

臺灣二〇〇六年國際科學展覽會

科 別：數學科

作品名稱：外觀數列

得獎獎項：第一名
加拿大正選代表:加拿大 2006 年科學展覽會

學校 / 作者：臺北市立第一女子高級中學 陳怡安
臺北市立第一女子高級中學 李 安

作者簡介



陳怡安與李安，北一女中三年級學生。參加校內數學專研，在許秀聰老師的帶領下，對廣大數學領域展開探索，學到不少課本無法詳提的有趣知識。以「外觀數列」為主題進行專題研究，獲益匪淺，更得到許多樂趣。我們還有另外一位研究夥伴——許澣文，從找題目到做研究，從校內初審到全國科展，我們三個人一路共同參加；由於國際科展有人數的限制，決議由我們兩人報名。

目錄

摘要	1
一、前言	1
二、研究過程	2
(一)、基本性質與組成	2
(二)、分析數列	3
(三)、一般性	9
(四)、非 1 始之外觀數列	12
(五)、基本性質的探討	17
三、研究結果	18
四、討論	20
五、結論與應用	21
六、參考文獻	21
附件	23

摘要

Abstract

The Look and Say sequence is produced by describing the appearance of the previous row. For example, start with "1," which can be described as "one 1," and therefore the second row is "11," which is "two 1s," making the third row "21," the fourth row "1211," and so on. The main goal of this study is to work out the exact formula for this sequence, which means given the row number n , we can know at once what the n -th row is without having to start from the first row and doing the look-and-say iteration for $n-1$ times. Some of the methods used include dividing groups, repetition and cracks. The formula we derived speeds up the calculation and gives us a better understanding of the look and say sequence.

中文摘要

「外觀數列」為依照外觀產生下一列的數列，第一列為「1」，第二列描述第一列「1 個 1」而為「11」，第三列則描述第二列「2 個 1」而為「21」，第四列「1211」，依此類推。本研究針對外觀數列的各項數學性質作研究探討，並由此推導出外觀數列的一般式，即給定第 n 列就可知道該列的內容。我們運用了分組、重複性以及裂縫的方法分析數列，最後得到了其一般式，此一般式有助於運算速度的加快以及我們對數列性質的了解。

一、前言

閒暇時翻閱《數字的異想世界》(Pickover 著，【參考資料一】)一書，其中一個作者稱為「怪獸數列」的主題吸引了我們的注意力。「怪獸數列」的標準名稱是「外觀數列」(Look and say sequence)，它是因根據外觀產生下一列而得名。舉例來說，此數列的首項為 1，唸做「1 個 1」，因此第二項便為「11」，唸做「2 個 1」，故第三項是「21」，接下來是「1211」、「111221」……依此類推。以下是這個數列的前幾項：

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
...

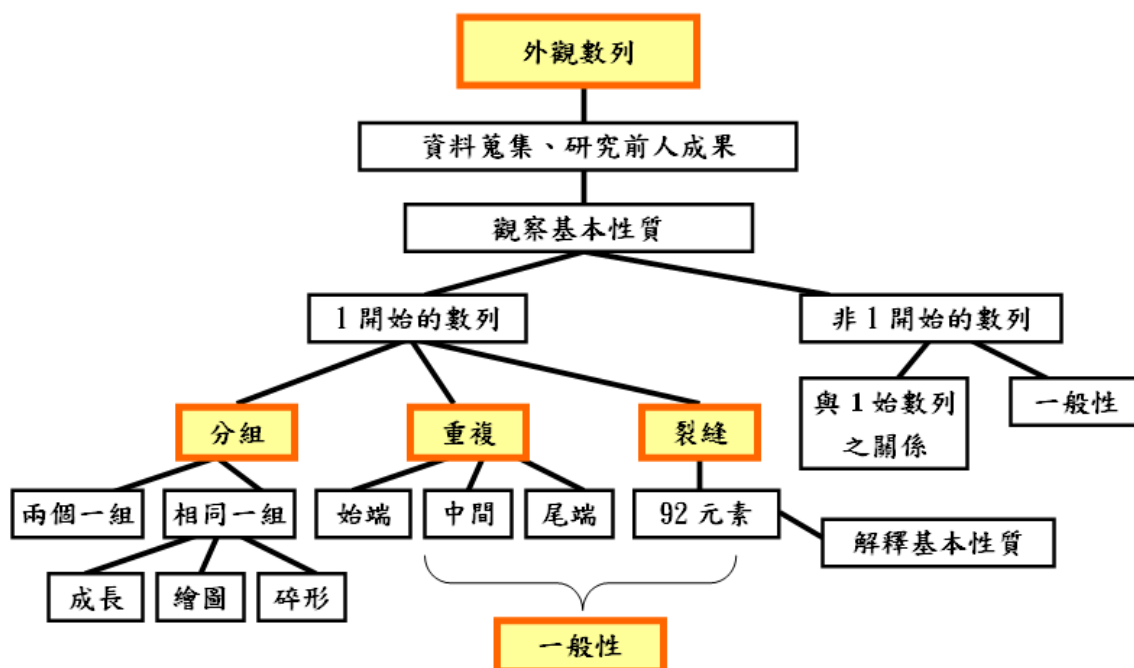
雖然乍看之下這個數列不像會具有什麼數學特性，我們還是認為如此將語言和數字作結合，是相當有趣的想法。而當我們仔細閱讀書本內容，更發現外觀數列其實有許多驚人的數學性質，比如每一列的數字位數呈指數成長、數列中絕對不會出現 4 或是 333、1,2,3 的個數會趨近固定比例等等。

這個數列最早由美國普林斯頓大學的康威教授 (Professor John H. Conway) 於 1986 年在 "The Weird and Wonderful Chemistry of Audioactive Decay" 這篇文章中發表，此文刊於第 46 期的普林斯頓數學系刊 Eureka。康威針對此數列作了一番研究，其結果主要在「康威常數 $\lambda = 1.3\cdots$ 」以及「92 元素 (elements)」等方面。在接下來的報告中，我們也會提到一些他的研究。不過我們的研究主題與目的和康威不同，我們的主題為外觀數列的一般項，即找尋給定第 n 列就可知道該列的內容的公式。

我們的主要研究目的有三：

- (一) 觀察外觀數列的各種數學性質
- (二) 用各種方式分析並解釋所觀察到的數學性質
- (三) 藉由所觀察到的性質，進而推導出外觀數列之一般項

二、研究過程



(一)、基本性質與組成

1、回答書中問題

首先，我們要針對作者書中提到但沒有說明的問題做解釋。

「數列裡的最大數是 3（即不會有 4 以上的數字），是否可能證明 3-3-3 絕對不會出現？」

這可以藉由「上推」的方法解釋。若有出現 4，則表示上一列的數列中有出現 4 個一樣的數字，以 41 為例，上一列應是 1111，再上一列應該為 11，但依照外觀數列的規則，11 應該被形容為「21」，而不是「1111」，也就是說不會有 1111 的出現，當然也不會有 4 的出現。4 以上的數字也可用一樣的方法上推來證明。

至於為何不會出現 333，以 3331 為例，代表上一列為「333111」，注意其中又出現了 333，再上推一次，依然會產生 333，也就是說，要產生 333，必須數列的開頭即有 333，但這跟實際不符合，因此是不會出現的。

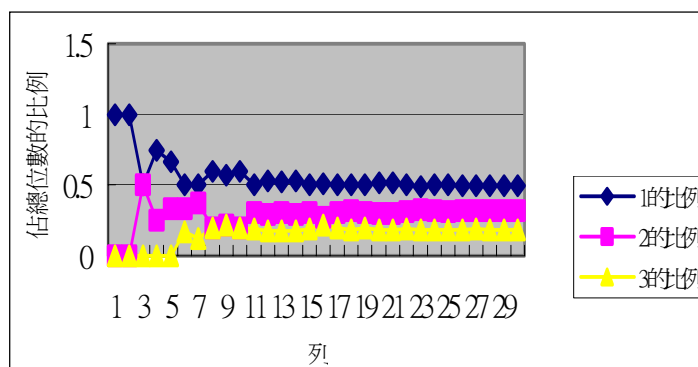
2、1,2,3 分別個數

書中寫道：「如果你仔細研究這個數列，就會發現裡面絕大多數都是 1，至於 2 和 3 則較少見。從第六列到第二十七列，約有百分之五十的數項為 1，百分之三十為 2，百分之二十為 3。」

我們利用 Excel 實際計算 1,2,3 分別個數、佔整列總位數的百分比，如【附件二】。

將這些資料繪成統計圖，如右【表一】，發現大約從第十二列開始，1,2,3 分別佔總位數的百分比逐漸趨於固定，1 約佔 50%，2 約佔 31%，3 約佔 19%。

【表一】1,2,3 分別佔總位數的百分比



3、總位數

由外觀上觀察，會發現外觀數列的成長非常快速，並近似一個指數函數。

Pickover 在《數字的異想世界》中指出：「根據康威和蓋伊合著的《數字書》(The Book of Numbers) 所述，這個數列的第 n 項之位數與下面數字約成正比：

$$(1.3035772690342693912570991121525518907307025046594)^n$$

在數學網站 Mathworld 中找到的【參考資料二】寫道，此指數函數為

$$\text{第 } n \text{ 列總位數} = C\lambda^n$$

其中 $C=1.567\dots$ ， $\lambda=1.30357726\dots$ ， λ 稱為康威常數(Conway's Constant)。關於康威常數，詳見【參考資料三】。

(二)、分析數列

為了找到一般項，我們希望縮小研究單位，把數列分割成可以獨立研究的單位，由這些小單位產生一般項。分析數列的方法有三種：分組，重複性及裂縫。

1、分組

(1) 兩個一組

以第七列「13112221」為例，將其分成 13 11 22 21 等組。

這種分組方式的意義在於，外觀數列是種描述上一行的數列，13 11 22 21 這四組可視為在描述上一列有「1 個 3」、「1 個 1」、「2 個 2」、「2 個 1」，也就是「量詞」和「名詞」的不同，且二個一組，並不會影響數列呈指數成長的性質（∵組數=個數÷2）。由於已經證明書中所提到的：「不會出現 333」，因此實際上在二個一數的分類中，不會有 33（描述上一行有 3 個 3），總共只有 8 組：11、12、13、21、22、23、31、32。

不過，採取這種分組方式有個很大的缺點，那就是電腦沒有辦法幫我們分好，因此必須採取紙上作業。在這種分組方法中我們確實有發現一些規律，然而礙於大量處理的困難，我們尚無法把它實際運用到外觀數列中。

我們之後也會討論「兩個一組」始的外觀數列，詳見「非 1 始之外觀數列」。

(2) 相同一組

另一種分組方式，則是「相鄰的相同數字一組」。以第七列「13112221」為例，可將其分成 1 3 11 222 等組。

這種分組方式可分出 1、11、111、2、22、222、3、33 共八組。注意兩個一組時並無「33」這組，相同一組時卻有，這是由於兩個一組是從頭開始兩位一數分出來的。舉例來說，1331 這個數串依兩個一組會分成 13 31，依相同一組則分成 1 33 1。

此分組方式的優點在於，當數列要產生下一列時，不同組之間是不會互相影響的，可降低研究上的複雜性，但是所產生的下一列並無法維持「相同一組」的分組方式，反而變為「二個一組」，例：11 2 3 的下一列會產生 21 12 13，因此無法直接採用這種分組方式來研究產生規律。「兩個一組」和「相同一組」之對應關係如下：

1 → 11	111 → 31	22 → 22	3 → 13
11 → 21	2 → 12	222 → 32	33 → 23

以「相同一組」方式分組之後，我們想知道各組之間的關係，及分組前後數列有什麼不

同，因此作了統計，分成「各組」和「相同數字一起（1,11,111 加在一起）」兩部分。我們驚訝的發現，分組之後各組的成長率仍維持在 1.3... 左右，而各組數佔總組數的比例也漸漸趨向固定，詳細數據請見【附件三】及【附件四】。

由於開始的幾列成長並不穩定，因此「各組成長率」是由第十九列開始統計，「佔總組百分比」由第十二列開始統計，「同數字成長率」和「同數佔總組百分比」由第十列開始統計。統計結果如下【表二】：

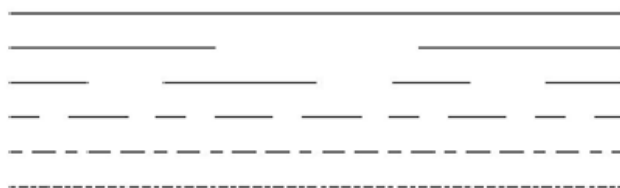
【表二】相同一組統計數據

組別	1	11	111	2	22	222	3	33	全部
各組成長率	1.3075	1.3090	1.3249	1.3229	1.3579	1.3036	1.3115	1.4061	1.3108
佔總組百分比	14.10%	20.76%	7.16%	20.86%	6.92%	4.13%	23.71%	2.36%	100%
同數成長率	1.2991			1.3453			1.3034		1.3108
佔同組百分比	42.46%			31.37%			26.17%		100%

(3) 碎形

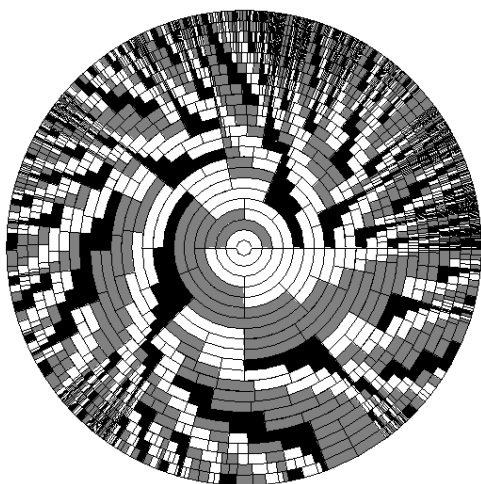
如果能把數列圖像化，從另一個角度研究它，往往能對其有不一樣的認識。除了我們研究的外觀數列之外，還有另外一個稱為「Ana」的數列，其產生和外觀數列有異曲同工之妙，而曾有人將它成功地以碎形的圖像表現。

這個數列由「a」起始，第二列用英文描述第一列：an a（一個 a），因此是「ana」；第三列再描述第二列：an a, an n, an a，因此是「anaannana」，依此類推。（相關研究請見【參考資料八】。）用黑色表示 a、白色表示 n，即得到如下【圖一】的碎形：



【圖一】Ana 數列的碎型圖

能把數字轉化為碎形，實在是相當有趣的連結！研究碎形的結構，可以更了解數列的組成，進而達到找出一般項的終極目標。例如著名的 Koch Curve【參考資料七】即可用 L-system【參考資料四】來表示，研究它的 L-system 演化規則就相當於研究碎形的圖形本身。因此我們也想試試外觀數列是否能構成碎形——如果能將外觀數列以類似的方式表示，那麼就可以研究它的產生規律，加以推展。



【圖二】外觀數列碎形圖

然而碎形最強調的是「自身相似性」，我們的外觀數列的自身相似性卻過於複雜，而難以直接構成規則簡單的碎形，也無法直接以 L-system 或類似的系統加以表示。因此我們必須改良 L-system 等表示法，或將數列加以變化，找出可能的模式。

我們在 Mario Hilgemeier 於 1997 年發表有關外觀數列的一篇文章【參考資料六】中看到如左【圖二】的外觀數列環狀碎型圖。

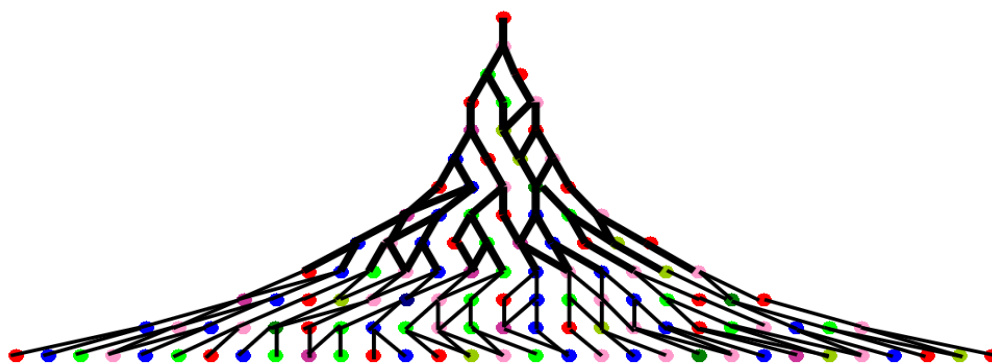
這張圖是依照數列本身畫成的，白色代表 1、灰色代表 2、黑色代表 3。最內圈的是第一列，往外則是它

所產生的數字。每串數字產生的另一串數字就直接等分它所佔的比例——舉例來說，222→32，此時 32 就直接由 222 所在的圓周向外畫。

這個看起來像太陽的圖騰雖然仍有些複雜，但頗有「不斷細分」和「自身相似」的感覺，可算是一種製造碎形的方式。

後來我們有幸能和 Hilgemeier 先生連絡上，他是一位德國的電機工程師，對我們的來信相當熱心地回覆，給了我們很大的幫助。一次在我們詢問他有關碎形畫法時，他的回覆是：第一種就是如【圖二】的畫法；第二種是利用 Conway 的 92 元素畫樹狀圖(後面會再提到 Conway 及他的研究)；第三種則要靠我們自己想了！

晝夜苦思的結果，我們想到了另一種畫法，這必須借助「相同數字一組」的分組方式。把每一列的分組依序排出，為方便繪圖將其置中，再將一組產生下一列哪組連起來。舉例來說，第四列 1 2 11 → 111 22 1，其中第四列的 1 產生第五列 111 中的前 2 個 1，便將其連到 111 這組；而 2 產生的 12，分別是第五列 111 中最後一個 1 和後面 22 的第一個 2，便將 2 連到 111 和 22 兩組。依此類推，便得到如【圖三】的樹狀圖：(圖中●表 1，●表 11，●表 111，●表 2，●表 22，●表 222，●表 3，●表 33。)



【圖三】相同一組樹狀圖

其中每個點代表一個「相同數字」的組。

這些點可能有四種情況，分別以 A,B,C,D 名之：



例如 1 前面只可能有一根樹枝，而產生 11 也只有一個樹枝向外連出，因此屬於 A；而 33 則可能由 3 YYY → 1 33 Y 產生，此情況屬於 D。下表是分析各組分別屬於何者的結果：

【表三】樹狀圖的各種情況

1	A	2	B	3	B
11	B 或 D	22	A 或 C	33	D
111	D	222	D		

其中 B,D 兩種都會連出去 2 根樹枝，而 A,C 則只會連出 1 根。由此可以推算出第 n 列和第 n+1 列之間的樹枝數=(An+Cn)×1+(Bn+Dn)×2=總 nx2-(An+Cn)×1，其中 An 表第 n 列中屬 A 的組之個數。這個情況下(An+Cn)就是這一系列中 1 和 22 的組數。

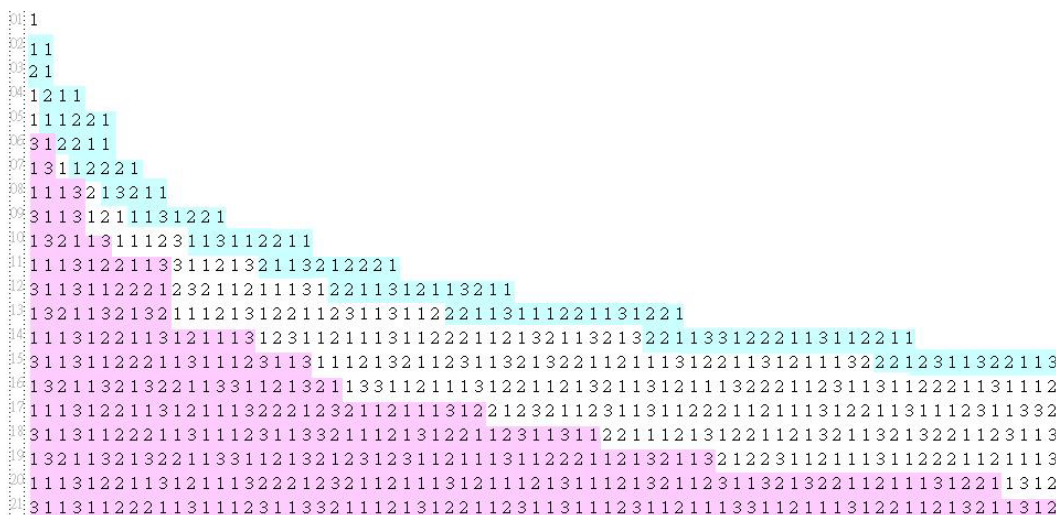
又因為 A,B 前面都是 1 根樹枝，而 C,D 前面是兩根數枝，故也可以由第 n+1 列推算出第 n 列和第 n+1 列之間的樹枝數=(An+Bn)×1+(Cn+Dn)×2。不過這種分法比較複雜，因為有些組可能是 B 或 D，不容易區分開來，因此由第 n 列推應該比較容易的。

將數列由尾端對齊時，也有類似的重複現象；跟首端不同的是，尾端為四個一循環。

以第一行為例，全部的數字皆為 1；再以第 4 行為例，第五列的「1」、第六列的「2」、第七列的「2」及第八列的「3」，在之後的第九~十二列、十三~十六列……，不斷的重複出現，有每四個一循環的重複性。【圖五】列出了由尾端對齊的數列有重複性的部份。

將數列由尾端對齊時，「重複現象」的增長也非常快速，推測也為指數成長，同樣經由【附件六】的統計數據發現，尾端重複位數的成長比例約由第九列開始趨於固定，同樣為 1.3……。

(3) 中間無重複性部分



【圖六】外觀數列的重複性

首端重複部分和尾端重複部分之間還存在一塊無重複性的區域，如【圖六】白色部分。

3、裂縫

(1) 裂縫理論

起初看到成長如此迅速的外觀數列，我們就想把它拆成幾個互不影響的區塊，以便分開研究再加以組合，於是提出了「裂縫」的想法：如果兩個數字串合併在一起演化成的下一列，和各自演化成下一列再組合在一起的結果相同，我們便稱這兩個數串中間有「裂縫」，意即被裂縫所分開的兩個數字串可以視為兩大個在演化上互相不影響的數列，可以分開討論。

於是我們著手想在外觀數列中找出裂縫。可是裂縫究竟會出現在哪些數字之間呢？已知外觀數列只由 1,2,3 組成，因此我們只需討論在 11,12,13,21,22,23,31,32,33 等九組數字之間出現裂縫的可能性。

1. 11、22、33：演化成下一列時皆會合併。
2. 12、13、31、32：

<p style="text-align: center;">1 2 11 2 3112</p> <p>證明了 12 不可能為裂縫，13 同理。</p>	<p>接著製造 2 後面接 2，使之後演化的數列第一位有 2，嘗試製造裂縫：</p> <p style="text-align: center;">1 221 11 2211 21 2221 1211 3211 111221131221</p> <p>依然非為一裂縫</p>
--	---

1 2213	3 1
11 221113	13 11
21 223113	1113 21
1211 22132113	3113 1211
111221 221113122113	132113 111221
312211 22311311222113	1113122113 312211
13112221 2213211321322113	311311222123 112221
非一裂縫。	證明了 31、32 不可能是裂縫。

3.23 :

```

      2 3
      12 13
      1112 1113
      3112 3113
      132112 132113
      1113122112 1113122113

```

可以看出，由 2 繼續演化的數列繼續演化下去最後一位數字都是 2，由 3 繼續演化的數列繼續演化下去，第一位數字呈現「3 1 1 3 1 1 ……」三位一循環，和 2 之間不會互相影響，此即為一裂縫。

要讓 3 繼續演化下去第一位產生 2 的方式只有 33 一種組合。以兩個一組分組方式來看，第一種情形為 12 33，已經證明過用兩個一組的分組方式不會有 33 這種組合，因此不會發生；第二種情形為 23 31，其實也不可能發生，這可使用上推法來解釋：2331 的上一列應為 33111，同樣以兩個一組的分組方式來看，不可能發生 33 11 1，若是 3 31 11 的情形，則 31 11 的部分上一列應為 1111，這也是不會出現的。

特例：有一種方式可以製造出破壞三循環的組合。

舉例：

```

      2 3111
      12 1331
      1112 112311
      3112 21121321
      132122211211131211

```

同理可證 23222。

4.21 :

由 2 繼續演化的外觀數列最後一位一定都是 2，在演化過程中可以看出，23 間必為一裂縫，21 中間也可能有裂縫，以下列出 21 之間為裂縫的所有情形：

2	1	B	C
---	---	---	---

 (這裡只取 2 後面接 3 位數字來討論，是因外觀數列不會出現 4，因此不用考慮後 4 位以上的數字所影響的情形)

因第一位 2 之後不能再出現 2，因此可分為兩種情形：

a. $1 \neq B, B \neq C$ ，有 2123、2132、2131

$B \neq C$ 的原因為， $2\ 1BB \rightarrow 12\ 112B \rightarrow 1112\ 21121B$ ，彼此之間會互相影響，因此不是一裂

縫。此外不會有 2121 的組合，由兩個一組的方式來看，21 21 的上一列為 1111，不可能出現；而 X2 12 1 的上一列為「X 個 2、1 個 2……」，在產生下一列時應該會合併敘述，因此不會發生。

b. 1=B=C，有 2111

至於 2123、2132、2131、2111 這四種裂縫的來源和 23 有沒有關係？我們回到外觀數列的本身去尋找，發現數列中第一個出現的裂縫為 2132，接著為 2111，然後產生 23，這三組間不斷的循環。而 2131，在數列中是由第 18 列出現，由兩個一組的方式分組為 2 13 1，其上一列一定有 23，因此其來源為 23；2123 則在第 12 列第一次出現，其後產生 2111→23→……，不斷循環。

因此得出一個結論：當 23 後方不為 3 個一樣的數字時，即可視為一裂縫；此外還有 2123、2132、2131、2111 四種裂縫，彼此間存在著演化關係。

(2) 康威的 92 元素

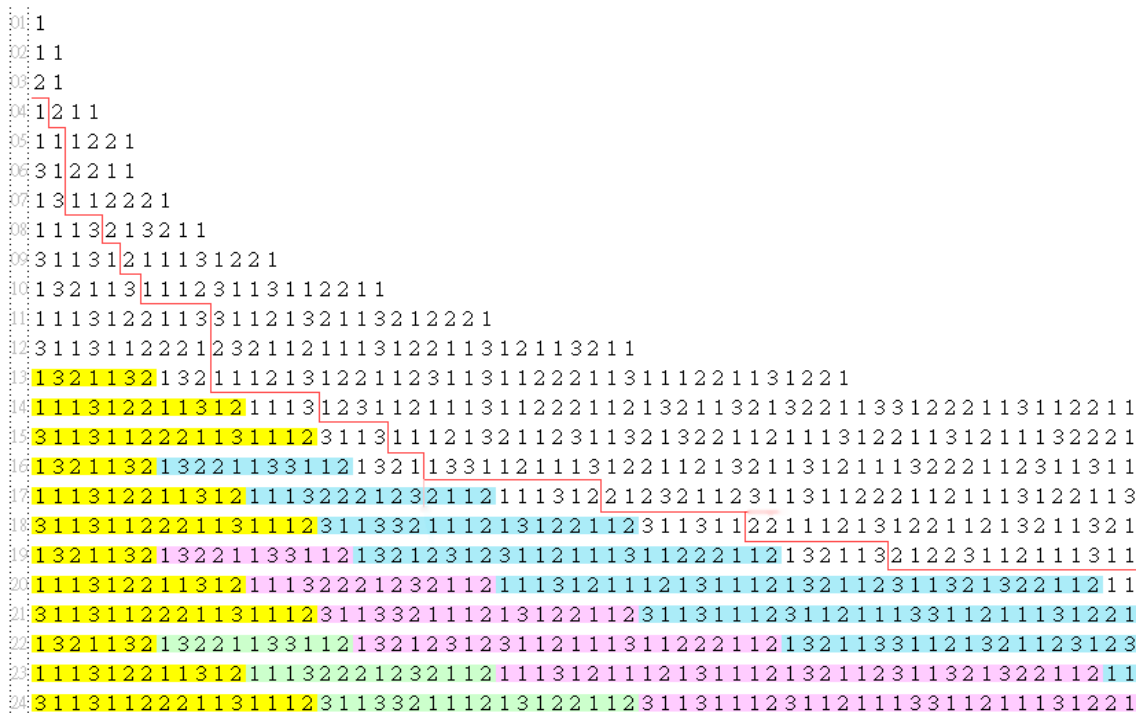
當我們證明完所有裂縫可能出現的情形之後，在網路上查到了一份資料，其中提到現普林斯頓大學的康威 (Conway) 教授也曾提出裂縫 (splits) 的概念。他將數列分成了 92 個長短不一的單位，稱之為元素 (elements)，並以化學週期表之 92 個元素來命名。他認為整個外觀數列都可由這 92 個元素組成。此外，康威所定的 92 個元素，彼此之間也有著演化的規律。有關康威的研究，請見【參考資料六】。

這份研究證實了我們有關於裂縫的想法是正確的，雖然康威已經列出了構成數列的最基本元素，但我們還是可以加以利用，參考其演化規則來找出數列的一般項。

(三)、一般性

要找出一般性，必須同時利用所觀察到的重複性以及裂縫分割出元素的概念。

1、首端重複區塊中的一般性

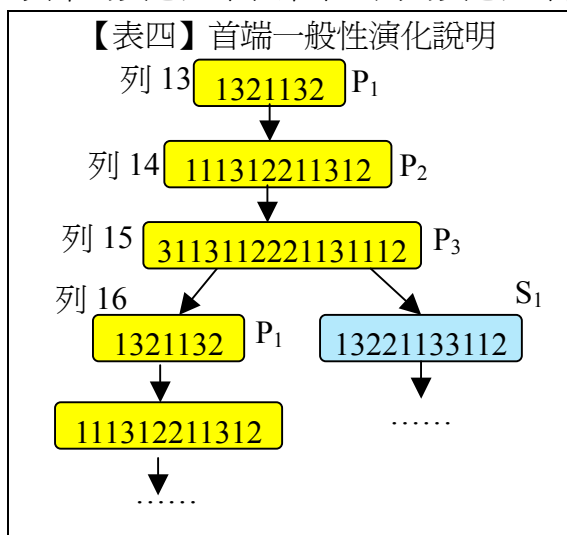


【圖七】首端重複一般性

【圖七】中的紅色線標示出首端重複性的部分，即 p.7【圖六】的粉紅色區塊。我們在其

中由裂縫切出元素，並將其套色，圖中所有顏色相同的元素都有彼此相互演化的關係。

整個數列的第一個元素是出現在第 13 列 1321132，它向下演化成第 14 列的 1113122211312，再向下演化成第 15 列的 3113112221131112。3113112221131112 向下演化成 1321132|13221133112，這個數串可以從中間的裂縫（以紅線標示）切成黃色和藍色兩個元素，其中的黃色元素和第十三列的黃色元素是一模一樣的。因此演化關係可圖式如下：



為了一般性的討論方便，我們將它們作如下的命名：（P 意即 Primary 首位，S 則表 Secondary 第二位）

- P₁=1321132
 - P₂=1113122211312
 - P₃=3113112221131112
-
- S₁=13221133112
 - S₂=11132221232112
 - S₃=311332111213122112

如【表四】所示，第 15 列的 P₃ 會向下演化成第 16 列的 P₁ 和 S₁（【圖七】的粉紅色元素），接著 P₁→P₂→P₃→P₁→...，故三元素彼此之間會不斷循環，無論從其中哪一個開始，經過三次演化之後都會再出現自己。這樣的循環關係就是首端出現重複性的原因。

也由於 P₁→P₂→P₃→P₁→... 是三循環，故給定列數 n，只需計算 $n \equiv k \pmod{3}$ ，k=1,2,3，就可以確定這一系列的第一個元素為 P_k，第二個元素為 S_k。

現在讓我們仔細看看第 19 列。

1321132 13221133112 132123123112111311222112 132113

定義 **函數 f^x(S_k) 表 S_k 演化 x 次**，舉例來說，f⁰(S₁)=S₁，f¹(S₁)=S₂，f²(S₁)=S₃。則第 19 列的 132123123112111311222112 由第 16 列的藍色元素 S₁ 演化三次而來，表作 f³(S₁)。

因 $19 \equiv 1 \pmod{3}$ ，所以第十九列的首端重複部分元素依次為 P₁（黃色）+S₁（粉紅色）+f³(S₁)（藍色）。這裡的「+」指的並非加法，而是表示將數字串依順序排列。

再來看看第 19 列往下三列，即第 22 列：

132113213221133112 13212312311211131122211213211331121321123123...

它可以表示成 P₁（黃色）+S₁（淺綠色）+f³(S₁)（粉紅色）+f⁶(S₁)（藍色）。

歸納起來，第 n 列的外觀數列可以表示成如下的一般式：

$$P_k + f^0(S_k) + f^3(S_k) + f^6(S_k) + \dots + f^x(S_k), \quad x=0,3,6,\dots, \quad n \equiv k \pmod{3}, \quad k=1,2,3$$

其中列數 n 愈大，x 就愈大，經推導可得 $x = \left\lfloor \frac{n-16}{3} \right\rfloor \times 3$ 。

以更簡潔的式子表示之，外觀數列的一般式為：

$$P_k + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-16}{3} \right\rfloor \times 3} f^i(S_k), \quad n \geq 16$$

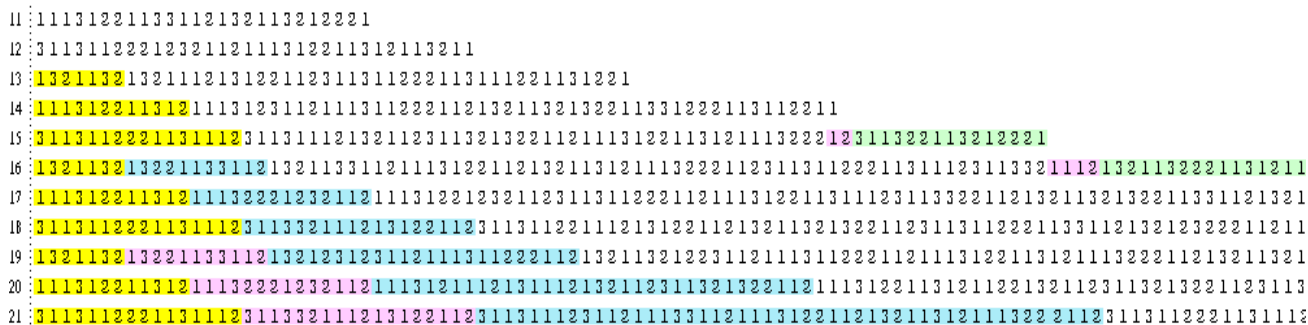
因 $19 \equiv 3 \pmod{4}$ ，所以第十九列的尾端重複部分元素從尾端排列依次為 P'_3 （綠色部分）、 S_{A3} （黃色部分）、 S_{B3} （橘色部分）、 $f^4(S_{A3})$ （粉紅色部分，由第十五列粉紅色部分 S_{A3} 演化四次而來）。仿照首端的手法可得尾端一般式：

$$f^x(S_{Ar}) + f^{x-4}(S_{Br}) + f^{x-4}(S_{Ar}) + \dots + f^4(S_{Br}) + f^4(S_{Ar}) + f^0(S_{Br}) + f^0(S_{Ar}) + P'_r,$$

$$x = \left\lfloor \frac{n-15}{4} \right\rfloor \times 4, n \geq 15$$

3、中間無重複區塊中的一般性

將首端和尾端的一般性元素都標示出來，剩下的即是中間無重複區塊。



【圖九】首端與尾端一般性元素

中間無重複區塊因為無重複性，因此不能用前述的手法表示一般項，只能直接用最原始的用外觀數列產生方式演化。從第 15 列開始首尾元素都穩定了，稱此列的中央無重複部分為「中央序列 M」，其定義與一般式如下：

$$M = 311311121321123113213221121113122113121113222$$

$$f^{n-15}(M), n \geq 15$$

統整首端、中間及尾端三部分的一般項公式，可以歸納出第 n 列的元素個數（首端+中間+尾端）為：

$$1 + \overbrace{\left\lfloor \frac{n-13}{3} \right\rfloor}^{\text{首端}} + 1 + \overbrace{\left\lfloor \frac{n-11}{4} \right\rfloor \times 2}^{\text{尾端}}$$

（四）、非 1 始之外觀數列

1、p 始外觀數列 ($p \geq 2$)

（1）p 始

p
1p
111p
311p
13211p
111312211p
.....

由外觀數列的基本性質得知，由 1 所開頭的數，只會產生 1、2、3，於是我們想：由不是 1 所開頭的數，會發生什麼事？

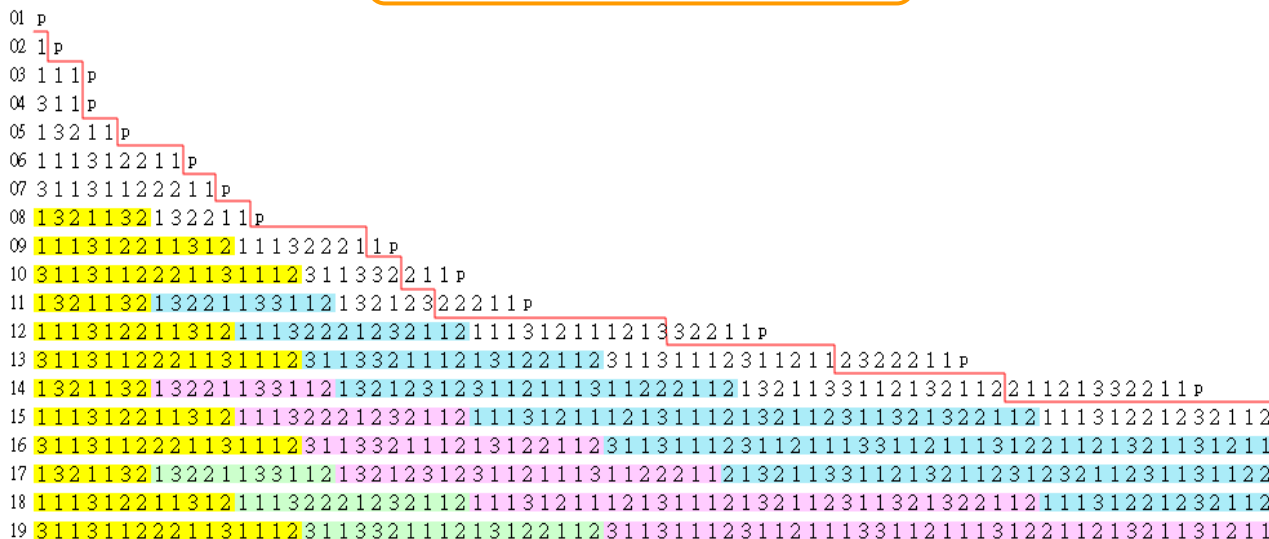
以 p ($p \in N, 2 \leq p \leq 9$) 為開頭的數列，這個 p 所產生的下一列為 $1p$ ，所以 p 的前面一位就只會是 1，因此只要 p 是除了 1 以外的任意數字或符號，所產生的情形皆是一樣的。

(2) p 始數列一般性

a.首端

1 始和 p 始數列有相同的、作為一般性第一個的元素：1321132，故其演化和循環情形也相同，如【圖十】，得到一般性通式如下： $(n \equiv k \pmod{3})$

$$P_{k+} \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor \times 3} f^i(S_k), n \geq 11$$



【圖十】 p 始數列首端一般性元素（紅色劃線區塊為首端重複區塊）

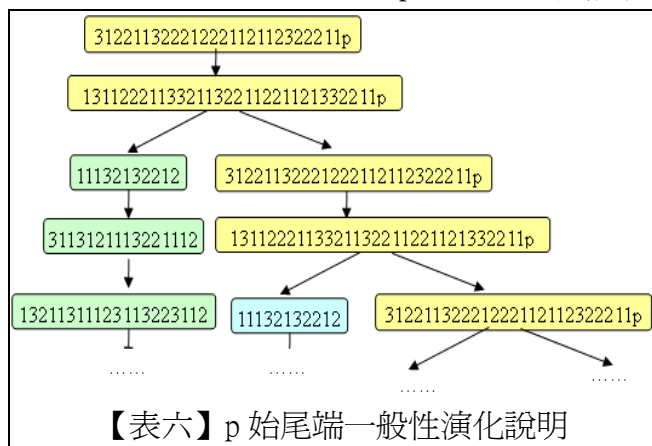
b.尾端

擷取出 p 始數列數列尾端重複區塊，得到【圖十一】。



【圖十一】 p 始數列尾端一般性元素

圖中的黃色部分為每一列中的由尾端數來的第一個完整元素，由第十九列的 31221132221222112112322211p 開始，演化情形如下：



【表六】 p 始尾端一般性演化說明

如圖所示，黃色部分中二個元素彼此會不斷循環。將它們作如下的命名：

$$Q_1=31221132221222112112322211p$$

$$Q_2=1311222113321132211221121332211p$$

演化關係： $Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2$

由 Q_2 繼續演化下去，會產生 Q_1 及綠色部分，定義如下：

$$T_1=11132132212 \quad T_2=3113121113221112$$

演化關係： $T_1 \rightarrow T_2$

由於 $Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2$ 不斷二循環，因此圖中綠色、藍色、粉紅色等部分都由於 $Q_2 \rightarrow Q_1 \rightarrow Q_2$ 不斷二循環，因此圖中綠色、藍色、粉紅色等部分都會相同，此為 p 始尾端的二循環現象。可表示成一般性通式： $(n \equiv m \pmod{2})$

$$f^n(T_m) + \dots + f^4(T_m) + f^2(T_m) + f^0(T_m) + Q_m, x = \left\lfloor \frac{n-19}{2} \right\rfloor \times 2, n \geq 19$$

c.中間無重複部分

在 p 始數列中，由第十九列開始，首端及尾端重複區塊部分都趨於穩定，因此我們定義第十九列作為中間無重複部分為 M' ，即：

$$M' = 3113112221131112212211131221121321131211132221123113112221131112211322212$$

則中間無重複部分第 n 列的一般性為：

$$f^{n-19}(M'), n \geq 19$$

(3) 1,p 相疊現象

由於我們已經知道 1 始數列和 p 始數列的首端一般項元素會相同，我們便想試試把 1 始和 p 始數列依照相同部份重疊，看看他們的相似程度有多高。

將 1 始的第四列（以 1-04 表示）和 p 始的第二列（ $p-02$ ）對齊並重疊，得到【圖十二】。經過比較，我們發現【圖十二】1,p 相同的部分與【圖七】1 始數列首端重複區塊是完全相同的！我們稱這種現象為「1,p 相疊現象」。

```

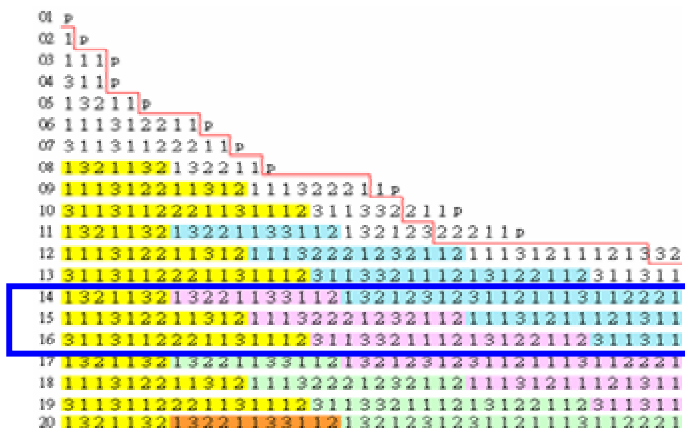
1
11
21
1211
111221
312211
13112221
111322211
311312211311221
132113112231112211
11131221132112132113212221
3113112221232112311322113211
13211321321112312231231232113111221131221
111312211312111312221121321321322132211331222113112211
3113112221131112311312121321123113221123113122123121132212311322113
1321132132211331121321233212113122112132213212133222312311222113112
111312211312111322212321121113122123212311322112211321222131112311322
3113112221131112311332111213122112311311223112131221121321121321322123113
13211321322113311213212312311211131122211213211321223121133212221211313
1113122113121113222123211211131211121311121321123113213221121113122113212
311311222113111231133211121312211231131112311211133112111312211213211312
132113213221133112132123123112111311222112132113311213211231232112311311

```

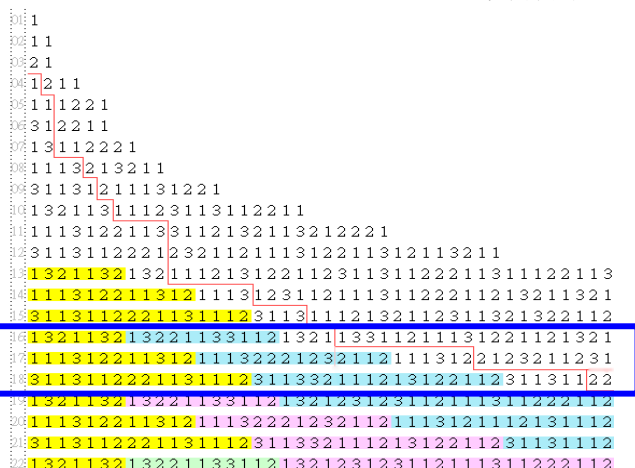
【圖十二】1,p 相同的部分

乍看之下，這是個讓人驚奇的巧合，幾經研究，我們發現 1,p 相同部份之所以會和 1 始數列首端重複區塊相同，其實就是重複性的關係。這個部分，單看文字解釋可能有些複雜，配合下面的就比較容易懂了。

首先比較兩者首端一般性元素：



【圖十】p 始數列首端一般性元素

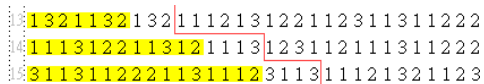


【圖七】1 始數列首端重複區塊

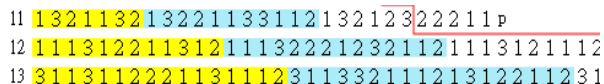
如深藍色框框標示部分，【圖十】中 p 始的粉紅色部分和【圖七】中 1 始的藍色部分相疊，p 始的淺綠色部分則會對到 1 始的粉紅色部分，依此類推。那麼 p 始的藍色部分便超出了 1 始首端重複元素的範圍。

接下來就要解釋為什麼 1,p 相疊之相同區塊會和 1 首端重複區塊相同。如上兩圖所示，p-08,p-09,p-10 重疊後分別對到 1-10,1-11,1-12，其相同的部分如【圖七】紅色所標示。（【圖十】的紅色是 p 始數列本身首端重複部份，與目前討論無關。）

如果把 1 始的第四列（1-04）和 p 始的第二列（p-02）對齊，即 1-n 會對到 p-(n-2)，則 1 始的第一組黃色一般性元素（1-13,1-14,1-15）事實上並不會對到 p 始的第一組黃色元素，而會對到其第二組黃色元素（p-11,p-12,p-13）。簡言之，p 始的黃色元素會比 1 始的早一個循環。

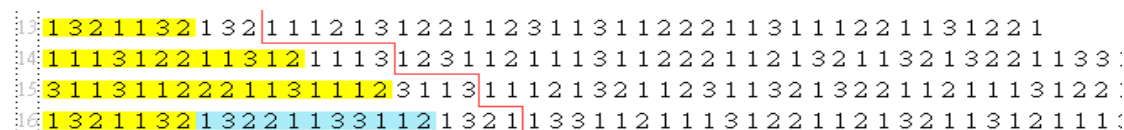


【圖十三-1】1-13,1-14,1-15



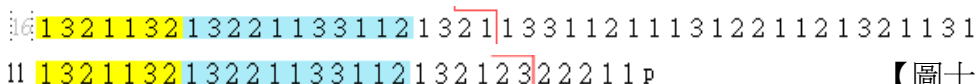
【圖十三-2】p-11,p-12,p-13

再看 1 始數列本身的重複性，如【圖十四】。比較 1-13 和 1-16，他們相同的部分也就是 1-13 的首端重複區塊（1321132132）。



【圖十四】比較 1-13 與 1-16 相同部分

最後看【圖十五】的 p-11 和 1-16，可發現這兩列的黃色加藍色部分是完全相同的。



【圖十五】比較 1-16 和 p-11

而這裡的黃色和藍色兩部分加在一起，比 1-13 的首端重複區塊（紅線內範圍）還要長，也就是可以涵蓋它。因此，

由於 1-16 黃+藍=p-11 黃+藍 > 1-13 紅線內範圍
 所以 1-16 和 1-13 相同部份=p-11 和 1-13 相同部份
 （1 始首端重複區塊） （1,p 相疊相同區塊）

這便可以說明為什麼 1,p 相疊之相同區塊會和 1 始首端重複區塊完全一模一樣了。

2. 兩個一組始

做完 1 始和 p 始的外觀數列，我們便想試試以分組方法中「兩個一組」開始的外觀數列。「兩個一組」的分法共有八組：11、12、13、21、22、23、31、32。

由於 1 始外觀數列的前幾列為 1,11,21,1211,⋯，故以「11」和「21」兩組開始的外觀數列，和 1 始的外觀數列除數列的標號不同之外，其實是一樣的。

而 2 始的數列前幾列為 2,12,1112,⋯，所以「12」始的外觀數列和 2 始的也只差在列數的標號，後續演化情形是一樣的。同理 3 始的前幾列為 3,13,1113,⋯，故「13」始和 3 始也有此情況。以「12」和「13」兩者為首列的外觀數列持續發展，皆會和 p 始的外觀數列演化情形相同（只有最尾端的 p 不同）。

「22」持續演化下去還是 22，每一列都是一模一樣的。

前面裂縫理論有提到，「23」中間即是會出現一個裂縫，2 和 3 繼續演化互不干擾，因此「23」始的數列可以視為一個「2 始數列」和一個「3 始數列」並在一起，同時演化。

上述歸類可列表如下：

屬於 1 始數列 ←	11	21	31	→ 不屬於 1 始或 p 始數列
	12	22	32	
屬於 p 始數列 ←	13	23		→ 永遠演化成自己

【表七】兩個一組始和 1 始、p 始之關係

現在只剩下 31 始和 32 始的沒法歸到 1 始或 p 始之類別，因此必須另外推導其一般式，過程與之前相仿，在此省略，結果如下：

31 始

$$P_3 = 111312211312$$

$$S_3 = 11132221232112$$

$$P_1 = 3113112221131112$$

$$S_1 = 311332111213122112$$

$$P_2 = 132113213221133112$$

$$S_2 = 132123123112111311222112$$

$$\text{首端：} P_k + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-9}{3} \rfloor \times 3} f^i(S_k), \quad n \geq 9, \quad n \equiv k \pmod{3}$$

$$P'_3 = 311322113212221$$

$$P'_4 = 13211322211312113211$$

$$P'_1 = 1113122113322113111221131221$$

$$P'_2 = 31131122212322211331222113112211$$

$$S'_3 = 132113213211121332212$$

$$S'_4 = 11131221131211131231121123221112$$

$$S'_1 = 311311222113111231131112132112211213223112$$

$$S'_2 = 132113213221133112132113311211131221222112111322132112$$

$$\text{尾端：} f^x(S'_r) + f^{x-4}(S'_r) + \dots + f^4(S'_r) + f^0(S'_r) + P'_r,$$

$$x = \left\lfloor \frac{n-15}{4} \right\rfloor \times 4, \quad n \geq 15, \quad n \equiv r \pmod{4}$$

$$M = 1113122113121122132112311321322112311311222113111231133221121113122113121122132112311321322112111312211312111322212$$

中間： $f^{n-15}(M)$, $n \geq 15$

32 始

$$\begin{aligned} P_2 &= 1321132 & S_2 &= 13221133112 \\ P_3 &= 111312211312 & S_3 &= 11132221232112 \\ P_1 &= 3113112221131112 & S_1 &= 311332111213122112 \end{aligned}$$

首端： $P_k + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-14}{3} \rfloor \times 3} f^i(S_k)$, $n \geq 14$, $n \equiv k \pmod{3}$

$$\begin{aligned} P'_1 &= 312211322212221121123222112 & S'_1 &= 11132132212 \\ P'_2 &= 13112221133211322112211213322112 & S'_2 &= 3113121113221112 \end{aligned}$$

尾端： $f^x(S'_r) + f^{x-2}(S'_r) + \dots + f^2(S'_r) + f^0(S'_r) + P'_r$,

$$x = \left\lfloor \frac{n-19}{2} \right\rfloor \times 2, \quad n \geq 19, \quad n \equiv r \pmod{2}$$

M=3113111231121113311211131221121321133112132113212221221113122113121113222123211211131211121332211213211321322113311213211322132112311321322112111312212321121113122122211211232221123113112221131112311332111213122112311311123112111331121113122112312111322211231131122111213122112311311221132211221121332211211131221131211132221232112111312111213111213111213211231132132211211131221131211132221132211131221131211132221123211211131211121311121321123113213221121113122113121113222113221113122113121113222112321121113121112133221123113112221131112212211131221121321131211132221123113112221131112211322212

中間： $f^{n-19}(M)$, $n \geq 19$

(五) 基本性質的探討

在研究完外觀數列之一般項之後，我們想要回歸到基本性質去研究。根據【參考資料二】指出，康威算出了外觀數列成長比例 $\lambda = 1.303577269034296 \dots$ ，且 λ 為一個 x 的 71 次方程式之一根，並附了一張圖，在複數坐標系上標出這 71 個根。此 71 次式為：

$$\begin{aligned} 0 &= x^{71} - x^{69} - 2x^{68} - x^{67} + 2x^{66} + 2x^{65} + x^{64} - x^{63} - x^{62} - x^{61} - x^{60} - x^{59} + 2x^{58} + 5x^{57} + 3x^{56} - 2x^{55} - 10x^{54} - 3x^{53} - 2x^{52} + 6x^{51} + 6x^{50} + x^{49} + 9x^{48} - 3x^{47} - 7x^{46} - 8x^{45} - 8x^{44} + 10x^{43} + 6x^{42} + 8x^{41} - 5x^{40} - 12x^{39} + 7x^{38} - 7x^{37} + 7x^{36} + x^{35} - 3x^{34} + 10x^{33} + x^{32} - 6x^{31} - 2x^{30} - 10x^{29} - 3x^{28} + 2x^{27} + 9x^{26} - 3x^{25} + 14x^{24} - 8x^{23} - 7x^{21} + 9x^{20} + 3x^{19} - 4x^{18} - 10x^{17} - 7x^{16} + 12x^{15} + 7x^{14} + 2x^{13} - 12x^{12} - 4x^{11} - 2x^{10} + 5x^9 + x^7 - 7x^6 + 7x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 6x^2 + 3x - 6, \end{aligned}$$

不過遍尋資料，找不到關於這部份的推導過程或解釋，我們便想用我們自己的方法，來找出外觀數列以 1.3... 比例成長的原因。這部分內容使用到矩陣對角化和康威 92 元素的概念。

首先列出一個 92x92 的矩陣 A，其中第 i 行第 j 列代表 i 號元素在下一列會演化成幾個第 j 號元素，如【附件七】。欲求得 $\frac{A^{n+1}x_0}{A^n x_0}$ 的極限值，其中 x_0 為初始值，即任一列數列中第 i

($i=1,2,\dots,92$) 號元素有幾個，表示成一 92x1 的矩陣。

將矩陣 A 輸入 MATLAB 軟體，即可得到一個 λ 的 92 次方程式，其中每個根都是此矩陣的固有值。

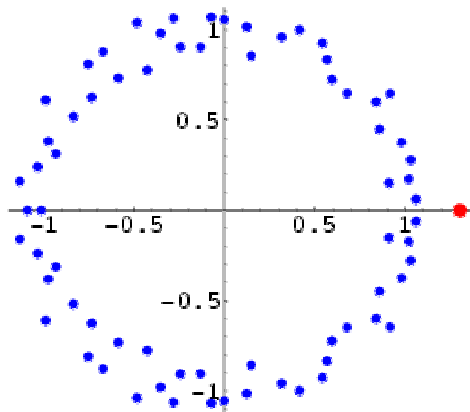
$$\frac{d(A^{n+1}x_0)}{d(A^n x_0)} = \frac{c_1 \lambda_1^{n+1} + \dots + c_{92} \lambda_{92}^{n+1}}{c_1 \lambda_1^n + \dots + c_{92} \lambda_{92}^n} = \frac{c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{n+1} + \dots + c_m \cdot 1 + \dots + c_{92} \left(\frac{\lambda_{92}}{\lambda_m}\right)^{n+1}}{c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n + \dots + c_m \cdot 1 + \dots + c_{92} \left(\frac{\lambda_{92}}{\lambda_m}\right)^n} \cdot \lambda_m$$

其中 c_i ($i=1,2\dots 92$) 為常數， λ_m 為固有值中的絕對值最大者，約等於 1.303， d 為一 1×92 矩陣，第 i 行表示第 i 號元素之位數。將上式取極限：

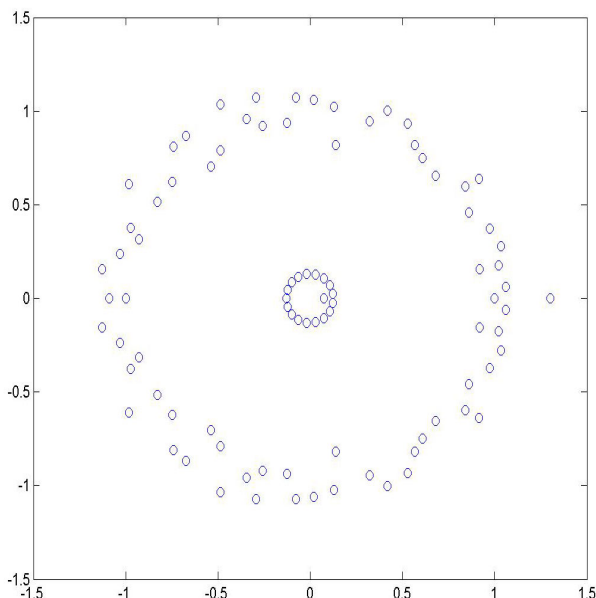
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{n+1} + \dots + c_m \cdot 1 + \dots + c_{92} \left(\frac{\lambda_{92}}{\lambda_m}\right)^{n+1}}{c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n + \dots + c_m \cdot 1 + \dots + c_{92} \left(\frac{\lambda_{92}}{\lambda_m}\right)^n} \cdot \lambda_m = \lambda_m$$

因此外觀數列成長比例會趨近 $\lambda_m \doteq 1.303$ ，由推導過程中可發現，成長的比例和初始值是沒有關係的。

將我們得到的 92 個根標在複數坐標系上，與康威的 71 個根做比較，發現相似性非常高，如【圖十六】及【圖十七】。我們猜想康威就是用這個方法找到 λ 的，他之所以只有 71 個根，是因刪掉了一些不合理的值。



【圖十六】康威的 71 次方程式的根



【圖十七】我們的 92 次方程式的根

運用我們所計算出的外觀數列成長比例，可以估計出第 n 列的總位數；此外，運用類似的矩陣對角化手法，也可以證明出 1、2、3 分別佔總位數比例趨近固定，進而估計出每一列中 1、2、3 分別的個數。

三、研究結果

(一) 基本性質

- (1) 外觀數列由 1,2,3 組成，最多是 111 (三個 1) 或 222 (三個 2)，不會出現 333 或 4。
- (2) 外觀數列的總位數呈指數成長，第 n 列的總位數約為 $C\lambda^n$ ，其中 $C=1.567\dots$ ， $\lambda=1.30357726\dots$ ， λ 稱為康威常數(Conway's Constant)。意即各列與前一列的總位數比約為 1.3...
- (3) 各列中，1,2,3 佔總位數的比例會趨於固定，1 約佔 50%，2 約佔 31%，3 約佔 19%。

(二) 分組

- (1) 當採取「相同一組」的分組方式時，各組數成長率和總組數成長率都接近 1.3...
- (2) 各組佔總組數的比例會趨於固定，其數值請見下方表格。
- (3) 相同數字組成的組 (例：1,11,111) 合在一起算，其成長速率約為 1.3...
- (4) 相同數字組成的組，其佔總組數的比例會趨於固定。

組別	1	11	111	2	22	222	3	33	全部
各組成長率	1.3075	1.3090	1.3249	1.3229	1.3579	1.3036	1.3115	1.4061	1.3108
佔總組百分比	14.10%	20.76%	7.16%	20.86%	6.92%	4.13%	23.71%	2.36%	100%
同數成長率	1.2991			1.3453			1.3034		1.3108
佔同組百分比	42.46%			31.37%			26.17%		100%

- (5) 以相同一組的產生所化成的樹狀圖，其樹枝數約成 1.3... 的指數成長。
- (6) 在第 1~20 列中，兩列之間的樹枝數約等於兩列組數的和。

(三) 重複性

- (1) 首端對齊的外觀數列，每隔 3 列的首端相同，具有三循環的重複性。
- (2) 首端具重複性的部分隨列數增加而增長，約以 1.3... 的速率指數成長。
- (3) 尾端對齊的外觀數列，每隔 4 列的尾端相同，具有四循環的重複性。
- (4) 尾端具重複性的部分隨列數增加而增長，約以 1.3... 的速率指數成長。

(四) 裂縫

- (1) 在裂縫兩邊的數字串，演化時分別獨立，不會相互影響。
- (2) 凡出現 23，只要不是 23111 或 23222，則在 2 和 3 中間必有一裂縫；另外 2123、2132、2131、2111 四者亦為裂縫，彼此之間有演化關係。
- (3) 從裂縫分割，則外觀數列共可被切割出 92 種數字串，稱為康威的 92 元素(Conway's 92 elements)。

(五) 一般性

- (1) 要找出一般性，必須同時利用所觀察到的重複性以及裂縫分割出元素的概念。

- (2) 首端重複區塊第 n 列的一般性通式 $P_k + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-16}{3} \rfloor \times 3} f^i(S_k)$ ， $n \geq 16$ ， $n \equiv k \pmod{3}$ 。

- (3) 尾端重複區塊第 n 列的一般性通式

$$f^x(S_{Ar}) + f^{x-4}(S_{Br}) + f^{x-4}(S_{Ar}) + \dots + f^4(S_{Br}) + f^4(S_{Ar}) + f^0(S_{Br}) + f^0(S_{Ar}) + P_r, \quad x = \left\lfloor \frac{n-15}{4} \right\rfloor \times 4, \quad n \geq 15,$$

$$n \equiv k \pmod{4}$$

(4) 中央無重複區塊第 n 列的一般性： $f^{n-15}(M)$ ， $n \geq 15$

(六) 非 1 始之外觀數列

(1) 以 $p(p \in N, 2 \leq p \leq 9)$ 開始的外觀數列，除了在最尾端的 p 之外，其組成同樣為 1,2,3，不會出現 333，也不會出現 4。

(2) 以 $p(p \in N, 2 \leq p \leq 9)$ 開始的所有外觀數列，除了在最尾端的 p 之外，其組成皆相同。

(3) 1,p 相疊現象：以 $p(p \in N, 2 \leq p \leq 9)$ 開始的外觀數列，有一部分跟以 1 開始的數列相同，其相同的部分剛好就是以 1 開始的數列具有重複性的部分。

(4) 兩個一組始之外觀數列中，11、21 始和 1 始數列是一樣的；12、13 始和 p 始數列相同；22 始的外觀數列每一列皆為 22；23 始之外觀數列可分成兩個 p 始數列；31、32 始的外觀數列也可分別找到一般性。

(七) p 始數列的一般性

(1) 首端重複區塊第 n 列的一般性通式 $P_k + \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{n-11}{3} \rfloor \times 3} f^i(S_k)$ ， $n \geq 11$ ， $n \equiv k \pmod{3}$ 。

(2) 尾端重複區塊第 n 列的一般性通式 $f^x(T_m) + \dots + f^4(T_m) + f^2(T_m) + f^0(T_m) + Q_m$ ， $x = \lfloor \frac{n-19}{2} \rfloor \times 2$ ，

$$n \geq 19, n \equiv m \pmod{2}$$

(3) 中央無重複區塊第 n 列的一般性： $f^{n-19}(M')$ ， $n \geq 19$

(八) 兩個一組始之外觀數列

屬於 1 始數列 ←	11	21	31	→ 不屬於 1 始或 p 始數列
	12	22	32	
屬於 p 始數列 ←	13	23		→ 永遠演化成自己

(九) 基本性質的探討

(1) 利用矩陣對角化和康威 92 元素的概念，可以計算出外觀數列的成長比例趨近 1.303...

四、討論

外觀數列的總位數成長比例約是 $C\lambda^n$ ，其中 $C=1.567\dots$ ， $\lambda=1.30357726\dots$ ， λ 稱為康威常數 (Conway's Constant)，這是在康威的著述中提出的。

在我們後來一連串的研究中， $\lambda=1.3\dots$ 的這個比例不斷出現，除了總位數的成長比例之外，1,2,3 分別的個數也是以 1.3... 的速率成長，這和它們在數列中佔固定比例 (1 約佔 50%，2 佔 30%，3 佔 20%) 密切相關。「相同數字一組」時，總組數成長率以及各組個別的成長率都是 1.3...；首端重複區域的總位數和尾端重複的總位數，各列之間的比例是 1.3...；還有以 p 開始的外觀數列，它的成長比率也是 1.3...。

許多部份都呈現相同的比例，其背後的意涵是，無論數列如何的變化——只算 1、2 或 3、分組、畫成樹狀圖、只看重複、甚至換個數字開頭，它們之前都存有一定的關聯性，在呈現的面貌上也許有所不同，然而產生的方式還是一樣的。

研究過程中，我們採取分組與碎形、重疊性和康威的 92 元素等方法。

分組是在研究外觀數列基本性質時的好方法，它能夠有效的轉化數列，將其分成較小的幾種數字組，分別討論其演化情形；碎形則將數列以圖像化的方式呈現，較易觀察。然而外觀數列在產生下一列的時候，左右相鄰的數字組會相互影響，這就是所謂的「與上下文相關 (context-sensitive)」。因此，分組或碎形並不適用於演化產生下一列。

重疊性則是強調各列數字間相同的部分和演化關係。因此從重疊性的結果，我們可以知道第 n 列的首端和尾端部分的元素是什麼。

至於 92 元素可以有效的克服與上下文相關的問題，因為它是由裂縫分組，每個元素產生子代時是相互獨立的；然而其缺點是元素多達 92 個，以矩陣表示其演化規則時成爲 92×92 的矩陣，所幸在電腦的協助之下，矩陣的運算可以用程式代勞，因此能利用 92 元素的產生規則研究諸如爲何 123 成比例，或爲何數列呈指數成長等數量上的問題。

綜合而言，各種研究方法皆有其優、缺點，靈活地綜合運用，才能幫助研究。

五、結論與應用

我們做出的一般性，和當初預期的不太一樣——並不是給列數 n ，就直接可以知道整列是什麼，而是必須拆成始端、中間和尾端三個部分，分別再用「外觀數列的產生方式」(康威稱此產生方式爲"Audioactive Decay") 演化若干次，最後合在一起才得到這個第 n 列。不過想來這也是合理的，畢竟這麼長的一個數列，不可能憑空得到，一般式和原始產生方式，必定有所關聯。

雖然使用一般性，和直接由上一列產生外觀數列，同樣都需要用到 Audioactive Decay，但是此一般性的價值在於**能使運算更迅速**——用一列幾萬位的數列放到產生器去跑，常常還沒得到結果，電腦就先當了；分成始端、中間和尾端，雖然必須做三次，但每個序列都較短，可以產生得更迅速。此外，這三個部分可以視爲獨立的區塊，各有其特殊的性質，產生時彼此之間也互不干擾，這更**有利於外觀數列性質的觀察與研究**。

最重要的是，一般性打破了外觀數列「必須要知道上一列才能產生下一列」的限制，變成「知道第 n 列的幾個一般性元素就可以產生整列」，把「由上至下」的產生化成「由左而右」的**元素演化關係**。想知道第 n 列，再也不必辛辛苦苦地從 1 開始了！

六、參考文獻

- (一) Clifford A. Pickover 著，蔡承志 楊台勇 譯，數字的異想世界 (初版)。台北市。商周出版。171 頁，第 55 章，怪獸數列 (民 92 年 4 月 5 日)
- (二) Eric W. Weisstein. (1999) Conway's Constant. Mathworld. Retrieved November 11, 2004, from <http://mathworld.wolfram.com/ConwaysConstant.html>
- (三) Eric W. Weisstein. (1999) Look and Say sequence. Mathworld. Retrieved November 11, 2004, from <http://mathworld.wolfram.com/LookandSaySequence.html>
- (四) Eric W. Weisstein. (1999) L-system. Retrieved December 29, 2004, from <http://mathworld.wolfram.com/LindenmayerSystem.html>
- (五) Henry Bottomley (無日期) Look and Say(audioactive evolution). Retrieved November 11, 2004, from <http://www.btinternet.com/~se16/js/looknsay.htm>

- (六) Henry Bottomley (無日期) One Metaphor Fits All: A Fractal Voyage With Conway's Audioactive Decay. Retrieved January 23, 2005, from <http://www.btinternet.com/~se16/mhi/index.htm>
- (七) Jacobo Bulaevsky. (無日期) Koch Curve. Retrieved January 14, from <http://ejad.best.vwh.net/java/fractals/koch.shtml>
- (八) JOSEPH L. PE (2003) ANA'S GOLDEN FRACTAL. Retrieved October 30, 2004, from <http://www.geocities.com/SoHo/Exhibit/8033/anagoldenfractal/anagoldenfractal.pdf>
- (九) The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. (無日期) Retrieved December 23, 2004, from <http://www.research.att.com/~njas/sequences/>

【附件二】：1,2,3 分別個數、佔整列總位數的百分比（配合 p.2）

列	總個數	1 的個數	1 的個數比	2 的個數	2 的個數比	3 的個數	3 的個數比
1	1	1	100.00000%	0	0.00000%	0	0.00000%
2	2	2	100.00000%	0	0.00000%	0	0.00000%
3	2	1	50.00000%	1	50.00000%	0	0.00000%
4	4	3	75.00000%	1	25.00000%	0	0.00000%
5	6	4	66.66667%	2	33.33333%	0	0.00000%
6	6	3	50.00000%	2	33.33333%	1	16.66667%
7	8	4	50.00000%	3	37.50000%	1	12.50000%
8	10	6	60.00000%	2	20.00000%	2	20.00000%
9	14	8	57.14286%	3	21.42857%	3	21.42857%
10	20	12	60.00000%	4	20.00000%	4	20.00000%
11	26	13	50.00000%	8	30.76923%	5	19.23077%
12	34	18	52.94118%	10	29.41176%	6	17.64706%
13	46	24	52.17391%	14	30.43478%	8	17.39130%
14	62	33	53.22581%	18	29.03226%	11	17.74194%
15	78	39	50.00000%	24	30.76923%	15	19.23077%
16	102	52	50.98039%	28	27.45098%	22	21.56863%
17	134	67	50.00000%	41	30.59701%	26	19.40299%
18	176	88	50.00000%	56	31.81818%	32	18.18182%
19	226	113	50.00000%	69	30.53097%	44	19.46903%
20	302	155	51.32450%	91	30.13245%	56	18.54305%
21	408	211	51.71569%	123	30.14706%	74	18.13725%
22	528	264	50.00000%	164	31.06061%	100	18.93939%
23	678	331	48.82006%	221	32.59587%	126	18.58407%
24	904	455	50.33186%	286	31.63717%	163	18.03097%
25	1182	596	50.42301%	366	30.96447%	220	18.61252%
26	1540	762	49.48052%	494	32.07792%	284	18.44156%
27	2012	1000	49.70179%	636	31.61034%	376	18.68787%
28	2606	1288	49.42441%	832	31.92632%	486	18.64927%
29	3410	1688	49.50147%	1095	32.11144%	627	18.38710%
30	4462	2222	49.79830%	1423	31.89153%	817	18.31017%
31	5808	2884	49.65565%	1847	31.80096%	1077	18.54339%
32	7586	3754	49.48590%	2440	32.16451%	1392	18.34959%
33	9898	4915	49.65650%	3154	31.86502%	1829	18.47848%

【附件三】：相同一組成長率（配合 p.4）

	成長比率								
平均	1.3108	1.3075	1.3090	1.3249	1.3229	1.3579	1.3036	1.3115	1.4061
列	總成長比率	1 成長比率	11 成長比率	111 成長比率	2 成長比率	22 成長比率	222 成長比率	3 成長比率	33 成長比率
1									
2	1	0							
3	2		0						
4	1.5	1			1				
5	1	1	0		0				
6	1.333333333	1		0		1			
7	1.25	2	1			0		1	
8	1.4	0.5	1				0	2	
9	1.428571429	3	1	1	0.5			1.5	
10	1.3	0.333333333	4	1	2	1		1.333333333	
11	1.307692308	4	0.75	1	1.5	1		0.75	
12	1.352941176	0.75	2	1	1.666666667	1	1	2	0
13	1.347826087	2	1	2	1	3	1	1.333333333	
14	1.258064516	1	1.5	1.5	1.2	1	2	1.125	
15	1.307692308	1.166666667	1.111111111	1.333333333	1.5	1	1.5	1.666666667	0
16	1.31372549	1.142857143	1.6	1	1.666666667	0.666666667	1	1.066666667	
17	1.313432836	1.75	1	1.75	1.133333333	4.5	0.666666667	1.25	1
18	1.284090909	1.142857143	1.5	1.142857143	1.352941176	0.666666667	3.5	1.3	1
19	1.336283186	1.4375	1.125	1.5	1.565217391	1.5	0.714285714	1.307692308	1.666666667
20	1.350993377	1.217391304	1.518518519	1.25	1.361111111	1.333333333	1.2	1.470588235	0.6
21	1.294117647	1.285714286	1.292682927	1.533333333	1.102040816	1.75	1.5	1.24	2
22	1.284090909	1.222222222	1.396226415	1.043478261	1.314814815	1.142857143	1.666666667	1.193548387	2.166666667
23	1.333333333	1.454545455	1.216216216	1.208333333	1.408450704	1.458333333	1.133333333	1.459459459	0.692307692
24	1.307522124	1.296875	1.333333333	1.517241379	1.31	1.057142857	1.588235294	1.25	1.555555556
25	1.302876481	1.21686747	1.325	1.340909091	1.251908397	1.675675676	0.962962963	1.318518519	1.5
26	1.306493506	1.326732673	1.314465409	1.186440678	1.31097561	1.161290323	1.730769231	1.337078652	1.095238095
27	1.295228628	1.335820896	1.253588517	1.414285714	1.306976744	1.319444444	1.222222222	1.210084034	1.913043478
28	1.308518803	1.251396648	1.354961832	1.191919192	1.327402135	1.326315789	1.254545455	1.368055556	1.045454545
29	1.308504399	1.383928571	1.273239437	1.338983051	1.300268097	1.325396825	1.333333333	1.28680203	1.304347826
30	1.301658449	1.261290323	1.305309735	1.373417722	1.315463918	1.245508982	1.336956522	1.295857988	1.333333333

【附件四】：各組佔總組數的比例（配合 p.4）

	各組個數比								
平均		14.10%	20.76%	7.16%	20.86%	6.92%	4.13%	23.71%	2.36%
列	總組數	1 的比	11 的比	111 的比	2 的比	22 的比	222 的比	3 的比	33 的比
1	1	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	1	0.00%	100.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
3	2	50.00%	0.00%	0.00%	50.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
4	3	33.33%	33.33%	0.00%	33.33%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
5	3	33.33%	0.00%	33.33%	0.00%	33.33%	0.00%	0.00%	0.00%
6	4	25.00%	25.00%	0.00%	0.00%	25.00%	0.00%	25.00%	0.00%
7	5	40.00%	20.00%	0.00%	0.00%	0.00%	20.00%	20.00%	0.00%
8	7	14.29%	14.29%	14.29%	28.57%	0.00%	0.00%	28.57%	0.00%
9	10	30.00%	10.00%	10.00%	10.00%	10.00%	0.00%	30.00%	0.00%
10	13	7.69%	30.77%	7.69%	15.38%	7.69%	0.00%	30.77%	0.00%
11	17	23.53%	17.65%	5.88%	17.65%	5.88%	5.88%	17.65%	5.88%
12	23	13.04%	26.09%	4.35%	21.74%	4.35%	4.35%	26.09%	0.00%
13	31	19.35%	19.35%	6.45%	16.13%	9.68%	3.23%	25.81%	0.00%
14	39	15.38%	23.08%	7.69%	15.38%	7.69%	5.13%	23.08%	2.56%
15	51	13.73%	19.61%	7.84%	17.65%	5.88%	5.88%	29.41%	0.00%
16	67	11.94%	23.88%	5.97%	22.39%	2.99%	4.48%	23.88%	4.48%
17	88	15.91%	18.18%	7.95%	19.32%	10.23%	2.27%	22.73%	3.41%
18	113	14.16%	21.24%	7.08%	20.35%	5.31%	6.19%	23.01%	2.65%
19	151	15.23%	17.88%	7.95%	23.84%	5.96%	3.31%	22.52%	3.31%
20	204	13.73%	20.10%	7.35%	24.02%	5.88%	2.94%	24.51%	1.47%
21	264	13.64%	20.08%	8.71%	20.45%	7.95%	3.41%	23.48%	2.27%
22	339	12.98%	21.83%	7.08%	20.94%	7.08%	4.42%	21.83%	3.83%
23	452	14.16%	19.91%	6.42%	22.12%	7.74%	3.76%	23.89%	1.99%
24	591	14.04%	20.30%	7.45%	22.17%	6.26%	4.57%	22.84%	2.37%
25	770	13.12%	20.65%	7.66%	21.30%	8.05%	3.38%	23.12%	2.73%
26	1006	13.32%	20.78%	6.96%	21.37%	7.16%	4.47%	23.66%	2.29%
27	1303	13.74%	20.11%	7.60%	21.57%	7.29%	4.22%	22.10%	3.38%
28	1705	13.14%	20.82%	6.92%	21.88%	7.39%	4.05%	23.11%	2.70%
29	2231	13.90%	20.26%	7.08%	21.74%	7.49%	4.12%	22.73%	2.69%
30	2904	13.46%	20.32%	7.47%	21.97%	7.16%	4.24%	22.62%	2.75%

【附件五】：首端重複統計數據
(配合 p.6)

列	總個數	比例
1	0	
2	0	
3	0	
4	0	
5	2	1
6	2	1
7	2	2
8	4	1
9	4	1.5
10	6	1.666667
11	10	1
12	10	1
13	10	1.6
14	16	1.25
15	20	1.1
16	22	1.454545
17	32	1.25
18	40	1.2
19	48	1.416667
20	68	1.323529
21	90	1.222222
22	110	1.4
23	154	1.350649
24	208	1.230769
25	256	1.351563
26	346	1.381503
27	478	1.213389
28	580	1.331034
29	772	1.326425
30	1024	1.279297
31	1310	1.314504
32	1722	1.315912
33	2266	1.291262

【附件六】：尾端重複統計數據
(配合 p.7)

列	總個數	比例
1	0	
2	2	1
3	2	1
4	2	2
5	4	1
6	4	1
7	4	1
8	4	1.5
9	6	1.333333
10	8	1.25
11	10	1.2
12	12	1.333333
13	16	1.125
14	18	1
15	18	1.333333
16	24	1.333333
17	32	1.1875
18	38	1.210526
19	46	1.391304
20	64	1.3125

The Look and Say Sequence

By Annie Chen and Ann Lee

Background and Purpose

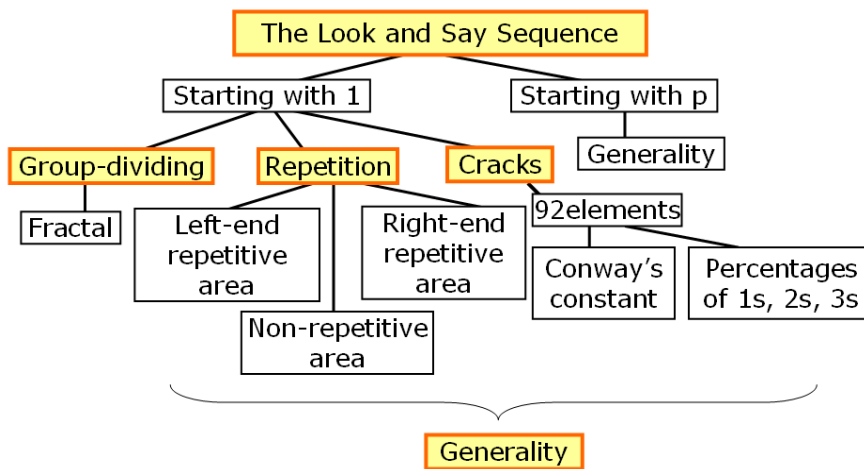
The Look and Say sequence is produced by describing the appearance of the previous row. For example, start with "1", which can be described as "one 1", therefore the second row is "11", which is "two 1s", making the third row "21", and so on. The first few rows are:

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
...

The Look and Say sequence was first introduced by Professor John H. Conway. Note that there are neither strings of "4" nor "333" in this sequence. This can be explained by writing out the preceding rows of these strings. The number of digits in the n -th row is $C\lambda^n$, where $C=1.567\dots$ and $\lambda=1.303\dots$ (called Conway's constant.) Also, about 50% of the digits are 1s, 30% 2s, 20% 3s.

Our final goal is to work out the "general formula" of this sequence, which means given the row number n , we wish to know what the n -th row is without having to do the look-and-say iteration from the first row.

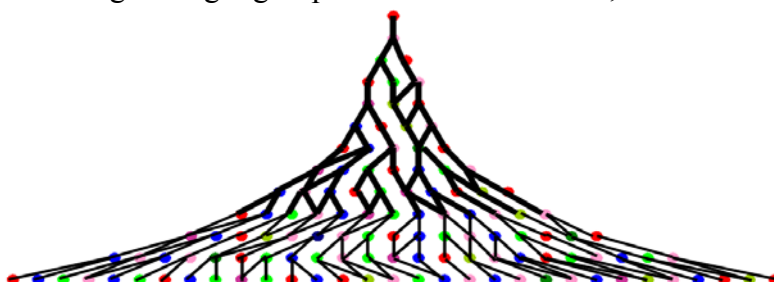
Procedure



Methods

Group-dividing

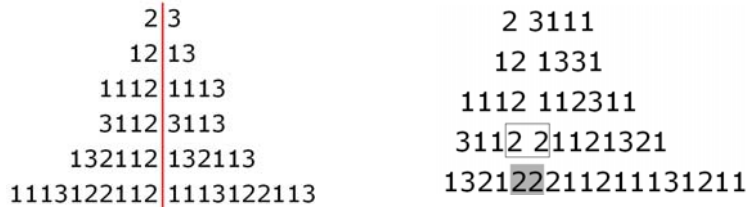
Putting the same numbers together, we get eight groups: 1, 11, 111, 2, 22, 222, 3, 33. Labeling the eight groups with different colors, we can see the sequence as a fractal:



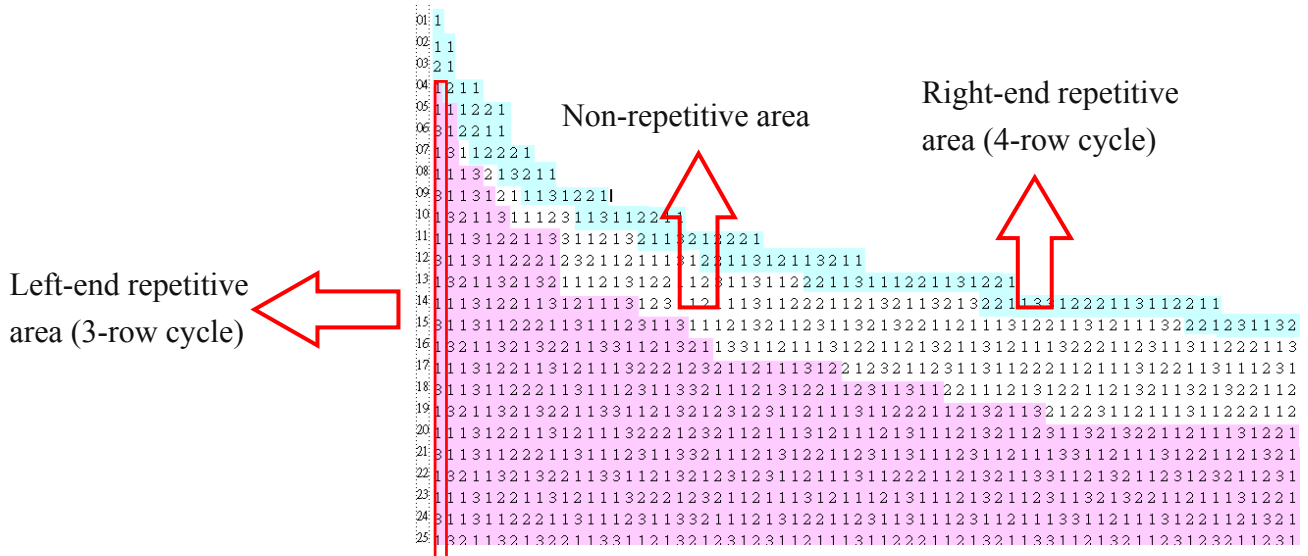
● 1	● 11	● 111
● 2	● 22	● 222
● 3	● 33	

Cracks

A “crack” cuts a string into two separate parts that are no longer related in iteration. We found that all strings of 23 (except 23111, 23222), 2123, 2132, 2131, and 2111 form cracks. A string between two cracks is called a “unit.”



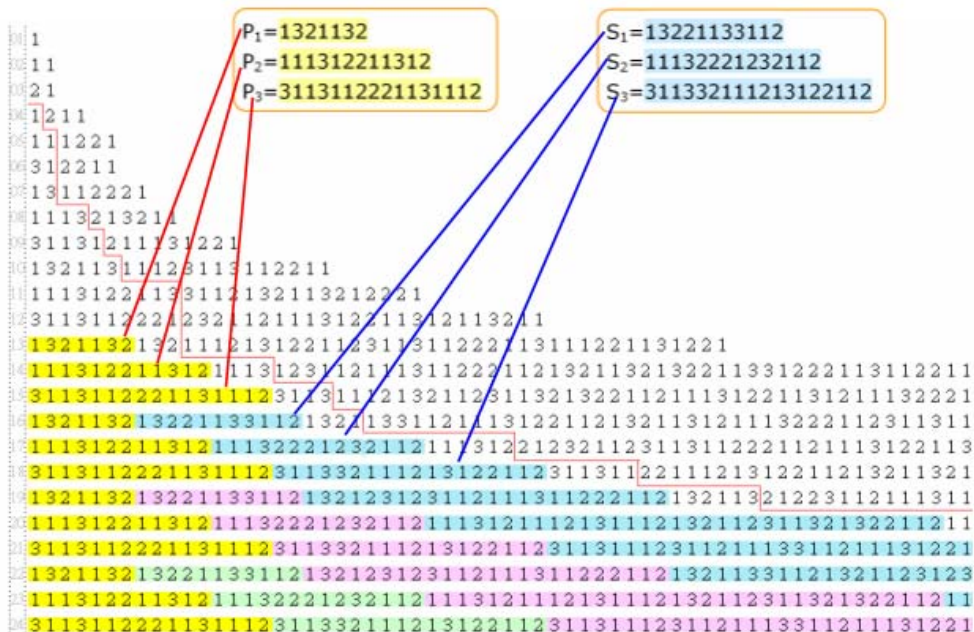
Repetition



Viewed by columns, some parts of the sequence repeat themselves, as shown above.

Generality

Divide the sequence into three parts according to repetition and derive the general formula for each. Combining them together, we get the general formula for the n-th row.



The red line marks the left-end repetitive area. Every colored block is a unit separated by cracks. The blocks of the same color are related in the view of iteration, meaning that the unit evolves into the unit of the same color in the next row.

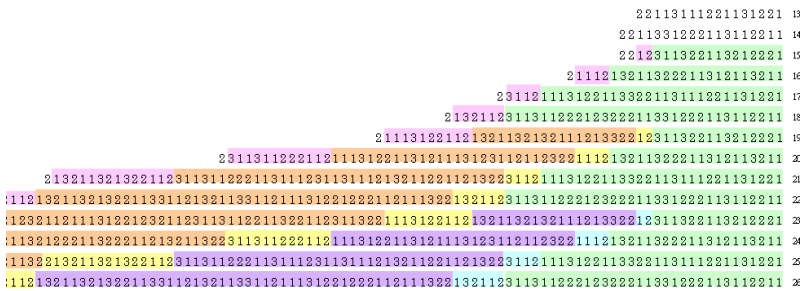
The yellow block in row 13 **1321132** is a unit named P_1 , and it iterates into the yellow unit $P_2=111312211312$ in row 14, which evolves into $P_3=3113112221131112$ in the 15th row. P_3 evolves into two units, **1321132** **13221133112**. The **1321132** is the same as P_1 in row 13. The $P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow P_3 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots$ cycle is the reason for the 3-row cycle in the left-end repetition. Name **13221133112**= S_1 .

Now let's take a closer look at row 19. The yellow block **1321132** is P_1 , the pink block **13221133112** is S_1 , and the blue block **132123123112111311222112** is $f^3(S_1)$, S_1 iterates 3 times. Because $S_1=13221133112$ (row 19) is exactly the same as $S_1=13221133112$ (row 16), you can also say that **132123123112111311222112**(row 19) is **13221133112**(row 19) iterated 3 times. So row 19 can be written as: $P_1+S_1+f^3(S_1)$. For every $n \geq 13$, $n \equiv k \pmod{3}$,

$k=1,2,3$, row n can be described as $P_k+S_k+f^3(S_k)+\dots+f^x(S_k)$, $x=\left\lfloor \frac{n-16}{3} \right\rfloor \times 3$. In a more mathematical form, the general formula would be:

$$P_k + \sum_{i=0}^{\left\lfloor \frac{n-16}{3} \right\rfloor \times 3} f^i(S_k), \quad n \geq 16$$

Similarly, the general formula for the right-end repetitive area can be derived:



$$\begin{aligned} P'_3 &= 311322113212221 \\ P'_4 &= 13211322211312113211 \\ P'_1 &= 1113122113322113111221131221 \\ P'_2 &= 31131122212322211331222113112211 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{A3} &= 12 \\ S_{A4} &= 1112 \\ S_{A1} &= 3112 \\ S_{A2} &= 132112 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_{B3} &= 1321132132111213322 \\ S_{B4} &= 1113122113121113123112112322 \\ S_{B1} &= 31131122211311123113111213211221121322 \\ S_{B2} &= 132113213221133112132113311211131221222112111322 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f^x(S_{Ar}) + f^{x-4}(S_{Br}) + f^{x-4}(S_{Ar}) + \dots \\ &+ f^4(S_{Br}) + f^4(S_{Ar}) + f^0(S_{Br}) + f^0(S_{Ar}) + P'_r, \\ &x = \left\lfloor \frac{n-15}{4} \right\rfloor \times 4, \quad n \geq 15, \\ &n \equiv r \pmod{4}, \quad r = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

The formula for the non-repetitive area can only be written using the original look-and-say iteration:

$$M = 311311121321123113213221121113122113121113222, \quad f^{n-15}(M), \quad n \geq 15$$

Starting with p

All sequences starting with a single digit are exactly the same except for the last digit (the initial digit.) They also have repetition and cracks, so using similar methods, their general formula can also be derived.

Calculating Conway's constant and the percentages of 1s, 2s, 3s

Starting with 2	Starting with 3	Starting with p
2	3	p
12	13	1p
1112	1113	111p
3112	3113	311p
132112	132113	13211p
1113122112	1113122113	111312211p
311311222112	311311222113	31131122211p
13211321322112	13211321322113	1321132132211p
.....

Here we introduce the idea of Conway's 92 elements. Professor John H. Conway did some research on the Look and Say sequence. He had an idea similar to our cracks, and he called them

splits. He cut every possible split in the sequence and called the string between two splits an element. He found that there were only 92 elements in the whole sequence, and they are related in iteration. We combine the idea of Conway's 92 elements and matrix to calculate Conway's constant and the percentages of 1s, 2s and 3s.

Calculating Conway's constant

Define matrix X_0 as the initial status of the Look and Say sequence; X_0 means the quantity of element i . Define matrix $A_{92 \times 92}$ as the iterations of Conway's 92 elements, and A_{ij} means the quantity of element j resulting from the iteration of each element i . Define matrix $d_{1 \times 92}$ as number of digits of each element; d_i means number of digits of element i .

$$A = PDP^{-1}, D_{92 \times 92} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{92} \end{bmatrix} \text{ is a diagonal matrix consisting of eigenvalues of}$$

matrix A.

$$\text{Growth rate} = \frac{d(A^{n+1} X_0)}{d(A^n X_0)}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d(A^{n+1} X_0)}{d(A^n X_0)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d \cdot PD^{n+1} P^{-1} \cdot X_0}{d \cdot PD^n P^{-1} \cdot X_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_1 \lambda_1^{n+1} + c_2 \lambda_2^{n+1} + \cdots + c_{92} \lambda_{92}^{n+1}}{c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \cdots + c_{92} \lambda_{92}^n}$$

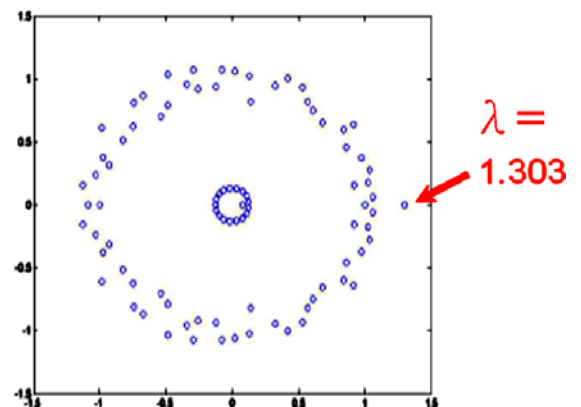
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_m \frac{c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^{n+1} + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_m}\right)^{n+1} + \cdots + c_{92} \left(\frac{\lambda_{92}}{\lambda_m}\right)^{n+1}}{c_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_m}\right)^n + c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_m}\right)^n + \cdots + c_{92} \left(\frac{\lambda_{92}}{\lambda_m}\right)^n} = \lambda_m \frac{c_m \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_m}\right)^{n+1}}{c_m \left(\frac{\lambda_m}{\lambda_m}\right)^n} = \lambda_m$$

We can see that λ_m , the largest eigenvalue in modulus of the matrix A, is the growth rate of the Look and Say sequence, which is 1.303..., and it's obvious that the growth rate is not related to the starting row.

The percentages of 1s, 2s, 3s

Using similar methods, we can also get the percentages of 1s, 2s, and 3s. Define X_n as the status of the n th row, which means $X_n = A^n X_0$. Define matrix a_i as

number of 1s in element i , b_i as number of 2s in element i , c_i as number of 3s in element i and d_i as number of digits in element i .



$$A^n = PD^n P^{-1}$$

$$X_n = A^n X_0 = PD^n P^{-1} X_0 = \begin{bmatrix} c_{1,1}\lambda_1^n + c_{1,2}\lambda_2^n + \dots + c_{1,92}\lambda_{92}^n \\ \vdots \\ c_{92,1}\lambda_1^n + c_{92,2}\lambda_2^n + \dots + c_{92,92}\lambda_{92}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^{92} c_{1,k}\lambda_k^n \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{92} c_{92,k}\lambda_k^n \end{bmatrix}_{92 \times 1}$$

$$\begin{aligned} \text{Number of 1s in the } (n+1)^{\text{th}} \text{ row} &= a_1 \cdot \sum_{k=1}^{92} c_{1,k}\lambda_k^n + a_2 \cdot \sum_{k=1}^{92} c_{2,k}\lambda_k^n + \dots + a_{92} \cdot \sum_{k=1}^{92} c_{92,k}\lambda_k^n \\ &= \sum_{i=1}^{92} \left(a_i \sum_{k=1}^{92} c_{i,k}\lambda_k^n \right) \end{aligned}$$

The percentage of 1s in the $(n+1)^{\text{th}}$ row

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{92} \left(a_i \sum_{k=1}^{92} c_{i,k}\lambda_k^n \right)}{\sum_{i=1}^{92} \left(d_i \sum_{k=1}^{92} c_{i,k}\lambda_k^n \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{92} (a_i c_{i,m} \lambda_m^n)}{\sum_{i=1}^{92} (d_i c_{i,m} \lambda_m^n)} = \frac{\sum_{i=1}^{92} (a_i c_{i,m})}{\sum_{i=1}^{92} (d_i c_{i,m})}$$

To calculate $c_{i,m}$, we use another matrix $D'_{92 \times 92}$. Let $D'_{m,m} = 1$

$$D_{92 \times 92} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & \lambda_m & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_{92} \end{bmatrix} \rightarrow D'_{92 \times 92} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ \vdots & & & 1 & \\ & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{so that } PD^n P^{-1} X_0 = \begin{bmatrix} c_{1,1}0^n + \dots + c_{1,m}1^n + \dots + c_{1,92}0^n \\ \vdots \\ c_{92,1}0^n + \dots + c_{92,m}1^n + \dots + c_{92,92}0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{1,m} \\ \vdots \\ c_{i,m} \\ \vdots \\ c_{92,m} \end{bmatrix}$$

With the help of Matlab, we can derive the percentages of 1s, 2s, and 3s being respectively 47.25%, 34.24%, 18.51% as the row number $n \rightarrow \infty$. Also, they are not related to the starting row.

References

1. Clifford A. Pickover. Wonder of Numbers, Chapter 55.
2. Eric W. Weisstein. Conway's Constant. Mathworld.
<http://mathworld.wolfram.com/ConwaysConstant.html>
3. Eric W. Weisstein. Look and Say sequence. Mathworld.
<http://mathworld.wolfram.com/LookandSaySequence.html>

4. Henry Bottomley, One Metaphor Fits All: A Fractal Voyage With Conway's Audioactive Decay.
<http://www.btinternet.com/~se16/mhi/index.htm>
5. Henry Bottomley. Look and Say. <http://www.btinternet.com/~se16/js/looknsay.htm>

評語

問題起源於 John H. Conway，是近年來最具挑戰性、最吸引人們做深入研究之趣味數學題材。雖然科展作者對於某些結果的看法過份樂觀，但對於中學生而言，透過本研究活動獲得了高品質的學習機會。