

臺灣二〇〇六年國際科學展覽會

科 別：數學科

作 品 名 稱：埃及分數之固定項數分解問題

學校 / 作者：國立屏東高級中學 李孟修
國立屏東高級中學 劉琦崑



我的名字叫李孟修，今年 16 歲，目前就讀於屏東高中二年級數理資優班。從小對數學頗有興趣，偶爾會上網看些數學文章以及閱讀與數學相關的書籍。升上高中後，對數學有了更深一層的體悟，更對數學所具有的美感所深深吸引，喜歡享受解題時思考的樂趣。

這是我第一次所做的深入研究報告，同時也是第一次參加國際科展，因此心情是既興奮又害怕。無論結果如何，能夠參與這次的研究，實在是一次很寶貴的經驗。



姓名：劉琦歲
學校：國立屏東高中
班級：二年十七班（數理資優班）
生日：78年3月14日
興趣：學習數理方面的知識
志願：將來能像我父親一樣成為大學的教授

我的家位於淳樸的屏東市，父親為大學教授，母親是家庭主婦。從國小開始，我就是大家心目中的好學生，經常被選為模範生。就讀國中之後，並擔任數學小老師，是老師的小助手，成績也一直保持在班上的第一名。目前我在屏東中學數理資優班就讀，可以與志同道合的朋友互相切磋，還有老師們的諄諄教誨下，讓我覺得高中生活很快樂！

埃及分數之固定項數分解問題

Egyptian Fractions

中文摘要:

本文由“分數 $\frac{7}{17}$ 是否能表示成兩個相異的埃及分數之和”這個問題出發，藉由簡單數論的性質以及反證法，得到一個真分數可表示成兩個相異埃及分數之和的定理檢驗法(定理 1)。有了這個基礎，我們進一步推廣定理 1 的結果，做出了嶄新的結果(定理 2、定理 3)。此定理分別可以用來檢驗真分數表示成三個、四個相異埃及分數之和的存在性；至於將真分數表示為 5 項、6 項... k 項相異埃及分數之和的部分尚在嘗試。利用定理 1、2，我們寫了兩個 *Matlab* 軟體工具的電腦程式，使得我們可以檢驗任意真分數是否可以表示成兩項及三項的和，並可把所有的解列出來；最後我們研究的是一個有關埃及分數的猜想(Erdős-Strauss Conjecture)問題，當分子為 4，且分母為 $4k$ 、 $4k+2$ 、 $4k+3$ 時，猜想皆成立。對於分母為 $4k+1$ 而言，當 k 為 $3r+1$ 、 $3r+2$ 猜想亦成立， $k=3r$ 且 r 為奇數時也是成立的，因此目前需解決的問題只剩分母為 $24t+1$ 的情況了。值得一提的是，我們用 *Matlab* 的程式檢驗出當分母為 10^{14} 至 $10^{14}+240000$ 之內的正整數時，猜想都是成立的，這已經超越了已知文獻的結果。

Egyptian Fractions

Abstract

This paper begins with the question: “Is $\frac{7}{17}$ able to be the sum of two different Egyptian fractions?” to discuss the problem of Egyptian fractions. According to the complete division properties and the counter-evidence method, we get a back-check theorem which is about a true fraction can be the sum of two different Egyptian fractions (see theorem 1). Using the same method we obtain a new back-check theorem that is a fraction can be the sum of three or four different Egyptian fractions (theorem2, theorem3). Similarly, we can follow the same procedure to get the rule that a fraction can be the sum of five or six ...or even more different Egyptian fractions. By the theorem1 and 2, we propose two programs written via the Matlab software to examine that any true fraction can be the sum of two items and three items or not. Finally we focus on the Erdős-Straus Conjecture, which related about true fractions can be divided by three different Egyptian fractions. The conjecture is when the denominator is $4k$, $4k+2$, or $4k+3$, the problem mentioned above can be solved. As for the denominator is $4k+1$, then the conjecture also can be solved, as k equals to $3r+1$ or $3r+2$. Also, k being $3r$ and r is an odd number, the conjecture is satisfied. As for the case of r equals to even number, the problem has not been solved. But it is worth to mention here that we use Matlab software to examine the conjecture is agreeable as the denominator is between 10^{14} to $10^{14} + 240000$. This is beyond the results from the literatures.

壹. 研究動機:

在古埃及的數學裡，習慣將一個真分數表示成若干個埃及分數之和，這讓我們感到相當有趣。而在暑假中我們也接觸到一個與埃及分數有關的問題，題目是這樣的：

$$\frac{7}{17} \text{ 是否能表示成兩個相異埃及分數之和?}$$

令 $\frac{7}{17} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ，因為 $a \neq b$ ，我們不妨設 $a < b$ ，

則 $\frac{7}{17} > \frac{1}{a} > \frac{7}{34} \Rightarrow \frac{34}{7} > a > \frac{17}{7}$ ，我們知道 a 可能為 3 或 4，

當 $a=3$ 時， $b = \frac{51}{4}$ (不合)，當 $a=4$ 時， $b = \frac{68}{11}$ (不合)

因此， $\frac{7}{17}$ 不能表示成兩個相異埃及分數之和。

貳. 研究方法，過程及結果:

一. 真分數表示成固定項數的相異埃及分數之和的檢驗法

有了上面的經驗後，我們進一步將 $\frac{7}{17}$ 推廣至 $\frac{n}{m}$ ，得到了一個真分數是否能表示成兩個相異埃及分數之和的檢驗法。

定理 1. 若 $\frac{n}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a < b$)，且 $m, n, a, b \in \mathbb{N}$ ，則必存在一個正整數 d_1 使 $d_1 < m$ ， $n | m + d_1$ ， $d_1 | \frac{m(m + d_1)}{n}$ ；且 $a = \frac{m + d_1}{n}$ ， $b = \frac{m(m + d_1)}{nd_1}$ 。

定理 1 的證明:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{na - m}{ma} \Rightarrow b = \frac{ma}{na - m} \in \mathbb{N} \quad , \quad \therefore na - m | ma$$

$$\text{令 } na - m = d_1 \text{，則 } a = \frac{m + d_1}{n} \text{，} \quad \therefore n | m + d_1 \text{，} d_1 | \frac{m(m + d_1)}{n}$$

$$\text{又 } \frac{2m}{n} > a > \frac{m}{n} \text{，故 } 1 \leq d_1 < m$$

$$\text{此時 } a = \frac{m + d_1}{n} \text{，} b = \frac{ma}{na - m} = \frac{m(m + d_1)}{nd_1}$$

特別地，由 $na-m|ma$ 我們也可得到下面的推論

推論 1. $\frac{n}{nk-1}$ 等類型的正有理數可表為兩個埃及分數之和。

既然我們已經知道 $\frac{7}{17}$ 不能表示成兩個相異埃及分數之和，自然地，我們便會想

問： $\frac{7}{17}$ 是否能表示成三個相異埃及分數之和？

$\frac{7}{17}$ 是否能表示成三個相異埃及分數之和？

$$\text{令 } \frac{7}{17} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \text{ 且 } a < b < c, \text{ 故 } \frac{7}{17} > \frac{1}{a} > \frac{7}{51} \Rightarrow \frac{51}{7} > a > \frac{17}{7},$$

a 可能為 7, 6, 5, 4, 3

$$(1) \text{ 若 } a=7, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{32}{119}$$

$$(2) \text{ 若 } a=6, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{25}{102}$$

$$(3) \text{ 若 } a=5, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{18}{85}$$

$$(4) \text{ 若 } a=4, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{11}{68}$$

$$(5) \text{ 若 } a=3, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{4}{51}$$

由定理 1 的檢驗可得 $\frac{7}{17} = \frac{1}{3} + \frac{1}{13} + \frac{1}{663} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{85} = \frac{1}{3} + \frac{1}{17} + \frac{1}{51}$ 。由上面的例

子，我們得到了美妙的靈感，猜測一個真分數若想表示成三個相異埃及分數之和

也應該有類似定理 1 的檢驗法，經推論我們得到了下面嶄新的定理。

定理 2. 若 $\frac{n}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, ($a < b < c$), 且 $m, n, a, b, c \in N$, 則必存在兩個正整

數 d_1 及 d_2 , 使 $d_2 < 2m$, $\frac{(d_2+m)(d_2-m)}{n} < d_1 < \frac{m(m+d_2)}{n}$, $n|m+d_2$,

$$d_2 | m\left(\frac{m+d_2}{n}\right) + d_1, d_1 | \frac{m\left(\frac{m+d_2}{n}\right)\left[m\left(\frac{m+d_2}{n}\right) + d_1\right]}{d_2};$$

$$\text{且 } a = \frac{m+d_2}{n}, b = \frac{m\left(\frac{m+d_2}{n}\right) + d_1}{d_2}, c = \frac{m\left(\frac{m+d_2}{n}\right)\left[m\left(\frac{m+d_2}{n}\right) + d_1\right]}{d_2 d_1}$$

定理 2 的證明:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{na-m}{ma} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

由定理 1 知道必存在一個正整數 d_1 使 $na-m \mid ma+d_1$ 、 $d_1 \mid \frac{ma(ma+d_1)}{na-m}$ ，且 $d_1 < ma$

令 $na-m=d_2$ ，則 $a = \frac{m+d_2}{n}$ ， $\therefore n \mid m+d_2$ ， $d_2 \mid m \frac{(m+d_2)}{n} + d_1$ ，

$$d_1 \mid \frac{m \left(\frac{m+d_2}{n} \right) \left[m \left(\frac{m+d_2}{n} \right) + d_1 \right]}{d_2}$$

又 $\frac{3m}{n} > a > \frac{m}{n}$ 且 $c > b$ ，故 $1 \leq d_2 < 2m$ ， $\frac{(d_2+m)(d_2-m)}{n} < d_1 < \frac{m(m+d_2)}{n}$

此時 $a = \frac{m+d_2}{n}$ ， $b = \frac{m \left(\frac{m+d_2}{n} \right) + d_1}{d_2}$ ， $c = \frac{m \left(\frac{m+d_2}{n} \right) \left[m \left(\frac{m+d_2}{n} \right) + d_1 \right]}{d_2 d_1}$

藉由定理 2 的結果，我們更進一步研究出一個真分數表示成四個相異埃及分數之和的定理檢驗法(定理 3)

定理 3. 若 $\frac{n}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ ， $(a < b < c < d)$ ，且 $m, n, a, b, c \in N$ ，則必存在三個正整數 d_1 、 d_2 及 d_3

使 $d_3 < 3m$ ， $\frac{(d_3+m)(d_3-m)}{n} < d_2 < 2m \frac{(d_3+m)}{n}$ ，

$$\frac{\left[d_2 - m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) \right] \left[d_2 + m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) \right]}{d_3} < d_1 < \frac{m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) \left[d_2 + m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) \right]}{d_3}, n \mid m+d_3,$$

$$d_3 \mid m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) + d_2, d_2 \mid m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) \left[\frac{m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) + d_2}{d_3} \right] + d_1,$$

$$d_1 \mid \frac{m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) \left[\frac{m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) + d_2}{d_3} \right] \left\{ m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) \left[\frac{m \left(\frac{m+d_3}{n} \right) + d_2}{d_3} \right] + d_1 \right\}}{d_2}$$

定理 3 的證明:

$$\frac{n}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \Rightarrow \frac{na-m}{ma} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d},$$

由定理 2 知道必存在兩個正整數 d_1 及 d_2 使 $na-m|ma+d_2$ 、 $d_2|ma\frac{(ma+d_2)}{na-m}+d_1$

$$\text{以及 } d_1 | \frac{ma\left(\frac{ma+d_2}{na-m}\right)\left[ma\left(\frac{ma+d_2}{na-m}\right)+d_1\right]}{d_2},$$

$$\text{且 } d_2 < 2m, \frac{(d_2+m)(d_2-m)}{n} < d_1 < \frac{m(m+d_2)}{n}$$

令 $na-m=d_3$, 則 $a=\frac{m+d_3}{n}$, $\therefore n|m+d_3$, $d_3|m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)+d_2$,

$$d_2 | m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)\left[\frac{m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)+d_2}{d_3}\right]+d_1,$$

$$d_1 | \frac{m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)\left[\frac{m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)+d_2}{d_3}\right]\left\{m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)\left[\frac{m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)+d_2}{d_3}\right]+d_1\right\}}{d_2}$$

又 $\frac{4m}{n} > a > \frac{m}{n}$ 且 $c > b > a$, 故 $1 \leq d_3 < 3m$, $\frac{(d_3+m)(d_3-m)}{n} < d_2 < 2m\frac{(d_3+m)}{n}$,

$$\frac{\left[d_2 - m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)\right]\left[d_2 + m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)\right]}{d_3} < d_1 < \frac{m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)\left[d_2 + m\left(\frac{m+d_3}{n}\right)\right]}{d_3}$$

二. 特殊分數之不定方程問題

問題 1. 解不定方程 $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

令 $a < b$

$$n=1, \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$n=2, \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$$

$$n \geq 3, \frac{n}{n+1} > \frac{1}{a} > \frac{n}{2(n+1)} \Rightarrow \frac{2(n+1)}{n} > a > \frac{n+1}{n} \Rightarrow 2 + \frac{2}{n} > a > 1 + \frac{1}{n}, a=2$$

$$\therefore \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{2n+2}{n-1}, \because b \in N \text{ 且 } b > 2, \therefore n=5, 3$$

故 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}$ 為解。

問題 2. 解不定方程 $\frac{n}{n+1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

令 $a < b < c$

$$n=1, \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

$$n=2, \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + \frac{1}{42}$$

$$n=3, \frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{20}$$

$$n \geq 4, \frac{n}{n+1} > \frac{1}{a} > \frac{n}{3(n+1)} \Rightarrow \frac{3(n+1)}{n} > a > \frac{n+1}{n} \Rightarrow 3 + \frac{3}{n} > a > 1 + \frac{1}{n}, a=2 \text{ 或 } 3$$

$$(1) \text{ 若 } a=2, \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{n-1}{2n+2}$$

當 $n \geq 4$ 時,

$$\frac{n-1}{2n+2} > \frac{1}{b} > \frac{n-1}{2(2n+2)} \Rightarrow \frac{4n+4}{n-1} > b > \frac{2n+2}{n-1} \Rightarrow 4 + \frac{8}{n-1} > b > 2 + \frac{4}{n-1},$$

故 b 可能為 3, 4, 5, 6

$$(a) a=2, b=3 \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{6n+6}{n-5}$$

$\therefore c \in N$ 且 $c > 3, \therefore n=41, 23, 17, 14, 11, 9, 8, 7, 6$

$$(b) a=2, b=4 \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{4n+4}{n-3}$$

$\therefore c \in N$ 且 $c > 4, \therefore n=19, 11, 7, 5, 4$

$$(c) a=2, b=5 \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{10n+10}{3n-7}$$

$\therefore c \in N$ 且 $c > 5, \therefore n=4$

$$(d) a=2, b=6 \quad \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{c} \Rightarrow c = \frac{3n+3}{n-2}$$

$\therefore c \in N$ 且 $c > 6, \therefore n$ 無整數解

$$(2) \text{ 若 } a=3, \frac{n}{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2(n+1)-3}{3(n+1)} = \frac{2}{3} - \frac{1}{n+1}$$

當 $n=4$ 時, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 有最小值 $\frac{7}{15}$, 且 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 之最大值為 $\frac{9}{20}(\frac{1}{4} + \frac{1}{5})$

$$\therefore \frac{28}{60} \leq \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{27}{60} \text{ (矛盾); 因此 } a \neq 3$$

故 $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{7}{8}, \frac{8}{9}, \frac{9}{10}, \frac{11}{12}, \frac{14}{15}, \frac{17}{18}, \frac{19}{20}, \frac{23}{24}, \frac{41}{42}$ 為解。

三. 厄多斯與斯特勞斯猜想(Erdős-Straus conjecture)

在有關埃及分數的研究中，有一個至今仍未解決的猜想，內容如下：

Erdős-Straus conjecture:

對任意整數 $m \geq 4$ 而言，不定方程 $\frac{4}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 均有正整數解。

我們不妨先把整數 m 分成 $4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ ，可以推導出下列幾種情形：

$m=4k$ 時,

定理 4. $\forall k \in N, \frac{4}{4k} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$

定理 4.的證明：

$$\frac{4}{4k} = \frac{1}{k} = \frac{1}{(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+2)(k+1)} + \frac{1}{k(k+1)}$$

$m=4k+2$ 時,

定理 5. $\forall k \in N, \frac{4}{4k+2} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$

定理 5.的證明：

<引理> $\frac{1}{pn} + \frac{1}{qn} = \frac{p+q}{pq}$

取 $p = 2k+1, q = 1, \frac{p+q}{n} = 2 \Rightarrow n = k+1$

$$\frac{4}{4k+2} = \frac{2}{2k+1} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(2k+1)}$$

$m=4k+3$ 時^[1],

定理 6. $\forall k \in N, \frac{4}{4k+3} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(4k+3)}$

定理 6.的證明：

^[1]在參考文獻 1.中已有提出下列結果，但作者並沒有給出具體的證明過程。

同定理 5 知，由 $\frac{1}{pn} + \frac{1}{qn} = \frac{p+q}{pq}$

取 $p = 4k + 3$ ， $q = 1$

$$\frac{p+q}{n} = 4 \Rightarrow n = k+1$$

$$\frac{4}{4k+3} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(4k+3)} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \frac{1}{(k+1)(4k+3)}$$

對於 $\frac{4}{4k+1}$ ，我們再進一步將 k 分成 $3r$ ， $3r+1$ ， $3r+2$ 三種情況來討論。

$k=3r+1$ 時，

<p>定理 7. $\forall r \in N, \frac{4}{12r+5} = \frac{1}{4r+2} + \frac{1}{12r+5} + \frac{1}{(4r+2)(12r+5)}$</p>
--

定理 7.的證明：

當 $k=1$ 時， $\frac{4}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{10} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2 \times 5}$

我們不妨令 $\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{4k+1} + \frac{1}{a} + \frac{1}{a(4k+1)}$

故 $\frac{4}{4k+1} = \frac{a+4k+2}{a(4k+1)} \Rightarrow 4a = a+4k+2 \Rightarrow a = \frac{4k+2}{3}$

當 $k=3r+1$ 時， $a=4r+2$

$$\therefore \frac{4}{4k+1} = \frac{4}{12r+5} = \frac{1}{4r+2} + \frac{1}{12r+5} + \frac{1}{(4r+2)(12r+5)}$$

$k=3r+2$ 時，

<p>定理 8. $\forall r \in N, \frac{4}{12r+9} = \frac{1}{4r+3} + \frac{1}{16r+12} + \frac{1}{48r+36}$</p>
--

定理 8.的證明：

當 $k=2$ 時， $\frac{4}{9} = \frac{1}{36} + \frac{15}{36} = \frac{1}{36} + \frac{5}{12} = \frac{1}{36} + \frac{4}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{36}$

當 $k=5$ 時， $\frac{4}{21} = \frac{1}{84} + \frac{15}{84} = \frac{1}{84} + \frac{5}{28} = \frac{1}{84} + \frac{4}{28} + \frac{1}{28} = \frac{1}{7} + \frac{1}{28} + \frac{1}{84}$

我們不妨令 $\frac{4}{4k+1} = \frac{1}{4(4k+1)} + \frac{1}{a} + \frac{1}{4a}$

$$\text{故 } \frac{4}{4k+1} = \frac{a+16k+4+4k+1}{4a(4k+1)} \Rightarrow 16a = a+20k+5 \Rightarrow a = \frac{4k+1}{3}$$

當 $k=3r+2$ 時， $a=4r+3$

$$\therefore \frac{4}{4k+1} = \frac{4}{12r+9} = \frac{1}{4r+3} + \frac{1}{16r+12} + \frac{1}{48r+36}$$

若 $k=3r$ 又為何呢？我們發現

當 r 為奇數時($2t+1$)之情況可加以分解。

定理 9. $\forall t \in N, \frac{4}{24t+13} = \frac{1}{6t+4} + \frac{1}{(6t+4)(24t+13)} + \frac{1}{(3t+2)(24t+13)}$

定理 9 的證明：

$$\text{當 } r=1 \text{ 時, } \frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4 \times 13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \times 13} + \frac{2}{4 \times 13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{52} + \frac{1}{26}$$

$$\text{當 } r=3 \text{ 時, } \frac{4}{37} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10 \times 37} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10 \times 37} + \frac{2}{10 \times 37} = \frac{1}{10} + \frac{1}{370} + \frac{1}{185}$$

$$\text{我們不妨令 } \frac{4}{12r+1} = \frac{1}{a} + \frac{3}{a(12r+1)} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a(12r+1)} + \frac{1}{a(12r+1)/2}$$

當 $r=2t+1$ 時， $a=6t+4$

$$\therefore \frac{4}{12r+1} = \frac{4}{24t+13} = \frac{1}{6t+4} + \frac{1}{(6t+4)(24t+13)} + \frac{1}{(3t+2)(24t+13)}$$

但 r 為偶數時，還未證出來，因此目前需解決的問題只剩分母為 $24t+1$ 的情況。
猜想的證明只差這一步了！

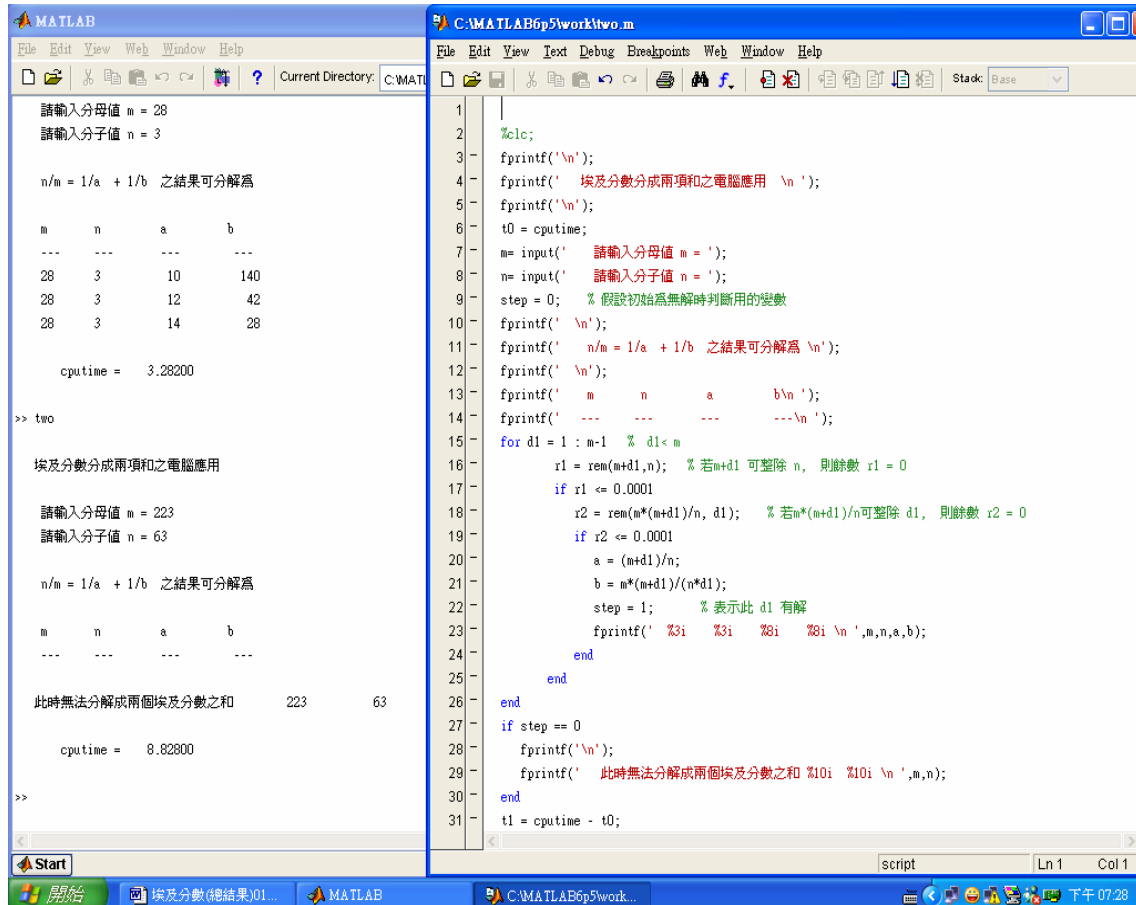
四. 電腦程式應用

定理 1 及定理 2 可以提供我們來檢驗一個真分數是否可以表示成二項及三項的相異埃及分數之和，並且可以把所有的解找出來，因此我們根據這兩個定理分別以 MATLAB 寫了三個應用程式，用來展現定理的能力。特別值得一提的是第三個應用程式是為了解驗 **Erdős-Straus conjecture** 而設計的，而我們檢驗的結果已超越已知文獻的結果，過程詳述如下。

1. 根據定理 1：我們以 MATLAB 寫了如下程式碼，並以兩例說明之，即分別

以 $\frac{n}{m} = \frac{3}{28}$ 與 $\frac{n}{m} = \frac{63}{223}$ 計算之，我們發現 $\frac{n}{m} = \frac{3}{28}$ 可以有三種分法，而

$\frac{n}{m} = \frac{63}{223}$ 卻無法分解成兩個埃及分數之和。



完整之程式碼如下所示：

```

fprintf('\n');
fprintf('  埃及分數分成兩項和之電腦應用  \n ');
fprintf('\n');
t0 = cputime;
m= input('  請輸入分母值 m = ');
n= input('  請輸入分子值 n = ');
step = 0;
fprintf(' \n');
fprintf('  n/m = 1/a + 1/b 之結果可分解為 \n');
fprintf(' \n');
fprintf('  m      n      a      b\n ');
fprintf('  ---      ---      ---      ---\n ');
for d1 = 1 : m-1
    r1 = rem(m+d1,n);
    if r1 <= 0.0001
        r2 = rem(m*(m+d1)/n, d1);
    
```

```

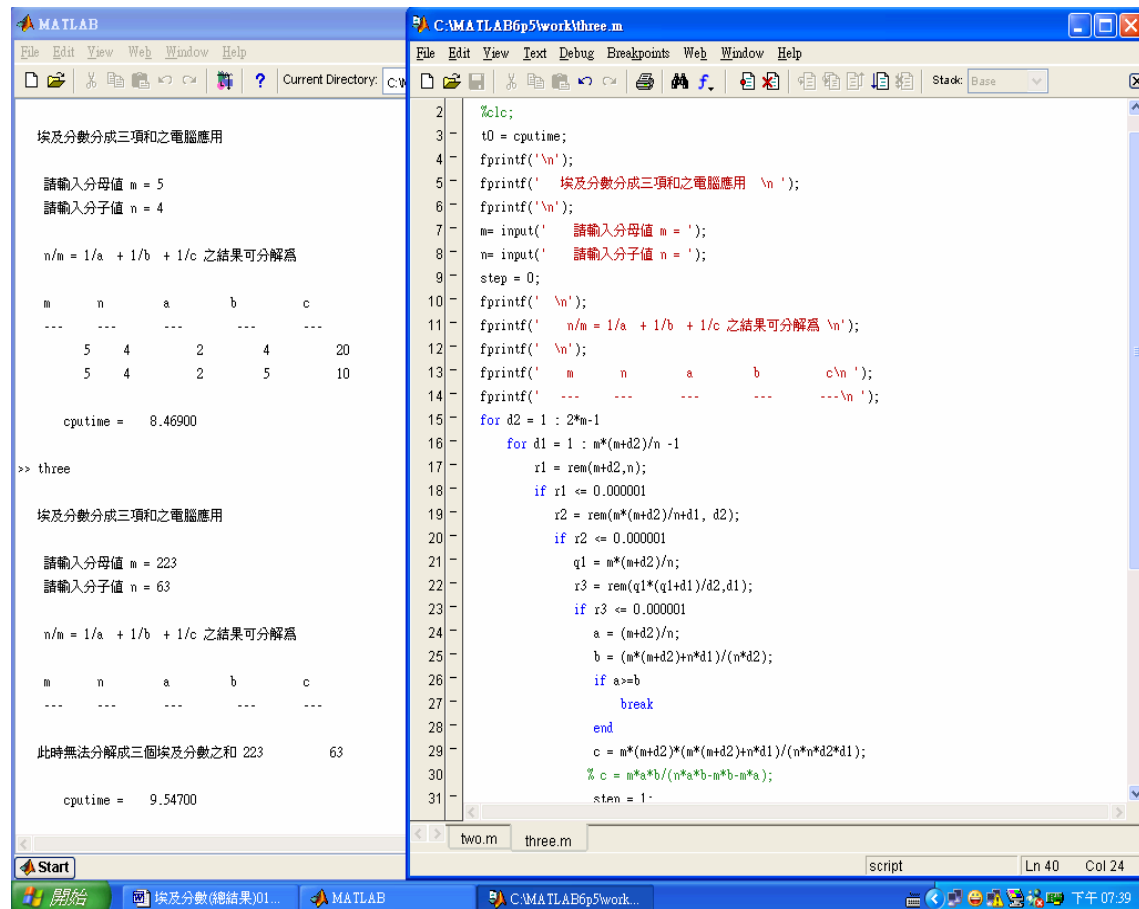
        if r2 <= 0.0001
            a = (m+d1)/n;
            b = m*(m+d1)/(n*d1);
            step = 1;
            fprintf(' %3i %3i %8i %8i \n ',m,n,a,b);
        end
    end
end
if step == 0
    fprintf('\n');
    fprintf(' 此時無法分解成兩個埃及分數之和 %10i %10i \n ',m,n);
end
t1 = cputime - t0;
fprintf(' \n');
fprintf('      cputime = %10.5f \n ',t1);

```

2. 根據定理 2.：我們另外以 MATLAB 寫了如下程式，並分別以 $\frac{n}{m} = \frac{4}{5}$ 與

$\frac{n}{m} = \frac{63}{223}$ 計算之，因為該二分數均無法分解成兩個埃及分數之和，此時我們發

現 $\frac{n}{m} = \frac{4}{5}$ 可以有二種分法，而 $\frac{n}{m} = \frac{63}{223}$ 卻還是無法分解成三個埃及分數之和



完整之程式碼如下所示：

```
t0 = cputime;
```

```

fprintf('\n');
fprintf(' 埃及分數分成三項和之電腦應用  \n ');
fprintf('\n');
m= input(' 請輸入分母值 m = ');
n= input(' 請輸入分子值 n = ');
step = 0;
fprintf(' \n');
fprintf('  n/m = 1/a  + 1/b  + 1/c  之結果可分解為 \n');
fprintf(' \n');
fprintf('  m      n      a      b      c\n ');
fprintf('  ---  ---  ---  ---  ---\n ');
for d2 = 1 : 2*m-1
    for d1 = 1 : m*(m+d2)/n -1
        r1 = rem(m+d2,n);
        if r1 <= 0.000001
            r2 = rem(m*(m+d2)/n+d1, d2);
            if r2 <= 0.000001
                q1 = m*(m+d2)/n;
                r3 = rem(q1*(q1+d1)/d2,d1);
                if r3 <= 0.000001
                    a = (m+d2)/n;
                    b = (m*(m+d2)+n*d1)/(n*d2);
                    if a>=b
                        break
                    end
                    c = m*(m+d2)*(m*(m+d2)+n*d1)/(n*n*d2*d1);
                    % c = m*a*b/(n*a*b-m*b-m*a);
                    step = 1;
                    fprintf('%10.0f    %2.0f    %8.0f    %8.0f    %8.0f\n
',m,n,a,b,c);
                end
            end
        end
    end
end
if step == 0
    fprintf('\n');
    fprintf(' 此時無法分解成三個埃及分數之和 %3i  %10i \n ',m,n);
end
t1 = cputime - t0;
fprintf(' \n');
fprintf('      cputime = %10.5f\n ',t1);

```

下表為 $2 \leq m \leq 10$ 及 $1 \leq n \leq m-1$ 時，該分數分解成兩個埃及分數和之情形，
即 $n/m = 1/a + 1/b$ ：

m	n	a	b	m	n	a	b
2	1	3	6	3	1	4	12
4	1	5 6	20 12	3	2	2	6
4	3	2	4	5	1	6	30
6	1	7 8 9 10	42 24 18 15	5	2	3	15
6	5	2	3	5	3	2	10
7	1	8	56	5*	4	---	---
7	2	4	28	7*	3	---	---
7	4	2	14	7*	5	---	---
8	1	9 10 12	72 40 24	7*	6	---	---
8	3	3 4	24 8	8	5	2	8
9	1	10 12	90 36	8*	7	---	---
9	2	5 6	45 18	9	4	3	9
9	5	2	18	9*	7	---	---
10	1	11 12 14 15	110 60 35 30	9*	8	---	---
10	3	4 5	20 10	10	7	2	5
10*	9	---	---				

* 無法分解成兩個埃及分數和

同理，下表則為幾個分數分解成三個埃及分數和之情形， $n/m = 1/a + 1/b + 1/c$ 。由計算分析得知，仍有許多分數無法分解成三個埃及分數和，且該分數一定也無法分解成兩個埃及分數和。但有些分數無法分解成兩個埃及分數和時，卻可以分解成三個埃及分數和。

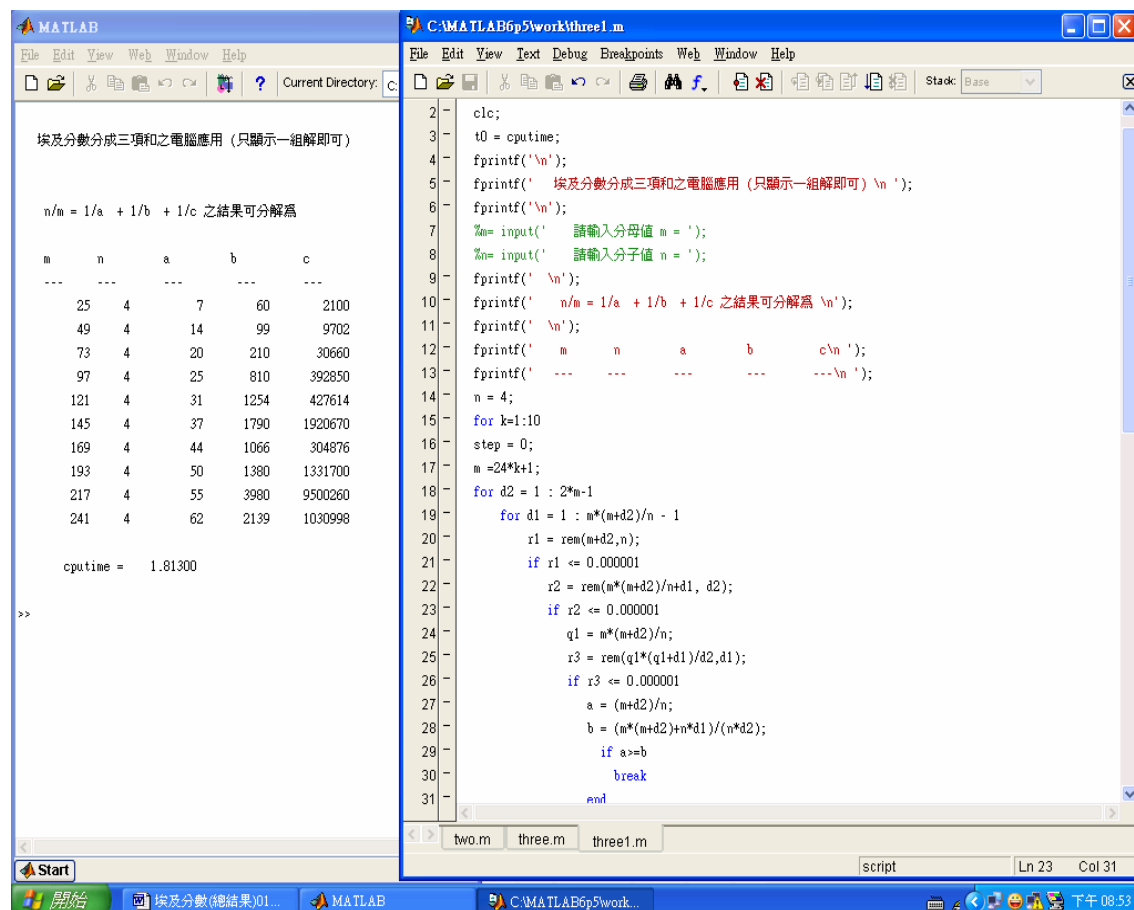
m	n	a	b	c	m	n	a	b	c
2	1	3	7	42	3	1	4	13	156
							4	14	84
							4	15	60
							4	16	48
							4	18	36
							4	20	30
							4	21	28
							5	8	120
							5	9	45
							5	10	30
							5	12	20
							6	7	42
							6	8	24
							6	9	18
6	10	15							
5*	4	2	4	20	7*	5	2	5	70
		2	5	10			2	6	21
							2	7	14
11*	5	3	9	99	11*	7	2	8	88
		3	11	33			2	11	22
		4	5	220					
11**	8	---	---	---	11**	9	---	---	---
11**	10	---	---	---	13*	8	2	9	234
							2	10	65
							2	13	26
13*	9	2	6	39	13*	10	2	4	52
13*	11	2	3	78	13**	12	---	---	---
14*	11	2	4	28	14*	13	---	---	---
15*	13	2	3	30	15*	14	2	3	10
		2	5	6					

* 無法分解成兩個埃及分數和，但可分解成三個埃及分數和

**無法分解成三個埃及分數和

3. 厄多斯與斯特勞斯猜想的檢驗：

我們根據對 **Erdős-Straus conjecture** 探討的結果知道，只要以定理 2 去檢驗 $m=24t+1$ 的情況就可以了，因此我們設計了第三個應用程式(如下所示)，檢驗出當分母為 19622 以內的正整數時，猜想都是成立的。



完整之程式碼如下所示：

```
clc;
t0 = cputime;
fprintf('\n');
fprintf(' 埃及分數分成三項和之電腦應用 (只顯示一組解即可) \n ');
fprintf('\n');
%m= input('    請輸入分母值 m = ');
%n= input('    請輸入分子值 n = ');

fprintf('  \n');
fprintf('    n/m = 1/a  + 1/b  + 1/c 之結果可分解為 \n');
fprintf('  \n');
fprintf('    m      n      a      b      c\n ');
fprintf('    ---    ---    ---    ---    ---\n ');
n = 4;
for k=1:10
```

```

    step = 0;
    m = 24*k+1;
    for d2 = 1 : 2*m-1
        for d1 = 1 : m*(m+d2)/n - 1
            r1 = rem(m+d2,n);
            if r1 <= 0.000001
                r2 = rem(m*(m+d2)/n+d1, d2);
                if r2 <= 0.000001
                    q1 = m*(m+d2)/n;
                    r3 = rem(q1*(q1+d1)/d2,d1);
                    if r3 <= 0.000001
                        a = (m+d2)/n;
                        b = (m*(m+d2)+n*d1)/(n*d2);
                        if a>=b
                            break
                        end
                        c = m*(m+d2)*(m*(m+d2)+n*d1)/(n*n*d2*d1);
                        step = 1;
                        fprintf('%10.0f    %2.0f    %8.0f    %8.0f    %8.0f\n
',m,n,a,b,c);
                            if step == 1
                                break
                            end
                        if step == 1
                            break
                        end
                        if step == 1
                            break
                        end
                    end
                end
            end
        end
    end
    if step == 1
        break
    end
    if step == 0
        fprintf('\n');
        fprintf('    此時無法分解成三個埃及分數之和 %3i    %10i \n ',m,n);
    end
    t1 = cputime - t0;
    fprintf(' \n');
    fprintf('    cputime = %10.5f\n ',t1);

```

因為 Swett 在參考文獻 3.已驗證了當 $m \leq 10^{14}$ 時，猜想是成立的，因此我們用程式去驗證當 $10^{14} \leq m \leq 10^{14} + 240000$ 時，猜想是否成立？檢驗結果也是成立的，因檢驗結果的資料太多了，我們無法在此列出結果，改以附件的型式提供驗證。特別要說明的是，如果在電腦硬體設備及時間足夠的條件下，我們的檢驗法應用程式可以再對更大的 m 作檢驗並將解找出來。

參. 結論與展望

在這篇研究報告中，我們的研究有以下五個嶄新的結果。據我們所知，除了第一點，其餘的在文獻上尚未提出過。

一、一個真分數是否能表示成兩個相異埃及分數之和的定理檢驗法(定理 1)

二、一個真分數是否能表示成三個相異埃及分數之和的定理檢驗法(定理 2)

三、一個真分數是否能表示成四個相異埃及分數之和的定理檢驗法(定理 3)

四、利用定理 1、2，我們寫了兩個 Matlab 軟體工具的電腦程式，使得我們可以檢驗任意真分數是否可以表示成兩項及三項的和，並可把所有的解列出來。

五、我們以電腦程式檢驗出當 $10^{14} \leq m \leq 10^{14} + 240000$ 時，**Erdős-Straus conjecture** 仍是成立的，這已經超越了已知文獻的結果。

conjecture 仍是成立的，這已經超越了已知文獻的結果。

對於埃及分數，我們想更進一步探討以下幾點：

一、給定任意一個真分數，並探討此真分數以最少項相異埃及分數表示的情形。

二、探討 $\frac{4}{n}$ 表示成三個相異埃及分數之和時，該三個分數之分母分別為奇數或偶數的組成之機率為何，並視其是否有任何規律可循。

三、當 m 和 n 差距越大時，其分解情形是否越多。

四、一個真分數是否能表示成 K (K 為固定正整數)個相異埃及分數之和的定理檢驗法。

肆. 參考文獻

1.文耀光, 2002 年, 古埃及的單位分數問題, 數學傳播, 26 卷 4 期, 52 至 58 頁。

2.柯召、孫琦,單位分數,第一版,香港,智能教育出版社, 33-39 頁, 2003 年 11 月。

3. Swett, A. "The Erdos-Strauss Conjecture." Rev. 10/28/99.

<http://math.uindy.edu/swett/esc.htm>.

評語

起源於遠古的數學問題。作品內容當中應該加強文獻的功夫。