臺灣二ＯＯ六年國際科學展覽會

科　　　別：數學科

作品名稱：猜牌術

學校／作者：彰化縣立二林高級中學　蘇倍儀
彰化縣立二林高級中學　葉芽玲

我們是同班同學，在一次偶然中，與老師討論起了科展。因爲對數學有著濃厚的興趣而決定做科展。從那之後，我們就時常窩在一起討論我們的科展內容。

我們還會持續研究有關數學方面的問題與其延伸。這道題目仍有很多地方可以繼續研究，也希望未來能看到它在其他舞台上發光發熱。

非常感謝指導老師的教導以及家長們的支持與鼓勵。

作品名稱　　　　　　　　　　猜　牌　術

Card-Predicting Trick

英文摘要：

This research mainly talks about how someone, by observing the non-congruent patterns on the backs of the playing cards and by working with the dealer on a pre-arranged lay out, can call out the cards as if he possessed the magic power to see through them.

During the card-predicting game, one can use the patterns on the backs of the cards as visual clues（Observing whether it was places upside down or not）to help figure out the probability of where the card is going to show up. Suck a mathematical formula is known as the Pigeonhole Principle. Upon an analysis of the formula, we find that when given that the value of n is greater than 24, we can successfully call out a number of cards that is greater than $\frac{2n}{3}$. The possibility of such mathematical studies in other directions is endless.

中文摘要：

本研究主要探討利用橋牌非對稱的牌背，猜牌者經由和傳遞牌的人的一種事先約定的方式（排法），彷彿（魔術）透視般的將一疊牌的花色逐步猜出。其猜牌過程是利用牌背圖案的朝前朝後的指示，配合適當的猜牌張的分配，而運用到的數學法則包含鴿籠原理，分析與討論歸納。最後我們得到一疊由四種花色張數相等所混合的 n 張牌，可猜出的張數恆大於$\frac{2n}{3}$（n>24 時）。後續可研究的方向仍然甚廣。

一、前言：

2004 環球城市數學競賽高中組高級卷中有這樣一道題目：

「小田宣稱他有魔法，可以從撲克牌的背面透視它的花色，於是大家把包括有黑桃、紅心、方塊及梅花各 9 張的一疊 36 張牌洗好後，交由小方把這疊牌的牌面向下放在小田面前，要他說出這疊牌最上面一張牌的花色。當小田說出答案後即把這張牌翻開來驗證他的答案是否正確，並將這張牌放在一旁不再加入這疊牌中；接著繼續猜測下一張牌，重複以上程序。他試圖使猜測的正確次數愈多愈好。這副牌背面的圖樣完全相同但並非對稱的(即可以分辨出圖案朝前或朝後)。小方雖然知道這疊牌的排列順序，但他不能更動，也不能偷偷告訴小田。但是他可以依照事先與小田約定好的方式擺置撲克牌背面圖案的朝向來暗中協助小田。事實上，小田並無魔法，他只是利用數學方法來作分析判斷。請問在小方的協助下，小田有沒有辦法保證正確地預測到

　　甲、不少於 19 張牌？（三分）

　　乙、不少於 20 張牌？（五分）」

題目中的小田在已知 36 張牌中各種花色各含九張的情況下，經由小田與小方事先的約定，可由非對稱的牌背，根據其圖形朝前或朝後的指示，將整疊牌面向下的牌，由上面

第一張開始逐張預測，最後就能準確地預測到其中若干張牌的花色。這樣子的一種「預測」方法引起了我的好奇：到底題目中的小田最多能預測到幾張牌？而若將牌的數目改變，其況又如何？於是就開始了我們的研究。

二、研究方法或過程：

（一）、首先規定：

1、在一疊共 n 張的牌中，猜牌者欲猜出這 n 張牌的各張的花色。猜牌者已知這 n 張牌的花色組成（即黑桃、紅心、方塊、梅花各有若干張）。

2、這疊牌的牌背非對稱（可以其圖案朝前或朝後來做指示）。

3、猜牌方式爲先將牌整疊放好，再由上而下逐張預測。每次說出最上面牌的花色後即將該張牌打開驗證其猜牌是否正確，然後將該張牌放在一旁後繼續猜測下一張牌，如此重複以上程序至猜完所有牌爲止。

4、每次要猜這 n 張牌時先將這疊牌交給第三者，再由第三者轉交給猜牌者開始猜牌，此時此 n 張牌的順序已固定不可改變。

5、猜牌者可事先和這位「第三者」約定好牌背圖案的指示方式，經由「第三者」將此 n 張牌的牌背圖案朝前朝後適當的調整，猜牌者即可據此來「猜」每張牌的花色爲何。

6、在上述規定下，一疊 n 張的牌，猜牌者最多可以保證猜到多少張？

（二）、第一張牌的花色有四種可能，但是因爲只能看到第一張牌背，而牌背的圖案僅能有朝前朝後兩種指示，故第一張的花色無法保證猜出。

（三）、最後兩張牌，即第（n-1）張與第 n 張，因爲前（n-2）張牌的花色皆已看到，所以我們可得知最後兩張牌的花色爲何。只要定義：黑桃＞紅心＞方塊＞梅花，再以第（n-1）張牌的牌背指示，若牌背（圖案）朝前代表這兩張花色先大後小；若牌背（圖案）朝後代表這兩張花色先小後大，如此這兩張牌的花色必可保證猜中。（若兩張牌花色一樣則不用指示即可猜中）

（四）、定義：牌背圖案朝前以（F）表示，牌背圖案朝後以（B）表示，如此利用兩張的牌背指示即可猜出一張牌，方法爲：以兩張牌的牌背（F，F）表示梅花，（F，B）表示方塊，（B，F）表示紅心，（B，B）表示黑桃。

（五）若以兩張牌的牌背指示猜某 2 張牌的花色，除了至少可猜中 1 張外，並且可以得到一個額外的指示；或者直接猜中 2 張。因爲若這 2 張花色不相同只要我們規定：2 張牌背指示前一張牌的花色（先對後錯）代表（B），2 張牌背指示後一張牌的花色（先錯後對）代表（F）如此猜這 2 張牌除了保證至少猜中 1 張外並且可得到一個相當一張牌背的指示，如果將此指示再配合另一張牌的牌背就可以再猜中 1 張牌。

（六）若以兩張牌的牌背指示猜 5 張牌的花色，根據鴿籠原理至少可以猜中 2 張。

（七）若以兩張牌的牌背指示猜 6 張牌的花色，根據鴿籠原理至少可以猜中 2 張，並且可以得到一個「額外的指示」；或者直接猜中 3 張。說明如下：

1、若這 6 張牌中有 3 張花色相同，即可由 2 張牌的牌背指示而猜出這 3 張。

2、若這 6 張牌中沒有 3 張牌花色相同，則至少有兩種花色各有兩張（也許有 3 種

花色各 2 張)，我們可以規定：2 張牌背指示 6 張中先出現的兩張花色代表（B），2 張牌背指示 6 張中不是先出現的兩張花色代表（F），如此 6 張中除可保證猜到 2 張外並且可得到一個相當一張牌背的指示。

（八）根據（五）可知利用 3 張牌的牌背來猜某 3 張牌，可以保證猜中 2 張牌。方法如下：首先用前兩張牌背來猜 3 張牌中的前 2 張，也許直接猜中 2 張（當此 2 張花色相同時），或者只猜中一張（當此 2 張花色不同時），這時我們可以根據猜這 2 張牌的錯對情形，配合第 3 張牌背的指示，就可以猜出第 3 張牌。

三、研究結果與討論：

（一）有關 36 張牌中，黑桃、紅心、方塊、梅花各含 9 張的情況下，經由研究發現至少可以保證猜出 25 張。方法如下：

1、根據二之（四），以第一、二張牌的牌背指示來猜第 2~7 共六張牌，根據鴿籠原理至少可以猜對 2 張牌，並且可以得到一個相當一張牌背的指示（或者直接猜中 3 張牌）。（如二之（七）之 2 所規定）

2、定義：

集合 A={（黑桃，黑桃）、（紅心，紅心）、（方塊，方塊）、（梅花，梅花）}
集合 B={（黑桃，梅花）、（紅心，黑桃）、（方塊，紅心）、（梅花，方塊）}
集合 C={（黑桃，方塊）、（紅心，梅花）、（方塊，黑桃）、（梅花，紅心）}
集合 D={（黑桃，紅心）、（紅心，方塊）、（方塊，梅花）、（梅花，黑桃）}

並且以第 5、6 張牌的牌背來猜第 8、9 張牌，至於猜中哪一張，要配合第 26 張牌的花色，根據二之（五），此指示配合第 26 張牌的牌背就可猜中第 26 張牌。（或者第 8、9 張牌皆猜中，如此第 26 張牌的牌背將沒有用到，所以也無法猜中第 26 張牌。但是這三張牌（第 8、9、26 張）永遠可以猜中兩張）

仿上，以第 7、8 張牌的牌背來猜第 10、11 張牌，至於猜中哪一張，要配合第 27 張牌的花色來做出正確指示；以第 9、10 張牌的牌背來猜第 12、13 張牌，至於猜中哪一張，要配合第 28 張牌的花色來做出正確指示；以第 11、12 張牌的牌背來猜第 14、15 張牌，至於猜中哪一張，要配合第 29 張牌的花色來做出正確指示；以第 13、14 張牌的牌背來猜第 16、17 張牌，至於猜中哪一張，要配合第 30 張牌的花色來做出正確指示；以第 15、16 張牌的牌背來猜第 18、19 張牌，至於猜中哪一張，要配合第 31 張牌的花色來做出正確指示；以第 17、18 張牌的牌背來猜第 20、21 張牌，至於猜中哪一張，要配合第 32 張牌的花色來做出正確指示；以第 19、20 張牌的牌背來猜第 22、23 張牌，至於猜中哪一張，要配合第 33 張牌的花色來做出正確指示；以第 21、22 張牌的牌背來猜第 24、25 張牌，至於猜中哪一張，要配合第 34 張牌的花色來做出正確指示。

3、由 2 之猜法，被猜的每三張爲一組，共有九組，而每一組的前 2 張花色所成的序對必定屬於 2 所定義之四個集合 A、B、C、D 其中之一元素。我們再定義：第 3、4 張牌的牌背（F、F）表示 A 集合，（F、B）表示 B 集合，（B、F）表示 C 集合，（B、B）表示 D 集合。此九組所成的 9 個元素中，各集合的元素出現最多次的此集合代號以第 3、4 張牌的牌背來表示，根據鴿籠原理這個表示的集

合至少涵蓋 9 個元素中的其中 3 個元素，而 2 所提出之猜法，即以第 3、4 張牌的牌背指示來猜。例如：若第 3、4 張指示 C 集合，而第 8、9 張牌分別是黑桃、紅心，那麼第三者在排牌背圖案方向時，若他想讓前一張猜對，那第 5、6 張就要指示黑桃，而猜牌者看到牌背應對第 8、9 張牌分別猜黑桃、方塊；而如果第三者想讓後一張猜對，那他應指示紅心，這時猜牌者應對第 8、9 張牌分別猜紅心、紅心（因爲前一張錯了，所以後一張只好再猜紅心）。

4、由 2 及 3 知在第 8~34 張的 9 組牌中，每一組的前兩張至少有 3 組可以完全猜對，另 6 組只猜對一張；而第 26~34 的 9 張牌中，有 6 張可根據前面指示而猜中，另外有 3 張的牌背沒有用到且這 3 張未被猜出，但這 3 張可以由第 23、24、25、及此 3 張共 6 張牌的牌背指示而猜出。

5、第 35、36 張，由二之（三）的方法，用第 35 張牌的牌背指示即可猜中。

6、所以共猜中了 2+3×2+6+9+2＝25 張牌。

（二）、在討論猜法與猜法的順序排列時常會遇到如下的問題：用 x 張牌的牌背來猜 y 張牌，最多可保證猜中的張數 f（x，y）爲何？因此我們建立了下表：

y / x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	4
3		1	2	2	2	2	3	3	3	3	4	4	4
4		2	2	2	3	3	3	3	4	4	4	4	5
5			2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5
6			3	3	3	4	4	4	5	5	5	5	6
7				3	4	4	4	5	5	5	6	6	6
8				4	4	4	5	5	5	6	6	6	7
9					4	5	5	5	6	6	6	7	7
10					5	5	5	6	6	6	7	7	7
11						5	6	6	6	7	7	7	8

在表中，由於用 x 張牌的牌背猜 y 張牌，可先將 x 張牌拆成 m 張與（x-m）張兩部分，再分別猜 k 張與（y-k）張，又因爲 m 與 k 的取法不爲唯一，故知

f（x，y）=max{f（m，k）+f（x-m，y-k）}，其中 m 爲介於 2 與（x-2）之間的正整數。

（三）、另外我們分別研究了 n 張一疊的牌，當 n 爲 4 的倍數時（其中每種花色各有 $\frac{n}{4}$ 張），利用此種「猜牌術」所能猜出各牌正確花色，其張數的最大值如下表：

n	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48
保證猜出張數最大值	3	5	8	11	14	17	20	22	25	28	31	34

（四）、由（一）之 1，用 1、2 張牌的牌背猜第 2~7 張共 6 張牌，可得到一個相當 1 張牌背的指示，但是此指示最後並沒有用到（浪費掉），可知若 n=37 時，此指示可

再配某一張牌的牌背而猜出一張牌，所以當 n=37 時可猜中 26 張牌。

四、結論與應用：

（一）、一疊已知其內容的 n 張牌，若牌背並非對稱，則可依牌背的指示「作弊」而猜出若干張牌，當花色有四種混合，n=36 時可保證至少猜出 25 張，n=37 時可保證至少猜出 26 張。

（二）、當 n 值很大時，我們可以說：平均每 3 張牌可保證至少猜中兩張（依照二之（八）的方法）。

（三）、截至目前的研究，當 n 為四的倍數時，由四種花色按等張數的花色混合的 n 張牌，可藉由和第三者事先約定好的一種猜牌術猜牌，而可猜出的張數恆大於或等於$[\frac{2n}{3}]$張（左式為高斯整數記號），而當 $n \geq 12$，猜中的牌數恆不小於$\frac{2n}{3}$張。

五、參考文獻：無。

評語

問題起源於出名的數學競賽題目，困難程度頗高。作品內容當中應該加強文獻的功夫。