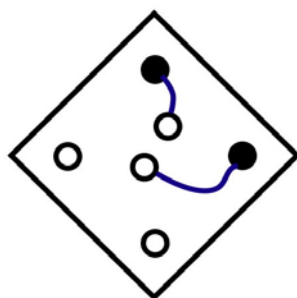
(三)、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 s ；(3) P_2 連接 p 至 q 。



圖二十五、引理 13 證明 $BT(n)$ 的性質

(二十二)引理 14

引理 14：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c, d 為 $BC(n)$ 中任兩同色點。則在 $BC(n)$ 中，存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 p ；(3) P_2 連接 d 至 q ，其中 p, q 為 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 中與 c 異色兩點。

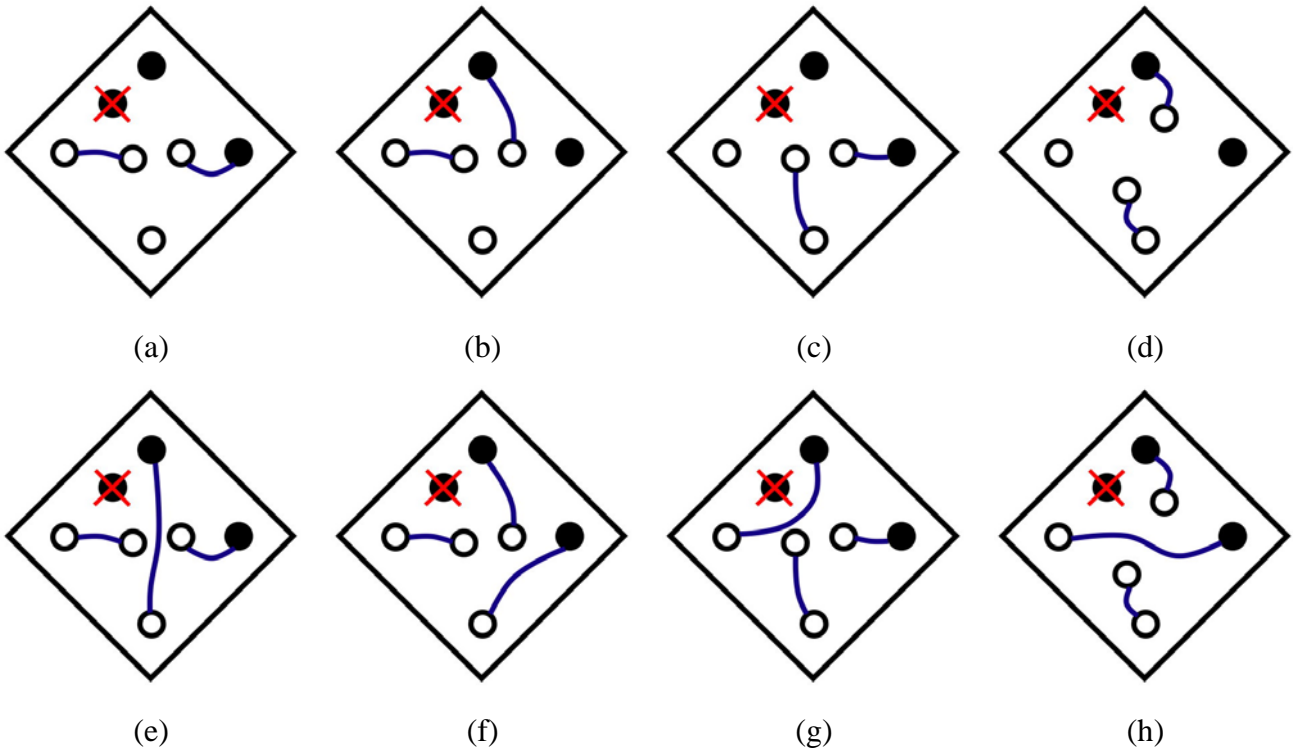


圖二十六、引理 14 證明 $BT(n)$ 的性質

(二十三)引理 15

引理 15：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 c, d 為 $BC(n)$ 中任兩同色點， f 為與 c 異色之任一點。則在 $BC(n) - \{f\}$ 中，甲、乙兩性質皆成立：

- 甲、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 p ；(3) P_2 連接 d 至 q 。其中 p, q 是 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ 某兩異色點。
- 乙、存在一組內部不相交路徑 P_1, P_2, P_3 滿足以下三點性質：(1) P_1, P_2, P_3 經過 $BC(n) - \{f\}$ 中所有點；(2) P_1 連接 c 至 p ； P_2 連接 d 至 q ；其中 $\{p, q\} \subset \{w_n, x_n, y_n, z_n\}$ ，而(4) P_3 連結 $\{w_n, x_n, y_n, z_n\} - \{p, q\}$ 中兩點。



圖二十七、引理 15 證明 $BT(n)$ 的性質

(二十四)定理四

由以上辛苦所歸納得到的引理 15，也因此，此定理的證明方法和定理 1、2 類似，由引理 15，以引理 1 配合，便可證明此定理。

定理四：對任意正整數 n ，兄弟樹 $BT(n)$ 是超漢米頓可蕾斯圖。

(二十五)兄弟樹的四個定理完成

到這裡，我們終於把兄弟樹的四個定理完成了，也就是點和點之間的連接關係及其壞點後的情況之討論告一段落；接下來的部分，(二十六)至(二十八)，是我們對於三正則圖形所證明的一些定理和性質的一些探討。

五、定理

(二十六) 若三正則圖形 G 為 n 邊容錯漢米頓圖，則 G 為 n 邊要求漢米頓圖

當一圖形為漢米頓圖時，可要求它經過任 k 條邊，而這些邊則被稱為要求邊(*required edge*)；此概念是由 *Willian Hamilton* 提出的。一圖形 G 中，令 R 為必經邊之集合，顯然我們必須避免這些邊形成非漢米頓圈之迴圈或要求任一點之三邊，而稱 G 為 k 邊要求漢米頓圖 (*k-require edge hamiltonian graph*)，其中 $|R| \geq k$ 。

若三正則圖形 G 為 n 邊容錯漢米頓圖，我們可在 G 上找任意 n 個不相同的點 c_1, c_2, \dots, c_n 和它們的鄰域 $\bigcup_{i=1}^n N(c_i) = \{p_i, q_i, r_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ ，考慮圖形 G 中的漢米頓圈路徑有三種方式經過 c_i 點(不考慮方向)，分別是：(1) p_i, c_i, q_i ；(2) q_i, c_i, r_i ；(3) r_i, c_i, p_i 。我們將 (p_i, c_i) 、 (q_i, c_i) 或 (r_i, c_i) 其中一邊刪去※，因 G 為 n 邊容錯漢米頓圖，刪去 n 邊後，仍有漢米頓圈，且此漢米頓圈必經過 c_i 的另兩邊；當我們要指定一漢米頓圈要經過任一邊 (p_i, c_i) 時，就同於將 (q_i, c_i) 或 (r_i, c_i) 刪去所得到的漢米頓圈，故若一圖形 G 為 n 邊容錯漢米頓圖，則 G 為 n 邊要求漢米頓圖。

※ 顯然若刪去圖中任一點之兩邊，就不可能有漢米頓圈，故在此我們討論的 n 邊容錯漢米頓圖皆不可刪去任一點之兩邊；類似地，在此我們也不討論指定任一點所連接的三邊，或指定邊形成一非漢米頓圈之迴圈。

(二十七) 若三正則圖形 G 為 n 邊要求漢米頓圖，則 G 為 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 邊容錯漢米頓圖

由上所敘述，相反地，若我們要指定此漢米頓圈不過 (p_i, c_i) (即將 (p_i, c_i) 刪去) 時，我們要指定此漢米頓圈經過 (q_i, c_i) 和 (r_i, c_i) ；因此，要指定 2 條邊才可保證不經過某一條邊，故若一圖形 G 為 n 邊要求漢米頓圖，則 G 為 $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ 邊容錯漢米頓圖。

(二十八) 綜合二十六、二十七

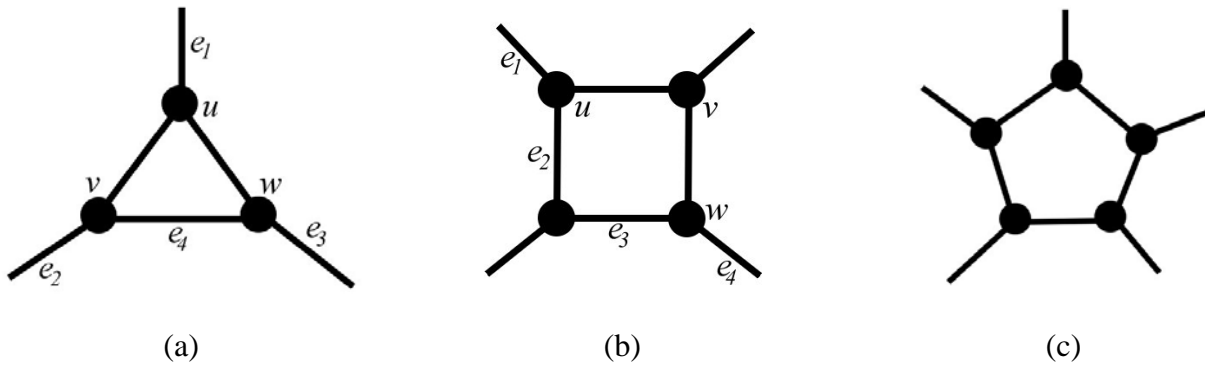
由上面兩個定理可知，若不刪去圖中任一點之兩邊，且不指定任一點所連接的三邊，或指定邊形成一非漢米頓圈之迴圈，則：

定理五：若三正則圖形 G 為 n 邊容錯漢米頓圖，則 G 為 k 邊要求漢米頓圖，其中 $2n+1 \geq k \geq n$

定理六：若三正則圖形 G 為 n 邊要求漢米頓圖，則 G 為 k 邊容錯漢米頓圖，其中 $n \geq k \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

(二十九) 以圖形來看 n 邊容錯漢米頓圖和 k 邊要求漢米頓圖

我們考慮三正則圖形 G 有圖二十八(a)的結構時，那麼， G 就不可為 2 邊容錯漢米頓圖或是 3 邊要求漢米頓圖，因為若將圖中 e_1 、 e_2 刪去後，便無法構成漢米頓圈，而若指定 e_1 、 e_2 、 e_3 (無法同時經過 u 、 v 、 w) 或是 e_2 、 e_3 、 e_4 (無法經過 u) 時，也無法形成漢米頓圈。



圖二十八、一些圖形結構

而當三正則圖形 G 有圖二十八(b)結構時，也不可能為 2 邊容錯漢米頓圖，因為在刪去 e_1 、 e_4 (無法同時經過 u 、 w)後，便無法形成漢米頓圈或路徑，而在兄弟樹中皆有此構造，如 $BT(1)$ (圖三(a)中的 w_2, s, t, z_2 所形成的構造)故同時也證得兄弟樹頂多為單邊容錯漢米頓圖。若指定經過 e_1 、 e_2 、 e_3 、 e_4 (無法同時經過 v)時，也無法形成漢米頓圈，故也是代表兄弟樹頂多為 3 邊要求漢米頓圖。

同理，若有結構(c)時，可知圖的最大容錯邊數為 2，最大可要求邊數為 4。另外，很容易可得知若有一圖形 G 這樣的結構時，若這種結構上的點數為 n ，則 G 頂多為 $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 邊容錯漢米頓圖， $(n-1)$ 邊要求漢米頓。

定理七：三正則圖形 G 中，若其最小迴圈之內點個數為 n ，則 G 頂多為 $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ 邊容錯漢米頓圖， $(n-1)$ 邊要求漢米頓。

六、兄弟樹之 3 邊要求漢米頓圖

(二十八)

既然我們證出三正則圖形有如此有趣的性質，也證出兄弟樹頂多為單邊容錯漢米頓圖、3 邊要求漢米頓圖；而單邊容錯漢米頓圖在[11]已證明，也可從定理一或定理三間接證出[9]；那麼，它是 1、2 還是 3 邊要求漢米頓圖？由數次實驗後，推測兄弟樹可能為 3 邊要求漢米頓圖，現在就來試著證明它為 3 邊要求漢米頓圖。相同地，我們先看看一些已得知的事：由定理五便可知 $BT(n)$ 為單邊要求漢米頓圖；而 $BT(1)=P(4,1)$ (見討論三)。

起先，在證明引理 16 時，起來我們認為是對任意正整數 $n \geq 2$ ，至少有三種情況成立，導致在引理 17 只能得到「至少有一者成立」，故只能證得 $BT(n)$ 為 2 邊要求漢米頓圖。然而，在證明上遇到困難，並不代表它不為 3 邊要求漢米頓圖，而且我們也找不到實際的例子，即找不到「要求經過某三邊而無法形成的漢米頓圈」；經過努力之後，我們還是成功地證得兄弟樹為 3 邊要求漢米頓圖。

(二十九)引理十六

引理 16：設一正整數 $n \geq 4$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 e 為 $BC(n)$ 中任一邊。則在 $BC(n)$ 中，

性質 1~6 中至少有五者成立，且該漢米頓路徑經過 e ：

性質 1、在 w_n 至 y_n 之間存在一漢米頓路徑。

性質 2、在 w_n 至 z_n 之間存在一漢米頓路徑。

性質 3、在 x_n 至 y_n 之間存在一漢米頓路徑。

性質 4、在 x_n 至 z_n 之間存在一漢米頓路徑。

性質 5、 $BC(n)$ 中存在兩路徑 P_1 和 P_2 為一組內部不相交路徑，且滿足以下兩點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 w_n 至 x_n ；(3) P_2 連接 y_n 至 z_n 。

性質 6、 $BC(n)$ 中存在兩路徑 P_1 和 P_2 為一組內部不相交路徑，且滿足以下兩點性質：(1) P_1, P_2 經過 $BC(n)$ 中所有點；(2) P_1 連接 w_n 至 z_n ；(3) P_2 連接 x_n 至 y_n 。

在引理 16、17、18 與定理一中，我們以 ${}_c^{a,b} P^n$ 表示 $BC(n)$ 中的路徑性質，其中 a 表示構成此路徑的 $BC^1(n)$ 中的路徑性質；而 b 表示構成此路徑的 $BC^2(n)$ 中的路徑性質；而 c 則表示 $BC(n+1)$ 中的路徑性質。如 ${}_2^{2,4} P^n$ ，在 $BC^1(n-1)$ 存在一漢米頓路徑 w_{n-1} 至 z_{n-1} (性質 2)；在 $BC^2(n-1)$ 存在一漢

米頓路徑 x_{n-1} 至 z_{n-1} (性質 4)。故我們取 ${}_2^{2,4} P^n = \langle w_n = w_{n-1,2}^1, P, z_{n-1}^2, x_n, z_{n-1,4}^2, P, x_{n-1}^2, z_n \rangle$ (性質 2)。此

外， ${}_5 P^n$ 、 ${}_6 P^n$ 是表示一組路徑。另外，在引理 16、17、18 與定理一中，所指的「性質」皆是指以上六點性質。

容易地，我們可以得到對任意正整數 $n \geq 3$ ，有以下 11 點特性：

$$(1)、E\left({}_6^{1,5} P^n\right) = E\left({}_1 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_5 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2), (z_n, x_{n-1}^2) \right\}$$

$$(2)、E\left({}_5^{1,6} P^n\right) = E\left({}_1 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_6 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2), (z_n, x_{n-1}^2) \right\}$$

$$(3)、E\left({}_2^{2,4} P^n\right) = E\left({}_2 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_4 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (z_n, x_{n-1}^2) \right\}$$

$$(4)、E\left({}_5^{2,3} P^n\right) = E\left({}_2 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_3 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2) \right\}$$

$$(5)、E\left({}_4^{3,2} P^n\right) = E\left({}_3 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_2 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2), (z_n, x_{n-1}^1) \right\}$$

$$(6)、E\left({}_3^{3,6} P^n\right) = E\left({}_3 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_6 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2), (z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2) \right\}$$

$$(7)、E\left({}_3^{4,3} P^n\right) = E\left({}_4 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_3 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2) \right\}$$

$$(8)、E\left({}_6^{5,1} P^n\right) = E\left({}_5 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_1 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^1), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2), (z_n, x_{n-1}^1) \right\}$$

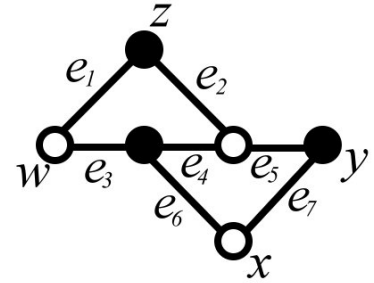
$$(9)、E\left({}_1^{5,5} P^n\right) = E\left({}_5 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_5 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2), (z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2) \right\}$$

$$(10)、E\left({}_5^{6,1} P^n\right) = E\left({}_6 P_{n-1}\right) \cup E\left({}_1 P_{n-1}\right) \cup \left\{ (x_n, z_{n-1}^1), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2), (z_n, x_{n-1}^1) \right\}$$

$$(11)、E\left({}_{1}^{6,6}P^n\right)=E\left({}_6P_{n-1}\right)\cup E\left({}_5P_{n-1}\right)\cup\left\{\left(x_n, z_{n-1}^1\right),\left(x_n, z_{n-1}^2\right),\left(y_{n-1}^1, w_{n-1}^2\right),\left(z_n, x_{n-1}^1\right),\left(z_n, x_{n-1}^2\right)\right\}$$

首先，我們先快速地檢查在 $n=2$ 時，性質 1~6 中至少有三者成立；而在 $n=3$ 時，性質 1~6 中至少有四者成立(見表一、表二)。

我們以數學歸納法來證明這三個引理，我們可以已經檢查此引理對 $n=4$ 是正確的，假設此引理對 $BC(n)$ 是正確的，由定義， $BC(n+1)$ 是由兩個 n 階的兄弟樹生成子圖 $BC^1(n)$ 和 $BC^2(n)$ 及兩異色端點 x_{n+1}, z_{n+1} 所構成。不失一般性，我們討論 e 在 $BC^1(n)$ ，或是 e 是 (z_n, x_{n-1}^1) 、 (z_n, x_{n-1}^2) 、 (x_n, z_{n-1}^1) 、 (x_n, z_{n-1}^2) 、 (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2) 中的任一邊。



圖二十九、 $BC(2)$

情況一： e 在 $BC^1(n)$ 中，由 11 點特性中可知必然成立。

指定邊 e	$BC(2)$ 成立的情況	$BC(3)$ 成立的情況	$BC(n)$ 成立的情況 ($n \geq 4$)
e_1	${}_1P^2、{}_3P^2、{}_4P^2、{}_5P^2$	${}_1P^3、{}_3P^3、{}_4P^3、{}_5P^3、{}_6P^3$	${}_1P^n、{}_3P^n、{}_4P^n、{}_5P^n、{}_6P^n$
e_3	${}_1P^2、{}_2P^2、{}_3P^2、{}_5P^2、{}_6P^2$	${}_1P^3、{}_2P^3、{}_3P^3、{}_4P^3、{}_5P^3、{}_6P^3$	${}_1P^n、{}_2P^n、{}_3P^n、{}_4P^n、{}_5P^n、{}_6P^n$
e_3	${}_2P^2、{}_3P^2、{}_4P^2、{}_5P^2、{}_6P^2$	${}_1P^3、{}_2P^3、{}_3P^3、{}_4P^3、{}_5P^3、{}_6P^3$	${}_1P^n、{}_2P^n、{}_3P^n、{}_4P^n、{}_5P^n、{}_6P^n$
e_4	${}_1P^2、{}_4P^2、{}_6P^2$	${}_1P^3、{}_3P^3、{}_5P^3、{}_6P^3$	${}_1P^n、{}_3P^n、{}_4P^n、{}_5P^n、{}_6P^n$

表一

情況二： e 是 (z_n, x_{n-1}^1) 、 (z_n, x_{n-1}^2) 、 (x_n, z_{n-1}^1) 、 (x_n, z_{n-1}^2) 、 (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2) 中的任一邊：

指定邊	$BC(n+1)$ 可成立路徑	$BC(n+1)$ 之路徑性質
(x_n, z_{n-1}^1)	${}_{1,5,5}P^n、{}_{1,6,6}P^n、{}_{2,4}P^n、{}_{3,3}P^n、{}_{2,3}P^n、{}_{5,6,1}P^n、{}_{5,1}P^n$	1、2、3、5、6
(x_n, z_{n-1}^2)	${}_{1,5,5}P^n、{}_{1,6,6}P^n、{}_{2,4}P^n、{}_{3,6}P^n、{}_{3,2}P^n、{}_{1,6}P^n、{}_{1,5}P^n$	1、2、4、5、6
(y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)	${}_{1,5,5}P^n、{}_{1,6,6}P^n、{}_{3,6}P^n、{}_{3,2}P^n、{}_{1,6}P^n、{}_{5,6,1}P^n、{}_{1,5}P^n、{}_{5,1}P^n$	1、3、4、5、6
(z_n, x_{n-1}^1)	${}_{1,5,5}P^n、{}_{1,6,6}P^n、{}_{3,6}P^n、{}_{4,3}P^n、{}_{3,2}P^n、{}_{5,6,1}P^n、{}_{5,1}P^n$	1、3、4、5、6
(z_n, x_{n-1}^2)	${}_{1,5,5}P^n、{}_{1,6,6}P^n、{}_{2,4}P^n、{}_{3,6}P^n、{}_{4,3}P^n、{}_{2,3}P^n、{}_{1,6}P^n、{}_{1,5}P^n$	1、2、3、5、6

表二

由表二可知，對正整數 $n \geq 4$ ， $BC(n)$ 皆具有此性質。一切皆從整理好的表格證明完畢。

(二十九)引理十七

引理 17.1：設一正整數 $n \geq 4$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 e_1, e_2 為 $BC(n)$ 中任兩邊，且 e_1, e_2 不同時為某一端點所連接的兩邊。則在 $BC(n)$ 中，六種性質中至少有三者成立。

引理 17.2：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 e_1, e_2 為 $BC(n)$ 中端點 d 所連接的兩邊。則在 $BC(n)$ 中，若 $d = w_n$ ，則性質 3、4 成立；若 $d = x_n$ ，則性質 1、3 成立；若 $d = y_n$ ，則性質 2、4 成立；若 $d = z_n$ ，則性質 1、2 成立。

我們以數學歸納法來證明這引理，類似上個引理的作法，且可善用表二、三，確定此引理對 $n=4$ 是正確的，假設此引理對 $BC(n)$ 是正確的，由定義， $BC(n+1)$ 是由兩個 n 階的兄弟樹生成子圖 $BC^1(n)$ 和 $BC^2(n)$ 及兩異色端點 x_{n+1}, z_{n+1} 所構成。不失一般性，我們討論以下三種情況：

情況一：我們討論 e_1, e_2 皆在 $BC^1(n)$ ，由 11 點特性中可知必然成立。

情況二： e_1 在 $BC^1(n)$ 中， e_2 在 $BC^2(n)$ 。由引理 16 可知， $BC^1(n), BC^2(n)$ 中皆至少有五種情況成立，可知 $BC(n+1)$ 中至少有三者成立。

情況三： e_1, e_2 是 $(z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$ 中任兩邊。

不失一般性，我們討論以下幾種情況：

指定邊	$BC(n+1)$ 可成立路徑	$BC(n+1)$ 之路徑性質
$(x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2)$	${}^5,5_1 P^n, {}^6,6_1 P^n, {}^2,4_2 P^n$	1、2
$(x_n, z_{n-1}^1), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$	${}^5,5_1 P^n, {}^6,6_1 P^n, {}^6,1_5 P^n, {}^5,1_6 P^n$	1、5、6
$(x_n, z_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^1)$	${}^5,5_1 P^n, {}^6,6_1 P^n, {}^4,3_3 P^n, {}^6,1_5 P^n, {}^5,1_6 P^n$	1、3、5、6
$(x_n, z_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2)$	${}^5,5_1 P^n, {}^6,6_1 P^n, {}^2,4_2 P^n, {}^4,3_3 P^n, {}^5,1_6 P^n$	1、2、3、6
$(x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$	${}^5,5_1 P^n, {}^6,6_1 P^n, {}^3,6_3 P^n, {}^3,2_4 P^n, {}^1,6_5 P^n, {}^1,5_6 P^n$	1、3、4、5、6

表三

而由引理一， $BC^1(n), BC^2(n)$ 所有情況皆成立，故可得證。

(三十)引理十八

引理 18：設一正整數 $n \geq 2$ ，令 $BC(n) = (G_n, w_n, x_n, y_n, z_n)$ 。若 e_1, e_2, e_3 為 $BC(n)$ 中任兩邊，且不同時連接於同一點。則在 $BC(n)$ 中，六種性質中至少有一者成立：

由於上一個引理的限制，我們必須先討論 $BC(2), BC(3)$ 和 $BC(4)$ 的情況，只須討論幾個情況，並可配合表二、三，馬上可得證。

我們以數學歸納法來證明這個引理，我們已經確定此引理對 $n=4$ 是正確的，假設此引理對

$BC(n)$ 是正確的，由定義， $BC(n+1)$ 是由兩個 n 階的兄弟樹生成子圖 $BC^1(n)$ 和 $BC^2(n)$ 及兩異色端點 x_{n+1}, z_{n+1} 所構成。不失一般性，我們討論以下幾種情況：

情況一： e_1, e_2, e_3 皆在 $BC^1(n)$ 中，由 11 點特性中可知必然成立。

情況二： e_1, e_2 在 $BC^1(n)$ 中， e_3 在 $BC^2(n)$ 中。由引理 17 可知 $BC^1(n)$ 至少有兩性質成立，而由引理 16 可知 $BC^1(n)$ 至少有五性質成立，可得知 $BC(n+1)$ 中至少有一者成立。

情況三： e_1, e_2 在 $BC^1(n)$ 中， e_3 為 $(z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$ 任一邊。

情況三之一： e_1, e_2 不同時為某一端點所連接的兩邊。由引理十七可知 $BC^1(n)$ 至少有兩性質成立，由再表二即可得證。

情況三之二：若 e_1, e_2 為 $BC^1(n)$ 中端點 d 所連接的兩邊。分別討論 d 為四個端點的情況：

(1) 若 $d = w_n$ ，則性質 3、4 成立；即可經過 $(z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$ 。

(2) 若 $d = x_n$ ，則性質 1、3 成立；即可經過 $(z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$ ，無法經過 (z_n, x_{n-1}^1) ，因為此三邊同時連接 x_n 。

(3) 若 $d = y_n$ ，則性質 2、4 成立；即可經過 $(z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2)$ ，無法經過 (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2) ，因為此三邊同時連接 y_n 。

(4) 若 $d = z_n$ ，則性質 1、2 成立；即可經過 $(z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$ ，無法經過 (x_n, z_{n-1}^1) ，因為此三邊同時連接 x_n 。

情況四： e_1 在 $BC^1(n)$ 中， e_2 在 $BC^2(n)$ 中，而 e_3 為 $(z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$

由引理十六可知 $BC^1(n)$ 和 $BC^2(n)$ 皆至少有五者性質成立，再表二即可得證。

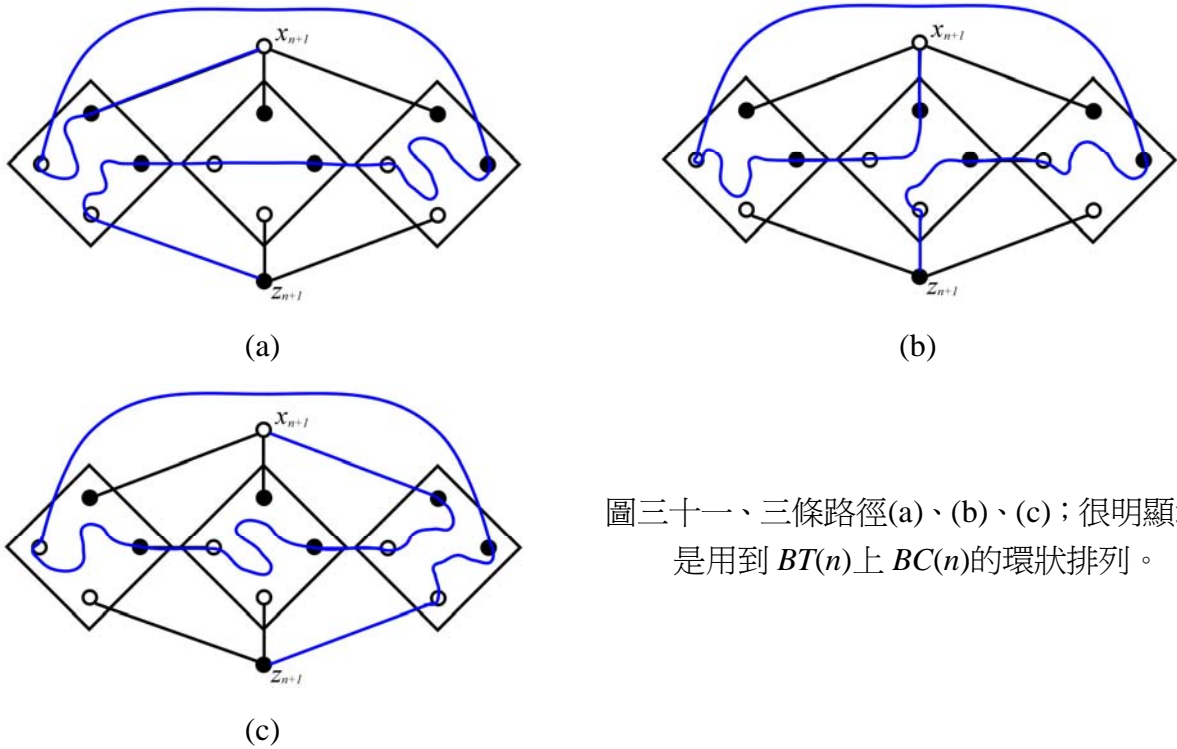
情況五： e_1 在 $BC^1(n)$ 中， e_2, e_3 為 $(z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$ 。由引理十六， $BC^1(n)$ 中至少有五者成立，配合表三可知， $BC(n+1)$ 中至少一者成立。

情況六： e_1, e_2, e_3 皆為 $(z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$ 。顯然 ${}^5_1 P^n, {}^6_1 P^n$ 可經過 $(z_n, x_{n-1}^1), (z_n, x_{n-1}^2), (x_n, z_{n-1}^1), (x_n, z_{n-1}^2), (y_{n-1}^1, w_{n-1}^2)$ ，故皆成立。

(三十一)定理八

如同之前對兄弟樹所做的定理，往往最難的不是最後的定理證明，而是引理的發現和證明，定理八的證明方式類似之前的。

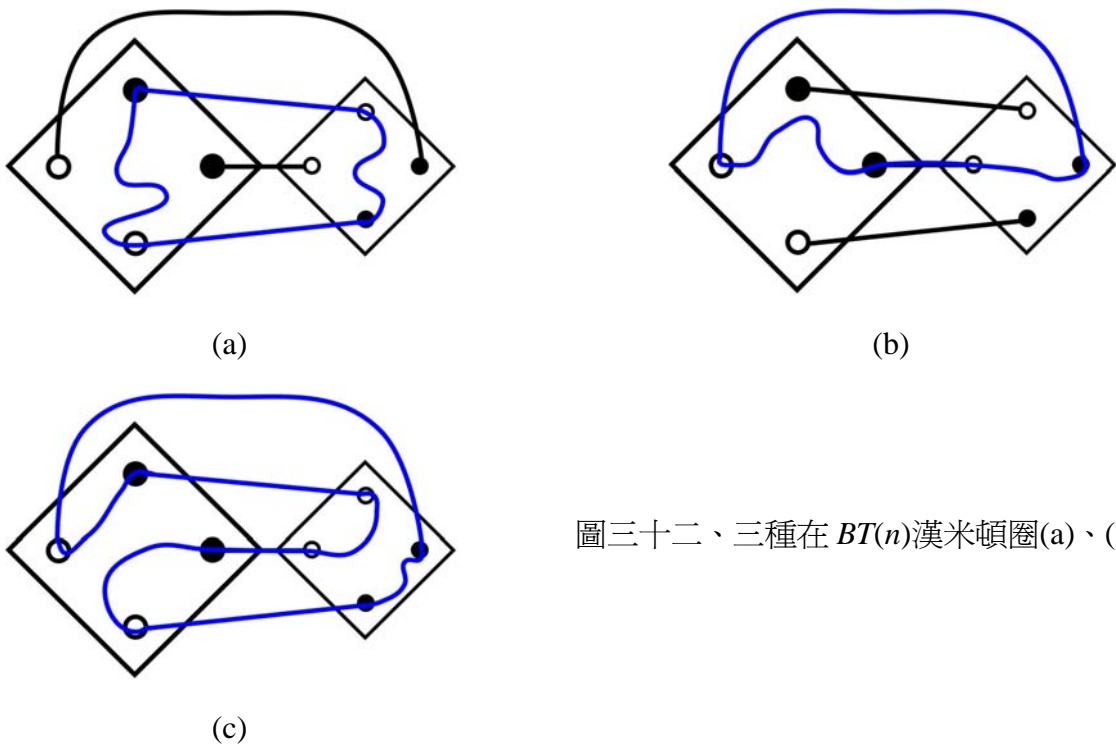
定理八：對任意正整數 n ，兄弟樹 $BT(n)$ 是 3 邊要求漢米頓圖。



圖三十一、三條路徑(a)、(b)、(c)；很明顯地，是用到 $BT(n)$ 上 $BC(n)$ 的環狀排列。

(二)、此外，我們注意到在兄弟樹中，可能存在獨立漢米頓迴圈，如圖三十二，依照引理一，共有六種漢米頓圈，但要如何證明對於任一點，皆可畫出三種漢米頓圈，且彼此獨立，是目前尚未完成證明的。

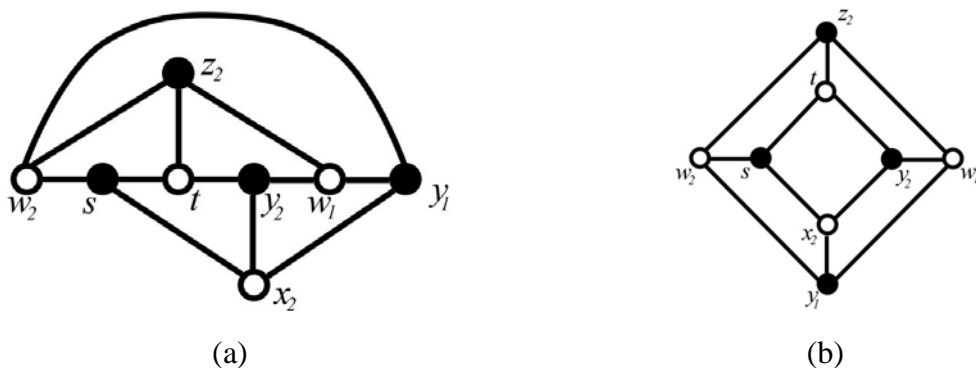
我們說一組獨立漢米頓迴圈(*independent hamiltonian cycle*)，是指這些迴圈的路徑為一組彼此獨立之路徑，且路徑上第一點為最後一點。而若在圖 G 上任一點皆可具有 k 個彼此獨立的漢米頓迴圈經過，則稱 G 為 k 獨立漢米頓圈；顯然，對任意三正則圖形， G 最多為三獨立漢米頓圈。



圖三十二、三種在 $BT(n)$ 漢米頓圈(a)、(b)、(c)

(三)、 $BT(1)=P(4,1)$ (*Generalized Petersen Graph* [13])

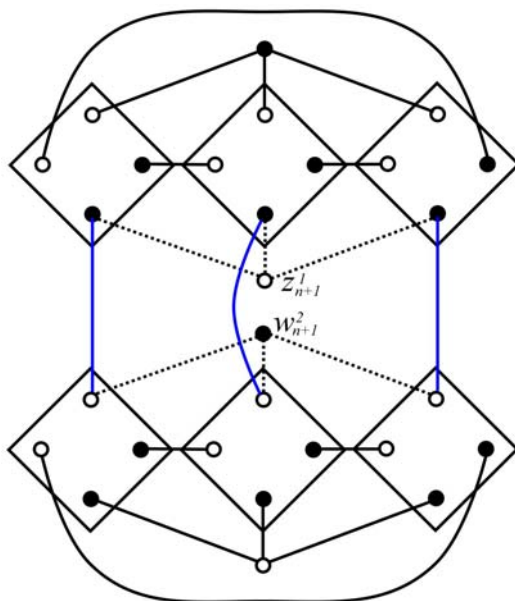
如圖所示：



圖三十三、(a) $BT(1)$ ；(b) $P(4,1)$

而對任意偶數 n ， $P(n,1)$ 皆已被證明為偶完全三連結、超偶完全三連結[9]、3 邊要求漢米頓圖，故 $BT(1)$ 不須暴力檢查，便可知它為偶完全三連結、超偶完全三連結、3 邊要求漢米頓圖。

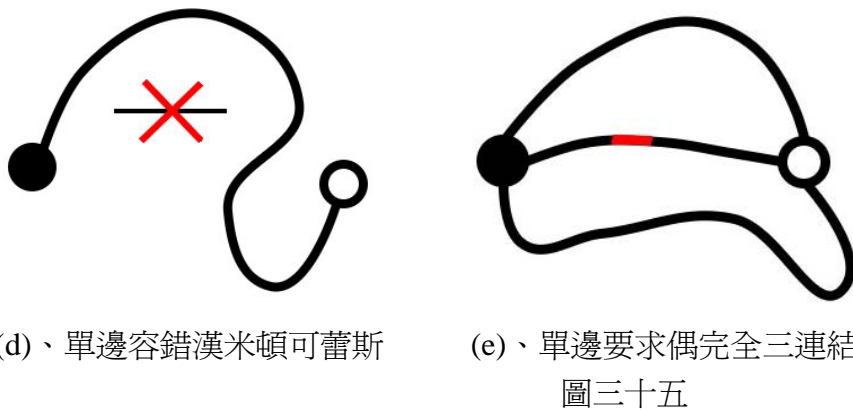
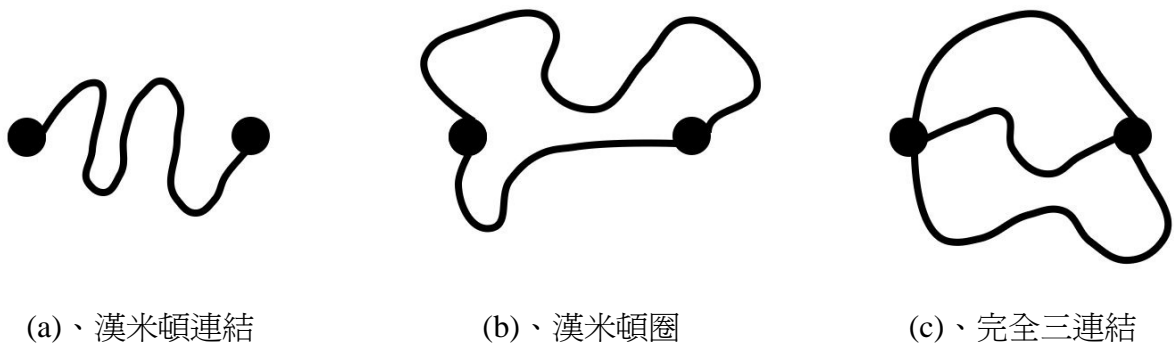
另外，由此可知， $BT(1)$ 有很好的對稱性，在內容(一)中，其實只須檢查 (z_2, w_2) 、 (z_2, x_2) 即可；也因此，可以很快得知 $BT(1)$ 的許多性質。



圖三十四、合成圖

(四)、圖形的合成：兄弟樹有如此好的性質，我們想到用已知性質的圖形，來拼成另一種圖形，如圖三十五，拿兩個 $BT(n)$ ，分別刪去 z_{n+1}^1 、 w_{n+1}^2 ，並將原連接 z_{n+1}^1 、 w_{n+1}^2 的點分別連接。 $BT(n)$ 皆為漢米頓圖，而合成後的圖也必為漢米頓圖，因為形成漢米頓圖必會經過 z_{n+1}^1 ，刪去 z_{n+1}^1 點後，便只連接到 u 、 v 、 w 中某二點(或國 $BT(n)$ 為 3 邊要求漢米頓圈，可接到 u 、 v 、 w 中任二點)；而另一個 $BT(n)$ 也有性質，便可相互連結形成漢米頓圈，同理可證得它為偶完全三連結等性質。之後發現在[6]中已有此做法及其相關性質，故我們便不再對這種連接方式做深入研究。

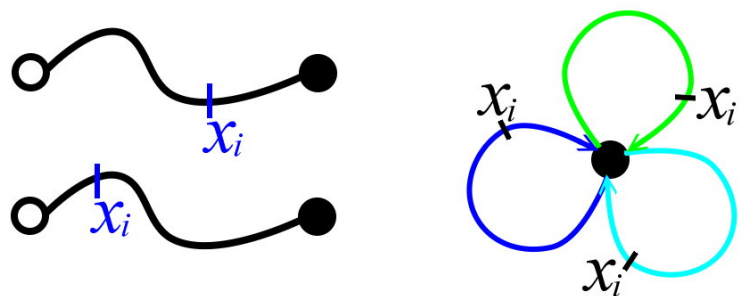
(五)、對於一個三正則圖，可能有完全三連結、漢米頓圈、漢米頓連結，而在[10]中，若三正則圖形同時有這三種性質時，則稱此圖為超級三連結(*Super 3*-Connected Graph*) (圖三十五(a),(b),(c))；而在三正則二分圖中，我們證明兄弟樹是偶完全三連結、漢米頓圈、漢米頓可蕾斯(圖三十六(a)、(b)、(c))，另外，兄弟樹還有非常完美的容錯性質(圖三十六(d)、(e)、(f))；不止如此，兄弟樹為三邊要求漢米頓圖(圖三十六(g))，單邊容錯漢米頓可蕾斯圖(圖三十五(d))，還有非常訝異的性質：在 $BT(n)$ 中，任一對異色點，任一邊，必有三條內部不相交路徑經過 $BT(n)$ 中所有點，並連接此對異色點，這個性質是尚未有人提出過的；我們已證出有單邊容錯漢米頓可蕾斯圖和「單邊要求偶完全三連結」(圖三十五(e))，但礙於時間和篇幅的限制，故不將此證明列於報告中。



圖三十五

(六)、展望

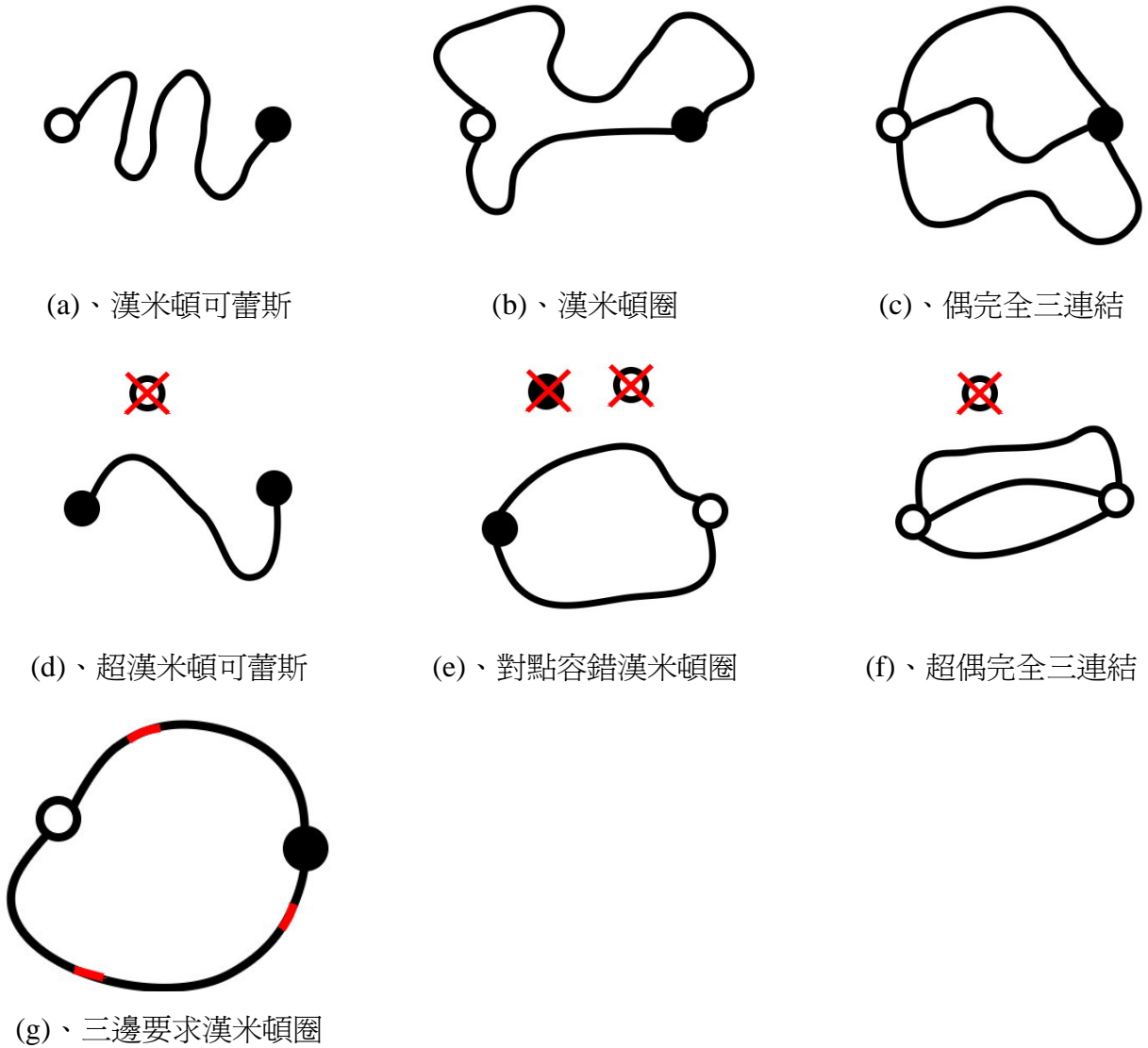
由本報告中，我們已對兄弟樹的性質有相當豐富的發現(圖三十五(d),(e)，圖三十七)與證明。但我們持續對此圖形進行探討，由討論(一)、(二)中，我們所注意到的兩種性質(圖三十六)，這兩種性質皆非常不易證出，但我們希望可以把這兩種有趣的性質證出。



圖三十六

二、研究結果：

- (一)兄弟樹為偶完全三連結
- (二)兄弟樹為超偶完全三連結
- (三)兄弟樹為漢米頓可蕾斯圖
- (四)兄弟樹為超漢米頓可蕾斯圖
- (五)兄弟樹為 3 邊要求漢米頓圖



圖三十七、我們已證明兄弟樹的性質

(六)三正則圖形中，若不考慮刪去任一點之兩邊，或指定任一點所連接的三邊或指定邊形成一非漢米頓圈之迴圈，則以下三點性質成立：

- 1.三正則圖形 G 為 n 誤容錯漢米頓圖，則 G 為 k 邊要求漢米頓圖，其中 $2n+1 \geq k \geq n$
- 2.三正則圖形 G 為 n 邊要求漢米頓圖，則 G 為 k 邊容錯漢米頓圖，其中 $n \geq k \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$
- 3.三正則圖 G 中，最小環狀構造上的點數為 n 時，頂多為 $\left\lceil \frac{n-1}{2} \right\rceil$ 邊容錯漢米頓圖、 $(n-1)$ 邊要求漢米頓圖。

陸、結論：

目前所有三正則二分圖中，兄弟樹是任兩點距離最小的圖，且具有如此多完美性質：偶完全三連結、超偶完全三連結、漢米頓可蕾斯圖、超漢米頓可蕾斯圖、單邊容錯漢米頓圖、3 邊要求漢米頓圖、對點容錯漢米頓圖。

相對於超級三連接圖，我們證明了兄弟樹也有類似它美妙的性質，我們也證明了它為頂多為單邊容錯漢米頓圖、三邊要求漢米頓圈；因此，除了最近才注意到兄弟樹可能具有的性質：雙(三)獨立漢米頓可蕾斯路徑、三獨立漢米頓圈兩種性質尚未完成證明外，我們已經證明兄弟樹目前已知的所有性質。

兩年前，還是個對圖論完全不懂的學生，從加入數學研習社後，開始學習這方面的知識，至今已有相當豐富的成果；在這過程中，不光只是學到圖論知識，還有做研究的方法、多元思考、解決問題的能力、查尋論文相關資料的技巧等等，也常與別人討論證明方法、性質，因此讓自己的表達能力提升不少，也對自己的能力更有信心。

柒、參考資料：

- [1] 郭博鈞、何東洋、徐力行 “兄弟樹之漢米頓可蕾斯圖” 投稿中
- [2] 徐力行 沒有數字的數學 天下文化 2003.9.15
- [3] C.K. Lin, H.M. Huang, L.H. Hsu, S. Bau, “Mutually Independent Hamiltonian Paths in Star Networks,” *Networks*, 2005, p.100-117.
- [4] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading MA 1994.
- [5] K. Menger, “Zur allgemeinen Kurventheorie,” *Fund. Math.*, 10(1927), pp. 95-115.
- [6] K.M. Hsu, S.S. Kao, L.H. Hsu, “Cubic planar hamiltonian graphs of various types,” submitted.
- [7] M. Albert, E.R.L. Aldred, D. Holton, and J. Sheehan, “On 3^* -connected graphs,” *Australasian Journal of Combinatorics*, 24(2001), pp. 193-207.
- [8] P.C. Kuo., T.Y. Ho and L.H. Hsu, “The Globally Bi- 3^* -Connected Property of the Brother Trees” submitted.
- [9] S.S. Kao, H.C. Hsu, and L.H. Hsu, “Globally bi- 3^* -connected graphs,” submitted.
- [10] S.S. Kao, H.M. Huang, K.M. Hsu, and L.H. Hsu, “Cubic 1-Hamiltonian Graphs, Globally 3^* -connected Graphs, and Super 3^* -Connected Graphs,” submitted.
- [11] S.S. Kao and L.H. Hsu, “Brother Trees: A Family of Optimal 1_p -Hamiltonian and 1-Edge Hamiltonian Graphs”, *Information Processing Letters*, Vol.86, 263-269, 2003.
- [12] T.Y. Ho, C.N. Hung, L.H. Hsu, “On Cubic 2-Independent Hamiltonian Connected Graphs” submitted.
- [13] Mathworld <http://mathworld.wolfram.com/GeneralizedPetersenGraph.html>

捌、附件：

- 一、P.C. Kuo, T.Y. Ho and L.H. Hsu, “The Globally Bi- 3^* -Connected Property of the Brother Trees”
- 二、郭博鈞、何東洋、徐力行 “兄弟樹之漢米頓可蕾斯圖”

Some Topological Properties of a Fault-tolerant Design

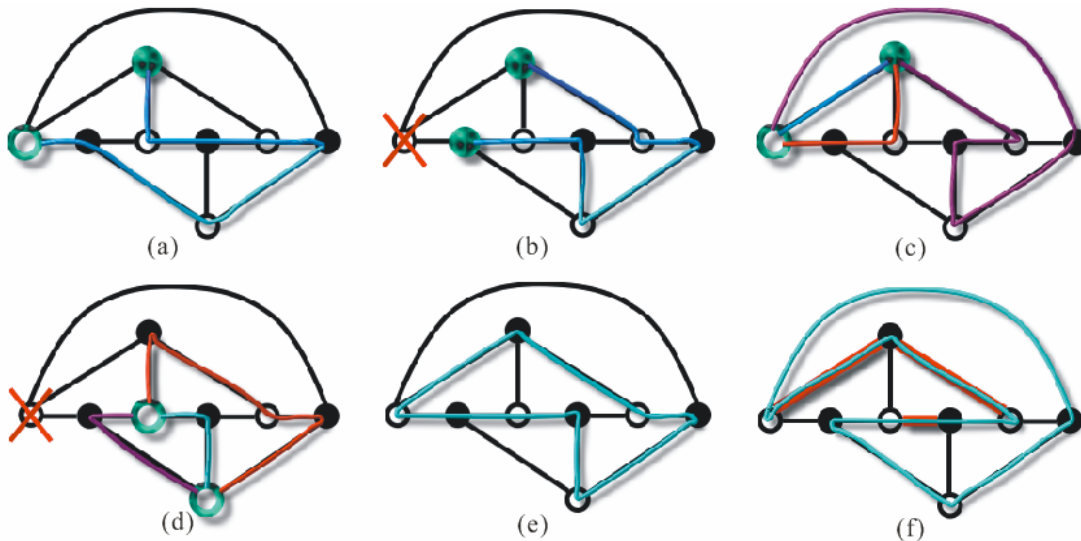
Po-Chun Kuo

Fair ID: 680101

Project ID: MA09

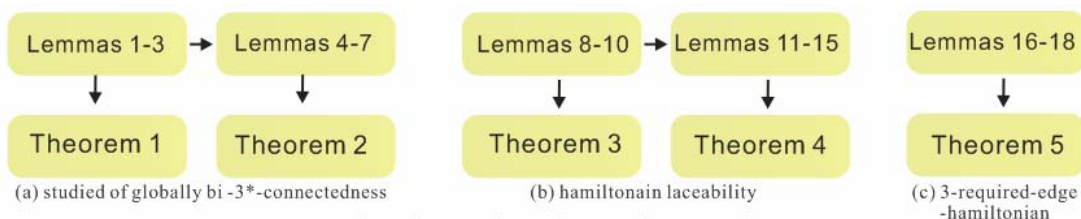
Introduction

In this work, we follow the definitions and notations of Harary[1] on the definition of each of the these terms: *graph*, *adjacent nodes*, *3-regular*, *bipartite*, *path*, *internally-disjoint spanning paths* and *cycle*. Recall that a path is called a *hamiltonian path* if its nodes are distinct and span V . A bipartite graph G is *hamiltonian laceable* if there exists a hamiltonian path between any two nodes from different partite sets, as shown in Fig. 1(a). A bipartite graph G is *hyper hamiltonian laceable* if for any two nodes x, y in the same partite set and z in the other partite set, there exists a hamiltonian path of $V \setminus \{z\}$ joining x and y , as shown in Fig. 1(b). Moreover, if there exist three internally-disjoint spanning paths joining any two nodes belonging to different partite sets, the bipartite graph is called *globally bi-3*-connected* [2, 3], as shown in Fig. 1(c). A graph is called *hyper globally bi-3*-connected*, if for any three nodes x, y and z of the same partite set, there exist three internally-disjoint spanning paths of $V \setminus \{z\}$ joining x and y , as shown in Fig. 1(d). A cycle is called a *hamiltonian cycle* if its nodes are distinct except for the first node and the last node and if they span V . A graph is *hamiltonian* if it contains a hamiltonian cycle, as in Fig.1 (e). A graph is called *3-required-edge-hamiltonian* if there exists a hamiltonian cycle passing through any three given edges, as shown in Fig.1 (f).



▲ Fig.1

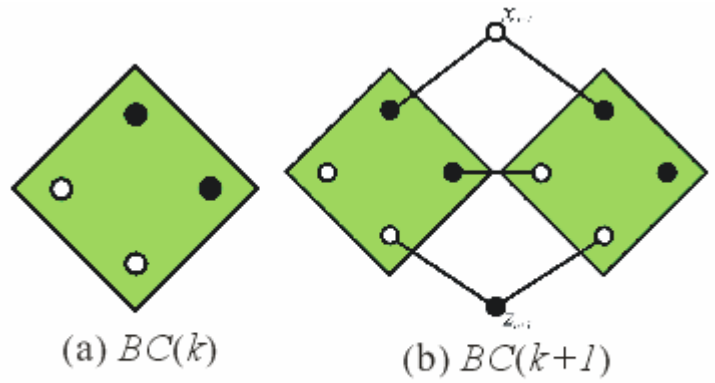
Our project studies an interesting family of 3-regular planar bipartite graph $\{BT(n)\}$, to be defined below. Each $BT(n)$ possesses the optimal property of attaining the smallest diameter among all 3-regular planar bipartite graphs of $6 \times 2^n - 4$ nodes. These graphs therefore have an important application in fault-tolerant design for token ring.



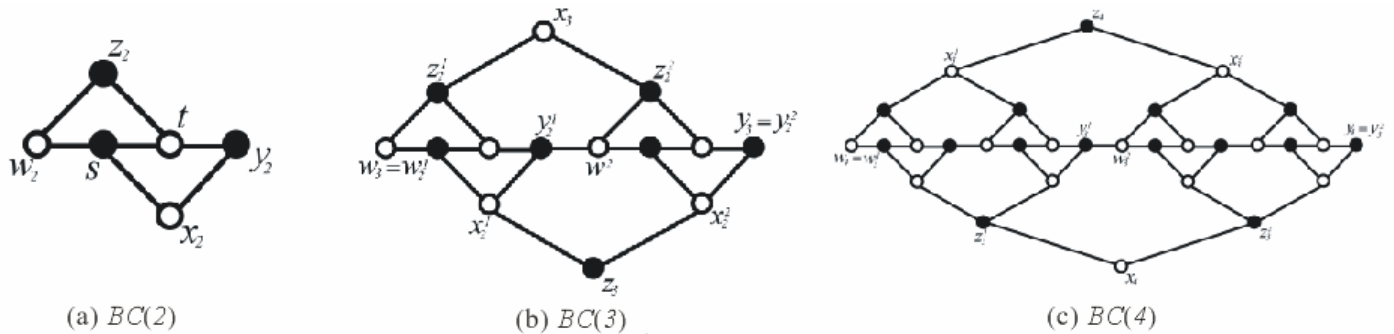
▲ Fig.2. Flowchart of our study

Definition of $BC(n)$

Let $BC(2)$ be given by Fig. 4(a). Assume that $BC(k)$ has been defined for some $k \geq 2$. Then $BC(k+1)$ is composed of two disjoint copies of $BC(k)$, a white node x_{k+1} and a black node z_{k+1} linked by five additional edges as indicated in Fig. 3(b).



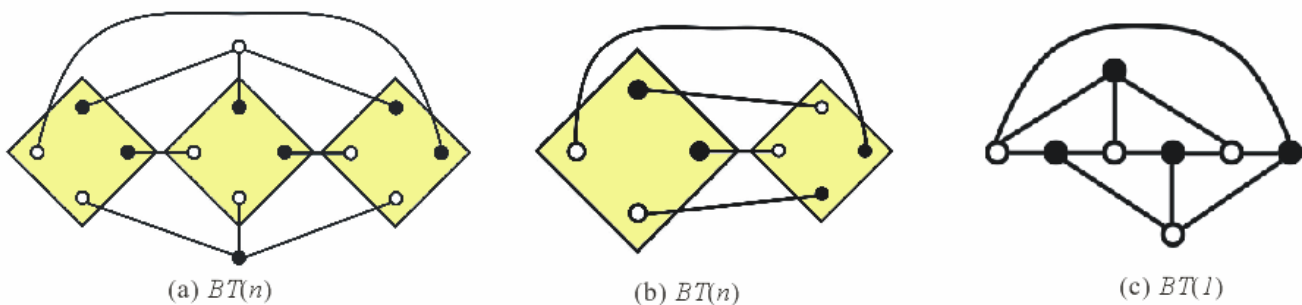
▲ Fig.3



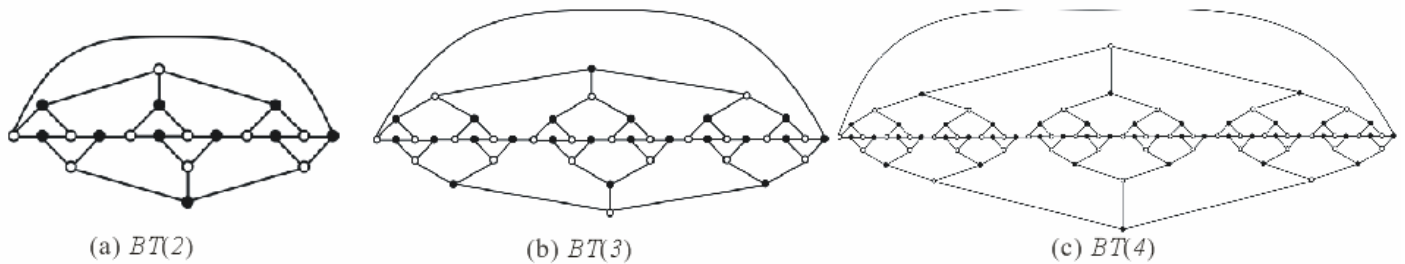
▲ Fig.4

Definition of $BT(n)$

Let n be a positive integer ≥ 2 . Then, $BT(n)$ is composed of three disjoint copies of $BC(n)$ and a pair of nodes x_{n+1} and z_{n+1} linked by nine additional edges as shown in Fig. 5(a). $BT(2)$, $BT(3)$ and $BT(4)$ are shown in Fig. 6(a)-(c).



▲ Fig.5

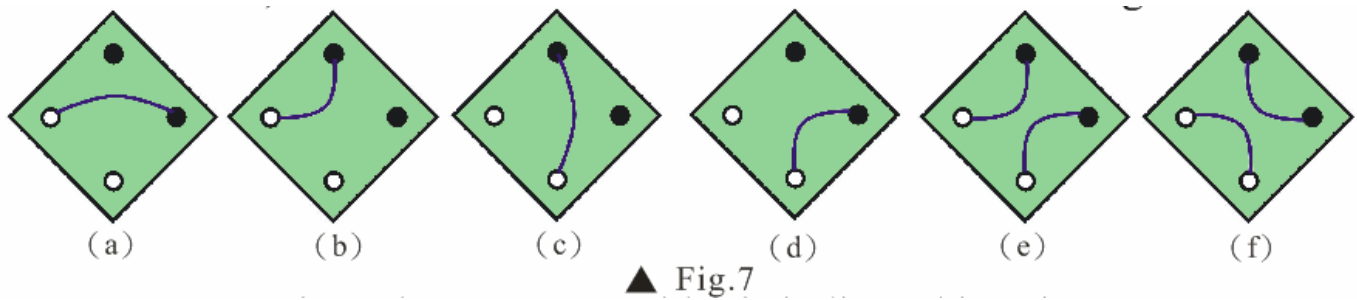


▲ Fig.6

Method

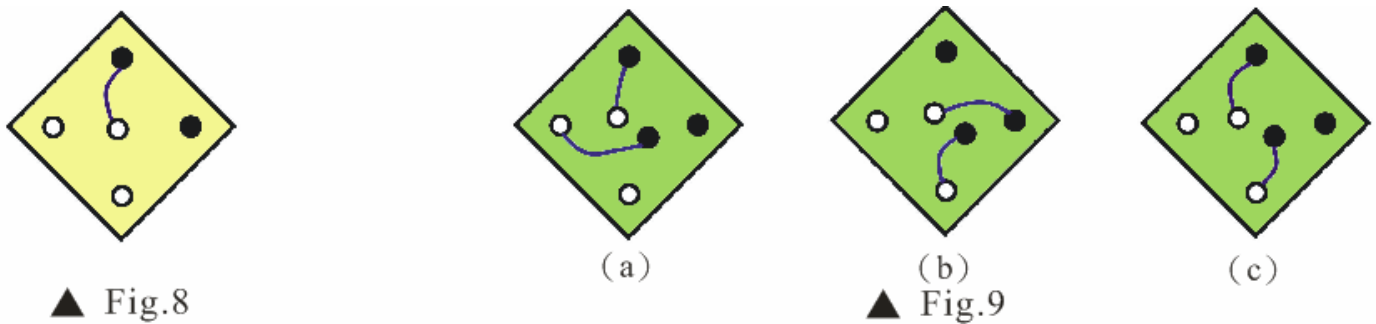
All proofs are given by induction.

For Lemma 1, there are six cases to consider as outlined in Fig.7.

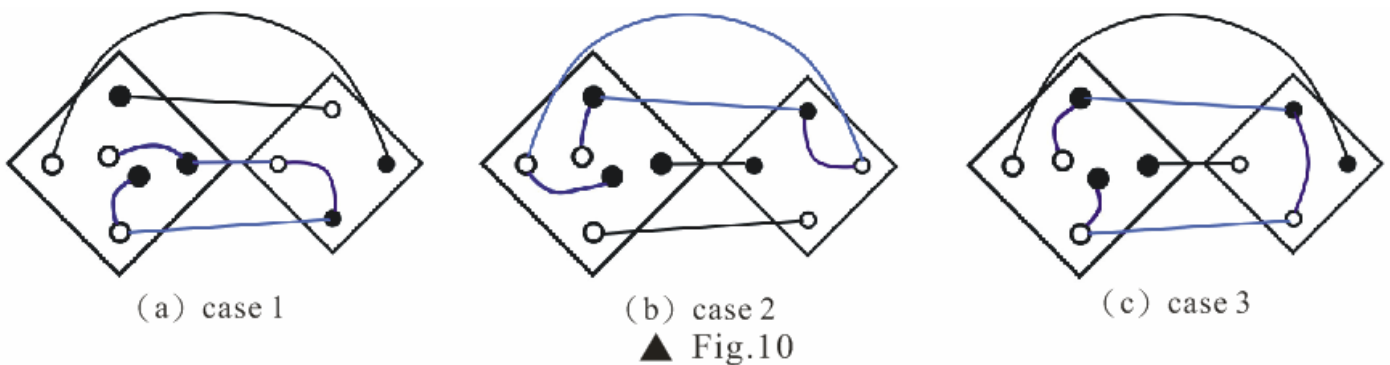


For Lemma 2, the only case to consider is indicated in Fig.8.

For Lemma 3, there are three cases to consider as outlined in Fig.9.



After proving the three lemmas, we then go on to prove the hamiltonian laceability of $BT(n)$. Without loss of generality, we may consider only the case when two nodes belonging to the same cell $BC(n+1)$ in view of the symmetric property of $BT(n)$. Lemma 3 reduces the problem to the follow three cases:



Results

Qualitative Studies – Connectedness

For any positive number n , we discovered the following interesting connectedness properties: $BT(n)$ is globally bi-3*-connected, hyper globally bi-3*-connected, hamiltonian laceable, hyper hamiltonian laceable and 3-required-edge-hamiltonian.

Quantitative Studies - Comparison of Parameters

	Diameter	Fault Diameter		Wide Diameter		Wide Spanning Diameter	
		one fault	two faults	two paths	three paths	two paths	three paths
BT(n)	$2\log_2 \frac{N+4}{6} + 1$	$3\log_2 \frac{N+4}{6}$	$4\log_2 \frac{N+4}{6}$	$4\log_2 \frac{N+4}{6} - 1$	$6\log_2 \frac{N+4}{6} - 4$	$\frac{N+4}{2}$	$\frac{N+8}{2}$
Christmas Tree	$2\log_2 \frac{N+2}{3}$	$3\log_2 \frac{N+2}{3} + 3$	$6\log_2 \frac{N+2}{3} - 4$	$4\log_2 \frac{N+2}{3} - 4$	$(\log_2 \frac{N+2}{3})^2 - \log_2 \frac{N+2}{3}$	N-1	N-1
Eye Graph	$4\log_2 \frac{N+4}{6} + 1$	unknown	unknown	unknown	unknown	N-1	N-1

Recall that the diameter is the maximum distance between pairs of nodes of G . For any node f of G , the one fault diameter is the diameter of $G \setminus \{f\}$. For any two nodes f_1 and f_2 of G , the two fault diameter is the diameter of $G \setminus \{f_1, f_2\}$.

A k -container $C(x, y) = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ in a graph G is a set of k internal node-disjoint paths between x and y . The length of the container $l(k\text{-container } C(x, y))$ is $\max\{|P_i| \mid 1 \leq i \leq k\}$. The **wide diameter** is $\max\{\min l(k\text{-container } C(x, y)) \mid x, y \in G\}$. A k^* -container $C(x, y) = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ in a graph G is a set of k internal node-disjoint paths spanning all the nodes of G between x and y . The **wide spanning diameter** is $\max\{\min l(k^*\text{-container } C(x, y)) \mid x, y \in G\}$.

Conclusion

Mathematically, we have established the following properties related to connectedness: globally bi-3*-connectedness, hyper globally bi-3*-connectedness, hamiltonian laceability, hyper hamiltonian laceability and 3-required-edge-hamiltonian. We have made quantitative studies on the following parameters: fault diameter, wide diameter and wide spanning diameter.

A computer network can be considered as a graph: the nodes are the computers and the edges are the wiring cables. Every computer operates independently. If there are more than two simultaneous commands issued by a single computer, it will violate the protocol. Therefore, network engineer's task is to make sure the computer system forms a hamiltonian cycle or path. Thus, a token will be conveyed along the hamiltonian cycle or path. The computer is allowed to issue orders to the system upon receiving the token. Engineers call such mechanism token ring or bus on network. Under this situation, the globally bi-3*-connected properties are applicable to data transportation and to program running.

References

- [1] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley, Reading MA 1994.
- [2] M. Albert, E.R.L. Aldred, D. Holton, and J. Sheehan, "On 3*-connected graphs," *Australasian Journal of Combinatorics*, 24, 2001, pp. 193-207.
- [3] S.S. Kao, H.C. Hsu, and L.H. Hsu, "The Globally Bi-3* and Hyper Bi-3* Connectedness of the Spider Web Networks," *Applied Mathematics and Computation*," Vol. 170, pp. 597-610.
- [4] S.S. Kao and L.H. Hsu, "Brother Trees: A Family of Optimal $1p$ -Hamiltonian and 1-Edge Hamiltonian Graphs," *Information Processing Letters*, Vol.86, 2003, 263-269.
- [5] C.N. Hung, L.H. Hsu, and T.Y. Sung, "Christmas Tree: A Versatile 1-Fault-Tolerant Design for Token Rings," *Information Processing Letters*, Vol. 72,1999, pp. 55-63.
- [6] **P.C. Kuo**, T.Y. Ho and L.H. Hsu, "The Globally Bi-3*-Connected Property of the Brother Trees" submitted.
- [7] **P.C. Kuo**, T.Y. Ho and L.H. Hsu, "Mutually Independent Hamiltonian Cycles and Paths of Folded Hypercube," submitted.
- [8] D. Frank Hsu, "On Container Width and Length in Graphs, Groups, and Networks," *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, Vol. E77-A No.4, 1994, pp. 595-600.

評語

數學問題非常新鮮，解決過程及作品製作十分用心，口頭報告及海報都表現得清楚簡潔。