臺灣二ＯＯ六年國際科學展覽會

科　　　別：數學科

作 品 名 稱：凸ｎ邊形等分面積線數量之分布探索

得 獎 獎 項：第二名

學校／作者：臺北縣立福和國民中學　張湘琦
　　　　　　臺北縣立福和國民中學　鄭巧君

作者簡介

作者一：張湘琦(右二)

我是張湘琦，就讀於福和國中三年級美術資優班。興趣是玩數學問題和畫圖
課餘時間喜歡和朋友們去打球逛街放鬆心情。

自從上了國中之後，在老師的引導之下，對數學漸漸產生了興趣。經過思考討論求得的答案，令人興奮且很有成就感。這次能夠參加國際科展真是新鮮又刺激，很感謝老師的指導，使我獲益匪淺。

作者二：鄭巧君(左一)

我是鄭巧君，小時候因爲爸爸(北部教書)、媽媽(空服員)工作關係，所以學齡前由住在南部鄉下的爺爺、奶奶帶大，直到幼稚園大班才回北部與爸媽同住。

小學時，我喜歡音樂、玩玩樂器(鋼琴、長笛、吉他)，對於學科並不特別在意，遇到老師又很好。因此，我有個快樂的童年。升上國中，情況全然不同，還好從學習中，我找到另一個興趣---數學。在浩瀚的數學領域裡，雖然所知極爲有限，但對於不懂的題目，隨時可藉著電腦上網搜尋或尋求同儕、老師的協助。因此，不至於有太大的挫折，反而因學習更活潑、更積極，良性循環的結果，讓我打好數學基礎，也讓國中生涯變得較有生趣。真該謝天！

The distribution of bisectors in convex polygon

壹、摘要

一、英文摘要(Abstract)

1) Our study got a curve equation of bisectors of a triangle. When a bisector is moving, we get three curves. They're constructed by the midpoints of $\overline{PQ}$. The three parts of the three curves make a closed curve which we called "the Envelope Area".

We found out:

1. When Point P is in the Envelope Area, we can get 3 bisectors.
2. When Point P is on the curves of the Envelope Area, we can get 2 bisectors.
3. When Point P is outside of the Envelope Area, we can get only 1 bisector.

2) Based on our study of triangles, we found that in Convex polygons(not including Point Symmetry Convex polygons), the distribution of bisectors is related to the Envelope Area.

1. We can get at most $2m+1$ bisectors in a $2m+1$ Convex polygon.
2. We can get at most $2m-1$ bisectors in a $2m$ Convex polygon, and the bisectors on the curves will "Change the Track".
3. Envelope curve will divide a Convex polygon into several areas. The same area has the same numbers of bisectors, and the near areas have less or more 2 bisectors.

3) If a Convex polygon has k points to change the track, it will have at most $n-k$ bisectors.

4) In a Point Symmetry Convex polygon (ex. Regular $2m$ convex polygons and parallelograms), all the bisectors will come through the center point.

二、中文摘要

(一) 本研究首先導出ΔABC等分面積線移動所包絡出的曲線方程式，其圖形是由等分面積線段$\overline{PQ}$(其中P、Q皆在ΔABC的周界上)的中點所構成，具有 3 條曲線段(分別為 3 條雙曲線之一部分)的封閉曲線，形成內文所謂的「包絡區」。利用包絡區的區隔，

我們找出：

1.當 P 點在包絡區內，則有 3 條等分面積線。

2.當 P 點在包絡區周界上，則有 2 條等分面積線。

3.當 P 點曲線段的端點或在包絡區外，則有 1 條等分面積線。

(二) 以三角形的研究當基礎，擴展到凸 n 邊形(不包含點對稱圖形)，我們發現：等分面積線數量之分布，仍然與包絡區息息相關，且

1.凸 $2m+1$ 邊形最多有 $2m+1$ 條等分面積線。

2.凸 $2m$ 邊形，必發生內文所謂的「換軌」。因此，最多只有 $2m-1$ 條等分面積線。

3.包絡曲線所分割出的區域，於相同區域其等分面積線數量相同，且相鄰兩區域數量差兩條。

(三) 若凸 n 邊形有 k 個「換軌點」，則此 n 邊形過定點等分面積線至多有 $n-k$ 條。

(四) 若凸 n 邊形為點對稱圖形(如正偶數邊形、平行四邊形)，則所有等分面積線皆過中心點。

註：說明書最後一頁附有本研究的操作光碟，煩請配合使用，以方便內容的了解。

貳、研究報告

一、 前言

(一) 研究動機

在課堂上，老師提到「三角形中線等分其面積，且三條中線交於一點，稱為重心」。當時，我們想到利用此結果，可知過重心最少存在 3 條等分面積線。若在此三角形內取一動點 P 與重心很接近，猜測應該有不只 1 條的等分面積線。當 P 點越離開重心時，其等分面積線數量又會如何？而過定點的等分面積線數量是否與某些特定區域有關？若有，那麼這些特定的區域是如何界定？....？？？一連串的問號，開啓我們的探索之旅。

(二) 研究目的

1、探討三角形等分面積線與其移動所產生的相關曲線之關聯性。

2、探討三角形等分面積線數量之多寡與分布。

3、以三角形研究當基礎，探討凸 n 邊形等分面積線數量之多寡與分布。

(三) 研究器材

電腦、*GSP* 軟體。

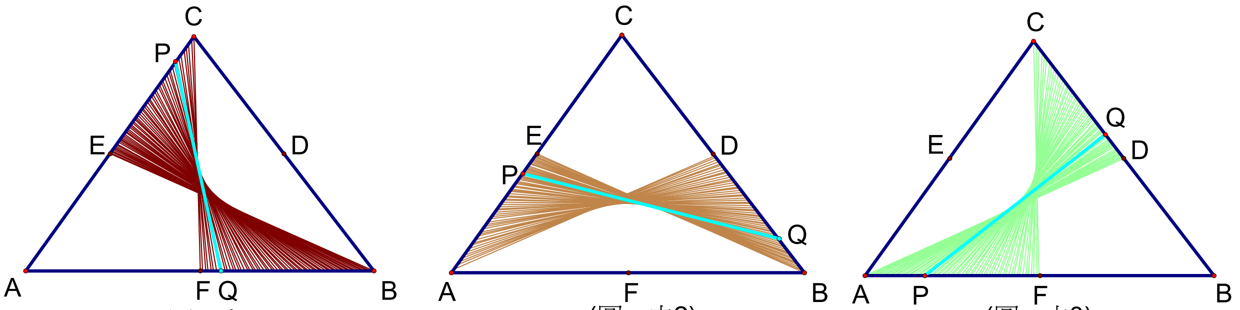
二、 研究過程

(一)預備知識：

包絡線的定義：某個參數曲線族 $T(x,y,t)=0$，可找到一曲線 $P(x,y)=0$ 與 $T(x,y,t)=0$ 均相切，此 $P(x,y)=0$ 稱爲 $T(x,y,t)=0$ 的包絡線。

(二)探討內容：

由於「過三角形周界上一點，必有一條等分面積線段」，基於這樣的事實，我們利用 GSP 軟體來操作，先在 ΔABC 周界上取一動點 P，接著作 $\overleftrightarrow{PQ}$ (Q 爲 ΔABC 周界上一點)將 ΔABC 面積兩等分，並觀察 $\overleftrightarrow{PQ}$ 移動之軌跡變化(如圖一之 1、2、3)。(圖中，$\overline{AD}$ 、$\overline{BE}$ 、$\overline{CF}$ 爲 ΔABC 三條中線)



(圖一之1) (圖一之2) (圖一之3)

從圖中我們發現兩個現象：

> **1. $\overline{PQ}$ 之軌跡構造出 3 條曲線。**
>
> **2. 越往 ΔABC 重心靠近之點有較多數量的等分面積線通過。**

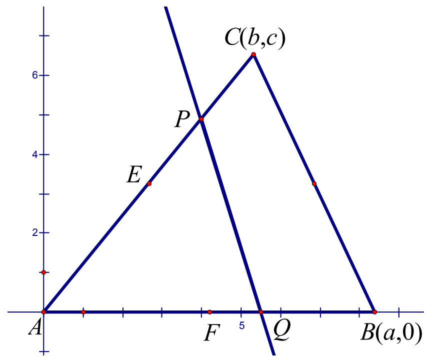
我們嘗試任意改變 ΔABC 的圖形，結果上述兩現象仍存在。爲了更加確認，我們上網搜尋是否有相關資料？結果在[黃文達教授的個人網頁之中學科展主題]中，提到三角形等分面積線具有包絡現象及相關作品「第三十一屆科展高中組—三角形分割線形成的包絡線」。利用此線索，我們到市立圖書館找到該作品，由作品內容我們得到上述第一個現象的解答，即「**三角形等分面積線段 $\overline{PQ}$ 構造出的曲線爲雙曲線的一部分**」。至於如何得知此雙曲線？由於作品內容僅大略記載，並使用我們尚未

學到的數學知識(如向量、矩陣、偏微分)去解答。因此，老師鼓勵我們可嘗試用其它方式來探索此雙曲線，進而朝我們的研究主題邁進。

[主題一]:三角形等分面積線移動產生的包絡現象與過定點等分面積線數量之探討。

[一之 1]---三角形等分面積線形成的雙曲線方程式推導：

將ΔABC座標化，設$A(0,0),B(a,0),C(b,c)$，由於過ΔABC周界上一點P必存在一條(唯一)等面積線，且因爲三角形中線等分其面積。因此，我們可考慮當P在$\overline{\mathrm{CE}}$(E爲$\overline{\mathrm{AC}}$之中點)上移動時，其等分面積線段$\overline{PQ}$之另一端點Q，必也同時在$\overline{BF}$(F爲$\overline{AB}$之中點)上移動，如(圖二之 1)。



(圖二之 1)

假設等面積線$\overleftrightarrow{PQ}: y = mx + k$

因爲 $\overleftrightarrow{AC}: y = m_1 x$(其中$m_1 = \dfrac{c}{b}$)

(1) $\begin{cases} y = mx + k \\ y = m_1 x \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = \dfrac{k}{m_1 - m} \\ y = \dfrac{m_1 \cdot k}{m_1 - m} \end{cases}$ 即 $P(\dfrac{k}{m_1 - m}, \dfrac{m_1 k}{m_1 - m})$

(2) $\begin{cases} y = mx + k \\ y = 0 \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x = -\dfrac{k}{m} \\ y = 0 \end{cases}$ 即 $Q(-\dfrac{k}{m}, 0)$

又 ΔPAQ面積=$\dfrac{1}{2}\Delta ABC$面積，所以 $\dfrac{1}{2}(-\dfrac{k}{m})(\dfrac{m_1 k}{m_1 - m}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} ac$

整理得 $m_1 k^2 = \dfrac{1}{2} acm(m - m_1)$

$$m_1 (y - mx)^2 = \frac{1}{2} acm(m - m_1) \qquad (\text{以 } k = y - mx \text{ 代入})$$

$$m_1 (y^2 - 2mxy + m^2 x^2) = \frac{1}{2} acm(m - m_1)$$

$$m_1 y^2 - 2m_1 xym + m_1 x^2 m^2 = \frac{1}{2} acm^2 - \frac{1}{2} acm_1 m$$

$$(2m_1x^2-ac)m^2+(acm_1-4m_1xy)m+2m_1y^2=0$$

由於自 ΔABC 周界上一點 P ，作等分面積線有且僅有一條等分面積線，

所以判別式=0

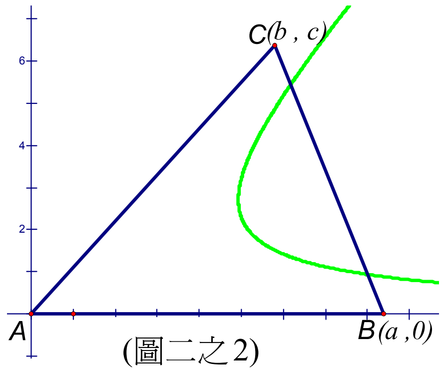
(若 $2m_1x^2-ac=0 \Rightarrow x^2=\dfrac{ac}{2m_1}=\dfrac{ac}{2\cdot\frac{c}{b}}=\dfrac{ab}{2} \Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{ab}{2}}$ 為 ΔABC 的鉛直等分面積線)

可得 $(acm_1-4m_1xy)^2-4(2m_1x^2-ac)(2m_1y^2)=0$

$$a^2c^2m_1^{\ 2}-8acm_1^{\ 2}xy+16m_1^{\ 2}x^2y^2-16m_1^{\ 2}x^2y^2+8m_1acy^2=0$$

$$8y^2-8m_1xy+acm_1=0$$

其圖形如(圖二之 2)。



(圖二之 2)

一之 2]---三角形等分面積線與其

形成的雙曲線之關係：

解下列聯立方程式

$$\begin{cases} y=mx+k & \cdots\cdots(1) \\ 8y^2-8m_1xy+acm_1=0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1) 代入 (2)

得 $8y^2-8m_1(\dfrac{y-k}{m})y+2(-\dfrac{k}{m})(\dfrac{m_1k}{m_1-m})m_1=0$ [$\because ac=2(-\dfrac{k}{m})(\dfrac{m_1k}{m_1-m})$]

$$8m(m-m_1)y^2-8m_1(y-k)\cdot y\cdot(m-m_1)+2m_1^{\ 2}k^2=0$$

$$4(m-m_1)^2y^2+4m_1(m-m_1)ky+m_1^{\ 2}k^2=0$$

$$[2(m-m_1)y+m_1k]^2=0$$

得 $y=\dfrac{m_1k}{2(m_1-m)}$ (重根)

$$x=\frac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)}$$

即兩方程式圖形交於一點，可知： ΔABC 的等分面積線為此雙曲線之切線。再根據「包絡線」的定義，及 P 只限定在 $\overline{CE}$ 上移動，可推得 $\overleftrightarrow{PQ}$ 包絡出的圖形是一條具有兩端點的曲線(雙曲線的一部分)。以下研究，我們把具有兩端點的包絡曲線統

稱爲「曲線段」。

進而我們發現：

兩圖形交點座標$\left(\dfrac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)},\dfrac{m_1k}{2(m_1-m)}\right)$爲等面積線段$\overline{PQ}$之中點座標。

由此發現可推得$\overline{PQ}$的中點座標構造出一條雙曲線的曲線段。利用此結果，我們可快速繪出三角形等分面積線所包絡出的曲線段。而不需要再尋求包絡線的方程式，可說是本研究的一大進展。

接著，由 $8y^2-8m_1xy+acm_1=0$，可推得

當 $8y^2-8m_1xy=0$

$\Rightarrow y(y-m_1x)=0$

得 $y=0$，$y=m_1x$爲$8y^2-8m_1xy+acm_1=0$之圖形---雙曲線的漸進線。仔細一瞧，此兩條線竟然是$\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{AC}$ 。顯然，雙曲線之中心爲ΔABC的頂點座標A點。

==

因此，綜合上述研究可得結論如下：

當P在$\overline{CE}$上移動，其等分面積線$\overleftrightarrow{PQ}$包絡出一條曲線段，假設此曲線段所在的雙曲線方程式爲C_1，則

1. C_1 ：**8**y^2**-8**$m_1xy+acm_1=0$

2. $\overleftrightarrow{PQ}$爲C_1之切線

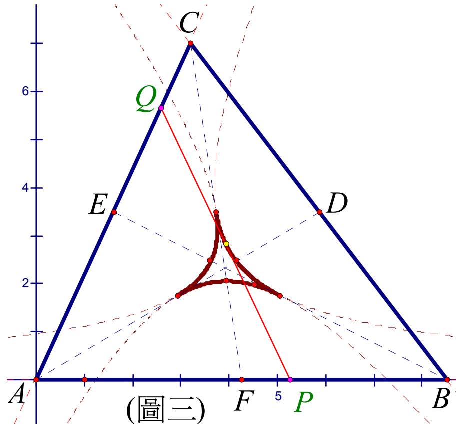
3. $\overleftrightarrow{PQ}$與C_1之交點座標爲$\overline{PQ}$之中點座標($\dfrac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)}$ ，$\dfrac{m_1k}{2(m_1-m)}$)

4. C_1之漸進線爲$\overleftrightarrow{AB}$ **(**x**軸)**、$\overleftrightarrow{AC}$ **(**$y=m_1x$**)**

5. **雙曲線**C_1之中心爲ΔABC之頂點A

由上述結論可推得：當P在$\overline{AE}$及$\overline{AF}$上移動時，ΔABC的等分面積線$\overleftrightarrow{PQ}$必也包絡出另兩條曲線段(雙曲線的一部分)。由於P從$C-E$ 、$E-A$、$A-F$之移動是沒有斷點。

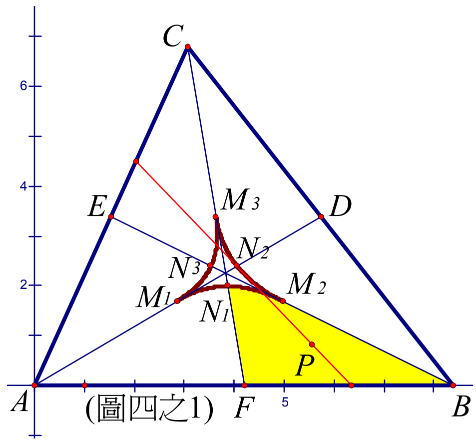
因此由 $\overleftrightarrow{PQ}$ 所包絡出的三條曲線段必形成一條封閉曲線。繪出圖形如(圖三)。其中三條曲線段的端點剛好爲 ΔABC 三條中線的中點座標。



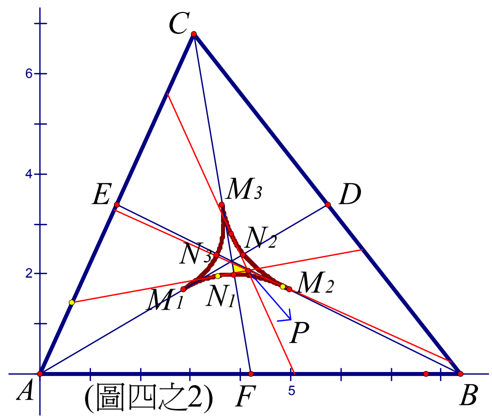
(圖三)

至於這條封閉曲線到底還有哪些特殊意義呢？

由前面的結論，我們得知 ΔABC 的等分面積線是此條封閉曲線的切線。因此，只要能判定過定點 P 對於此條封閉曲線有幾條切線，就可確定過 P 有幾條等分面積線。針對這樣的事實，我們想到可利用 ΔABC 三中線與封閉曲線上的三條曲線段(M_1-M_2 、 M_2-M_3 、 M_3-M_1)及定點 P 的位置關係，來判斷是否有等分面積線？



(圖四之1)



(圖四之2)

圖中： M_1 、 M_2 、 M_3 分別爲 $\overline{\boldsymbol{AD}}$ 、 $\overline{\boldsymbol{BE}}$ 、 $\overline{\boldsymbol{CF}}$ 的中點， N_1 、 N_2 、 N_3 分別爲三中線 $\overline{\boldsymbol{CF}}$ 、 $\overline{\boldsymbol{AD}}$ 、 $\overline{\boldsymbol{BE}}$ 與三條曲線段 $\boldsymbol{M_1}$ **-** $\boldsymbol{M_2}$ 、 $\boldsymbol{M_2}$ **-** $\boldsymbol{M_3}$ 、 $\boldsymbol{M_3}$ **-** $\boldsymbol{M_1}$ 之交點。

結果如下：

(1) P 點在圖四之 1 中，黃色區域(不含 N_1-M_2 曲線段)僅能作一條關於 M_2-M_3 曲線段之切線。所以，過此區域之定點 P 僅有一條等分面積線。

(2) P 點在圖四之 2 中，黃色區域(不含 N_1-M_2 曲線段)，可作兩條關於 M_1-M_2 曲線段之切線及一 條關於 M_2-M_3 曲線段之切線。所以，過此區域之定點 P 共有三條等分面積線。

(3) P 點在 N_1-M_2 曲線段上(不含 M_2)，則可作一條關於 M_1-M_2 曲線段之切線及

一條關於 M_2-M_3 曲線段之切線。所以，P 在 N_1-M_2 曲線段上(不含 M_2)共有兩條等分面積線。至於 P 在 M_2 上則上述兩條切線合而爲一。所以，僅有一條等分面積線，即中線 $\overline{BE}$ 。

利用(1)(2)(3)可類推出其它區域。爲了方便說明，本研究定義名稱如下：

包絡區：由數個包絡線所圍成的封閉區域稱之。

可得過定點 P ，ΔABC 之等分面積線數量之結論：

(1) 若 P 點在 ΔABC 包絡區外側，則只有一條等分面積線。

(2) 若 P 點在 ΔABC 包絡區周界(M_1 、M_2 、M_3 除外)，則有兩條等分面積線。

(3) 若 P 點在 M_1 或 M_2 或 M_3 上，則只有一條等分面積線。

(4) 若 P 點在 ΔABC 包絡區內側，則共有三條等分面積線。

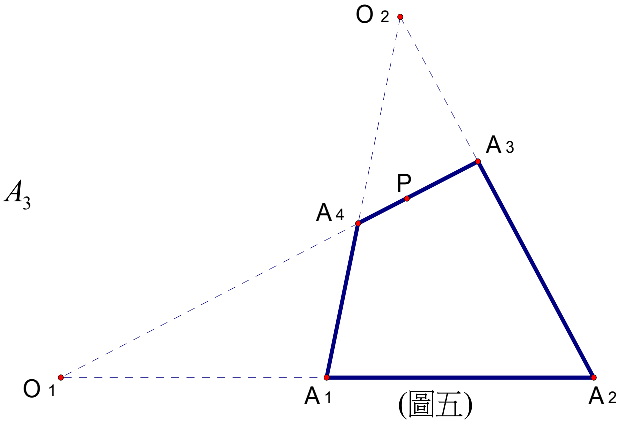
===

接下去，我們以三角形的研究結果當基礎，繼續探討四邊形的一般化問題。

[主題二]：凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 等分面積線產生的包絡現象及過定點等分面積線數量的探討

1. 若四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 兩雙對邊皆不平行，我們想到可將兩雙對邊分別作延長(如圖五)，形成 $\Delta O_1A_2A_3$ 、$\Delta O_2A_1A_2$ ，再將 P 點在四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 周界上移動形成的等面積線段 $\overline{PQ}$ 視爲在 $\Delta O_1A_2A_3$ 、$\Delta O_2A_1A_2$ 之 r_1 及 r_2 等分面積線段。

(其中 $r_1=\dfrac{\Delta O_1PQ}{\Delta O_1A_2A_3}$ ，$r_2=\dfrac{\Delta O_2PQ}{\Delta O_2A_1A_2}$)



(圖五)

但問題來了，現在已不是兩等分三角形面積，而之前三角形內部包絡區是由其所有等分面積線段之中點構成。

基於上述疑問，我們須解決下面一般化問題：

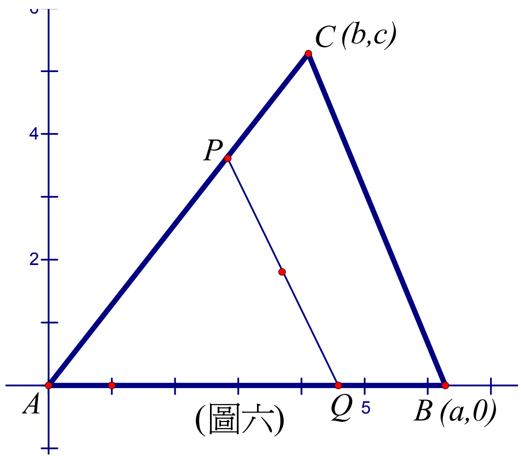
ΔABC 中，$A(0,0),B(a,0),C(b,c)$ ，P 爲 ΔABC 周界上的動點，若 $\overline{PQ}$ (Q 在 ΔABC 周界上)分割 ΔABC 面積，使得 $\Delta PAQ=r\Delta ABC$ 面積。則當移動 P 點，$\overline{PQ}$ 是否能包絡出曲線？若能，其關係又如何？(如圖六)

考慮P、Q分別在$\overline{AC}$與$\overline{AB}$的情況下：

假設 $\overleftrightarrow{PQ}: y = mx + k$

$\overleftrightarrow{AC}: y = m_1 x$ (其中$m_1 = \frac{c}{b}$)

得 $P(\frac{k}{m_1 - m}, \frac{m_1 k}{m_1 - m})$、$Q(-\frac{k}{m}, 0)$



(圖六)

又ΔPAQ面積$= r\Delta ABC$面積

所以 $\frac{1}{2}(-\frac{k}{m})(\frac{m_1 k}{m_1 - m}) = r \times \frac{1}{2}ac$

$$-\frac{m_1 k^2}{m(m_1 - m)} = rac$$

$$m_1 k^2 = racm(m - m_1)$$

($k = y - mx$ 代入)

$$m_1 (y - mx)^2 = racm(m - m_1)$$

$$m_1 (y^2 - 2mxy + m^2 x^2) = racm(m - m_1)$$

$$m_1 y^2 - 2m_1 xym + m_1 x^2 m^2 = racm^2 - racm_1 m$$

$$(m_1 x^2 - rac)m^2 + (racm_1 - 2m_1 xy)m + m_1 y^2 = 0$$

由於自ΔABC周界上一點P，作ΔPAQ面積$= r\Delta ABC$面積只有一條r等分面積線

所以判別式=0

(若$m_1 x^2 - rac = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{rac}{m_1} = \frac{rac}{\frac{c}{b}} = rab \Rightarrow x = \sqrt{rab}$ 爲ΔABC鉛直r等分面積線)

得 $(racm_1 - 2m_1 xy)^2 - 4(m_1 x^2 - rac)(m_1 y^2) = 0$

$$r^2 a^2 c^2 m_1^2 - 4racm_1^2 xy + 4m_1^2 x^2 y^2 - 4m_1^2 x^2 y^2 + 4rm_1 acy^2 = 0$$

$4y^2 - 4m_1 xy + racm_1 = 0$ ----------- 圖形仍爲雙曲線

當 $4y^2 - 4m_1 xy = 0$

$$4y(y - m_1 x) = 0$$

得 $y = 0$ (即爲$\overleftrightarrow{AB}$)，$y = m_1 x$ (即爲$\overleftrightarrow{AC}$)

爲此雙曲線之漸近線。

解下列聯立方程式：

$$\begin{cases} y = mx + k & \cdots\cdots\cdots(1) \\ 4y^2 - 4m_1xy + racm_1 = 0 & \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

(1) 代入 (2)

得 $4y^2 - 4m_1(\frac{y-k}{m})y + (-\frac{k}{m})(\frac{m_1k}{m_1-m})m_1 = 0 \quad [\ \because rac = (-\frac{k}{m})(\frac{m_1k}{m_1-m})\ ]$

$$4m(m-m_1)y^2 - 4m_1(y-k)\cdot y\cdot(m-m_1) + m_1{}^2k^2 = 0$$

$$4(m-m_1)^2y^2 + 4m_1(m-m_1)ky + m_1{}^2k^2 = 0$$

$$[2(m-m_1)y + m_1k]^2 = 0$$

$$\Rightarrow y = \frac{m_1k}{2(m_1-m)} \quad (\text{重根})$$

$$x = \frac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)}$$

得兩方程式圖形交於一點，可知：$\overleftrightarrow{PQ}$ 爲此一雙曲線之切線，且兩圖形交點座標

$\left(\frac{(2m-m_1)k}{2m(m_1-m)}, \frac{m_1k}{2(m_1-m)}\right)$ 爲 $\overline{PQ}$ 之中點座標，即 $\overline{PQ}$ 之中點座標構造出包絡線。

==

顯然兩等分三角形面積，僅是 r 等分三角形面積的特例而已。

利用這樣的結果，我們可擴展到凸 n 邊形得到以下結論：

(1) 凸 n 邊形的等分面積線包絡出的曲線，必爲雙曲線之一部分，且雙曲線的漸近線必爲凸 n 邊形某二邊長的延長線。

(2) 凸 n 邊形的等分面積線包絡出的曲線，必由其等分面積線段之中點座標構造而成。

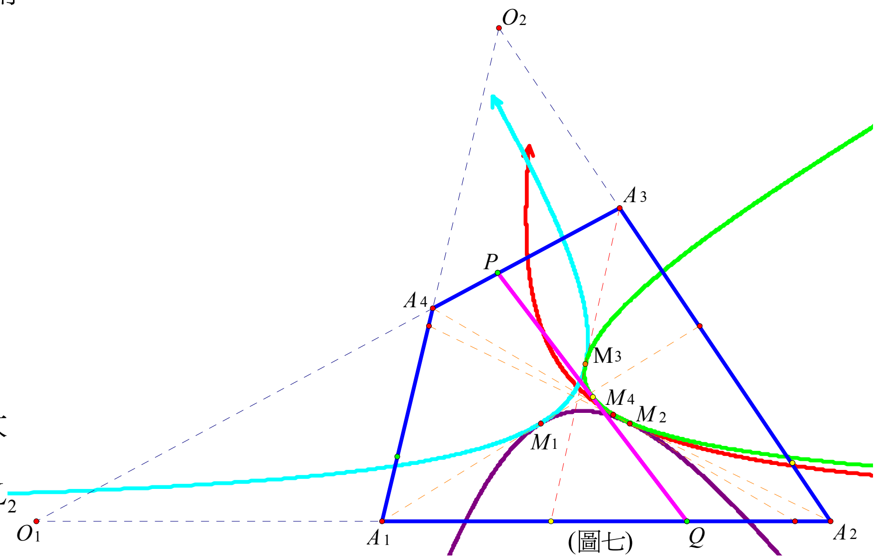
(3) 凸 n 邊形的等分面積線包絡出的曲線段端點必爲過頂點等分面積線段之中點。

==

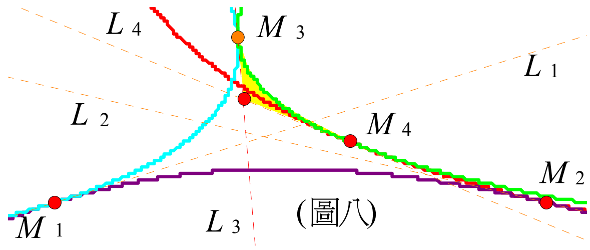
由上述結論，我們可得凸四邊形 $A_1A_2A_3A_4$，因爲有 4 條過頂點的等分面積線段，而曲線段的端點是這 4 條過頂點等分面積線段的中點。因此，可判斷出等分面積線

段所包絡出的曲線段至多有 4 條。接著，利用[等分面積線段中點構造出雙曲線的曲線段]之結論，我們利用 *GSP* 繪圖如(圖七)。

(圖七)中，包絡區內部顯然太小不容易討論。因此，我們將四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 稍作調整，並將包絡區放大如(圖八)， 圖中 L_1 、 L_2 、 L_3 、 L_4 與 M_1 、 M_2 、 M_3 、 M_4 分別為過頂點 A_1 、 A_2 、 A_3 、 A_4 之等分面積線段與等分面積線段中點。

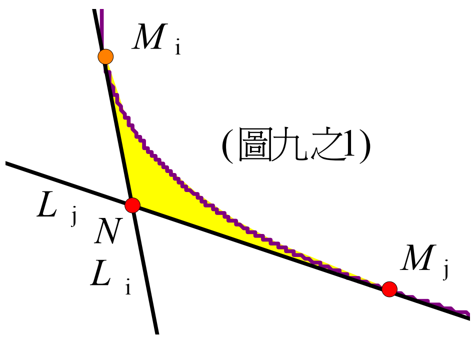


(圖七)

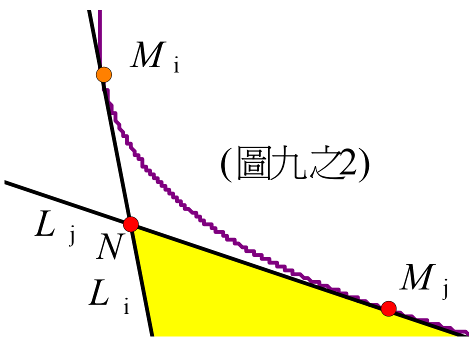


(圖八)

接著，我們作出**[等分面積線判斷圖]**如下：



(圖九之1)



(圖九之2)

(1) 若 P 點在(圖九之 1)黃色區域中(不含 $M_i - M_j$ 曲線段)，則有兩條關於 $M_i - M_j$ 曲線段之切線，即有兩條等分面積線。

(2) 若 P 點在(圖九之 2)黃色區域中(不含 $\overline{NM_j}$)，則有一條關於 $M_i - M_j$ 曲線段之切線，即有一條等分面積線。

(3) 若 P 點在 $M_i - M_j$ 曲線段上，則有一條關於 $M_i - M_j$ 曲線段之切線，即有一條等分面積線。

利用**[等分面積線判斷圖]**，我們可判斷出(圖七)中

(1) **若 P 點在四邊形 $A_1\ A_2A_3A_4$ 包絡區外側，則只有一條等分面積線。**

(2) **若 P 點在四邊形 $A_1\ A_2A_3A_4$ 包絡區周界(M_1 、 M_2 、 M_3 除外)，則有兩條等分面積線。**

(3) **若 P 點在 M_1 或 M_2 或 M_3 上，則只有一條等分面積線。**

(4) **P 點在四邊形 $A_1\ A_2A_3A_4$ 包絡區內側，則共有三條等分面積線。**

所得結論，竟然與三角形等分面積線數量完全相同。爲什麼會有這樣的結果？我們重新檢視(圖七)、 (圖八)，發現到一個很有趣的現象，即當 P 點從 A_3 移動到 A_4 時，其等分面積線段的中點構造出 $M_3 - M_4$ 曲線段，接著繼續移動產生 $M_4 - M_2$ 曲線段。如果將曲線段延長成兩條雙曲線，我們可發現到當 P 點移動，其等分面積線段的中點也跟著動且在 M_4 形成「**換軌**」現象。爲什麼會有此「**換軌**」現象呢？

回到四邊形一開始的(圖五)，按照圖中 O_1 、 O_2 的交點位置，可推得

(1) $\Delta A_1A_2A_3 > \Delta A_1A_2A_4 > \Delta A_1A_3A_4$

所以存在等分面積線段兩端點分別在 $\overline{A_1A_2}$ 及 $\overline{A_2A_3}$ 兩鄰邊移動，因此，可視爲在 $\Delta A_1A_2A_3$ 作 r 等分面積移動，其等分面積線段中點所構成的曲線段之雙曲線必與 $\overline{A_1A_3}$ 相交。

(2) 當 $\Delta A_1A_2A_4 \neq \Delta A_2A_3A_4$

同(1)之堆論，可得一雙曲線必與 $\overline{A_2A_4}$ 相交。

(3) 當等分面積線段之兩端點分別在 $\overline{A_1A_2}$ 與 $\overline{A_3A_4}$ 兩對邊移動，因此，可得一雙曲線與 $\overline{A_2A_3}$ 相交。

(4) 同(3)之分析，可得第四條雙曲線與 $\overline{A_1A_2}$ 相交。

綜合(1)(2)(3)(4)，在 $\Delta A_1A_2A_4 \neq \Delta A_2A_3A_4$ 時，可得過 A_2 之三線段($\overline{A_1A_2}$ 、 $\overline{A_2A_4}$ 、 $\overline{A_2A_3}$)皆有一條雙曲線通過。因此，必存在有兩條雙曲線凹向相同形成內切，且在

其中一條雙曲線的曲線段端點處(如圖七中的M_4)形成「**換軌**」**(註)**。

註：對於兩條內切的曲線，一動點從其中一條曲線通過切點移動到另一條曲線上，我們把此種過程，稱為「**換軌**」。上述移動過程所經過的切點，稱為「**換軌點**」。

當$\Delta A_1A_2A_4=\Delta A_2A_3A_4$時，此「接軌」的曲線段($M_2-M_4$)消失(即$M_2$與$M_4$重合)。

2. 若四邊形$A_1A_2A_3A_4$中，$\overline{A_1A_2}\,//\,\overline{A_3A_4},\overline{A_1A_2}\neq\overline{A_3A_4}\Rightarrow$即$A_1A_2A_3A_4$為梯形。

當$\overline{A_1A_2}>\overline{A_3A_4}$，可延長$\overline{A_1A_4}$與$\overline{A_2A_3}$交於$O$，形如(圖十之 1)

因為$\Delta A_1A_3A_4=\Delta A_2A_3A_4<\Delta A_1A_2A_3=\Delta A_1A_2A_4$

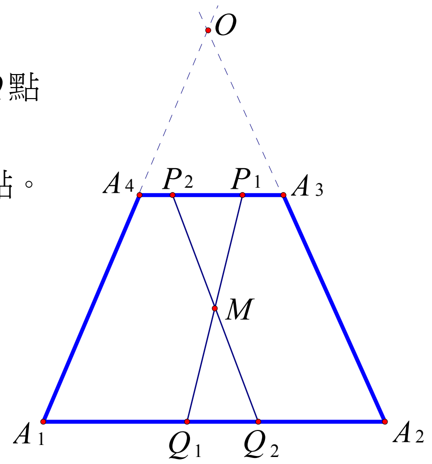
所以P自A_3移動至A_4，其等分面積線段$\overline{PQ}$之Q點

必在$\overline{A_1A_2}$上移動，且等分面積線段中點為同一點。

證明：(1) 設過$\overline{A_3A_4}$上兩相異點P_1、P_2，

其等分面積線段分別為$\overline{P_1Q_1}$、$\overline{P_2Q_2}$

(2) 令$\overline{P_1Q_1}$交$\overline{P_2Q_2}$於M



(圖十之1)

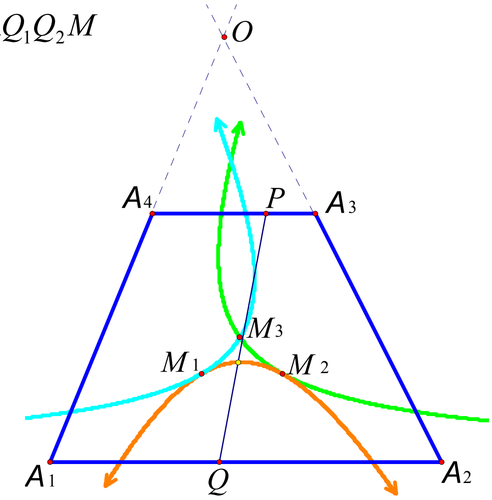
(3) 因為$\overline{A_1A_2}\,//\,\overline{A_3A_4}$　所以$\Delta P_1P_2M\sim\Delta Q_1Q_2M$

(4) 又ΔP_1P_2M面積$=\Delta Q_1Q_2M$

可得$\Delta P_1P_2M\cong\Delta Q_1Q_2M$

$\Rightarrow M$為$\overline{P_1Q_1}$、$\overline{P_2Q_2}$之中點

(5) 即P自A_3移動至A_4時，其等分面積線段的中點為同一點。



(圖十之2)

接著，P從A_4逆時針移動直到$\overline{PQ}$與過A_3的等分面積線段重合時之過程，可視為P、Q在ΔOA_1A_2上之移動。

因此，其等分面積線段中點所構成的軌跡圖形如(圖十之 2)。

3. 若$A_1A_2A_3A_4$為平行四邊形，則等分面積線段中點為同一點，即平行四邊形$A_1A_2A_3A_4$之中心點。可得

(1) 過中心點之等分面積線段有無限多條。

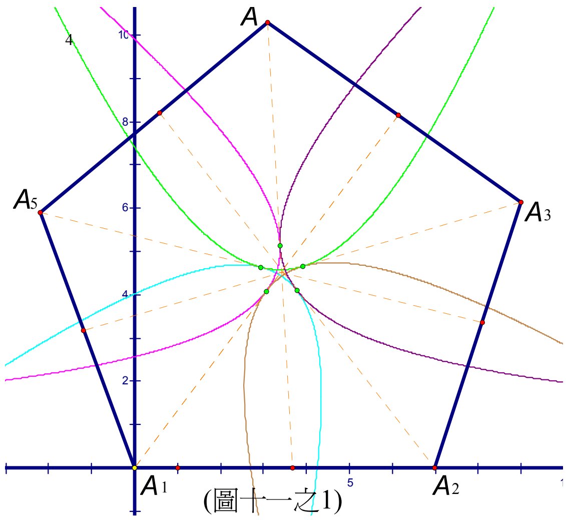
(2) 平行四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 之中心點除外的點僅有一條等分面積線段通過。

[主題三]：

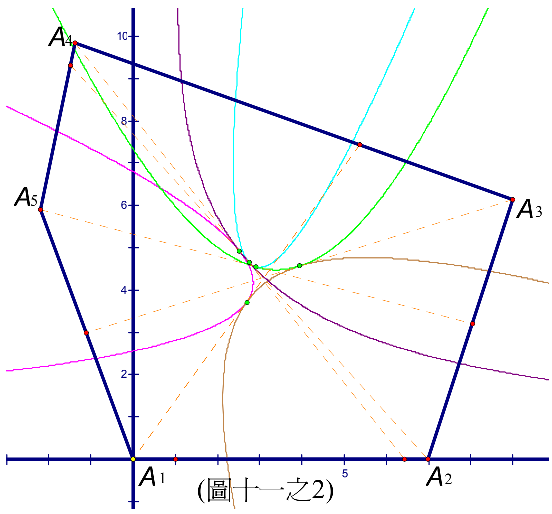
凸 n 邊形 $A_1A_2.......A_n$ 等分面積線產生的包絡現象及過定點等分面積線數量的探討。

經過三角形與四邊形等分面積線移動產生相關問題的研究，我們了解到要解決凸 n 邊形等分面積線數量之研究，首先須找出等分面積線段中點所構造出的包絡區。由於包絡區是由數個曲線段連接而成的封閉曲線所圍成，而每個曲線段端點是過頂點等分面積線段之中點。因此，可推得凸 n 邊形所有等分面積線段中點至多可構造出 n 條曲線段，當每條曲線段延長之後，可得共有等數量的雙曲線。

以五邊形為例，我們繪出圖形(如圖十一之 1、2)。

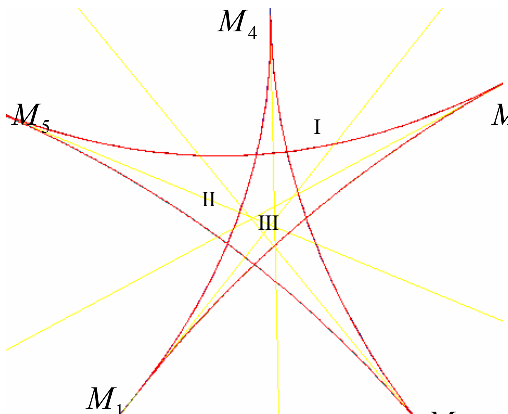


(圖十一之1)

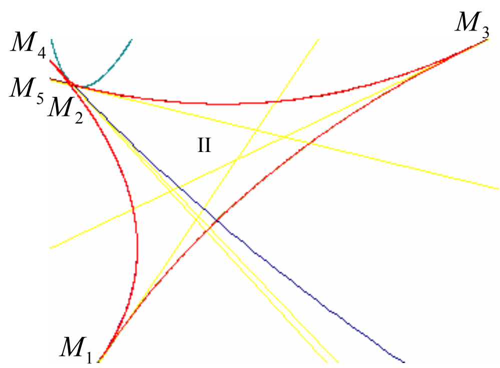


(圖十一之2)

將(圖十一之 1、2)中的包絡區放大得(圖十二之 1、2)。



(圖十二之 1)



(圖十二之 2)

利用「等分面積線判斷圖」可得過定點 P 之等分面積線數量如下表：

<table>
<tr><td>P 點位置
數量
圖形類別</td><td colspan="2">I</td><td colspan="2">II</td><td>III</td></tr>
<tr><td>圖十一之 1</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td>圖十一之 2</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

(PS **：1. 表中等分面積線數量爲偶數時，表示** P **點在相鄰兩層之曲線段上[不含曲線段交點]。**

2. 若 P **在曲線段交點上，則等分面積線數量爲與** P **相鄰之內層的數量減 2 條。)**

比較(圖十一之 1、2)及上表，我們發現(圖十一之 1)雙曲線皆外切，過定點其等分面積線數量最大值等於其邊數；而(圖十一之 2)其中一條雙曲線與另兩條雙曲線形成內切，造成「換軌」現象，過定點的等分面積線數量最多僅 3 條，比其邊數少 2。又因爲在四邊形的探討中，我們得知，四邊形在兩邊皆不平行，且其兩條對角線都不是等分面積線段的條件下，必然形成「換軌」，其等分面積線數量最多 3 條比其邊數少 1。

爲什麼四邊形與五邊形會有此差異性呢？

針對此疑惑？我們想到凸 n 邊形等分面積線段產生的雙曲線有內切情況，則必產生「換軌」現象，其等分面積線數量也隨之減少。若等分面積線數量要最大，則凸 n 邊形等分面積線產生的雙曲線皆須以「外切」來相連，那麼其圖形會是如何？

以下是我們對凸 n 邊形的探討：

由於在前面的研究過程中，我們常常會利用到：當等分面積線段 $\overline{PQ}$ 之兩端點在某兩條不平行的邊上移動時，其中點所構成的曲線段之雙曲線必通過此二邊延長所形成的三角形之第三邊。反之，當等分面積線段 $\overline{PQ}$ 之兩端點在某兩條平行的邊上移動時，會是如何？

<性質> 已知凸 n **邊形** $A_1A_2...A_n$ **中，** $\overline{A_iA_{i+1}} // \overline{A_jA_{j+1}}$ **，當且過** A_i **、** A_{i+1} **的等分面積線段** $\overline{A_iB_i}$ **、** $\overline{A_{i+1}B_{i+1}}$ **之端點** B_i **、** B_{i+1} **皆在** $\overline{A_jA_{j+1}}$ **上時，則**

(1) $\overline{A_iB_i}$ 與 $\overline{A_{i+1}B_{i+1}}$ 之交點 M ，為此兩線段之中點。

(2) 若 P 點在 $\overline{A_iA_{i+1}}$ 上，則過 P 點之等分面積線段亦必經過 M 。**(**如圖十三**)**

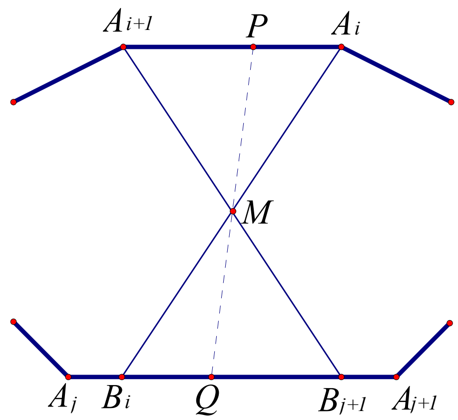
證明：(1) ① 因為 $\overline{A_iA_{i+1}} // \overline{A_jA_{j+1}}$

所以 $\Delta A_iA_{i+1}M \sim \Delta B_iB_{i+1}M$

② 又 $\Delta A_iA_{i+1}M$ 面積 $= \Delta B_iB_{i+1}M$ ，

可得 $\Delta A_iA_{i+1}M \cong \Delta B_iB_{i+1}M$

即 M 為 $\overline{A_iB_i}$ 、 $\overline{A_{i+1}B_{i+1}}$ 之中點



(圖十三)

(2) ① 作 $\overrightarrow{PM}$ 交 $\overline{B_iB_{i+1}}$ 於 Q

② 因為 $\overline{A_iM} = \overline{B_iM}$ ，且 $\overline{PA_i} // \overline{B_iQ}$ ，所以 $\Delta A_iPM \cong \Delta B_iQM$

即 $\overline{PQ}$ 為凸 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ 之等分面積線段

又因為過 P 之等分面積線只一條，所以過 P 點之等分面積線段必經過 M 。

由上述性質可推得

(1) 若凸 n 邊形具有 k 組平行邊符合〈性質〉中之條件，則曲線段之端點必少 k 個。換言之，曲線段所在的雙曲線也必少 k 條。

(2) 若凸 n 邊形符合下列兩條件

① 所有對角線皆不為等分面積線段

② 等分面積線段兩端點所在的兩邊皆不平行

則過頂點等分面積線必有 n 條

$\Rightarrow$ 過頂點等分面積線段中點必有 n 點

$\Rightarrow$ 所有等分面積線段中點構造出的曲線段必有 n 段

$\Rightarrow$ 曲線段所在的雙曲線共 n 條

對於等分面積線段兩端點所在的兩邊不平行，則等分面積線段可視為以此兩邊延長所構成的三角形 r 等分面積之移動，可得一曲線段，且含此曲線段之雙曲線必過第三邊。因此，每一曲線段對應到一條對角線〈或一邊〉為了方便說明，我們先給出一些符號意義：

C_i ：第 i 條曲線段

S_i ：將 C_i 曲線段延長後之雙曲線最先經過的線段(此線段爲凸 n 邊形之邊或對角線)

我們把對應關係寫成 $C_i \leftrightarrow S_i$

利用此對應關係，可把等分面積線段移動產生的曲線段 C_i 轉化成 S_i 之研究。

接著，我們寫出曲線段所在的雙曲線要形成以「外切」相連的要件：

(1) 過凸 n 邊形同一頂點不能有三條以上的 S_i 。否則，必產生內切。

(2) 連續三條 S_i 不能以「 Z 」字形狀相連接。否則，必產生內切。

又凸 n 邊形 $A_1A_2...A_n$ ，當 P 點從 A_1 做順(逆)時針移動，**其等分面積線段 $\overline{PQ}$ 必先與最靠近的過頂點等分面積線段重合**。以(圖十四)正五邊形來說明(圖中 B_1 、 B_2 、 B_3 、 B_4 、 B_5 分別爲邊上中點)，

其移動過程如下：

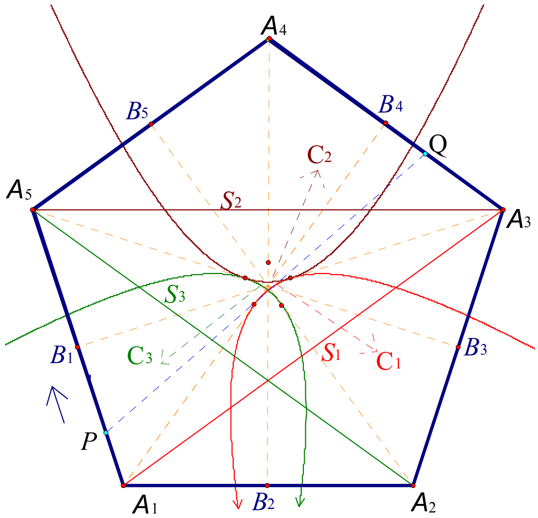
P 從 $A_1 \to B_1$ 得 $S_1 = \overline{A_1A_3}$

$B_1 \to A_5$ 得 $S_2 = \overline{A_3A_5}$

$A_5 \to B_5$ 得 $S_3 = \overline{A_5A_2}$

依序連接所有 S_i 必形成封閉圖形。

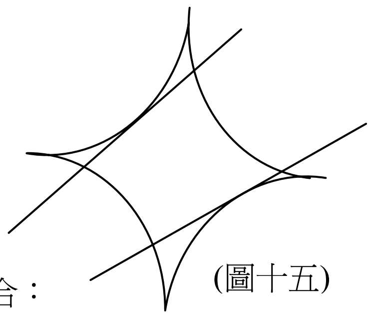
由等分面積線段移動可得



(圖十四)

(1) 四個以上曲線段外切如(圖十五)，必不成立。

(2) 任兩條 S_i 必有交點。[即連續 3 條 S_i 以「 Z 」字形狀相連接之圖形不存在]。


(圖十五)

根據這些推論，若凸 n 邊形曲線段所在的雙曲線要形成以「外切」來相連，則完成所有 S_i 之連接必須符合：

(1) 當 $n = 2m+1$ ，則兩相鄰 S_i 之連接須相隔 $m-1$ 個頂點。

(2) 當 $n = 2m$ ，則兩相鄰 S_i 之連接須相隔 $m-1$ (或 m)個頂點。

若不如此，必與上述推論相牴觸。

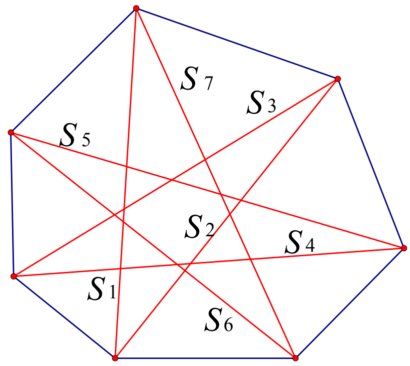
因此，可推得S_i之路徑完成，過程是以"V"字型前進。

(1) 當$n=2m+1$

從A_1出發，考慮"V"字型的完成，第一次需 3 個頂點相連，即

$A_1 \xrightarrow{S_1} A_{m+1} \xrightarrow{S_2} A_{2m+1}$。

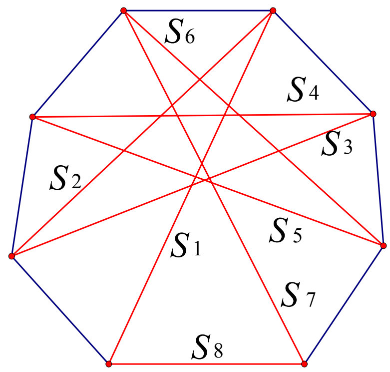
其左右兩側各剩$(m-1)$個頂點，而後續每增一個"V"字型的完成，左右各需取一頂點。因此，再經$(m-1)$個"V"字型後，路徑通過所有頂點到達A_{m+2}。最後，連接$\overline{A_1A_{m+2}}$完成星字型之路徑。(如圖十六之 1 爲七邊形S_i星字型路徑)



(圖十六之1)

(2) 當$n=2m$

仿上之推論，由於第一次"V"字型的完成需 3 個頂點，可知第一次"V"字型之後左右兩側頂點數奇偶性不同。因此，不能完成如凸$2m+1$邊形之S_i星字型路徑。如(圖十六之 2)。



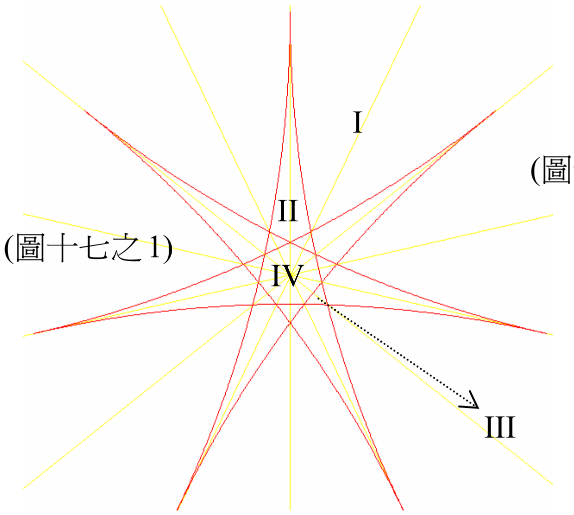
(圖十六之2)

從(圖十六之 1、2)可發現七邊形符合外切之要件，而八邊形呈現出「Z」字形狀相連接，所以圖形不存在。

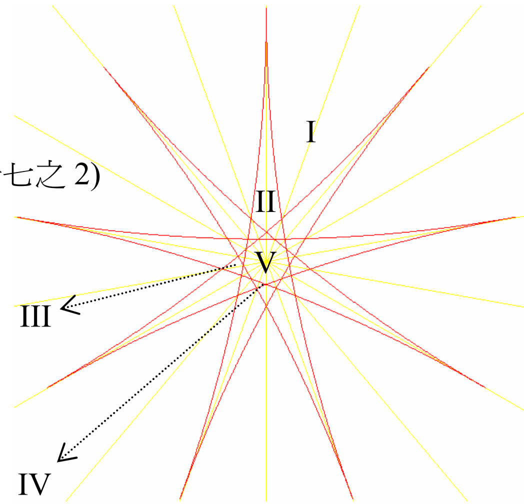
由上述推論，我們得凸$2m$邊形不符合曲線段所在的雙曲線「外切」相連的要件。換言之，必有「內切」相連，所以存在「換軌」。

至於凸$2m+1$邊形，以正$2m+1$邊形來說明由於過頂點等分面積線剛好爲其對稱軸。因此，其所有過頂點等分面積線段之中點剛好形成另一個正$2m+1$邊形之頂點。

將這些中點以"V"字型方式加上兩點之間以曲線段連接可得其包絡區。(如圖十七之 1、2)



(圖十七之1)



(圖十七之2)

由(圖十七之 **1**、**2**)可得等分面積線數量如下表：

圖形類別 ＼ 數量 ＼ P 點位置	I		II		III		IV	V	
正七邊形	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**		
正九邊形	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**

(*PS* ：**1.** 表中等分面積線數量為偶數時，表示 P 點在相鄰兩層之曲線段上[不含曲線段交點]。

2. 若 P 在曲線段交點上，則等分面積線數量為與 P 相鄰之內層的數量減 **2**。)

從上表發現當動點 P 從包絡區最內層往外移動到相鄰的外層時，其等分面積線數量會減少 2 條。

理由：因為 P 點由包絡區內層往相鄰外層移動時，原兩層之共用曲線段對於 P 點位置而言，從曲線段外側變成內側。所以會減少 **2** 條切線，即等分面積線數量減少 **2** 條。

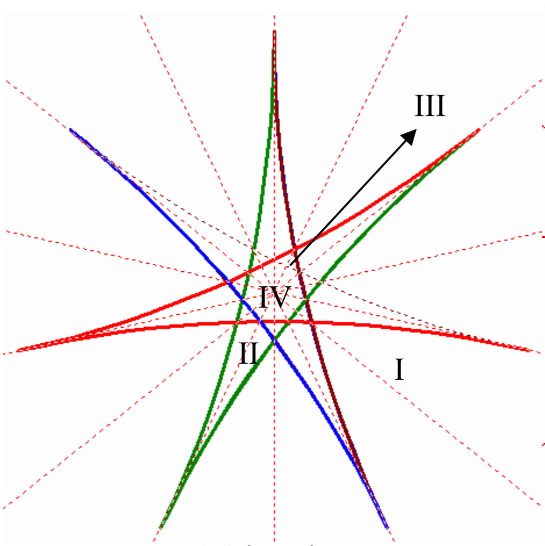
將結果擴展到正 $2m+1$ 邊形，可得正 $2m+1$ 邊形其內部被等分面積線段中點所構成的包絡曲線分成 $m+1$ 區，且包絡曲線最內層為類似正 $2m+1$ 邊形，其周界為所有曲線段的一部份所構成，此層共有 $2m+1$ 條等分面積線數量，接著往外依次每層減少 **2** 條。(同正七、正九邊形之理由)

在前面的討論中，我們得到曲線段所在的雙曲線要形成以「外切」相連，其 S_i 之

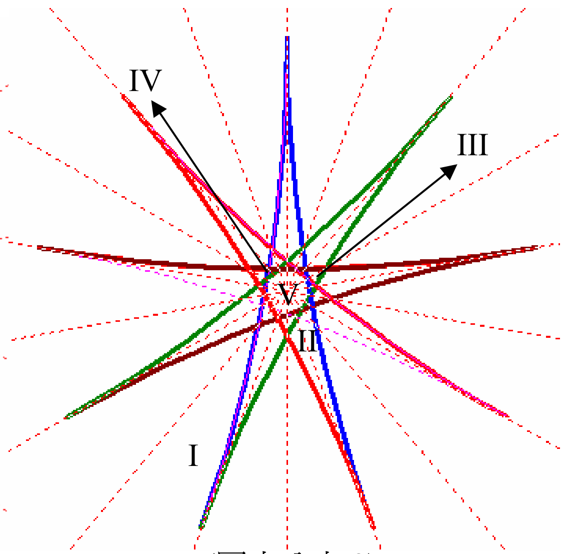
路徑是以"V"字型前進，最後形成星字型之路徑。考慮對應關係$C_i \leftrightarrow S_i$，可得C_i之路徑還是以"V"字型連接各曲線段，最後形成星字型之封閉曲線。至於，具有此類型之封閉曲線的凸n邊形，是否定點P在包絡區最內層一定有n條等分面積線呢？

經過研究，我們寫出下列結論：

由於包絡區是由〝V〞字型曲線段所連接而成。因此，對於包絡區最內層一點P，若P所在區域被k個連續〝V〞字型所包圍，又每個〝V〞字型是由兩個相連曲線段所構成。所以，與P所在區域相關之曲線段端點共$(2k+1)$個。即過P必有$2k+1$條等分面積線。(如圖十八之 1、2)



(圖十八之 1)



(圖十八之 2)

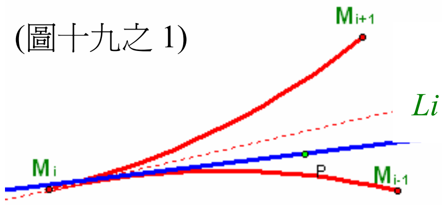
圖中第k區，被k-1個〝V〞字型所包圍。所以，當P點在第k區共必有$2k$-1條等分面積線。

理由：因為有$(2k+1)$個曲線段端點，所以過此$(2k+1)$個端點共有$(2k+1)$條等分面積線。對於任意兩條相接曲線段$M_{i-1}-M_i$與M_i-M_{i+1}及過M_i之等分面積線L_i，P所在位置有 3 種可能(如圖十九之 1、2、3)：

〈1〉 當P落在L_i與$M_{i-1}-M_i$之內側，過P可作一條$M_{i-1}-M_i$曲線段之切線。

〈2〉 當P落在L_i與M_i-M_{i+1}之內側，過P可作一條M_i-M_{i+1}曲線段之切線。

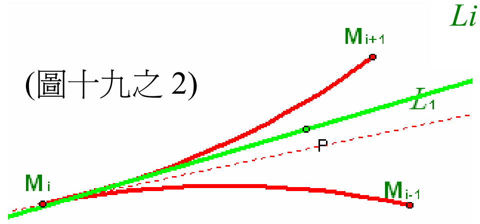
(圖十九之 1)



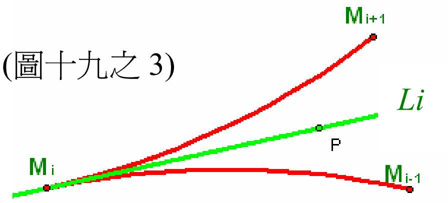
〈3〉 當 P 落在 L_i 上，則 $\overleftrightarrow{PM_i}$ 爲 $M_{i-1}-M_i$ 與 M_i-M_{i+1} 之公切線。

顯然，不管 P 點位置如何？在此情形下過 P 必有一條等分面積線與 $M_{i-1}-M_i$ 或 M_i-M_{i+1} 曲線段相切。

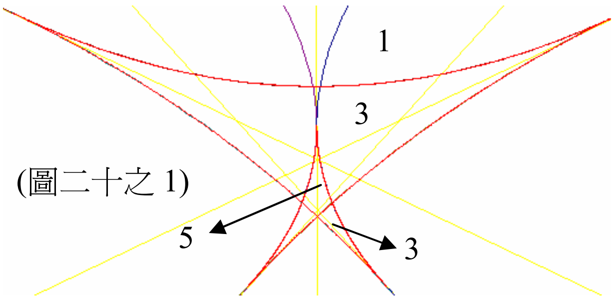
(圖十九之 2)



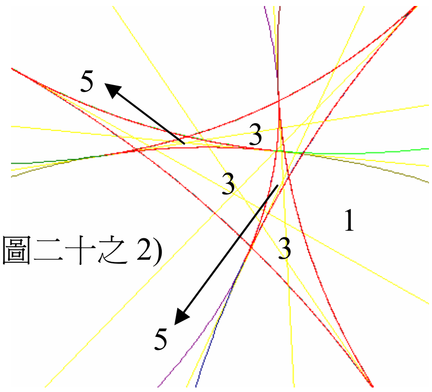
(圖十九之 3)



因此，對於凸 n 邊形曲線段所在的雙曲線皆以「外切」相連時，當定點 P 位在包絡區最內層時，其等分面積線數量不一定有 n 條。又當 P 由最內層往外層移動時必減少 2 條，接著繼續往相鄰外層移動，可視相鄰兩層共用之曲線段凹向來決定增加或減少兩條。(如圖二十之 1、2)



(圖二十之 1)



(圖二十之 2)

圖中數字表示該區過定點等分面積線數量

接著，考慮凸 $2m$ 邊形，討論如下：

因爲對於每一個凸 $2m$ 邊形，必可找到幾乎與其全等的凸 $2m+1$ 邊形，又此時凸 $2m+1$ 邊形過定點等分面積線數量最多爲 $2m-1$，即凸 $2m$ 邊形過定點等分面積線數量最多有 $2m-1$ 條，且存在於包絡區的最內層，其餘各層結果必與奇數邊結論同。

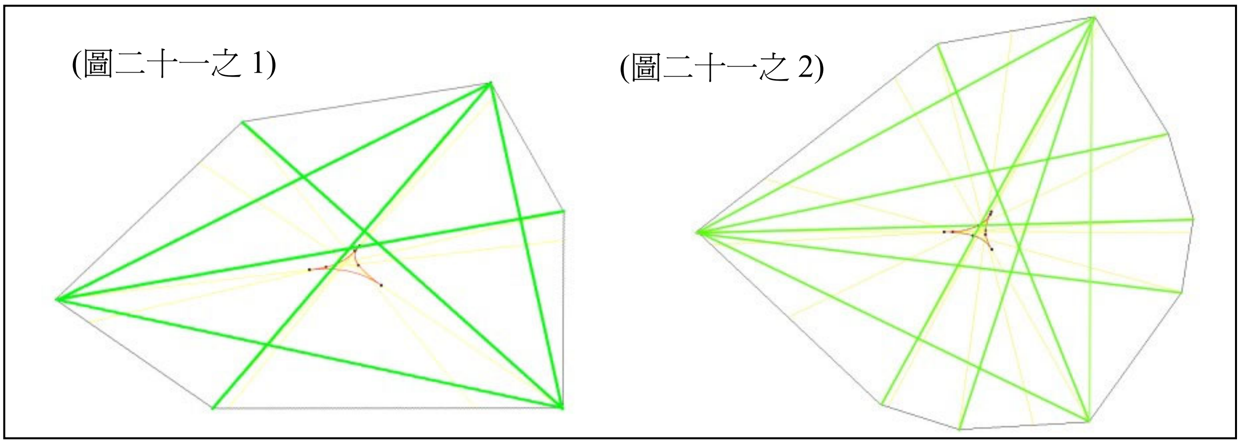
最後，我們重新檢視 $C_i \leftrightarrow S_i$ 的對應關係，發現：

「換軌」的形成必產生於當凸 n 邊形的頂點只接一條 S_i，且「換軌點」必爲過此頂點的等分面積線段中點。

理由：若存在凸 n 邊形頂點(假設爲 A_j)只有接一條 S_i，則此條 S_i 之另一端點(假設爲

A_k)，接三條以上 S_i (其中與 A_j 相連之 S_i 必落在所有與 A_k 相連 S_i 之內側)。

且相鄰三條 S_i 所對應到的三條曲線段 C_i 必存在中間的 C_i 與相鄰兩條 C_i 的其中一條形成內切。因此，可得「換軌」。且「換軌點」必為兩內切 C_i 之切點，由於此切點是相鄰兩曲線段的端點，所以可得「換軌點」必為過 A_j 的等分面積線段中點。(如下圖二十一之 1、2)



(圖二十一之 1)　(圖二十一之 2)

[圖二十一之 1]：頂點只接一條 S_i 的共有三個頂點，所以共有三個換軌點，即此六邊形最多有三(6-3)條等分面積線
[圖二十一之 2]：頂點只接一條 S_i 的共有 6 個頂點，所以共有 6 個換軌點，即此九邊形最多有三(9-6)條等分面積線

至此，我們心中的疑惑大致解除，當然內容還有很多可探討的地方。

譬如：1. 可探討凸 n 邊形 $1:\mathrm{r}$ 分割之數量分布。

2. 凹多邊行納入探討結果會是如何？

唯時間有限與能力不足，所以我們只能就此打住，期盼同好能繼續研究。

三、 結論

(一) ΔABC 中， $A(0,0), B(a,0), C(b,c)$ ， P 為周界上的動點，則其等分面積線段 $\overline{PQ}$ 中點共構造出三條曲線段(雙曲線的一部分)，假設分別為 C_1 、 C_2 、 C_3 ，可得

	方程式	漸進線	中心
C_1	$8\ y^2 - 8m_1xy + acm_1 = 0$	$\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{AC}$	A

C_2	$8y^2-8m_2xy+8m_2ay-acm_2=0$	$\overleftrightarrow{BC}$、$\overleftrightarrow{AB}$	B
C_3	$8y^2-8(m_2+m_2)xy+8m_1m_2x^2+8m_2ay-8m_1m_2ax+a^2m_1m_2=0$	$\overleftrightarrow{AC}$、$\overleftrightarrow{BC}$	C

其中$\overleftrightarrow{PQ}$爲曲線段之切線。m_1:$\overleftrightarrow{AC}$之斜率、m_2:$\overleftrightarrow{BC}$之斜率

(二) 若凸n邊形的等分面積線段之中點構造出一曲線段。則包含此曲線段之雙曲線其漸近線必爲n邊形某兩邊長的延長線。

(三) 凸$2m+1$邊形中

1. 所有等分面積線段之中點構造出的封閉曲線段，將形內分成若干區，每相鄰兩區過定點等分面積線數量相差兩條。

2. 過定點等分面積線數量最多有$2m+1$條。

(四) 凸$2m$邊形曲線段所在的雙曲線必有「內切」相連，所以存在「換軌」。過定點等分面積線數量最多有$2m-1$條。

(五) 若凸n邊形有k個「換軌點」，則此n邊形過定點等分面積線至多有$n-k$條。

(六) 正多邊形與點對稱凸n邊形的過定點等分面積線數量表：

<table>
<tr><td>P點位置 / 數量 / 圖形類別</td><td colspan="2">I</td><td colspan="2">II</td><td colspan="2">III</td><td colspan="2">IV</td><td>…</td><td>第$m+1$區
(最內層)</td></tr>
<tr><td>正$2m+1$邊形</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td colspan="2">…</td><td>$2m+1$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">正$2m$邊形
與點對稱凸n邊形</td><td colspan="5">當P不在中心點</td><td colspan="5">當P在中心點</td></tr>
<tr><td colspan="5">1</td><td colspan="5">無限多條</td></tr>
</table>

(*PS* ：**1.** 表中等分面積線數量爲偶數時，表示P點在相鄰兩層之曲線段上[不含曲線段交點]。

2. 若P在曲線段交點上，則等分面積線數量爲與P相鄰之內層的數量減 **2**。)

四、參考資料

(一) 高中數學第三冊
(二) 全任重教授個人網站
http://steiner.math.nthu.edu.tw/
如何指導學生作數學科展？

(三) 黃文達教授個人網站

http://math.ntnu.edu.tw/~hwangwd/

中學科展

(四) 第三十一屆科展高中組

三角形分割線形成的包絡線------作者：陳旻宏

(五) 第三十二屆科展高中組

圓錐曲線上包絡線之探討------作者：朱柏貞

(六) 〔幾何學辭典〕

P.460 第 2098 題與 P.486 第 2209 題

部貞布郎原著、九章編輯部譯。

評語

數學問題具有視覺直觀性，作品內容充分採納中學數學方法，探討範圍亦十分完整。