臺灣二ＯＯ六年國際科學展覽會

科　　　別：數學科

作 品 名 稱：摺紙數列-相關問題探討

得 獎 獎 項：第三名

學校 / 作者：臺北縣立永和國民中學　陳彥霖
臺北縣立永和國民中學　朱紀翰

作者簡介

陳 彥 霖

我是陳彥霖，目前就讀永和國中，在家中我是最小，上面還有一位就讀中山醫學大學牙醫系的姐姐，而父母都在教育界服務，從小父母就很關心我們的學習和興趣，也鼓勵我們參加各項才藝和比賽，例如：心算、琴藝、繪畫、作文、書法、科展等，不僅豐富了我多采多姿的學生生活，也增進了我的學習動機和課業基礎。

在我求學的生涯中，曾擔任過班長等不同職務的幹部和學科小老師，這對我來說是一項很重要且能為他人服務的機會和自我能力的考驗，每位老師給我的評語總是「認真勤學，品學兼優，負責盡職」。國小時榮獲縣長獎畢業，也因為熱衷參加各項科展，因此也激發了我在數理方面的興趣和奠定日後往自然科領域發展的基礎。

朱 紀 翰

我是朱紀翰，就讀台北縣永和國中三年級。小學的時候，曾經和全家人一起到紐西蘭住了兩年，那是我最快樂的上學時光，也是我自由學習的啓蒙點。

我非常喜歡數學這個科目，平時在學校就喜歡動動腦筋，解一些老師給的題目。這一次的比賽對我來說是一種自我的挑戰，研究的過程雖然有點坎坷，許多的困難問題接踵而來，但是當我領悟到一些內容時，就會使我想深入研究更多的新知識。

我很高興能夠與組員&指導老師一起探究數學奧妙的地方，這是一個非常特別的經驗哦！

Paper-Folding Series --Relevant Topic Discussion

摺紙數列—相關問題探討

壹、 摘要

一、 英文摘要(Abstract)

1. **Rules of the game: Fill in order the continuous positive integers 1~$2^m \times 2^n$, from top to bottom and from left to right in the $2^m \times 2^n$ check. The operational rule allows a complete fold of $2^m \times 2^n$ either rightward or leftward, or upward or downward, until all the check units pile up in a line. At the same time, all the integers form a series from top to bottom.**
2. **This study explores the relationship between the number of the series and the integers after the operation.**
3. **Our findings are:**
   (1) The number of the series is related to Pascal triangles.
   (2) The series formed meet the properties mentioned in the study: [the property of R(L)], [the property of D(U)], [the property of R & D], and [the property of D & R].

二、 中文摘要

1. 遊戲規則：將 1～$2^m \times 2^n$ 的連續正整數，由上而下、由左而右依序填入 $2^m \times 2^n$ 的方格內。操作規則允許將 $2^m \times 2^n$ 做往右或往左或往上或往下的完全對摺，直到操作至所有單位方格均疊成一行，此同時有數字也由上而下形成一數列。
2. 本研究即是探討操作完成的數列之數量與數字間的關連性。
3. 我們發現：

(1) 數列之數量與巴斯卡三角形有關。

(2) 形成的數列必符合內文的 [R(L)性質]、 [D(U)性質]、[R&D 性質]、[D&R 性質]。

貳、 前言

一、 研究動機

在七年級「樣式與規律」的學習中，老師要我們到網路上尋找相關的資料，偶然中看到了師大許志農教授的個人網站，有一道 2x3 的摺紙問題，由於題目來源以移除，因此題目數字順序不同，大意如下：在一張 2x3 的方格紙上隨意填上 1~6 的數字(如下圖)，藉由向上下左右對摺，是否能完成到指定的數列，由上而下為 123456。

1	4	5
6	3	2

二、 研究目的

1. 找出 1×2^n 各個數列的關聯性
2. 找出 $2^m\times2^n$ 數列的數量
3. 尋求 $2^m\times2^n$ 之數列關聯性

三、 研究器材

紙、筆、電腦

參、 研究過程

我們將上述規則作修改。本研究規則如下：

將 $1\sim2^m\times2^n$ 的連續正整數，由上而下由左而右依次填入 $2^m\times2^n$ 方格內，如圖(一)。操作規則允許將 $2^m\times2^n$ 做往右或往左或往上或往下的完全對摺，直到操作至所有單位方格均疊在一起。此同時，所有數字也由上而下排成一列數。本研究即在探討操作完成之數，由上而下所形成的數列之相關問題。

圖(一)

1	2	3	……	2^n
2^n+1	2^n+2	2^n+3	……	……
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	•
•	•	•	•	$(2^m-1)\times 2^n$
$(2^m-1)\times 2^n+1$	……	……	……	$2^m \times 2^n$

為了更清楚的呈現本研究的操作規則與結果，我們以 1×4 來說明，其過程如下：

1	2	3	4

1. 往右對摺 →

2	1	第一層
3	4	第二層

，再次右摺 →

3	第一層
2	第二層
1	第三層
4	第四層

得數列由上而下為:3214

2. 往左對摺 →

4	3	第一層
1	2	第二層

，再次左摺 →

2	第一層
3	第二層
4	第三層
1	第四層

得數列由上而下為:2341

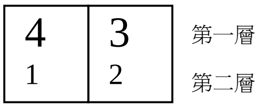
3. 往右對摺 →

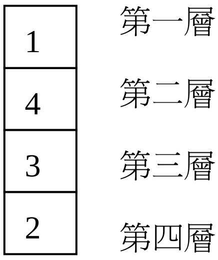
2	1	第一層
3	4	第二層

，往左對摺 →

4	第一層
1	第二層
2	第三層
3	第四層

得數列由上而下為:4123

4. 往左對摺 $\rightarrow$ 

，往右對摺 $\rightarrow$ 

得數列由上而下為:1432

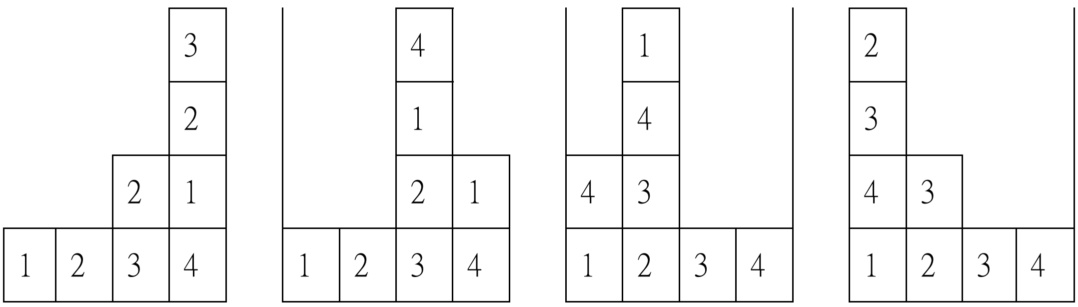
顯然將1×2^2操作完成共有 4 種數列。實際上將1×2^2按規則操作至完成，僅需對摺兩次，又每次有左右兩種對摺。因此，可得 1x4 共有 2x2=4 種結果。至於這些數列到底有什麼關聯性？若擴充到 1×2^n。甚至$2^m\times 2^n$，共結果又如何？接下去，是我們的探索之旅。

==

主題一、給定1×2^n，按照操作規則，可得數列幾個？數列間之關係又如何？

在前面，我們以1×2^2來說明規則的操作，可得出數列的四種結果。但由於呈現過程繁雜，並不是很理想，經過團隊的研究，我們想到可將1×2^2的圖形利用階梯圖來呈現，得圖形如圖(二)。

(圖二-1) (圖二-2) (圖二-3) (圖二-4)



	(圖二-1)	(圖二-2)	(圖二-3)	(圖二-4)
1st次 $\rightarrow$	R	R	L	L
2nd次 $\rightarrow$	R	L	R	L

2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1
1	2	3	4

(圖二-5)

L　L　R　R
L　R　L　R

表格下方之英文字母〝R〞、〝L〞所代表意義說明如下：

(1)R：表示向右對摺　、L：表示向左對摺

(2)由上下依次為第 1、2、…、n 次之操作

為了方便說明，我們稱將1×2^n利用本研究規則所操作完成的所有數列組合如圖(二-5)之型式皆稱為「方陣圖」。.

利用方陣圖，我們可快速的做出1×2^3、1×2^4之所有數列。如圖（三）、（四）

	2	1	4	3	6	5	8	7
	7	8	5	6	3	4	1	2
	6	5	8	7	2	1	4	3
	3	4	1	2	7	8	5	6
	4	3	2	1	8	7	6	5
	5	6	7	8	1	2	3	4
	8	7	6	5	4	3	2	1
	1	2	3	4	5	6	7	8
1^{st}次 →	L	L	L	L	R	R	R	R
2^{nd}次 →	L	L	R	R	L	L	R	R
3^{rd}次 →	L	R	L	R	L	R	L	R

(圖三)

(圖四)

2	1	4	3	6	5	8	7	10	9	12	11	14	13	16	15
15	16	13	14	11	12	9	10	7	8	5	6	3	4	1	2
10	9	12	11	14	13	16	15	2	1	4	3	6	5	8	7
7	8	5	6	3	4	1	2	15	16	13	14	11	12	9	10
6	5	8	7	2	1	4	3	14	13	16	15	10	9	12	11
11	12	9	10	15	16	13	14	3	4	1	2	7	8	5	6
14	13	16	15	10	9	12	11	6	5	8	7	2	1	4	3
3	4	1	2	7	8	5	6	11	12	9	10	15	16	13	14
4	3	2	1	8	7	6	5	12	11	10	9	16	15	14	13
13	14	15	16	9	10	11	12	5	6	7	8	1	2	3	4
12	11	10	9	16	15	14	13	4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4	13	14	15	16	9	10	11	12
8	7	6	5	4	3	2	1	16	15	14	13	12	11	10	9
9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	4	5	6	7	8
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
LLLL	LLLR	LLRL	LLRR	LRLL	LRLR	LRRL	LRRR	RLLL	RLLR	RLRL	RLRR	RRLL	RRLR	RRRL	RRRR

又為了讓過程的說明更容易，我們定義符號如下：

T(a_1，a_2，…，a_n)：表示1×2^n經過n次操作所得數列。

(其中a_1，a_2，…，a_n為〝R〞or〝L〞)

例： T(R，R，L)：表示將1×2^3做第一、二次向右第三次向左對摺之操作，

得數列 8,1,4,5,6,3,2,7。

即 T(R，R，L)= 8,1,4,5,6,3,2,7

從圖(三)、(四)中，可看出數列間有規律性的排列。檢視我們的操作規則，由於在1×2^n僅有兩種對摺（或左或右）方式。因此，仔細思考，再配合圖（三）、（四），針對1×2^n我們可得到下列結論：

1. 1×2^n需經過 n 次的連續對摺才能完成一次的數列排序。
2. 每個數列，若由上而下依次兩兩一組，每組之數字和皆等於2^n+1。
3. 對於 n 次摺疊的操作過程，若僅第 n 次（最後一次）摺疊不同（左、右對摺互換），則所得兩數列必爲逆排列。　逆排列：兩數列順序完全顛倒，稱之。

   例：T(R，R，R)=72365418　　T(R，R，L)=81456327

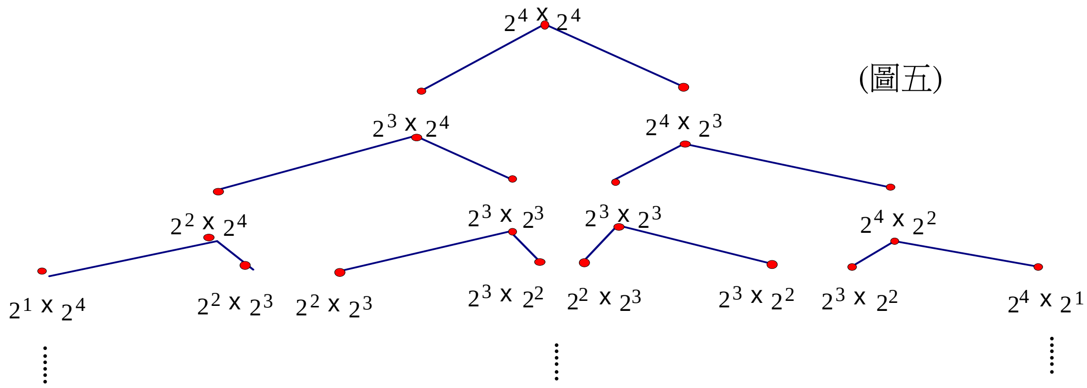
   即 T(R，R，R)與 T(R，R，L)互爲逆排列。
4. 對於 n 次摺疊的操作過程，若僅第 k 次摺疊不同（左、右對摺互換），則所得兩種數列之關係，可視爲將其中一數列，由上而下依次每2^k個數一組，再由上而下依次將相鄰奇、偶兩組做互換，其結果爲另一數列。 舉例：T(R，R，L)=81456327
   T(R，L，L)=63278145
5. 對於兩數列，若操作過程[R]、[L]完全互換，則此兩數列由上而下兩數一組，必形成相對應兩組之間兩數順序互換。　舉例：T(R，R，L)=81456327
   T(L，L，R)=18543672
6. 將1×2^n操作完成，共有2^n個數列。

==

利用上面結論，我們可找出1×2^n的所有數列及其關係。接著，我們進入到$2^m\times 2^n$的討論。

主題二---1：給定$2^m\times 2^n$(列 × 行)，按照操作規則，可得數列幾個？

我們先考慮$2^4\times 2^4$，按照操作規則，以樹狀圖來呈現，操作如下：



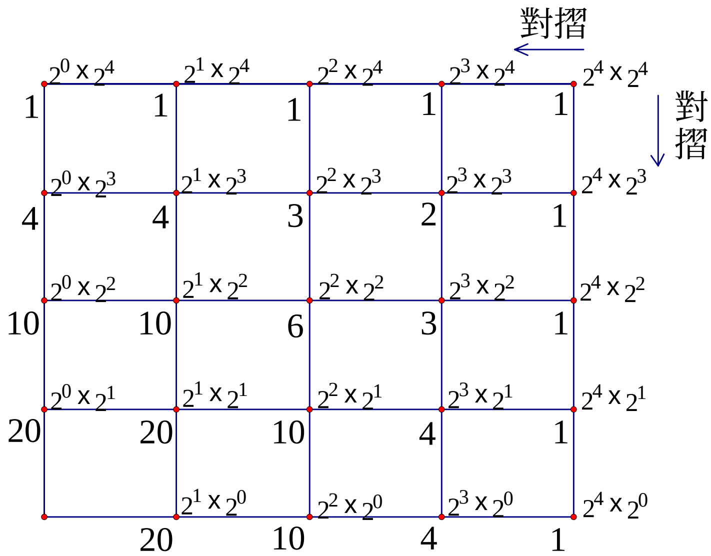
(圖五)

說明如下：$2^4\times 2^4 \xrightarrow{\text{上(下)對摺一次}} 2^3\times 2^4$

$2^4\times 2^4 \xrightarrow{\text{左(右)對摺一次}} 2^4\times 2^3$

顯然以樹狀圖要找出 $2^4\times 2^4$ 的數列數量，並不是那麼容易，何況是 $2^m\times 2^n$？還好從樹狀圖的操作過程我們發現，可以把圖形簡化成更容易分析的圖形來探討，操作過程改寫如圖(六)，說明如下：

1. 每向左移動一格表示將紙張向上(或下)對摺一次；每向下移動一格表示表示將紙張向右(或左)對摺一次。
2. 圖(六)中數字(字型較大者)，表示爲規則操作過程中，相同的[$2^i\times 2^j$]型的數量。由於每次移動(向左或向下)過程，左邊界(或下邊界)，即 $2^4\times 2^4 \to 2^0\times 2^j$(或 $2^i\times 2^0$)共經過 4+4-j=8-j 次對摺



圖(六)

又∵每次對摺有兩種選擇(上-下 or 左-右)

∴共有 2^{8-j} 個變化

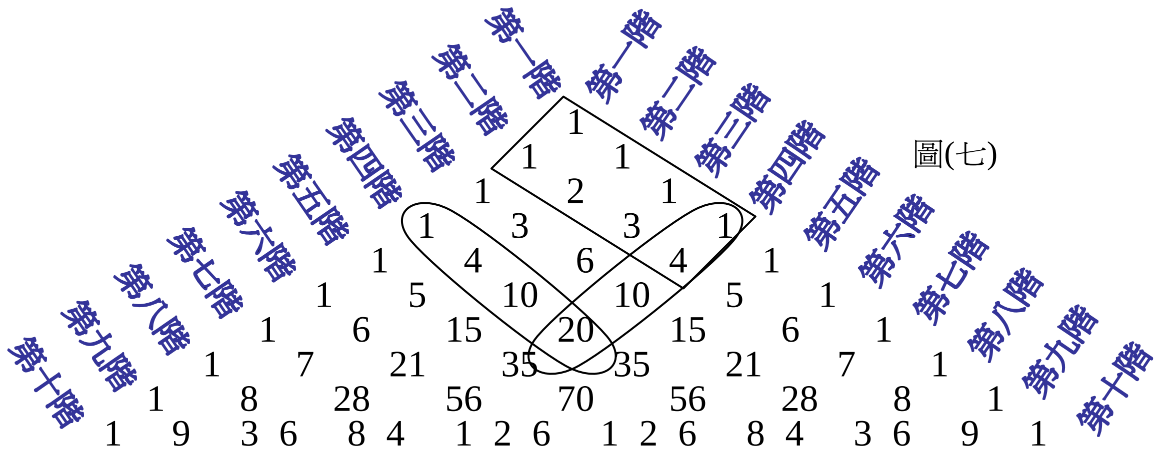
再利用主題一的結論得 $2^0\times 2^j$ 共有 2^j 個數列

∴對於 $2^4\times 2^4 \to 2^0\times 2^j$ 共有 $2^{8-j}\times 2^j=2^8$ 個數列

同理 $2^4\times 2^4 \to 2^i\times 2^0$ 共有 2^8 個數列

因此，$2^4\times 2^4$ 共有 $2(1+4+10+20)\times 2^8=70\times 256=17920$ 個數列。

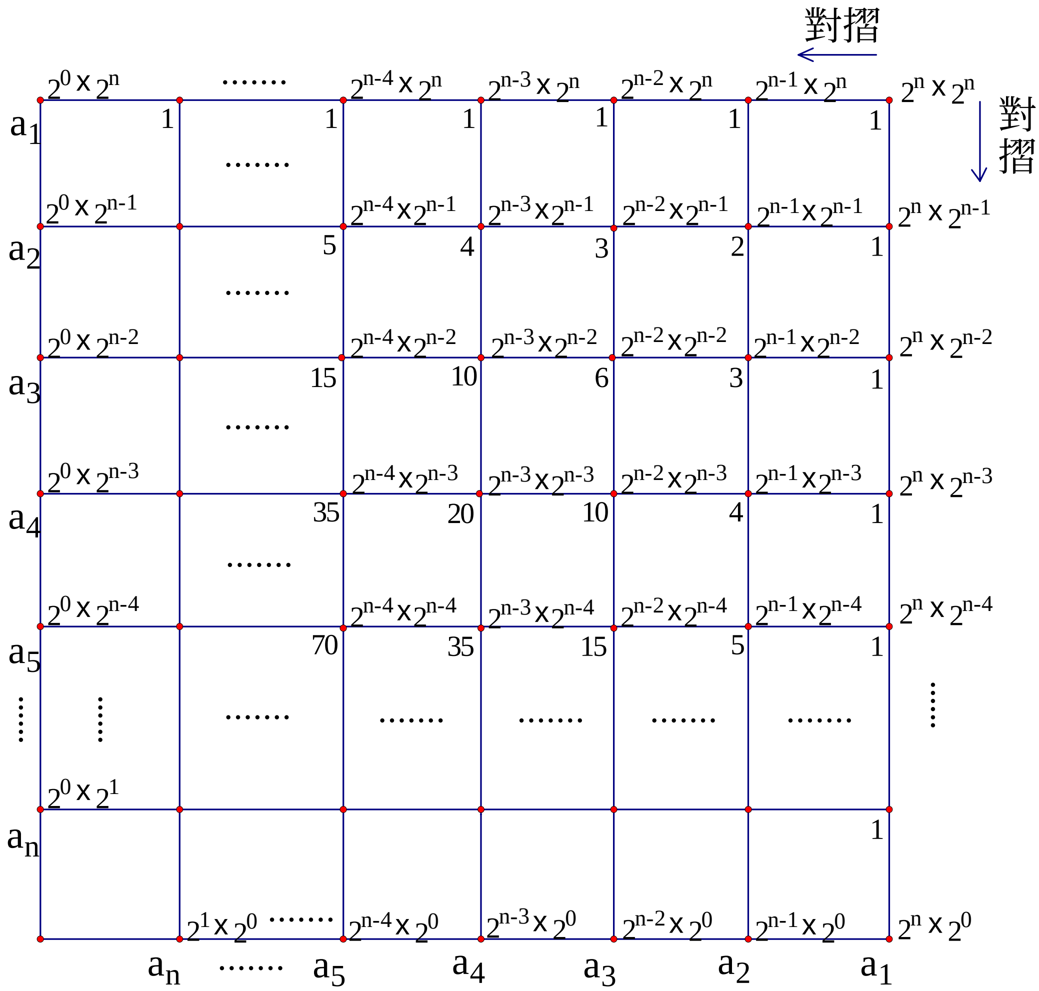
接著，把圖(六)的數量累加，對照巴斯卡三角形，我們發現圖(六)中的左、下邊界數列，剛好是「巴斯卡三角形」圖中 45^o 斜方向第四階數列(1,4,10,20 共四項) (如圖七)。



圖(七)

對於這樣的發現，讓鑽研已久，挫折多次的我們找回研究的樂趣，真令人開心。

利用上面的方式，將 $2^4 \times 2^4$ 類推到 $2^n \times 2^n$，我們作出圖表如下：

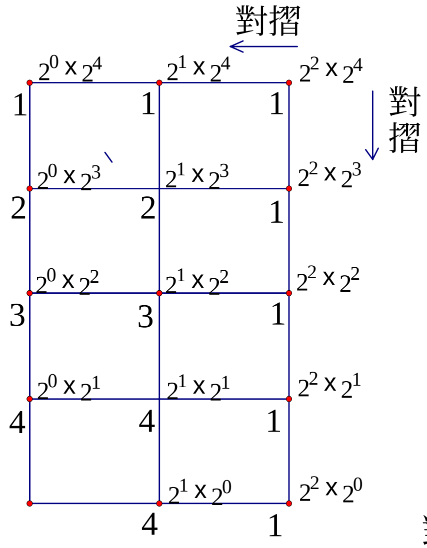


其中 $\mathbf{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots, a_n}$ 爲巴斯卡三角形 45^o 斜方向的第 n 階。

可得 $2^n \times 2^n$ 數列共

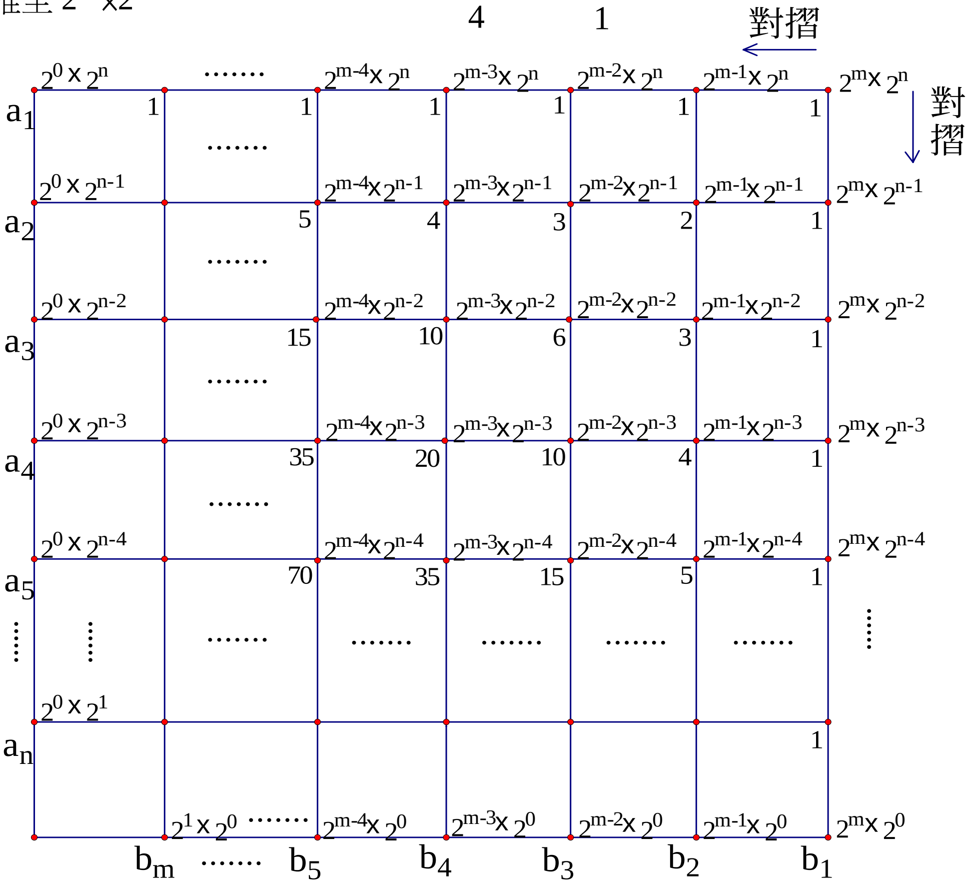
$$2(\mathbf{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots+a_n}) \times 2^{2n} = (\mathbf{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots+a_n})\, 2^{2n+1} \text{ 個。}$$

再來考慮 2^2x2^4 可操作得出下表：



我們同樣可以類推至 2^mx2^n，

做出圖表如下：



得 2^mx2^n 數列共

$$(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots+a_n)(2^{m+n})+(b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots\ldots+b_m)(2^{m+n})$$

$$=[(a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots+a_n)+(b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots\ldots+b_m)](2^{m+n})\text{個}$$

其中 $a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots\ldots,a_n$ 與 $b_1,b_2,b_3,b_4,\ldots\ldots,b_m$ 分別爲巴斯卡三角形 45^o 斜方向的第 m 階與第 n 階。

以 2×2^3〔如下圖〕爲例，由〔主題二---1〕得出的公式，可得數列共〈1+1+1+1〉$\times2^4$=64 種，此 64 種數列到底爲何？有哪些相關性？我們以窮舉方式，配合 1×2^n 之研究結果來做分析。各種情況操作如下：

D：down U：up

R：right L：left

01 02 03 04 05 06 07 08	第一列
09 10 11 12 13 14 15 16	第二列

T[D, a_2, a_3, a_4]

共兩層

1 2 3 4 5 6 7 8

方陣圖

第一列

2	1	4	3	6	5	8	7
7	8	5	6	3	4	1	2
6	5	8	7	2	1	4	3
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8
LLL	LLR	LRL	LRR	RLL	RLR	RRL	RRR

第二列

10	09	12	11	14	13	16	15
15	16	13	14	11	12	09	10
14	13	16	15	10	09	12	11
11	12	09	10	15	16	13	14
12	11	10	09	16	15	14	13
13	14	15	16	09	10	11	12
16	15	14	13	12	11	10	09
09	10	11	12	13	14	15	16
LLL	LLR	LRL	LRR	RLL	RLR	RRL	RRR

T[R, a_2, a_3, a_4]

04 03 02 01
05 06 07 08
12 11 10 09
13 14 15 16

T[R,D, a_3, a_4]

共四層

05 06 07 08

方陣圖

6	5	8	7
7	8	5	6
8	7	6	5
5	6	7	8

3	4	1	2
2	1	4	3
1	2	3	4
4	3	2	1

11	12	9	10
10	9	12	11
9	10	11	12
12	11	10	9

14	13	16	15
15	16	13	14
16	15	14	13
13	14	15	16

T[R,R, a_3, a_4]

06 05
14 13

T[R,R,D, a_4]

共八層

07 08

第一層	07 08
	02 01
第二層	03 04
	06 05
第三層	14 13
	11 12
第四層	10 09
	15 16

T[R,R,R, a_4]

共八層

由上而下

07
15

07 15	一
02 10	二
03 11	三
06 14	四
05 13	五
01 09	六
04 12	七
08 16	八

(一) T[D, a_2, a_3, a_4](或 T[U, a_2, a_3, a_4])之後可得兩層 1×2^3 配合 1×2^3 方陣圖快速推得數列。數列之關聯性討論如下：

1. 同一行數列由上而下，固定兩數一組，且各組之和形成公差 2 的等差數列，類推至 2×2^n 上下列數字之和形成的數列仍為公差 2 的數列。

數字之和	10	12	14	16	18	20	22	24
第一列數字	1	2	3	4	5	6	7	8
	+	+	+	+	+	+	+	+
第二列數字	9	10	11	12	13	14	15	16

→形成公差 2 的等差數列

2. 我們利用先前 1×2^3 的方陣圖來探討，發現數列的順序是按照 S 型穿梭於 2 層方陣圖間，先 D 的話，是從第二列第一個穿出，反之，先 U 的話數列順序是從第一列開始，向下貫穿，再依照 S 型方式游走。如下圖：

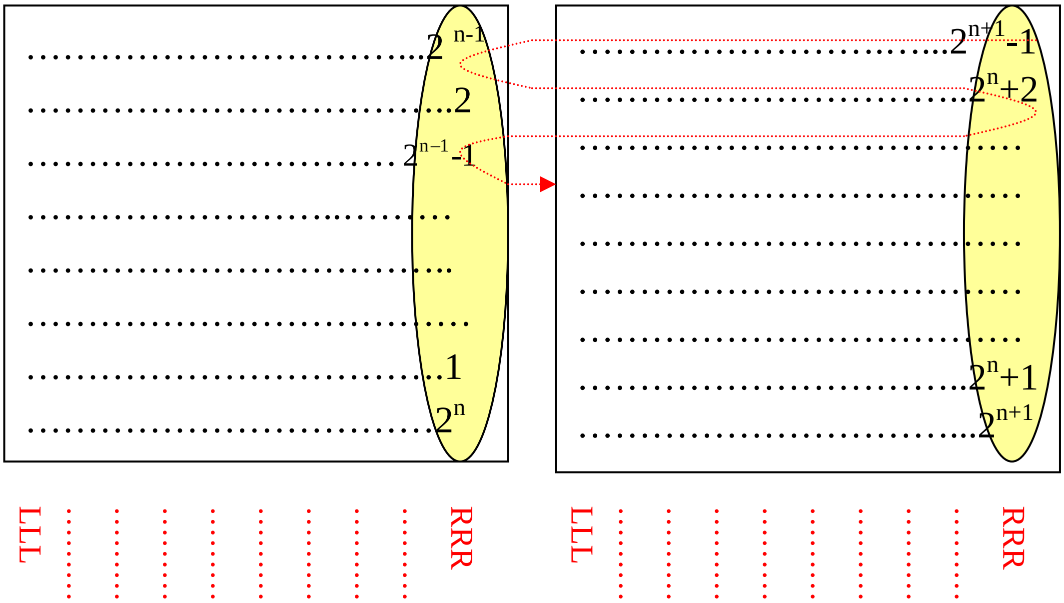
2	1	4	3	6	5	8	7
7	8	5	6	3	4	1	2
6	5	8	7	2	1	4	3
3	4	1	2	7	8	5	6
4	3	2	1	8	7	6	5
5	6	7	8	1	2	3	4
8	7	6	5	4	3	2	1
1	2	3	4	5	6	7	8
LLL	LLR	LRL	LRR	RLL	RLR	RRL	RRR

10	09	12	11	14	13	16	15
15	16	13	14	11	12	09	10
14	13	16	15	10	09	12	11
11	12	09	10	15	16	13	14
12	11	10	09	16	15	14	13
13	14	15	16	09	10	11	12
16	15	14	13	12	11	10	09
09	10	11	12	13	14	15	16
LLL	LLR	LRL	LRR	RLL	RLR	RRL	RRR

例：T[D,R,R,R]= 15,7,2,10,11,3,6,14,13,5,4,12,9,1,8,16

T[U,R,R,R]= 7,15,10,2,3,11,14,6, 5,13,12,4,1,9,16,8

類推至 2×2^n 得下圖：

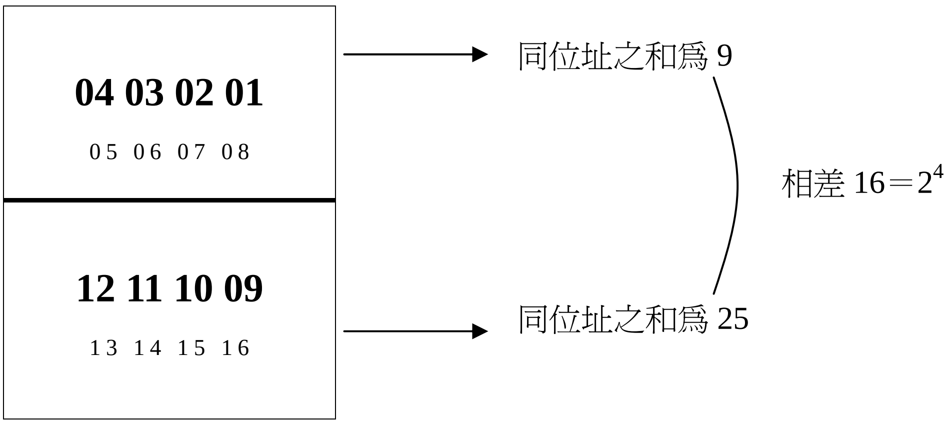


類推 2×2^n 可得 T[D,R,R,R,……,R]= $2^{n+1}-1,2^n-1,2,2^n+2,\cdots\cdots,2^n+1,1,2^n,2^{n+1}$

T[U,R,R,R,……,R]= $2^n-1,2^{n+1}-1,2^n+2,2,\cdots\cdots,1,2^n+1,2^{n+1},2^n$

(二) 1. T[R, a_2, a_3, a_4](或 T[L, a_2, a_3, a_4])

對摺時，紙變成兩層。



類推至 2×2^n

2^{n-1}	$2^{n-1}-1$	$2^{n-1}-2$	$2^{n-1}-3$	……………………1	
$2^{n-1}+1$	$2^{n-1}+2$	$2^{n-1}+3$	$2^{n-1}+4$	…………………… 2^n	
………………………………			2^n+3	2^n+2	2^n+1
………………………………			$2^{n+1}-2$	$2^{n+1}-1$	2^{n+1}

→同位址之和爲 2^n+1

相差 2^{n+1}

→同位址之和爲 $3x2^n+1$

2.T[R,D, a_3, a_4]→四層 $1x2^2$ 配合 $1x2^2$ 的方陣圖可推得數列，如下圖。

數列之關聯性討論如下：

①同位址之數字和〈共四層〉皆相等，其和=34

第一層	第二層	第三層	第四層
05 06 07 08	04 03 02 01	12 11 10 09	13 14 15 16

類推

$2^{n-1}+1$ $2^{n-1}+2$ $2^{n-1}+3$ $2^{n-1}+4$ ……2^n	2^{n-1} $2^{n-1}-1$ $2^{n-1}-2$ $2^{n-1}-3$ …… 1
………………2^n+4 2^n+3 2^n+2 2^n+1	………$2^{n+1}-3$ $2^{n+1}-2$ $2^{n+1}-1$ 2^{n+1}

四層數字的和皆相等，其和= $2^{n+2}+2$

②數列的順序是照 S 型穿梭於 4 層方陣圖間，第二次摺疊爲 D 的話，是從第四層第一個穿出，反之，爲 U 的話，數列順序是從上層開始，向下貫穿，再照 S 型方式游走。

第一層方陣圖

6	5	8	7
7	8	5	6
8	7	6	5
5	6	7	8
L L	L R	R L	R R

第二層方陣圖

3	4	1	2
2	1	4	3
1	2	3	4
4	3	2	1
L L	L R	R L	R R

第三層方陣圖

11	12	9	10
10	9	12	11
9	10	11	12
12	11	10	9
L L	L R	R L	R R

第四層方陣圖

14	13	16	15
15	16	13	14
16	15	14	13
13	14	15	16
L L	L R	R L	R R

由上圖可得

1. T[R,D,R,R]=15,10,2,7,6,3,11,14,13,12,4,5,8,1,9,16
2. T[R,D,R,L]=16,9,1,8,5,4,12,13,14,11,3,6,7,2,10,15
3. T[R,D,L,R]=13,12,4,5,8,1,9,16,15,10,2,7,6,3,11,14
4. T[R,D,L,L]=14,11,3,6,7,2,,10,15,16,9,1,8,5,4,12,13

類推至 2×2^n

可得數列的完成，是照 S 型穿梭於 4 層方陣圖間，第二次摺疊為 D 的話，是從第四層第一個穿出，反之，為 U 的話，數列順序是從上層開始，向下貫穿，再照 S 型方式游走。

==

有了這些研究做基礎，我們可試著往最後目標---〔$2^m\times2^n$ 形成的數數列之關連性〕做研究。

主題二---2：給定 $2^m\times2^n$，按照操作規則，所得數列間之關係探討。

1	2	3	……	2^n
2^n+1	2^n+2	2^n+3	……	……
· · · ·	· · · ·	· · · ·	· · · ·	· · · $(2^m-1)\times2^n$
$(2^m-1)\times2^n+1$	……	……	……	$2^m\times2^n$

將 $2^m\times2^n$ 操作至 $1\times2^{n-i}$ 可視為共有 2^{m+i} 層的 $1\times2^{n-i}$。接著，最後數列的完成可看作成由兩個 $1\times2^{m+i}$ 與 $1\times2^{n-i}$ 之方陣圖拼成。

因此，在「$2^m\times2^n$ 操作至 $1\times2^{n-i}$」的條件下，最後共有 $2^{m+i}\times2^{n-i}=2^{m+n}$ 個數列，且每個數列由上而下必每 2^{m+i} 個數字一組，作符合 $1\times2^{m+i}$ 的方陣圖之順序調整。

其數字間之關聯性，我們可利用前面研究的過程與例子，再根據規則寫出下面一些性質：

[R(L)性質]：將 $2^m \times 2^n$ 連續向右〈或向左〉做對摺 k 次，則對於每一列上下層同位址之數字和分別皆相等，且同一行上、下層同位址的數字和形成公差 2^{n+k} 的數列。

為了方便說明，我們定義

$S_{(i,j)}$ ：表示第 i 列、第 j 行同位址所有上下層同位址之數字和

(以下研究 $S_{(i,j)}$ 定義同)，

可得

$$S_{(1,1)} = S_{(1,2)} = \ldots\ldots = S_{(1,2^{n-k})} = (1+2^n)\times 2^{k-1}$$

$$S_{(2,1)} = S_{(2,2)} = \ldots\ldots = S_{(2,2^{n-k})} = (1+2^n)\times 2^{k-1} + 2^n \times 2^k$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$S_{(i,1)} = S_{(i,2)} = \ldots\ldots = S_{(i,2^{n-k})} = (1+2^n)\times 2^{k-1} + (i-1)2^n \times 2^k$$

即 $S_{(1,1)}, S_{(2,1)}, \ldots, S_{(i,1)}$ 形成公差 2^{n+k} 之數列

Ex： 2×2^3 T[R,R, a_3, a_4]

第一列	6	5
	3	4
	2	1
	7	8
第二列	14	13
	11	12
	10	9
	15	16

$S_{(1,1)} = S_{(1,2)} = (1+2^3)\times 2^{2-1} = 18$ 即 6+3+2+7=5+4+1+8=18

$S_{(2,1)} = S_{(2,2)} = 18 + 2^{3+2} = 50$ 即 14+11+10+15=13+12+9+16

公差＝50－18＝32＝ 2^{3+2}

[D(U)性質]：將 $2^m \times 2^n$ 連續向下〈或向上〉做對摺 k 次，則對於每一行上下層同位址之數字和皆相等。且同一列上、下層同位址的和形成公差 2^k 的數列。

即 $S_{(1,1)} = S_{(2,1)} = \ldots\ldots = S_{(2^{m-k},1)} = [1+(2^m-1)\times 2^n + 1]\times 2^{k-1} = (2^{m+n} - 2^n + 2)\times 2^{k-1}$

$$S_{(1,2)} = S_{(2,2)} = \ldots\ldots = S_{(2^{m-k},2)} = S_{(1,1)} + 2^k$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$S_{(1,i)} = S_{(2,i)} = \ldots\ldots = S_{(2^{m-k},i)} = S_{(1,1)} + (i-1)2^k$$

可得$S_{(1,1)}, S_{(1,2)}, \ldots S_{(1,i)}$形成公差$2^k$之數列

Ex： $2^3 \times 2$ ， T[D,D, a_3, a_4]

11	12
5	6
3	4
13	14
9	**10**
7	8
1	2
15	16

得 $S_{(1,1)}$=$S_{(2,1)}$=$(2^{3+1}-2^1+2)\times 2^{2-1}$=32　　即 11+5+3+13=9+7+1+15=32

$S_{(1,2)}$ = $S_{(2,2)}$ =32+ 2^2 =36　　即 12+6+4+14=10+8+2+16=36

公差 36－32＝4

[R&D 性質]：對於$2^m \times 2^n$ ，T[a_1,a_2…, a_k , a_{k+1} ,……,a_{m+n}]

其中 a_1,a_2,……, a_k 表 R（或 L），a_{k+1}表 D（或 U）

則最後操作完成之數列：

1. 由上而下（或由左而右）必形成連續 2^{k+1} 個數一組，每組之和皆相同。

 利用[R(L)性質]中的結果可得

$$和 = (1+2^n)\times 2^{k-1} + [(1+2^n)\times 2^{k-1} + 2^n \times 2^k \times (2^m - 1)]$$

$$= 2^{m+n+k} + 2^k$$

如下說明：

第一組	第二組	第三組		第 $^{m+n-(k+1)}$組
			…………	
共 2^{k+1} 項	共 2^{k+1} 項	共 2^{k+1} 項		共 2^{k+1} 項

$S_1=S_2=\cdots\cdots=S_{2^{m+n-(k+1)}}$

其中 S_j 代表第 j 組所有數字之和

2.操作完成的數列，假設爲$b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6,b_7,b_8,\cdots\cdots,b_{2^m\times 2^n}$

則數字大小關係只能下列兩種規律情況：

(1). $b_1 > b_2$，$b_3 < b_4$，$b_5 > b_6$，$b_7 < b_8$，……

即 $\boxed{大，小}$ ， $\boxed{小，大}$ ， $\boxed{大，小}$ ， $\boxed{小，大}$

(2). $b_1 < b_2$，$b_3 > b_4$，$b_5 < b_6$，$b_7 > b_8$，……

即 $\boxed{小，大}$ ， $\boxed{大，小}$ ， $\boxed{小，大}$ ， $\boxed{大，小}$

3. 若$i \geq 2$，則上述各組可再分成兩小組，接著此兩小組分別由上而下(或由左而右) 依序每 2 個數一對，其和必相等

$$\boxed{\boxed{C_1,C_2,C_3,C_4,C_5,C_6,\cdots\cdots,C_{2^i-1},C_{2^i}}\ ,\ \boxed{C_{2^i+1},C_{2^i+2},C_{2^i+3},C_{2^i+4}\cdots\cdots,C_{2^{i+1}}}}$$

其中 $\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2=\mathrm{C}_3+\mathrm{C}_4,\mathrm{C}_5+\mathrm{C}_6=\cdots,\cdots=\mathrm{C}_{2^i-1}+\mathrm{C}_{2^i}$

$\mathrm{C}_{2^i+1}+\mathrm{C}_{2^i+2}=\mathrm{C}_{2^i+3}+\mathrm{C}_{2^i+4},\cdots\cdots=\mathrm{C}_{2^{i+1}-1}+\mathrm{C}_{2^{i+1}}$

例如：T [R.R.D.D]=$\boxed{12，9，10，11，7，6，5，8}$，$\boxed{4，1，2，3，15，14，13，16}$

因爲 k＝2，得

(1) 每 8 個數一組，共兩組

(2) 每組之和$=2^{2+2+2}+2^2=68$

(3) 12+9 = 10+11，7+6 = 5+8，4+1 = 2+3，15+14 = 13+16

例如：T [R.R.R.D.D]= $\boxed{24,17,20,21,22,19,18,23,15,10,11,14,13,12,9,16}$，

$\boxed{8,1,4,5,6,3,2,7,31,26,27,30,29,28,25,32}$

因爲 k＝3，得

(1) 每 16 個數一組，共兩組

(2) 每組之和 ＝ $2^{2+3+3}+2^3=264$

(3) 24+17 = 20+21，22+19 = 18+23，15+10 = 11+14，13+12 = 9+16，8+1 = 4+5，

6+3 = 2+7，31+26 = 27+30，29+28 = 25+32

[D&R 性質]：對於 $2^m \times 2^n$ ，$T[a_1,a_2\ldots, a_k, a_{k+1},\ldots\ldots,a_{m+n}]$

其中 $a_1,a_2,\ldots\ldots, a_k$ 表 D（或 U），a_{k+1} 表 R（或 L）

則最後操作完成之數列

1. 由上而下〈或由左而右〉必形成連續 2^{k+1} 個數一組，每組之和皆相同。

利用[D(U)性質]中的結果可得

$$和＝(2+2^{m+n}-2^n)\times 2^{k-1}+[(2+2^{m+n}-2^n)\times 2^{k-1}+2^k(2^n-1)]$$

$$=\ 2^{m+n+k}+2^k$$

如下表說明：

第一組	第二組	第三組		第 $^{m+n-(k+1)}$組
			…………	
共 2^{k+1} 項	共 2^{k+1} 項	共 2^{k+1} 項		共 2^{k+1} 項

$S_1=S_2=\cdots\cdots=S_{2^{m+n-(k+1)}}$

其中 S_j 代表第 j 組所有數字之和

2. 同〔R&D 性質〕之 2 的結論。

3. 同〔R&D 性質〕之 3 的結論。

例如：T[DDRL]=$\boxed{16，4，8，12，9，5，1，13}$，$\boxed{14，2，6，10，11，7，3，15}$

因為 k＝2，得

(1) 每 8 個數一組，共兩組

(2) 每組之和 ＝ $2^{2+2+2}+2^{2}=68$

(3) 16+4 = 8+12，9+5 = 1+13，14+2 = 6+10，11+7 = 3+15

例如：T[DDRLR]=$\boxed{29,5,13,21,20,12,4,28}$，$\boxed{25,1,9,17,24,16,8,32}$，

$\boxed{31,7,15,23,18,10,2,26}$，$\boxed{27,3,11,19,22,14,6,30}$

因為 k＝2，得

(1) 每 8 個數一組，共四組

(2) 每組之和 ＝ $2^{2+3+2}+2^{2}=132$

(3) 29+5 = 13+21，20+12 = 4+28，25+1 = 9+17，24+16 = 8+32

31+7 = 15+23，18+10 = 2+26，27+3 = 11+19，22+14 = 6+30

==

我們的探索之旅到此告一段落，接下來我們對整份作品作個統整

肆、 結論

一、

1. 1×2^{n}需經過 n 次的連續對摺才能完成一次的數列排序。
2. 1×2^{n}每個數列，若由上而下依次兩兩一組，每組之數字和皆等於$2^{n}+1$。
3. 1×2^{n}對於 n 次的操作過程，若僅第 n 次不同（左、右對摺互換），則所得兩數列必為逆排列。
4. 對於 n 次的操作過程，若僅第 k 次不同（左、右對摺互換），則所得兩種數列之關係，可視為將其中一數列，由上而下依次每2^{k}個數一組，再由上而下依次將相鄰奇、偶兩組做互換，其結果為另一數列。
5. 對於兩數列，若操作過程[R]、[L]完全互換，則此兩數列由上而下兩數一組，必形成相對應兩組之間兩數順序互換。

6. 將1×2^n操作完成，共有2^n個數列。

二、

1. $2^n \times 2^n$，可得數列共

$$2(\mathbf{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots+a_n}) \times 2^{2n} = (\mathbf{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots+a_n})\, 2^{2n+1}$$ 個

2. $2^m \times 2^n$ 得數列共

$$(\mathbf{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots+a_n})(\mathbf{2^{m+n}})+(\mathbf{b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots\ldots+b_m})(\mathbf{2^{m+n}})$$

$$=[(\mathbf{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots\ldots+a_n})+(\mathbf{b_1+b_2+b_3+b_4+\ldots\ldots+b_m})](\mathbf{2^{m+n}})$$ 個

其中 $\mathbf{a_1,a_2,a_3,a_4,\ldots\ldots,a_n}$ 與 $\mathbf{b_1,b_2,b_3,b_4,\ldots\ldots,b_m}$ 為巴斯卡三角形 45^o 斜方向的第 m 階與第 n 階。

三、

1. 從 $2^m \times 2^n$ 操作至 $1\times 2^{n-i}$ 的結果。最後可得共有 2^{m+n} 個數列，且每個數列由上而下必每 2^{m+i} 個數字一組，作符合 $1\times 2^{m+i}$ 的方陣圖之順序調整。
2. $2^m \times 2^n$ 操作完成之數列，其數字間之關聯性必符合 **[R(L)性質]**、**[D(U)性質]**、**[R&D 性質]**、 **[D&R 性質]**。

伍、 參考文獻

1. http://www.hkedcity.net/iworld/link/index.phtml?iworld_id=68&parent_id=1734
   中學數學科園地----巴斯卡三角形
2. 數學發現----- p.71~ p.72 巴斯卡三角形
3. 數學誕生的故事------p.148 ~ p. 154 賈憲三角拾趣
4. 數學家的傳奇-----p.22 ~ p.30 賈憲三角形

評語

本研究能夠引入十分複雜的數學問題。可惜在口頭報告中未能利用到電腦展示來輔助摺紙的過程。