

臺灣二〇〇六年國際科學展覽會

科 別：數學科

作 品 名 稱：由 Brocard Point 發現幾何不等式

學校 / 作者：臺北市立內湖高級中學 林祐民
臺北市立內湖高級中學 張瀚之

作者



張瀚之：

就讀內湖高中三年級，從小就對數學就有特別的喜好。尤其是每當我遭遇難題時，經過不停思考找出答案，那種豁然開朗的感覺是難以形容的棒。藉由這次科展的研究讓我更深入的了解到解決問題的方法。非常感謝我的指導老師 劉紹正，以及研究夥伴林祐民。若不是他們的支持以及協助，靠我自己一個人很難完成這份科展。

林祐民：

內湖高中三年級。國小時，並沒有對數學有太大興趣，直到國中遇到一位熱血的數學老師，不只教會我如何以正統的方式求解，更使我了解如何分析題目、如何從不同的角度下手，讓我了解到解決問題不是只有一種方法，也因此使我對數學有了濃厚的興趣，能夠深入的探究一個看似簡單的數學問題內部卻蘊含豐富的知識。上了高中，因緣際會的有了機會參加這次的科展，非常感謝我的指導老師 劉紹正，以及研究夥伴。

作品名稱：由 Brocard Point 發現幾何不等式

中文摘要

本研究報告以 Brocard Point 為核心，所用到的性質均先證明，以確認其正確性，並推演出一些其他的性質，藉由這些性質導出幾何不等式。內容可概分為四部份：

- (1)以 Brocard Angle 及已知的或推演出的基本性質，導出一些不等式。
- (2)結合「法格乃諾問題」、「費馬點」、「尤拉公式」導出幾個幾何不等式。尤其是三角形邊長與面積，外接、內切圓半徑與邊長間的不等關係，頗為有趣。
- (3)以向量為工具，分別計算內、重、垂心與 Brocard Point 間的距離，並導出邊長的不等關係。其中由內心及重心所導出的不等式，清楚俐落；垂心所導出的不等式則較為複雜。
- (4)以 Brocard Circle 與內、重心間的關係，導出一系列的不等式。其中 Weitzenberg 不等式的無意發現，令我們印象深刻。

英文摘要 (Abstract)

The Discovery of Geometry Inequalities by Brocard Point

This paper takes Brocard Point as a core. We proved some properties about Brocard geometry to confirm its accuracy, and deduce some other properties, and then derive some geometry inequalities by these properties. The content may divide into four parts:

- a) Derives geometry inequality by Brocard Angle, Crux Mathematicorum and properties which known or deduced.
- b) Unifies "Fagnano problem", "Fermat Point", "Euler formula" to derive several geometry inequalities. In particular the inequalities between triangle area and length of side, or circumradius inradius and the length of side, is quite interesting.
- c) Derives geometry inequalities about length of sides in triangle by the distances between incenter centroid circumcenter and Brocard Point. Especially, these inequalities were elegant which derived by incenter and centroid, but it was complicated derived by orthocenter.
- d) According to the relation about incenter centroid and Brocard Circle derives a series of inequalities. Discover Weitzenberg inequality makes us excited.

壹、研究動機：

高一學三角函數時，總覺得 $\cot \theta$ 沒什麼用處，也感到很陌生，一次偶然的機會在網路上（[http://mathword.wolfram.com/First Brocard Point.html](http://mathword.wolfram.com/First_Brocard_Point.html) 及 [http://mathword.wolfram.com/Brocard Angle.html](http://mathword.wolfram.com/Brocard_Angle.html)）看到 Brocard Point，是過去在課本中未見過的内容，並且有許多以三角函數表示的性質尤其是 $\cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C$ ，讓我們對 $\cot \theta$ 有不一樣的體認，因而引發探索 Brocard Point 及相關問題的興趣，也開始思考是否可以利用我們學過的三角形幾何性質和 Brocard Point 搭上關係，進一步推演出一些有趣的幾何性質、等式或不等式。

貳、研究目的：

利用課程以外的課題培養蒐集資料、探索及共同研究、討論的能力，以解決所面臨的問題。

參、文獻探討：

在本文中 P 表 Brocard Point， θ 表 Brocard Angle，A、B、C 分別為 $\triangle ABC$ 的三個內角， a 、 b 、 c 分別表示 $\triangle ABC$ 中的 \overline{BC} 、 \overline{AC} 、 \overline{AB} ， Δ 表 $\triangle ABC$ 的面積， s 表 $\frac{a+b+c}{2}$ ， R 、 r 分別表 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑及內切圓半徑， G 、 O 、 I 分別為 $\triangle ABC$ 的重心、外心、內心。

在網路上我們針對 Brocard Point 找到了以下幾個性質：

$$\text{性質一：} \cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C \quad (1)$$

$$\text{性質二：} \sin^3 \theta = \sin(A-\theta)\sin(B-\theta)\sin(C-\theta) \quad (2)$$

$$\text{性質三：} \cot \theta = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C} \quad (3)$$

$$\text{性質四：} \cot \theta = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2 \sin A \sin B \sin C} \quad (4)$$

$$\text{性質五：} \cot \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta} \quad (5)$$

$$\text{性質六：} \cot \theta = \frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} \quad (6)$$

$$\text{性質七：} \csc^2 \theta = \csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C \quad (7)$$

以上的七個性質我們都一一加以證明過，並放在附錄中。

此外，我們根據性質一作了性質一的推論： $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}$ 。根據性質二也作了性質二的推論： $\cot A + \cot B + \cot C = \csc A \csc B \csc C + \cot A \cot B \cot C$ 。

註：(*)為在文獻探討及研究過程中的第*式、(⊗)為在附錄中「性質的證明」的第*式、[*]為在附錄中「附記」的第*式

在三角形 ABC 中，找到 Brocard Point P 後，利用三角形相似的概念得到性質八：

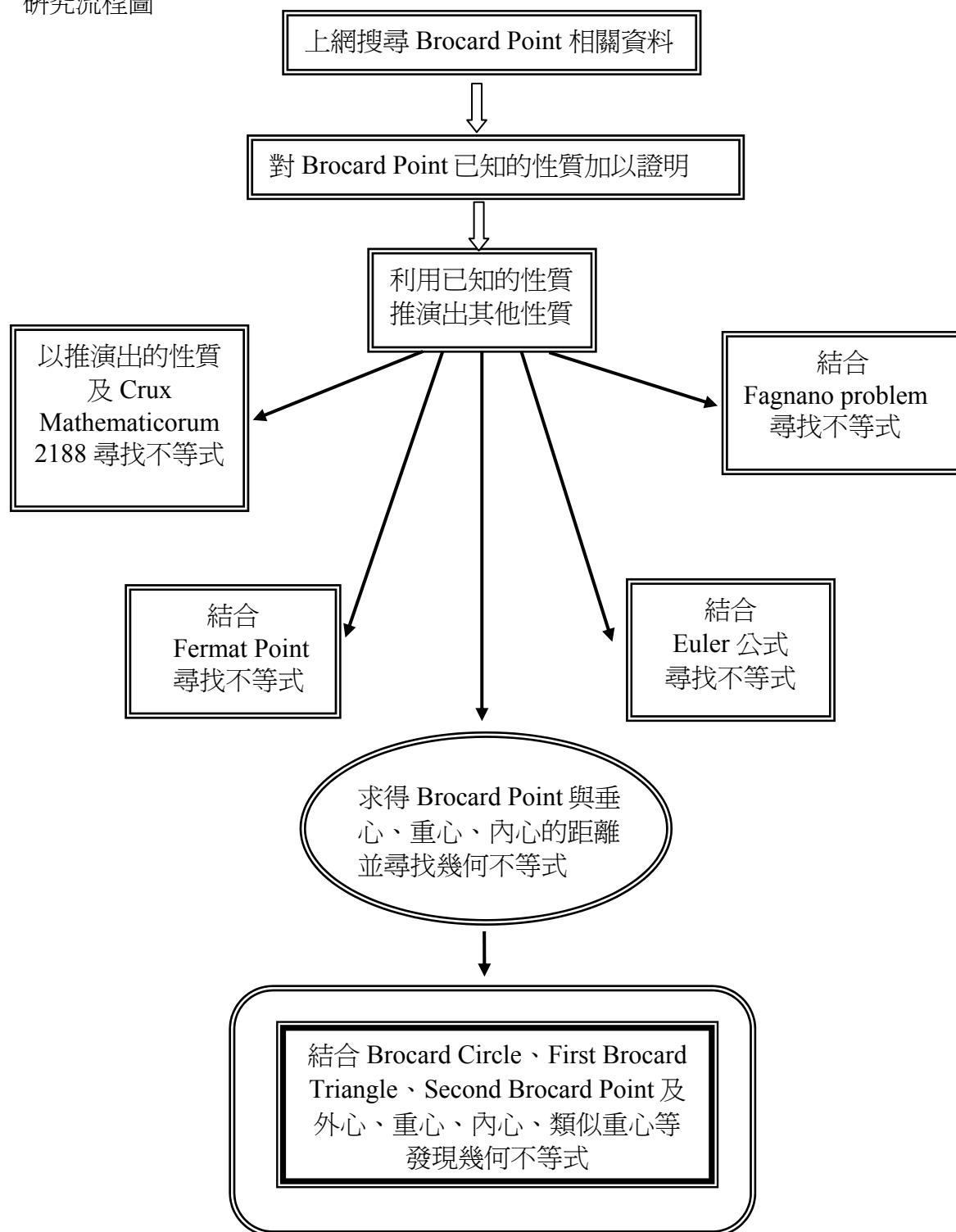
$$\overline{AP} : \overline{BP} : \overline{CP} = \frac{b}{a} : \frac{c}{b} : \frac{a}{c}, \text{ 再利用餘弦定理得到性質九：}$$

$$\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} = \frac{b^2c + ac^2 + a^2b}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}, \text{ 更進一步我們得到性質十： } \triangle ABP : \triangle BCP : \triangle ACP$$

$$= \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}. \text{ 以上推導的證明也都放在附錄中。}$$

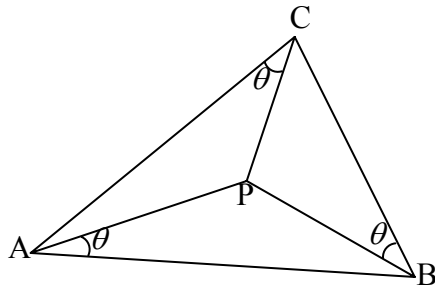
肆、研究過程：

研究流程圖

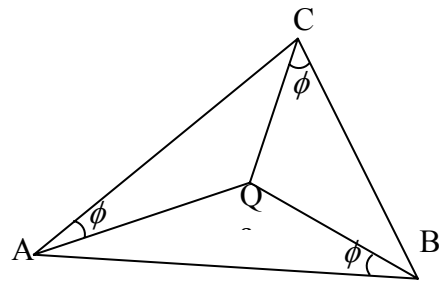


一、Brocard Point 及 Brocard Angle 的定義：

如〈圖一〉，設 P 為 $\triangle ABC$ 內部一點。若 $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \theta$ ，則稱 P 點為 $\triangle ABC$ 的 Brocard Point (或 First Brocard Point)， θ 為 Brocard Angle。



〈圖一〉



〈圖二〉

如〈圖二〉，設 Q 為 $\triangle ABC$ 內部一點。若 $\angle QBA = \angle QCB = \angle QAC = \phi$ ，則稱 Q 點為 $\triangle ABC$ 的 Second Brocard Point。

由對稱性可知 P 和 Q 有相同性質，且 $\theta = \phi$ 。因此，以下僅就 First Brocard Point 討論之。

二、尋找三角形 ABC 的 Brocard Point

作法：1. 作 $\angle CAD = \angle ACB$ 及 $\angle ACD = \angle ABC$ ，作 \overline{BD} 。

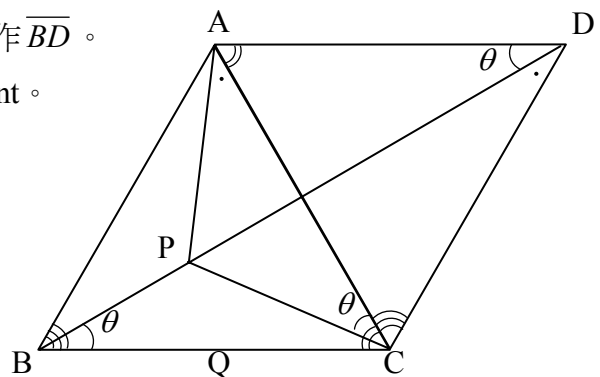
2. 作 $\angle ACP = \theta = \angle DBC$ ，則 P 為 Brocard Point。

證明：作 \overline{AP} ， $\angle ADP = \angle ACP = \theta$ ，

A、D、C、P 共圓， $\angle CDP = \angle CAP$ ，

故 $\angle BAP = \angle ADP = \theta$ ，

即 P 為 $\triangle ABC$ 的 Brocard Point。



〈圖三〉

三、由 Brocard Point 與 Brocard Angle 推演幾何不等式

1. 利用性質的推論尋找不等式

由性質一的推論得知 $\triangle ABC$ 的 Brocard Angle θ ， $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}$ ，

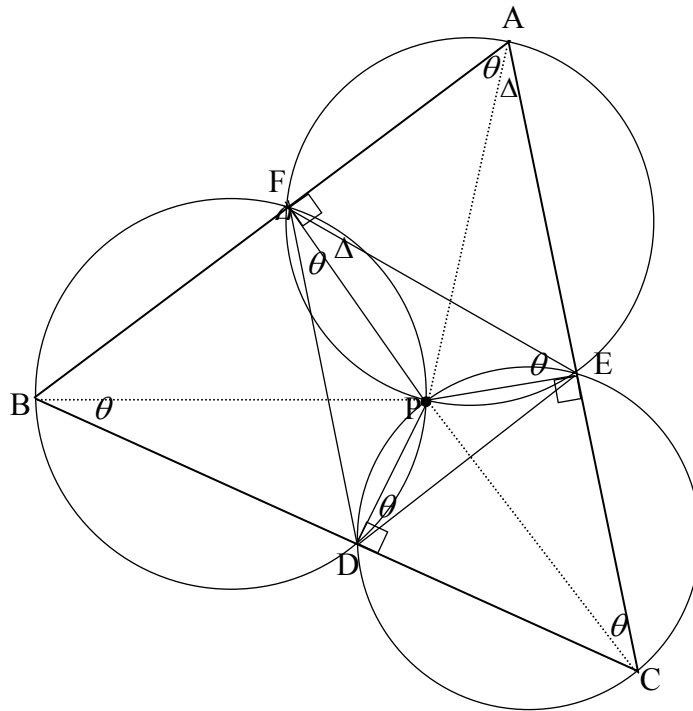
$$\text{則 } \sin \theta = \frac{2\Delta}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 4\Delta \leq \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

因此，得到有趣的幾何不等式(一)： $16\Delta^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$

2. 利用三角形的性質尋找不等式

如〈圖四〉，由 $\triangle ABC$ 的 Brocard Point P 向三邊作垂線，垂足分別為 D 、 E 、 F ，則 A 、 F 、 P 、 E 四點共圓， B 、 D 、 P 、 F 四點共圓，且 C 、 E 、 P 、 D 四點共圓。



〈圖四〉

由 $\angle PAE = \angle PFE$ 且 $\angle PBD = \angle PFD \Rightarrow \angle DFE = \angle FAE$ 及前面的性質，得到以下幾個特性：

特性 1： $\triangle DEF \sim \triangle BCA$

特性 2： P 為 $\triangle DEF$ 的 Brocard Point

特性 3： $\frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} = \sin \theta$

特性 4： $\frac{\Delta_{DEF}}{\Delta_{ABC}} = \frac{\overline{PD}^2}{\overline{PB}^2} = \sin^2 \theta = \frac{4\Delta^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \Rightarrow \Delta_{DEF} = \frac{4\Delta^3}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$

特性 5：
$$\begin{aligned} \overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} &= (\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}) \sin \theta \\ &= \frac{b^2c + ac^2 + a^2b}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \times \frac{2\Delta}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ &= \frac{2\Delta(b^2c + ac^2 + a^2b)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \end{aligned}$$

【引理一】：在 $\triangle ABC$ 中， $2(\cot A + \cot B + \cot C) \geq \csc A + \csc B + \csc C$ 。 (8)

證明：
$$\begin{aligned} &2 \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B} + \frac{\cos C}{\sin C} \right) - \frac{1}{\sin A} - \frac{1}{\sin B} - \frac{1}{\sin C} \\ &= 4R \left(\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} \right) - 2R \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2R \frac{2bc \cos A + 2ca \cos B + 2ab \cos C - (bc + ca + ab)}{abc} \\
&= \frac{2R}{abc} (b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2 - bc - ca - ab) \\
&= \frac{2R}{abc} (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) \geq 0, \text{ 得證。}
\end{aligned}$$

又 $\csc A + \csc B + \csc C = 2R \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ ，且性質一(1)： $\cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C$ ，及【引理一】(8)得

$$2 \cot \theta \geq 2R \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Rightarrow \cot \theta \geq R \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \quad (9)$$

做到這裡，在和老師討論後，老師提供了底下的【引理二】(*Crux Mathematicorum 2188 Proposed by Victor Oxman, University of Haifa, Haifa, Israel.*)，要我們先加以證明，再進一步比較它們之間的大小關係。

【引理二】：在 $\triangle ABC$ 中， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} < \frac{s}{\Delta}$ 。

證明： $\Delta = \frac{1}{2} ab \sin C \leq \frac{1}{2} ab \Rightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{b}{2\Delta}$ ，同理， $\frac{1}{b} \leq \frac{c}{2\Delta}$ 、 $\frac{1}{c} \leq \frac{a}{2\Delta}$ ，

因此， $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{a+b+c}{2\Delta} = \frac{s}{\Delta}$ ，得證。

由(9)知 $\cot \theta \geq R \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ ，又由性質五(5)： $\cot \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$

因此， $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta} \geq R \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Rightarrow \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R\Delta} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

$$\therefore \frac{1}{r} = \frac{s}{\Delta} = \frac{a+b+c}{2\Delta}$$

$$\therefore \frac{1}{r} - \frac{\cot \theta}{R} = \frac{a+b+c}{2\Delta} - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4R\Delta}$$

$$= \frac{2R(a+b+c) - (a^2 + b^2 + c^2)}{4R\Delta}$$

$$= \frac{\frac{a^2}{\sin A} + \frac{b^2}{\sin B} + \frac{c^2}{\sin C} - (a^2 + b^2 + c^2)}{4R\Delta} > 0$$

至此我們順利的將【引理二】中的不等式 $\frac{1}{r} = \frac{s}{\Delta} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ 中安插了 $\frac{\cot \theta}{R}$ ，

得到有趣的幾何不等式(二)： $\frac{1}{r} > \frac{\cot \theta}{R} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$

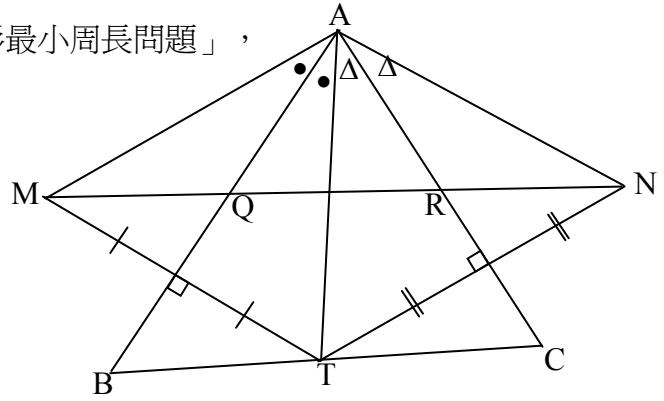
這個過程中，我們藉由 Brocard Angle 的性質，將 Crux Mathematicorum 中的不等式加以強化，此次得經驗使我們增加了不少信心和興趣，也激發我們繼續努力的動力。

3.利用「法格乃諾問題」尋找不等式

法格乃諾問題為「銳角 $\triangle ABC$ ，內接三角形最小周長問題」，

先將法格乃諾問題證明如下：

如〈圖五〉，在銳角 $\triangle ABC$ 的 \overline{BC} 上取一點 T ，並作 T 對於 \overline{AB} 及 \overline{AC} 之對稱點 M 及 N ， \overline{MN} 交 \overline{AB} 於 Q ，交 \overline{AC} 於 R ，



$$\overline{MN}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{AN}^2 - 2 \cdot \overline{AM} \cdot \overline{AN} \cos \angle MAN$$

又 $\overline{AM} = \overline{AT} = \overline{AN}$ ， $\angle MAQ = \angle TAQ$ ， $\angle TAR = \angle NAR$ ， $\angle MAN = 2 \angle BAC$ ，

〈圖五〉

$$\begin{aligned} \text{因此，} \overline{MN}^2 &= 2 \overline{AT}^2 - 2 \overline{AT}^2 \cos(2 \angle BAC) \\ &= 2 \overline{AT}^2 (1 - \cos(2 \angle BAC)) \\ &= 2 \overline{AT}^2 (2 \sin^2 A) \\ &= 4 \overline{AT}^2 \sin^2 A \end{aligned}$$

$\therefore \overline{MN} = 2 \overline{AT} \sin A$ 且當 $\overline{AT} \perp \overline{BC}$ 時， \overline{MN} 有最小值，即 $\triangle TMN$ 有最小周長。得證。

在〈圖四〉的 $\triangle PDE$ 及 $\triangle PBC$ 中， $\angle PBC = \angle PDE$ 且 $\angle PCB = \angle PED$

因此， $\triangle PDE \sim \triangle PBC$ ，且 $\frac{\overline{DE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} = \sin \theta$

同理可得 $\overline{DE} + \overline{EF} + \overline{DF} = (a+b+c) \sin \theta$ 加上「法格乃諾問題」得，在銳角 $\triangle ABC$ 中，

$$(a+b+c) \sin \theta \geq 2 \overline{AT} \sin A = 2 \cdot \frac{2\Delta}{a} \sin A = \frac{2\Delta}{R}$$

又由推演性質七的過程中(13)得到 $\sin \theta = \frac{2\Delta}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}$

$$\therefore (a+b+c) \cdot \frac{2\Delta}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \geq \frac{2\Delta}{R}$$

由此可化簡得到有趣的幾何不等式(三)： $R \geq \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{a+b+c}$

將有名的數學問題和 Brocard Point 互相聯繫，而發現新的不等式，十分有趣。

4.由 Fermat Point 及 Brocard Point 尋找不等式

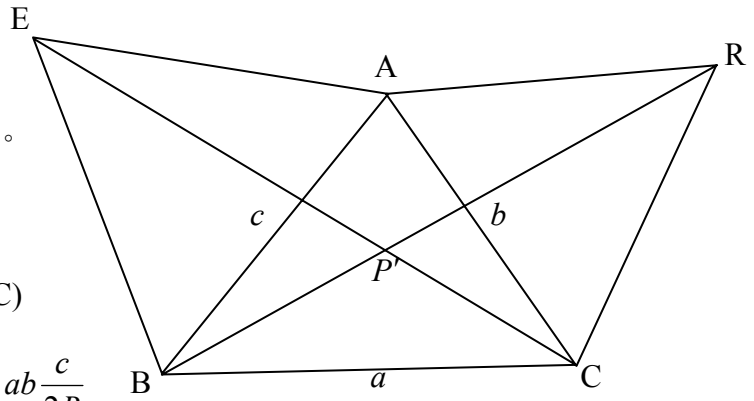
如〈圖六〉，在 $\triangle ABC$ 中，

$\max\{\angle A, \angle B, \angle C\} < 120^\circ$ ，

$\triangle ACR$ 及 $\triangle AEB$ 為正三角形。

\overline{BR} 及 \overline{CE} 的交點 P' 為 Fermat point。

$$\begin{aligned} \overline{BR}^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(60^\circ + C) \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\left(\frac{1}{2}\cos C - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin C\right) \\ &= a^2 + b^2 - ab\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + \sqrt{3}ab\frac{c}{2R} \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{abc}{R} \\ &= \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\Delta \end{aligned}$$



〈圖六〉

由性質九及費馬點為三角形內至三頂點距離和最小之點，得

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \geq \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\Delta} \quad (10)$$

接著，我們找一些邊長與面積的不等式，將上式加以改寫，而得到我們未見過的一些不等式：

1. 因為 $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta$ ……(請見附記八)

$$\text{所以 } \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}\Delta \geq 4\sqrt{3}\Delta \quad (11)$$

2. $ab + bc + ca \geq 4\sqrt{3}\Delta$ ……(請見附記九)

$$\Rightarrow (ab + bc + ca)^2 \geq 48\Delta^2$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) \geq 48\Delta^2$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 8R\Delta \cdot \frac{2\Delta}{r} \geq 48\Delta^2$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 48\Delta^2 - 16\frac{R}{r}\Delta^2 = 16\Delta^2\left(3 - \frac{R}{r}\right)$$

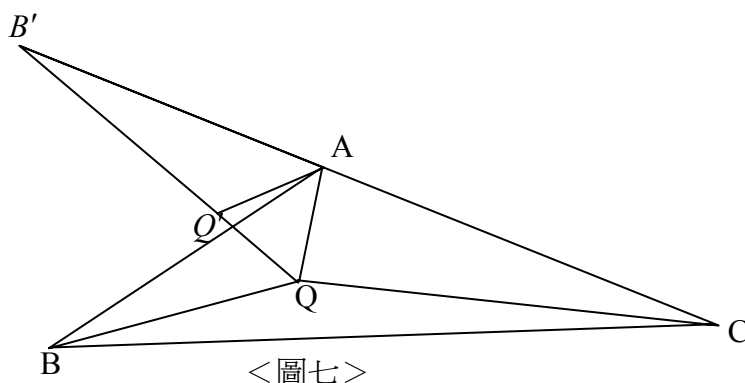
因此， $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 4\Delta \sqrt{3 - \frac{R}{r}} \cdot 2\sqrt{\sqrt{3}\Delta}$

得到有趣的幾何不等式(四)： $(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 \geq 64\sqrt{3}\Delta^3\left(3 - \frac{R}{r}\right)$

由(10)、(11)及有趣的幾何不等式(一)： $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 16\Delta^2$

可得到有趣的幾何不等式(五)： $(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 \geq 16\Delta^2 \cdot 4\sqrt{3}\Delta = 64\sqrt{3}\Delta^3$

以上的部份將 $\triangle ABC$ 侷限在 $\max\{\angle A, \angle B, \angle C\} < 120^\circ$ 的情況下，以下將討論若 $\max\{\angle A, \angle B, \angle C\} \geq 120^\circ$ 時的有趣的幾何不等式：



首先，不失一般性的假設 $\angle A \geq 120^\circ$ ，如〈圖七〉， Q 為 $\triangle ABC$ 內部任一點，將 $\triangle ABQ$ 以 A 為

中心順時鐘旋轉至使 \overline{AB} 在 \overline{AC} 上，令此旋轉後所得之三角形為 $\triangle AB'Q'$ ，因為旋轉角度小於

或等於 60° ，所以， $\overline{QQ'} \leq \overline{AQ}$ ，因此，

$$\overline{QA} + \overline{QB} + \overline{QC} \geq \overline{QQ'} + \overline{B'Q'} + \overline{QC} \geq \overline{CB'} = \overline{AC} + \overline{AB'}，$$

“=”成立時， Q 和 A 重合。

即當 $\triangle ABC$ 有一內角大於或等於 120° 時，如 $\angle A$ ，此時費馬點為鈍角頂點 A ，而至三頂點距離

和的最小值為 $\overline{AC} + \overline{AB} = b + c$ ，因此，由性質九，可得：

$$\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC} = \frac{a^2b + b^2c + c^2a}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} > b + c > 2\sqrt{bc} > 2\sqrt{2\Delta} \quad (12)$$

由(12)及有趣的幾何不等式(一)： $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geq 16\Delta^2$

$$\text{得到 } a^2b + b^2c + c^2a > \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \cdot 2\sqrt{2\Delta} > 4\Delta \cdot 2\sqrt{2\Delta} = 8\Delta\sqrt{2\Delta}$$

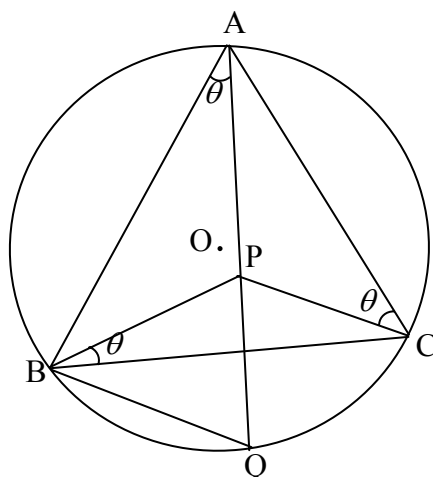
兩邊平方化成有趣的幾何不等式(六)： $(a^2b + b^2c + c^2a)^2 > 128\Delta^3$

至此，我們發現在 $\triangle ABC$ 中

(1) 若 $\max\{\angle A, \angle B, \angle C\} < 120^\circ$ ，則有不等式： $(a^2b + b^2c + c^2a)^2 \geq 64\sqrt{3}\Delta^3$

(2) 若 $\max\{\angle A, \angle B, \angle C\} \geq 120^\circ$ ，則有不等式： $(a^2b + b^2c + c^2a)^2 > 128\Delta^3$

5.由 Brocard Point 及 Euler 公式尋找 $d_1 = \overline{OP}$ 和 $d_2 = \overline{OI}$ 的關係



<圖八>

(其中，O、P、I 分別表 $\triangle ABC$ 的外心、Brocard Point 及內心)

在<圖八>中，O 為 $\triangle ABC$ 之外心，

P 為 $\triangle ABC$ 之 Brocard Point，延長 \overline{AP} 交外接圓於 Q 點，

$$\angle PBQ = \angle A \text{ 且 } \angle Q = \angle C \Rightarrow \triangle BPQ \sim \triangle ABC$$

$$\angle PQC = \angle B \text{ 且 } \angle QCP = \angle C \Rightarrow \triangle PQC \sim \triangle ABC$$

可推得 $\frac{\overline{BP}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{BC}}$ ，因此， $\overline{BP} \cdot \overline{BC} = \overline{PQ} \cdot \overline{AB}$ ，所以， $\overline{PQ} = \frac{\overline{BP} \cdot \overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{a}{c} \overline{BP}$ ，

利用圓的內幕性質可得 $\overline{AP} \cdot \overline{PQ} = R^2 - d_1^2$ ，並由性質八可推得到以下結果：

$$\begin{aligned} d_1^2 &= R^2 - \overline{AP} \cdot \overline{PQ} \\ &= R^2 - \overline{AP} \cdot \frac{a}{c} \overline{BP} \\ &= R^2 - \frac{a}{c} \overline{AP} \cdot \overline{BP} \\ &= R^2 - \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \cdot \frac{c}{b} \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ &= R^2 - \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\ &= R^2 - 4R^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\therefore d_1 = R\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}$$

其中，在推演性質七的過程中(13)知 $\sin \theta = \frac{2\Delta}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$ ，

$$\text{因此, } \sin^2 \theta = \frac{4\Delta^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} = \frac{4 \frac{a^2b^2c^2}{16R^2}}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2},$$

$$\text{推得 } 4R^2 \sin^2 \theta = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

由 Euler 公式, 令 $d_2 = \overline{OI} = \sqrt{R^2 - 2Rr}$,

$$\begin{aligned} d_2^2 - d_1^2 &= R^2 - 2Rr - R^2(1 - 4\sin^2 \theta) \\ &= 4R^2 \sin^2 \theta - 2Rr \\ &= 2R(2R \sin^2 \theta - r) \end{aligned}$$

$$\text{又 } 2R \sin^2 \theta - r = 2R \cdot \frac{4\Delta^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} - r$$

$$= \frac{2R \cdot 4 \cdot \frac{abc}{4R} \cdot rs}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} - r$$

$$= \frac{2abc rs - r(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$= \frac{r(abc(a+b+c) - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$= \frac{r \left\{ \frac{1}{2} [(ab+bc+ca)^2 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) \right\}}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$= \frac{\frac{r}{2} [(ab+bc+ca)^2 - 3(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)]}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

利用科西不等式得 $(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(1+1+1) \geq (ab+bc+ca)^2$

因此, $2R \sin^2 \theta - r \leq 0$, 推得 $d_2^2 - d_1^2 \leq 0$ 又 $d_1 \geq 0$ 且 $d_2 \geq 0$, 故 $d_2 \leq d_1$ 。

6. Brocard Point 與內心的距離尋找不等式

由〈圖九〉中，P 為 Brocard Point，延長 \overline{CP} 交 \overline{AB} 於 D 點，則

$$\angle APD = \angle A, \quad \angle DPB = \angle C, \quad \angle APB = \angle A + \angle C$$

$$\cos \angle APB = \cos(\angle A + \angle C) = \cos(\pi - B) = -\cos B$$

設 I 表 $\triangle ABC$ 的內心，利用內心的性質，

$$\begin{aligned} |\overline{PI}|^2 &= \left| \frac{a\overline{PA} + b\overline{PB} + c\overline{PC}}{a+b+c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{(a+b+c)^2} \left(a^2 \overline{PA}^2 + b^2 \overline{PB}^2 + c^2 \overline{PC}^2 + 2ab\overline{PA} \cdot \overline{PB} + 2ac\overline{PA} \cdot \overline{PC} + 2bc\overline{PB} \cdot \overline{PC} \right) \\ &= \frac{1}{(a+b+c)^2} \left(a^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} t^2 + b^2 \cdot \frac{c^2}{b^2} t^2 + c^2 \cdot \frac{a^2}{c^2} t^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{(a+b+c)^2} \left(2ab \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot t^2 \cos B + 2ac \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} \cdot t^2 \cos A + 2bc \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot t^2 \cos C \right) \\ &\quad \left(\text{其中，} \overline{AP} = \frac{b}{a} t, \quad \overline{BP} = \frac{c}{b} t, \quad \overline{CP} = \frac{a}{c} t, \quad t = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \right) \\ &= \frac{1}{(a+b+c)^2} \left((a^2 + b^2 + c^2) t^2 - 2bct^2 \cos B - 2abt^2 \cos A - 2act^2 \cos C \right) \\ &= \frac{1}{(a+b+c)^2} \left((a^2 + b^2 + c^2) - 2bc \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - 2ab \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - 2ac \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) t^2 \\ &= \frac{1}{(a+b+c)^2} \left(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{b}{a}(a^2 + c^2 - b^2) - \frac{a}{c}(b^2 + c^2 - a^2) - \frac{c}{b}(a^2 + b^2 - c^2) \right) t^2 \end{aligned}$$

我們由上式得到 Brocard Point 與內心的距離公式，進一步可由分子得到

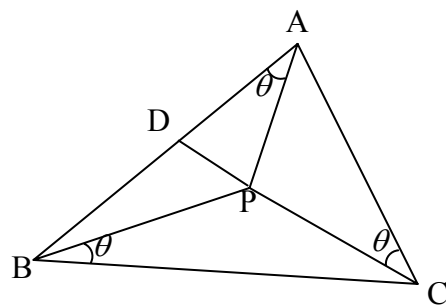
有趣的幾何不等式（七）：

$$abc(a^2 + b^2 + c^2) - b^2 c(a^2 + c^2 - b^2) - a^2 b(b^2 + c^2 - a^2) - ac^2(a^2 + b^2 - c^2) \geq 0$$

等號成立的充要條件為 $\overline{PI} = 0$ ，即 P 點與內心 I 重合，因 P 為內角平分線交點，所以

$$\angle PAC = \angle PAB = \angle PBA = \angle PBC = \angle PCB = \angle PCA = 30^\circ$$

即此時 $\triangle ABC$ 為正三角形。



〈圖九〉

7. 由 Brocard Point 及重心的距離尋找不等式

設 G 表 $\triangle ABC$ 的重心，利用重心的性質： $\overline{PG} = \frac{1}{3}(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC})$

$$\begin{aligned}
 |\overline{PG}|^2 &= \left| \frac{1}{3}(\overline{PA} + \overline{PB} + \overline{PC}) \right|^2 \\
 &= \frac{1}{9} \left(\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + 2(\overline{PA} \cdot \overline{PB} + \overline{PB} \cdot \overline{PC} + \overline{PC} \cdot \overline{PA}) \right) \\
 &= \frac{1}{9} \left(\frac{b^2}{a^2} t^2 + \frac{c^2}{b^2} t^2 + \frac{a^2}{c^2} t^2 \right) \\
 &\quad + \frac{2}{9} \left(\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} \cdot t^2 \cdot \cos(A+C) + \frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot t^2 \cos(A+B) + \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a} \cdot t^2 \cos(B+C) \right) \\
 &= \frac{1}{9} \left(\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) t^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} t^2 \cos B - 2 \cdot \frac{a}{b} t^2 \cos C - 2 \cdot \frac{b}{c} t^2 \cos A \right) \\
 &= \frac{1}{9} \left(\left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} \right) t^2 - 2 \frac{c}{a} t^2 \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} - 2 \frac{a}{b} t^2 \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - 2 \frac{b}{c} t^2 \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right) \\
 &= \frac{1}{9} \left(\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{b^2} + \frac{a^2}{c^2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{a^2} - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b^2} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{c^2} \right) t^2 \\
 &= \frac{1}{9} \left(\frac{2b^2 - a^2 - c^2}{a^2} + \frac{2c^2 - a^2 - b^2}{b^2} + \frac{2a^2 - b^2 - c^2}{c^2} \right) t^2 \\
 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{2b^4 c^2 - a^2 b^2 c^2 - b^2 c^4 + 2a^2 c^4 - a^4 c^2 - a^2 b^2 c^2 + 2a^4 b^2 - b^4 a^2 - a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} t^2 \\
 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{2a^4 b^2 + 2b^4 c^2 + 2a^2 c^4 - a^4 c^2 - b^4 a^2 - c^4 b^2 - 3a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 c^2} \cdot \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \\
 &= \frac{1}{9} \cdot \frac{a^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) + b^2(a^2 - c^2)(a^2 - b^2) + c^2(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}
 \end{aligned}$$

我們由上式得到 Brocard Point 與重心的距離公式，進一步由分子可得到

有趣的幾何不等式（八）：

$$a^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) + b^2(a^2 - c^2)(a^2 - b^2) + c^2(b^2 - a^2)(b^2 - c^2) \geq 0$$

等號成立的充要條件為 $\overline{PG} = 0$ ，即 P 點與重心 G 重合。

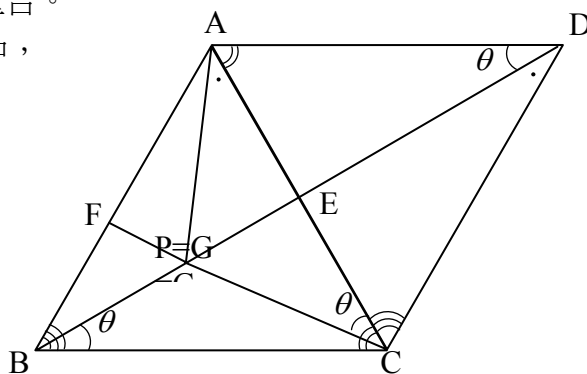
如在尋找三角形 ABC 的 Brocard Point 之〈圖三〉中，

\overline{BE} 為 \overline{AC} 邊上的中線，則 $\overline{AE} = \overline{EC}$

又 $\angle ACB = \angle CAD$ ，即 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，

故 $ABCD$ 為平行四邊形

因 $\angle ACD = \angle ABC = \angle ADC$ ，所以 $\overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BC}$



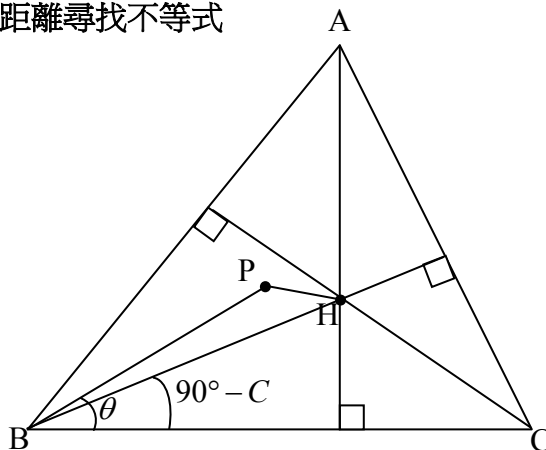
〈圖三〉

延長 \overline{CP} 交 \overline{AB} 於F，F為 \overline{AB} 之中點，

因 $\overline{AC} = \overline{BC}$ ，則 \overline{CF} 為 \overline{AB} 之中垂線，故 $\angle PBA = \angle PAB = \theta$ ，

則 $\overline{AB} = \overline{AD} = \overline{AC} = \overline{BC}$ ，即此時 $\triangle ABC$ 為正三角形。

8. 由 Brocard Point 及垂心的距離尋找不等式



<圖十>

在<圖十>中，設H為 $\triangle ABC$ 的垂心，

$$\text{則 } \overline{AH} = b \cos A \cdot \frac{1}{\sin B} = 2R \cos A, \quad \overline{BH} = a \cos B \cdot \frac{1}{\sin A} = 2R \cos B$$

$$\text{由推演性質七的過程(13)得 } \sin \theta = \frac{2\Delta}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

$$\begin{aligned} \text{由性質八知 } \overline{BP} &= \frac{c}{b} \cdot \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ &= \frac{c}{b} \cdot \frac{4R \cdot \frac{abc}{4R}}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ &= \frac{c}{b} \cdot \frac{4R\Delta}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ &= \frac{c}{b} \cdot 2R \cdot \sin \theta \end{aligned} \quad (13)$$

【引理三】： $b \sin^2 C = c(\cos B \cos C + \cos A)$

$$\text{證明：} \because \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \cdot \frac{\sin C}{\sin C} \Rightarrow b \sin^2 C = c \sin B \sin C$$

$$\begin{aligned} &\text{且 } c(\cos B \cos C + \cos A) \\ &= c(\cos B \cos C - \cos(B+C)) \\ &= c(\cos B \cos C - \cos B \cos C + \sin B \sin C) \\ &= c \sin B \sin C \end{aligned}$$

故 $b \sin^2 C = c(\cos B \cos C + \cos A)$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \cos B \cos C &= \frac{b \sin^2 C - c \cos A}{c} \\
 &= \frac{b \cdot \frac{c^2}{4R^2} - c \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{c} \\
 &= \frac{bc}{4R^2} - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
 &= \frac{b^2 c^2 - 2R^2(b^2 + c^2 - a^2)}{4R^2 bc} \tag{14}
 \end{aligned}$$

由〈圖三〉、〈圖十一〉及〈圖十三〉知 $\overline{QR} = \overline{AD} = \frac{b^2}{a}$ ，且由⑪知

$$\overline{BD} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{a}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \theta &= \frac{\overline{BR}}{\overline{BD}} \\
 &= \frac{\overline{BQ} + \overline{QR}}{\overline{BD}} \\
 &= \frac{c \cos B + \frac{b^2}{a}}{\overline{BD}} \\
 &= \frac{c \cos B + \frac{b^2}{a}}{\frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{a}} \\
 &= \frac{ac \cos B + b^2}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) + b^2}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}} \tag{15}
 \end{aligned}$$

因此，由〈圖十〉、(13)、(14)、(15)、⑬及餘弦定理得

$$\begin{aligned}
 \overline{PH}^2 &= \overline{BH}^2 + \overline{BP}^2 - 2\overline{BH} \overline{BP} \cos(\theta - 90^\circ + C) \\
 &= 4R^2 \cos^2 B + \frac{c^2}{b^2} 4R^2 \sin^2 \theta - 2 \cdot 2R \cos B \cdot \frac{c}{b} 2R \sin \theta (\sin \theta \cos C + \cos \theta \sin C) \\
 &= 4R^2 \cos^2 B + \frac{c^2}{b^2} 4R^2 \sin^2 \theta - 8R^2 \frac{c}{b} \cdot \cos B \sin^2 \theta \cos C - 8R^2 \frac{c}{b} \cdot \cos B \sin \theta \cos \theta \sin C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4R^2 \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right)^2 + \frac{c^2}{b^2} 4R^2 \frac{4\Delta^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} - 8R^2 \frac{c}{b} \frac{4\Delta^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \frac{b^2c^2 - 2R^2(b^2 + c^2 - a^2)}{4R^2bc} \\
&\quad - 8R^2 \frac{c}{b} \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \frac{2\Delta \cdot \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \frac{c}{2R} \\
&= \frac{R^2(a^2 + c^2 - b^2)^2}{a^2c^2} + \frac{c^2}{b^2} \cdot \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} - \frac{8\Delta^2(b^2c^2 - 2R^2b^2 - 2R^2c^2 + 2R^2a^2)}{b^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \\
&\quad - \frac{2c}{ab} \cdot \frac{R(a^2 + c^2 - b^2) \cdot \Delta \cdot (a^2 + b^2 + c^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \\
&= \frac{R^2(a^2 + c^2 - b^2)^2}{a^2c^2} + \frac{a^2c^4}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} - \frac{8\Delta^2(b^2c^2 - 2R^2b^2 - 2R^2c^2 + 2R^2a^2)}{b^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \\
&\quad - \frac{c^2(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \\
&= \frac{2b^2R^2(a^2 + c^2 - b^2)^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2a^4b^2c^6}{2a^2b^2c^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \\
&\quad - \frac{16a^2c^2\Delta^2(b^2c^2 - 2R^2b^2 - 2R^2c^2 + 2R^2a^2) + a^2b^2c^4(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}{2a^2b^2c^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}
\end{aligned}$$

我們由上式得到 Brocard Point 與垂心的距離公式，進一步由分子可得到有趣的幾何不等式（九）：

$$\begin{aligned}
&2b^2R^2(a^2 + c^2 - b^2)^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2a^4b^2c^6 - 16a^2c^2\Delta^2(b^2c^2 - 2R^2b^2 - 2R^2c^2 + 2R^2a^2) \\
&- a^2b^2c^4(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0
\end{aligned}$$

等號成立的充要條件為 $\overline{PH} = 0$ ，即 P 點與垂心 H 重合。

在 $\triangle ACF$ 中 $\angle PAC = 90^\circ - 2\theta$ ，

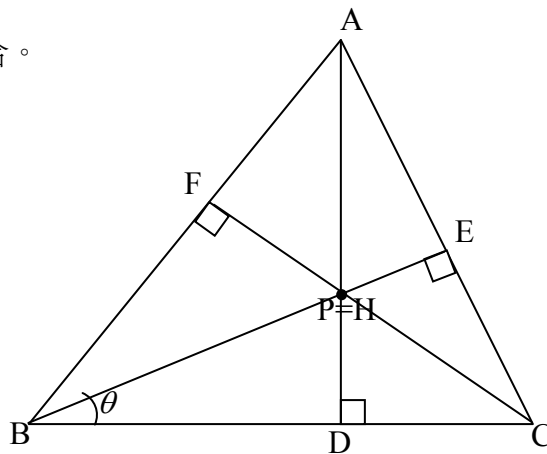
在 $\triangle BCE$ 中 $\angle PCB = 90^\circ - 2\theta$ ，

在 $\triangle ABD$ 中 $\angle PBA = 90^\circ - 2\theta$ ，

$\angle BAC = \theta + 90^\circ - 2\theta = 90^\circ - \theta$ ，

同理 $\angle ABC = 90^\circ - \theta$ ， $\angle ACB = 90^\circ - \theta$ ，

即此時 $\triangle ABC$ 為正三角形。



四、由 Brocard Circle 與 Brocard Triangle 尋找不等式

1. 以圓作 Brocard Point

過 B、C 兩點作圓 O_1 ，使 \overline{AC} 切此圓於 C 點；

過 A、C 兩點作圓 O_2 ，使 \overline{AB} 切此圓於 A 點；

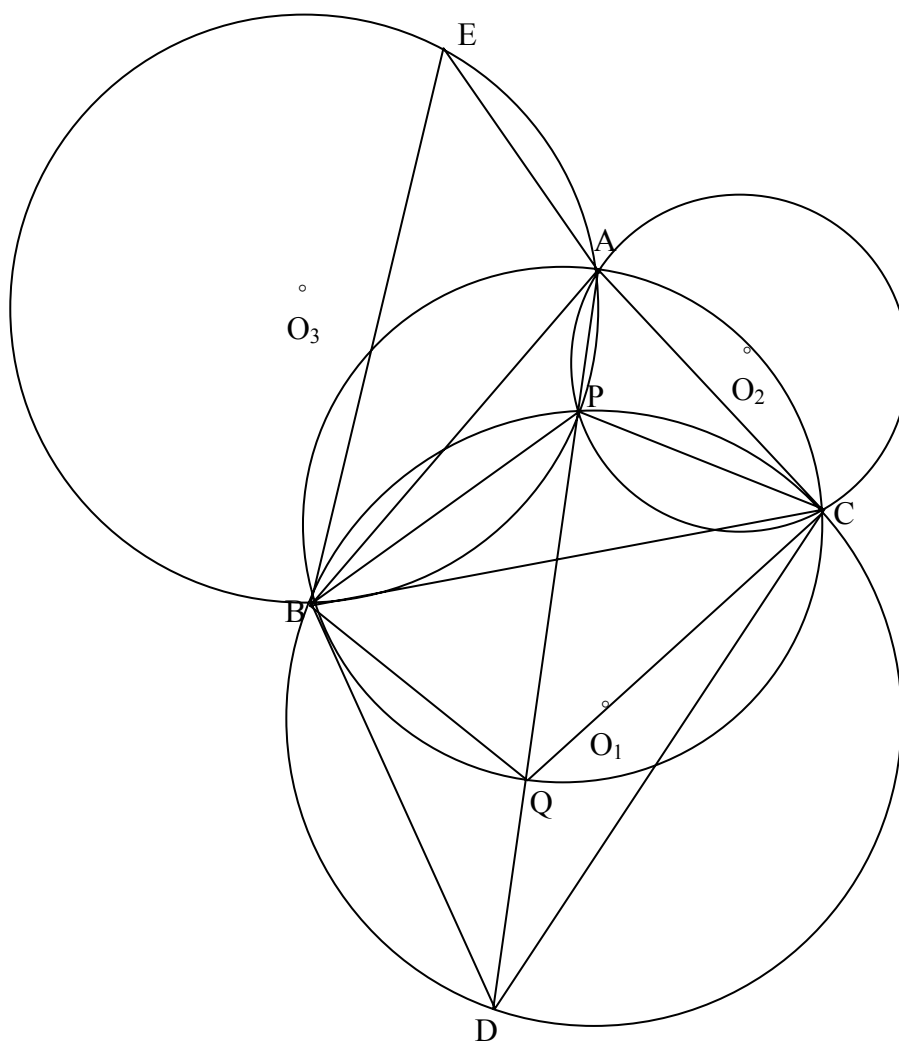
過 A、B 兩點作圓 O_3 ，使 \overline{BC} 切此圓於 B 點。（如〈圖十〉）

設圓 O_1, O_2 交於 $\triangle ABC$ 內部一點 P， $\angle PCA$ 為圓 O_1 之弦切角，則 $\angle PBC = \angle PCA$ ，

且 $\angle PAB$ 為圓 O_2 之弦切角，則 $\angle PCA = \angle PAB$ ，即 $\angle PAB = \angle PBC$ ，

故圓 O_1, O_2, O_3 交於點 P，且 P 為 $\triangle ABC$ 的 Brocard Point，

其中 $\angle PCA = \angle PAB = \angle PBC = \theta$ 為 Brocard Angle。



〈圖十〉

2.相似三角形的 Brocard Point

作 $\triangle ABC$ 之外接圓 O ，延長 \overline{AP} 交圓 O 於 Q 點，交圓 O_1 於 D 點，

作 $\overline{BQ}, \overline{CQ}, \overline{DB}, \overline{DC}$ 。(如<圖十>)

在圓 O_3 上取一點 E ，作 $\overline{BE}, \overline{AE}$ ，

因 $\angle ABC$ 為圓 O_3 之弦切角，則 $\angle BEA = \angle ABC$ ，

又 $BEAP$ 為圓 O_3 之內接四邊形，則 $\angle BPQ = \angle BEA$ ，即 $\angle ABC = \angle BEA = \angle BPQ$

在圓 O_1 中， $\angle BPQ = \angle BPD = \angle BCD$ ，故 $\angle ABC = \angle BCD$ ，同理可得 $\angle BAC = \angle DBC$ ，
故 $\triangle ABC \sim \triangle BCD$ 。

在圓 O_1 中， $\angle PBC = \angle PDC = \theta$ ，

在圓 O 中， $\angle ABC = \angle AQC = \angle QDC + \angle QCD = \theta + \angle QCD$ ，

又 $\angle ABC = \angle BCD = \angle BCQ + \angle QCD$ ，則 $\angle BCQ = \theta$

在圓 O 中， $\angle ACB = \angle AQB$ ，而 $\angle ACB = \theta + \angle PCB$ ， $\angle AQB = \angle QDB + \angle QBD$ ，

在圓 O_1 中， $\angle PCB = \angle PDB = \angle QDB$ ，故 $\angle QBD = \theta$ ，

由上述可得， Q 為 $\triangle BCD$ 之 **Second Brocard Point**，且 A 、 P 、 Q 、 D 四點共線。

3. $\triangle ABC$ 外接圓上的全等三角形

分別延長 \overline{AP} 、 \overline{BP} 、 \overline{CP} 交 $\triangle ABC$ 外接圓於 Q 、 R 、 S 點，(如<圖十一>)

則 $\angle PQS = \angle PSR = \angle PRQ = \theta$ ，又 $\angle AQR = \angle ABR$ ，

故 $\angle PQS = \angle AQR + \theta = \angle ABR + \theta = \angle ABC$ ，

同理 $\angle SRQ = \angle ACB$ ， $\angle RSQ = \angle BAC$ ，因 $\triangle SQR$ 與 $\triangle ABC$ 均為圓 O 之內接三角形，
則 $\triangle SQR \cong \triangle ABC$ ，且 P 為 $\triangle SQR$ 的 Brocard Point。

4. 三圓上的相似三角形

作直線 O_3B 交圓 O_3 於 J 點，交圓 O_1 於 K 點，(如<圖十一>)

因 \overline{BC} 切圓 O_3 於 B 點，則 $\angle JBC = \angle CBK = 90^\circ$ ，即 \overline{KC} 為圓 O_1 之直徑。

作直線 KC 交圓 O_2 於 L 點，因 \overline{AC} 切圓 O_1 於 C 點，則 $\angle ACK = \angle ACL = 90^\circ$ ，
即 \overline{AL} 為圓 O_2 之直徑，同理可知 A 點在 \overline{JL} 上。

因 $\theta = \angle PAB = \angle PJB = \angle PKC = \angle PLA$ ，

又 $\angle PJA = \angle PBA$ ，則 $\angle KJL = \theta + \angle PJA = \theta + \angle PBA = \angle ABC$

同理 $\angle JKC = \angle ACB$ ， $\angle JLK = \angle BAC$ ，

故 $\triangle LJK \sim \triangle ABC$ ，且 P 為 $\triangle LJK$ 的 Brocard Point。

5. 外心為三圓心所成三角形的 Brocard Point

因 \overline{PC} 為圓 O_1 、 O_2 之公弦，（如〈圖十一〉），所以

$\overline{O_1O_2} \perp \overline{PC}$ ，同理 $\overline{O_2O_3} \perp \overline{PA}$ ， $\overline{O_1O_3} \perp \overline{PB}$ ，

$\angle BPQ = \angle BJA = \angle ABC$ ， $\angle CPQ = \angle ALC = \angle BAC$ ，則 $\angle O_3O_1O_2 = \angle ACB$

同理 $\angle O_1O_3O_2 = \angle ABC$ ，又 $\angle PCB = \angle OO_1O_2$ ，所以 $\angle O_3O_1O = \angle ACP = \theta$

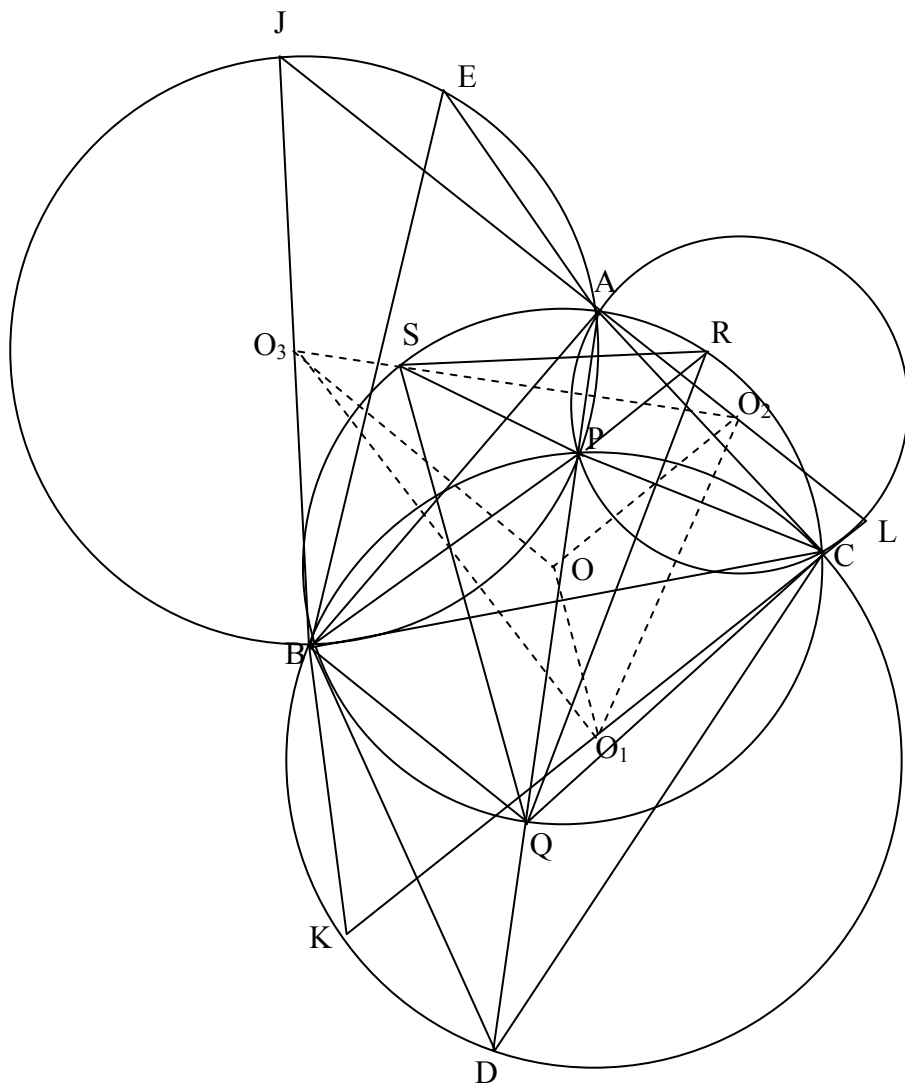
同理 $\angle OO_3O_2 = \angle OO_2O_1 = \theta$ ，故 $\Delta O_2O_3O_1 \sim \Delta ABC$ 且 O 為 $\Delta O_2O_3O_1$ 之 Brocard Point。

6. 三圓半徑與外接圓半徑

設圓 O_1, O_2, O_3 之半徑分別為 r_1, r_2, r_3 （如〈圖十一〉）由正弦定理得，

$\frac{\overline{PC}}{\sin \theta} = 2r_1, \frac{\overline{PA}}{\sin \theta} = 2r_2, \frac{\overline{PB}}{\sin \theta} = 2r_3$ ，則

$$2r_1 = \frac{a \cdot \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}}{2\Delta} = \frac{a^2b}{2\Delta} \Rightarrow r_1 = \frac{a^2b}{4\Delta} = \frac{a^2b}{\frac{abc}{R}} = \frac{a}{c}R, \text{ 同理 } r_2 = \frac{b}{a}R, \quad r_3 = \frac{c}{b}R$$



〈圖十一〉

7.以旋轉作 Second Brocard Point

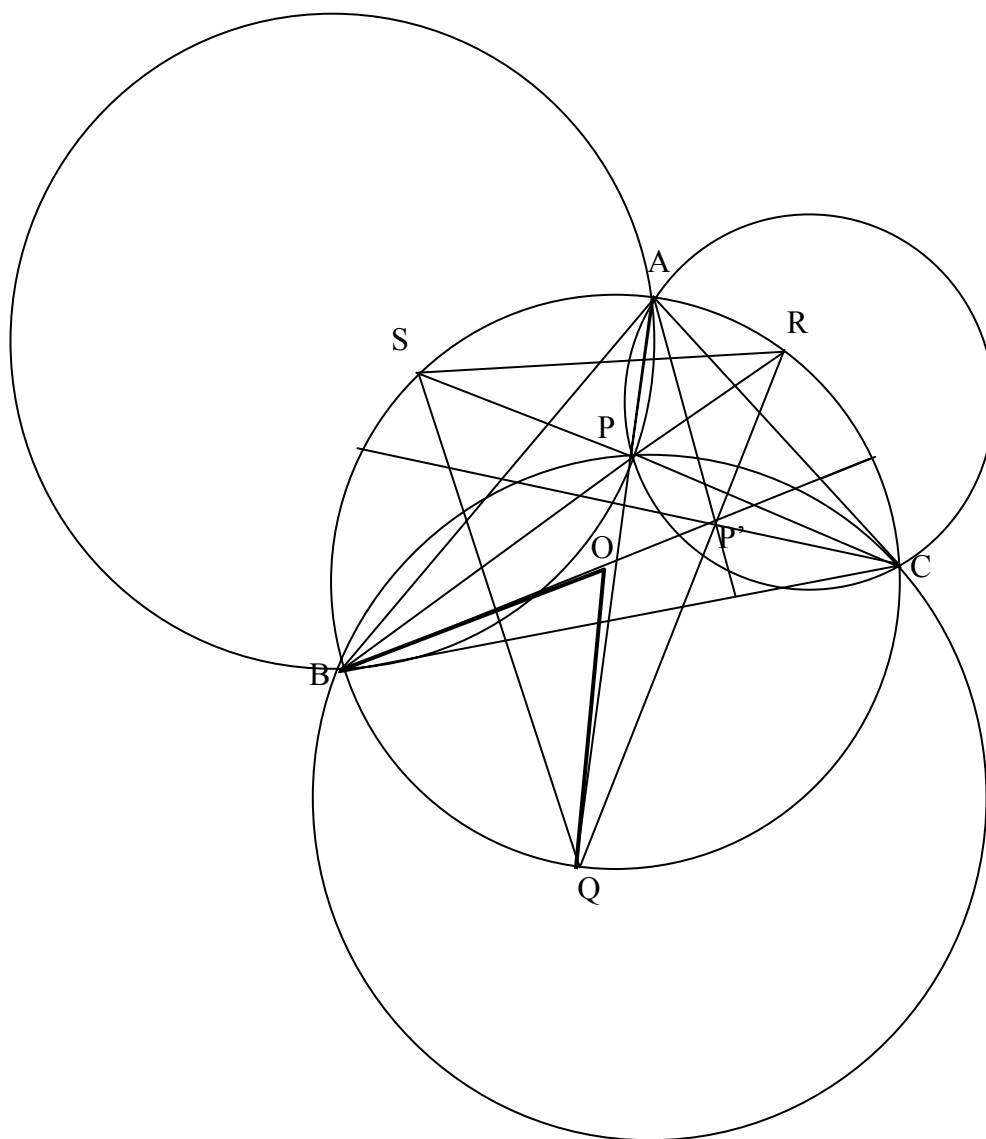
$\angle BOQ = 2\angle BAQ = 2\theta$ ，以 O 為中心，將 $\triangle SRQ$ 旋轉 2θ ，（如〈圖十二〉）

則 $\triangle SRQ$ 與 $\triangle ABC$ 重合，

且 P 點旋轉至 P' ，且 $\angle POP' = 2\theta$

因 $\angle P'AC = \angle PSR = \theta$ ， $\angle P'CB = \angle PRQ = \theta$ ， $\angle P'BA = \angle PQS = \theta$ ，

故 P' 為 $\triangle ABC$ 的 Second Brocard Point。



〈圖十二〉

8. Brocard Circle

$\overline{PO} = \overline{P'O} = R\sqrt{1-4\sin^2\theta}$, 作 $\triangle OPP'$ 的外接圓 O_4 , 此圓即為 Brocard Circle,

圓心 O_4 為 **Brocard Center**。(如<圖十三>)

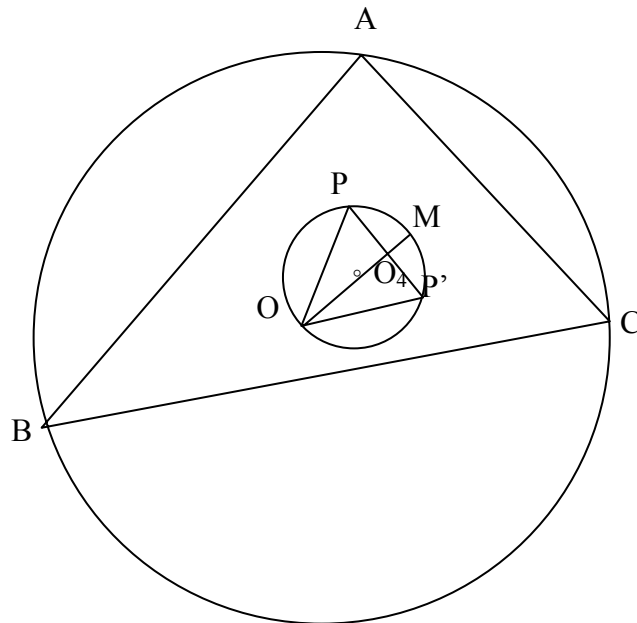
\overline{OM} 為 **Brocard Diameter**, 且 $\angle POM = \angle P'OM = \theta$, 其中 M 為 $\triangle ABC$ 的類似重心 (**Symmedian**)。

$\overline{PP'} = 2\overline{OP} \cdot \sin\theta = 2\sin\theta \cdot R\sqrt{1-4\sin^2\theta}$, 直線 PP' 為 **Brocard Line**。

$$\overline{OM} = \overline{PO} \cdot \sec\theta = \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{\cos\theta}$$

設 Brocard Circle 的半徑為 R_B , 則

$$\begin{aligned} R_B = \overline{OO_4} &= \frac{R\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\cos\theta} \\ &= \frac{R}{2}\sqrt{\sec^2\theta - 4\tan^2\theta} \\ &= \frac{R}{2}\sqrt{1-3\tan^2\theta} \\ &= \frac{R}{2}\sqrt{1-\frac{48\Delta^2}{(a^2+b^2+c^2)^2}} \\ &= \frac{abc}{8\Delta} \cdot \frac{1}{(a^2+b^2+c^2)} \cdot \sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2 - 48\Delta^2} \\ &= \frac{abc}{a^2+b^2+c^2} \cdot \sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^2 - (a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}} \end{aligned}$$



<圖十三>

9. R_B 與 R 比值的範圍

$$\text{令 } \frac{R_B}{R} = \frac{\sqrt{1-4\sin^2\theta}}{2\cos\theta} = k, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{6},$$

$$2\cos\theta \cdot k = \sqrt{1-4\sin^2\theta}$$

$$4k^2 \cos^2\theta = 1-4\sin^2\theta$$

$$4k^2 \cos^2\theta = 1-4(1-\cos^2\theta)$$

$$\cos^2\theta \cdot (4k^2 - 4) = -3$$

$$\frac{3}{4} \leq \cos^2\theta = \frac{-3}{4k^2 - 4} < 1$$

$$(1) \frac{-3}{4k^2 - 4} - \frac{3}{4} \geq 0, \Rightarrow \frac{-3k^2}{4k^2 - 4} \geq 0, \Rightarrow 3k^2(4k^2 - 4) \leq 0, \Rightarrow 0 \leq k \leq 1$$

$$(2) \frac{-3}{4k^2 - 4} - 1 < 0, \Rightarrow \frac{-4k^2 + 1}{4k^2 - 4} < 0, \Rightarrow (4k^2 - 1)(4k^2 - 4) > 0, \Rightarrow k^2 > 1 \text{ 或 } 0 < k^2 < \frac{1}{4},$$
$$\Rightarrow k > 1 \text{ 或 } 0 < k < \frac{1}{2}$$

$$\text{由(1),(2)得 } 0 \leq k < \frac{1}{2},$$

$$\text{故 } 0 \leq \frac{R_B}{R} < \frac{1}{2}$$

10. 發現魏琴伯克(Weitzenberk)不等式

$$0 \leq \frac{R_B}{R} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{48\Delta^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}} < \frac{1}{2}$$

$$0 \leq 1 - \frac{48\Delta^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} < 1$$

$$0 < \frac{48\Delta^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} \leq 1$$

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 48\Delta^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta$$

此即為魏琴伯克(Weitzenberk)不等式。

這個發現令我們十分驚訝！因為我們並不清楚此不等式的起源，是否與此幾何意義有關？亦或這只是一種巧合？不論如何，這個發現讓我們印象深刻。

11. 內心與 Brocard Circle

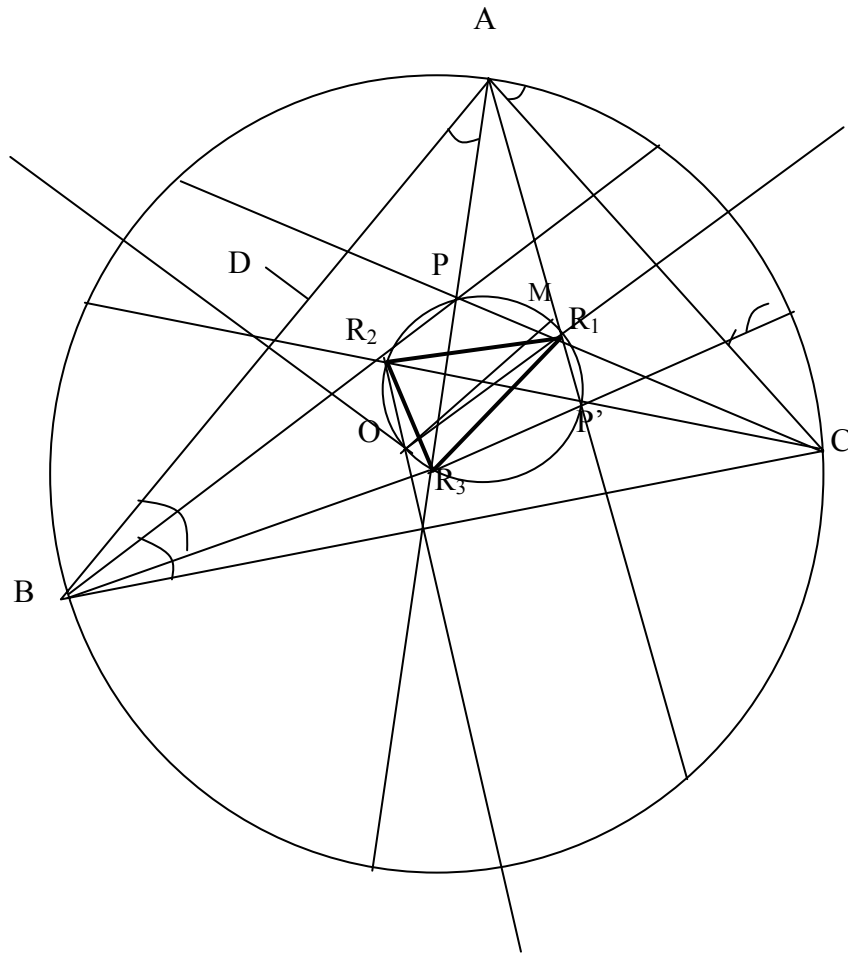
設直線 AP' 與直線 CP 交於點 R_1 ，直線 CP' 與直線 BP 交於點 R_2 ，直線 BP' 與直線 AP 交於點 R_3 ，（如〈圖十四〉） $\angle AR_3P' = \angle BAR_3 + \angle ABR_3 = \theta + \theta = 2\theta = \angle POP'$ ，則點 R_3 在 Brocard Circle 上。同理可得，點 R_1 、 R_2 在 Brocard Circle 上。

$OR_3P'R_1MPR_2$ 七點均在 Brocard Circle 上，此圓亦稱為七點圓。

$\Delta R_1R_2R_3$ 稱為 **First Brocard Triangle**。

因 $\angle BAC$ 的平分線在 $\angle PAR_1$ 內， $\angle ABC$ 的平分線在 $\angle R_2BR_3$ 內， $\angle ACB$ 的平分線在 $\angle R_1CP'$ 內，故 ΔABC 的內心 I 在 Brocard Circle 內。

因直線 OR_2 垂直平分 \overline{BC} ，直線 OR_1 垂直平分 \overline{AC} ，所以 $\angle R_1R_3R_2 = \angle R_1OR_2 = \angle ACB$ ，同理， $\angle R_2R_1R_3 = \angle ABC$ ，故 $\Delta R_1R_2R_3 \sim \Delta BAC$ 。



〈圖十四〉

12. 類似重心與三邊的距離

取 \overline{AB} 的中點 D ，因 $\angle BAR_3 = \angle ABR_3$ ，則 $\overline{R_3D} \perp \overline{AB}$ 。（如〈圖十四〉）

\overline{OM} 為直徑， $\angle MR_3O = 90^\circ$ ，則 $\overline{MR_3} \parallel \overline{AB}$ ，且 $d(R_3, \overline{AB}) = d(M, \overline{AB}) = \frac{c}{2} \tan \theta$ ，

同理可得， $d(R_1, \overline{AC}) = d(M, \overline{AC}) = \frac{b}{2} \tan \theta$ ， $d(R_2, \overline{BC}) = d(M, \overline{BC}) = \frac{a}{2} \tan \theta$ 。

13. 重心與 Brocard Triangle

將 $\triangle ABC$ 置於直角座標系，使 $B(0,0)$ 、 $C(a,0)$ 、 $A(c \cos B, c \sin B)$ ，（如〈圖十四〉），則

$$R_1(a - \frac{b}{2} \sec \theta \cdot \cos(C - \theta), \frac{b}{2} \sec \theta \cdot \sin(C - \theta))$$

$$R_2(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \tan \theta)$$

$$R_3(\frac{c}{2} \sec \theta \cdot \cos(B - \theta), \frac{c}{2} \sec \theta \cdot \sin(B - \theta))$$

$$\triangle ABC \text{ 的重心 } G(\frac{a + c \cos B}{3}, \frac{c \sin B}{3})$$

$\triangle R_1R_2R_3$ 的重心 x 坐標為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(a - \frac{b}{2} \sec \theta \cdot \cos(C - \theta) + \frac{a}{2} + \frac{c}{2} \sec \theta \cdot \cos(B - \theta)) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{3}{2}a + \sec \theta(\frac{c}{2} \cos(B - \theta) - \frac{b}{2} \cos(C - \theta))) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{3}{2}a + \frac{c}{2} \cos B + \frac{c}{2} \sin B \cdot \tan \theta - \frac{b}{2} \cos C - \frac{b}{2} \sin C \cdot \tan \theta) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{3}{2}a + \frac{c}{2} \cos B - \frac{b}{2} \cos C) \quad (\because b \sin C = c \sin B) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{3}{2}a + \frac{c}{2} \cos B - \frac{1}{2}(a - c \cos B)) \\ &= \frac{1}{3}(a + c \cos B) \end{aligned}$$

$\triangle R_1R_2R_3$ 的重心 y 坐標為

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3}(\frac{b}{2} \sec \theta \cdot \sin(C - \theta) + \frac{a}{2} \tan \theta + \frac{c}{2} \sec \theta \cdot \sin(B - \theta)) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{b}{2} \sec \theta(\sin C \cos \theta - \cos C \sin \theta) + \frac{a}{2} \tan \theta + \frac{c}{2} \sec \theta(\sin B \cos \theta - \cos B \sin \theta)) \\ &= \frac{1}{3}(\frac{b}{2} \sin C - \frac{b}{2} \cos C \tan \theta + \frac{a}{2} \tan \theta + \frac{c}{2} \sin B - \frac{c}{2} \cos B \tan \theta) \\ &= \frac{1}{3}(c \sin B + \frac{a}{2} \cdot \tan \theta - \tan \theta \cdot \frac{a}{2}) \\ &= \frac{1}{3}c \sin B \end{aligned}$$

由上述可知 $\triangle R_1R_2R_3$ 的重心與 $\triangle ABC$ 的重心為同一點。

14.發現不等式

設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心、 I 為 $\triangle ABC$ 的內心、 G 為 $\triangle ABC$ 的重心、 P 為 $\triangle ABC$ 的 First Brocard Point、 M 為 $\triangle ABC$ 的近似重心、 O_4 為 $\triangle ABC$ 的 Brocard 圓心、 R_B 為 Brocard 圓半徑、 R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑、 r 為 $\triangle ABC$ 內切圓半徑、 θ 為 Brocard Angle。

由上述討論及已知事實，可得：

$$(1). \overline{PI}^2 = \frac{1}{(a+b+c)^2} \left(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{b}{a}(a^2 + c^2 - b^2) - \frac{a}{c}(b^2 + c^2 - a^2) - \frac{c}{b}(a^2 + b^2 - c^2) \right) t^2$$

$$(2). \overline{PG}^2 = \frac{1}{9} \cdot \frac{a^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) + b^2(a^2 - c^2)(a^2 - b^2) + c^2(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$(3). \overline{IG}^2 = r^2 - \frac{1}{36}(6(ab + bc + ca) - 5(a^2 + b^2 + c^2))$$

$$(4). \overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$$

$$(5). \overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$(6). \overline{OP} = R\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}$$

$$(7). R_B = \frac{R\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}}{2\cos \theta}, \quad R_B^2 = \frac{a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{(a^2 + b^2 + c^2)^2(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$(8). \overline{OM} = 2R_B$$

$$(9). \overline{O_4G}^2 = \left(\frac{R_B}{R}\overline{OG}\right)^2 = R_B^2 - \frac{1}{9}\left(\frac{R_B}{R}\right)^2(a^2 + b^2 + c^2), \quad (\because \triangle R_1R_2R_3 \sim \triangle BAC)$$

因 I 在 Brocard Circle 內，且 $\triangle R_1R_2R_3$ 的重心與 $\triangle ABC$ 的重心為同一點，可得以下不等式：

$$(1). R_B \leq \overline{OP}$$

證明：

$$0 < \theta \leq 30^\circ \Rightarrow \sqrt{3} \leq 2\cos \theta < 2,$$

$$\text{則 } R_B = \frac{R\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta}}{2\cos \theta} \leq R\sqrt{1 - 4\sin^2 \theta} = \overline{OP}$$

$$(2). \overline{OG} \leq \overline{OI}$$

證明：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{abc}{a+b+c} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)(a+b+c) - 9abc}{9(a+b+c)} \\ &\geq \frac{3\sqrt{a^2b^2c^2} \cdot 3\sqrt{abc} - 9abc}{9(a+b+c)} = 0 \end{aligned}$$

$$\text{則 } \overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \leq R^2 - \frac{abc}{a+b+c} = R^2 - 2Rr = \overline{OI}^2, \quad \text{故 } \overline{OG} \leq \overline{OI}.$$

(3).因 $\Delta R_1R_2R_3$ 的重心與 ΔABC 的重心為同一點，可得：

$$\overline{OG} \leq \overline{OM}$$

$$\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2) \leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{(a^2 + b^2 + c^2)^2(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \overline{OM}^2$$

$$\text{整理得不等式 (十)} \quad R^2 \leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)^2} + \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(4).因 I 在 Brocard Circle 內，可得：

$$\overline{OI} \leq \overline{OM}$$

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr \leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{(a^2 + b^2 + c^2)^2(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \overline{OM}^2$$

$$\text{整理得不等式 (十一)} \quad R^2 \leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)^2} + \frac{abc}{a+b+c}$$

(5).由(2)、(3)、(4)可得

$$\overline{OG} \leq \overline{OI} \leq \overline{OM}$$

(6).因 I、G 均在 Brocard Circle 內，可得：

$$\overline{IG} \leq \overline{OM}$$

$$\overline{IG}^2 = r^2 - \frac{1}{6}(ab + bc + ca) + \frac{5}{36}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{(a^2 + b^2 + c^2)^2(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \overline{OM}^2$$

整理得不等式 (十二)

$$r^2 \leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)^2} + \frac{1}{6}(ab + bc + ca) - \frac{5}{36}(a^2 + b^2 + c^2)$$

(7).因 I 在 Brocard Circle 內，可得：

$$\overline{IP} \leq \overline{OM}$$

$$\overline{IP}^2 = \frac{a^2b^2c^2(a^2 + b^2 + c^2 - \frac{b}{a}(a^2 + c^2 - b^2) - \frac{a}{c}(b^2 + c^2 - a^2) - \frac{c}{b}(a^2 + b^2 - c^2))}{(a^2 + b^2 + c^2)^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)}$$

$$\leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{(a^2 + b^2 + c^2)^2(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \overline{OM}^2$$

整理得不等式 (十三)

$$(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)[2abc((a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)) - 2(a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)]$$

$$+ 4(a^4b + b^4c + c^4a) - 2(a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2)]$$

$$\leq (a^4 + b^4 + c^4)[abc(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)) + (a^4b + b^4c + c^4a) - (a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2)]$$

(8).因 G 在 Brocard Circle 內及上述(1)，可得：

$$\overline{O_4G} \leq R_B \leq \overline{OP} \leq \overline{OM}$$

(9).因 G 在 Brocard Circle 內，可得：

$$\overline{PG} \leq \overline{OM}$$

$$\begin{aligned} \overline{PG}^2 &= \frac{a^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) + b^2(a^2 - c^2)(a^2 - b^2) + c^2(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)}{9(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)} \\ &\leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{(a^2 + b^2 + c^2)^2(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} = \overline{OM}^2 \end{aligned}$$

整理得不等式（十四）

$$\begin{aligned} &4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2[2(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2) + 9a^2b^2c^2] + (a^4 + b^4 + c^4)^2(a^4c^2 + b^4a^2 + c^4b^2 + 3a^2b^2c^2) \\ &\leq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)[9a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a^4c^2 + b^4a^2 + c^4b^2 + 3a^2b^2c^2)] \\ &\quad + 2(a^2c^4 + a^4b^2 + b^4c^2)(a^4 + b^4 + c^4)^2 \end{aligned}$$

伍、結論：

我們針對 Brocard Point 推得一些性質及性質的推論，利用性質的推論推得

$$\text{不等式(一)}: 16\Delta^2 \leq a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2。$$

然後，利用三角形的相似性及一些已知的三角不等式導出

$$\text{不等式(二)}: \frac{1}{r} > \frac{\cot \theta}{R} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}。$$

結合法格乃諾問題及的 Brocard Point 性質推得

$$\text{不等式(三)}: R \geq \frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{a+b+c}。$$

再將 Fermat Point 及 Brocard Point 扯上關係得到

$$\text{不等式(四)}: (a^2b + b^2c + c^2a)^2 \geq 64\sqrt{3}\Delta^3 \left(3 - \frac{R}{r}\right)，$$

$$\text{不等式(五)}: (a^2b + b^2c + c^2a)^2 \geq 16\Delta^2 \cdot 4\sqrt{3}\Delta = 64\sqrt{3}\Delta^3$$

$$\text{不等式(六)}: (a^2b + b^2c + c^2a)^2 > 128\Delta^3。$$

利用 Euler 公式再找到不等式： $d_2 \leq d_1$ 。

其次，我們分別利用三角形的內心、重心及外心的性質得到，

$$\text{不等式(七)}: abc(a^2 + b^2 + c^2) - b^2c(a^2 + c^2 - b^2) - a^2b(b^2 + c^2 - a^2) - ac^2(a^2 + b^2 - c^2) \geq 0，$$

$$\text{不等式(八)}: a^2(c^2 - a^2)(c^2 - b^2) + b^2(a^2 - c^2)(a^2 - b^2) + c^2(b^2 - a^2)(b^2 - c^2) \geq 0，$$

不等式(九)：

$$2b^2R^2(a^2 + c^2 - b^2)^2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) + 2a^4b^2c^6 - 16a^2c^2\Delta^2(b^2c^2 - 2R^2b^2 - 2R^2c^2 + 2R^2a^2) - a^2b^2c^4(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$$

最後，我們由 R_B 與 R 比值的範圍，進而發現魏琴伯克(Weitzenberk)不等式。

再因 $\Delta R_1 R_2 R_3$ 的重心與 ΔABC 的重心為同一點，且內心 I 在 Brocard Circle 內，等性質發現：

$$\text{不等式(十)}: R^2 \leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)^2} + \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\text{不等式(十一)}: R^2 \leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)^2} + \frac{abc}{a+b+c}$$

不等式(十二)：

$$r^2 \leq \frac{4a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4 - (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2))}{4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2 - (a^4 + b^4 + c^4)^2} + \frac{1}{6}(ab + bc + ca) - \frac{5}{36}(a^2 + b^2 + c^2)$$

不等式 (十三) :

$$\begin{aligned} & (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)[2abc((a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ca)) - 2(a^4 + b^4 + c^4) + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)] \\ & \quad + 4(a^4b + b^4c + c^4a) - 2(a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2)] \\ & \leq (a^4 + b^4 + c^4)[abc(a^2 + b^2 + c^2 - (ab + bc + ca)) + (a^4b + b^4c + c^4a) - (a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2)] \end{aligned}$$

不等式 (十四) :

$$\begin{aligned} & 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)^2[2(a^4b^2 + b^4c^2 + c^4a^2) + 9a^2b^2c^2] + (a^4 + b^4 + c^4)^2(a^4c^2 + b^4a^2 + c^4b^2 + 3a^2b^2c^2) \\ & \leq 4(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)[9a^2b^2c^2(a^4 + b^4 + c^4) + (a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)(a^4c^2 + b^4a^2 + c^4b^2 + 3a^2b^2c^2)] \\ & \quad + 2(a^2c^4 + a^4b^2 + b^4c^2)(a^4 + b^4 + c^4)^2 \end{aligned}$$

陸、討論：

這一次的研究我們是針對 Brocard Point，也就是說我們是討論在 ΔABC 中， $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA = \theta$ 的狀況下，P 點的性質及利用這些性質推出的不等式。在對 Brocard Point 後，我們開始對 $\angle PAB = \theta$ 、 $\angle PBC = 2\theta$ 、 $\angle PCA = 3\theta$ 狀況下的 P 點產生興趣，我們猜想也許這樣的 P 點也會和一樣有一些好的性質甚至可以推出一些漂亮的不等式，因此，下一個階段我們將朝這一個方向繼續努力邁進。

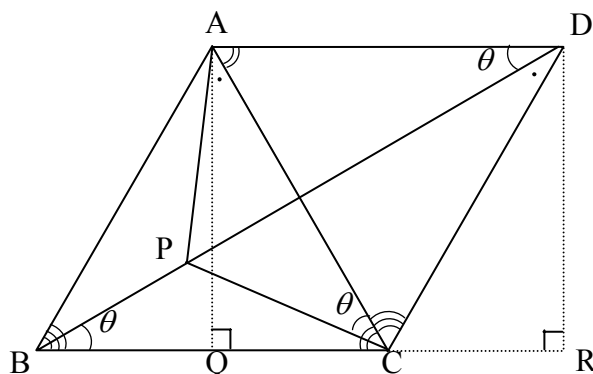
柒、附錄：

一、性質的證明

性質一： $\cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C$

pf：由〈圖三〉及〈圖十一〉，

$$\begin{aligned} \cot \theta &= \frac{\overline{BR}}{\overline{DR}} \\ &= \frac{\overline{BQ} + \overline{QC} + \overline{CR}}{\overline{DR}} \\ &= \cot B + \cot C + \cot \angle DCR \\ &= \cot A + \cot B + \cot C \end{aligned}$$



性質一的推論： $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}$ ，其中， θ 為 Brocard Angle。

〈圖十一〉

$\therefore \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3} \dots\dots$ (請見附記一) 且 $\cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

$\therefore \cot \theta \geq \cot \frac{\pi}{6}$ 故 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{6}$

由 Ceva 定理三角形形式(請見附記二)得

性質二： $\sin^3 \theta = \sin(A - \theta) \sin(B - \theta) \sin(C - \theta)$

性質二的推論： $\cot A + \cot B + \cot C = \csc A \csc B \csc C + \cot A \cot B \cot C$

pf： $\sin(A - \theta) \sin(B - \theta) \sin(C - \theta)$

$$= (\sin A \cos \theta - \cos A \sin \theta) (\sin B \cos \theta - \cos B \sin \theta) (\sin C \cos \theta - \cos C \sin \theta)$$

$$= (\sin A \sin B \cos^2 \theta - \sin A \cos B \sin \theta \cos \theta - \cos A \sin B \sin \theta \cos \theta + \cos A \cos B \sin^2 \theta) (\sin C \cos \theta - \cos C \sin \theta)$$

$$= \sin A \sin B \sin C \cos^3 \theta - \sin A \cos B \sin C \sin \theta \cos^2 \theta - \cos A \sin B \sin C \sin \theta \cos^2 \theta + \cos A \cos B \sin C \sin^2 \theta \cos \theta + \cos A \sin B \cos C \sin^2 \theta \cos \theta - \cos A \cos B \cos C \sin^3 \theta$$

$$= \sin^2 \theta \cos \theta (\sin A \cos B \cos C + \cos A \sin B \cos C + \cos A \cos B \sin C) - \sin \theta \cos^2 \theta (\cos A \sin B \sin C + \sin A \cos B \sin C + \sin A \sin B \cos C) + \sin A \sin B \sin C \cos^3 \theta - \cos A \cos B \cos C \sin^3 \theta$$

$$= \sin^2 \theta \cos \theta \cdot \frac{1}{4} (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) - \sin \theta \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{2} (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$+ \sin A \sin B \sin C \cos^3 \theta - \cos A \cos B \cos C \sin^3 \theta$$

$$= \sin^2 \theta \cos \theta \cdot \frac{1}{4} \cdot 4 \sin A \sin B \sin C - \sin \theta \cos^2 \theta \cdot \frac{1}{2} \cdot (2 \cos A \cos B \cos C + 2) + \sin A \sin B \sin C \cos^3 \theta - \cos A \cos B \cos C \sin^3 \theta$$

$$= \sin^2 \theta \cos \theta \sin A \sin B \sin C - \sin \theta \cos^2 \theta \cos A \cos B \cos C - \sin \theta \cos^2 \theta + \sin A \sin B \sin C \cos^3 \theta - \cos A \cos B \cos C \sin^3 \theta$$

$$= \sin A \sin B \sin C \cos \theta (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - \cos A \cos B \cos C \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) - \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$= \sin A \sin B \sin C \cos \theta - \cos A \cos B \cos C \sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta$$

其中， $\because A+B+C=\pi \Rightarrow \sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A\cdots\cdots$ (請見附記三)

$$\therefore \sin B\sin C\cos A=\frac{1}{2}(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)$$

同理可得 $\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(\sin^2 B+\sin^2 C-\sin^2 A)+\frac{1}{2}(\sin^2 A+\sin^2 C-\sin^2 B)+\frac{1}{2}(\sin^2 B+\sin^2 A-\sin^2 C) \\ &= \frac{1}{2}(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C) \\ &= \frac{1}{2}(2\cos A\cos B\cos C+2)\cdots\cdots\text{(請見附記四)} \end{aligned}$$

$$\sin A\cos B\cos C=\sin A\cdot\frac{1}{2}(\cos(B+C)+\cos(B-C))$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}\sin A\cos(B+C)+\frac{1}{2}\sin A\cos(B-C) \\ &= -\frac{1}{2}\sin A\cos A+\frac{1}{2}\sin(B+C)\cos(B-C) \\ &= -\frac{1}{4}\sin 2A+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\sin 2B+\sin 2C) \\ &= \frac{1}{4}(-\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C) \end{aligned}$$

同理可得 $\sin A\cos B\cos C+\cos A\sin B\cos C+\cos A\cos B\sin C$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4}(-\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)+\frac{1}{4}(\sin 2A-\sin 2B+\sin 2C)+\frac{1}{4}(\sin 2A+\sin 2B-\sin 2C) \\ &= \frac{1}{4}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C) \\ &= \frac{1}{4}\cdot 4\sin A\sin B\sin C\cdots\cdots\text{(請見附記五)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \sin^3 \theta &= \sin(A-\theta)\sin(B-\theta)\sin(C-\theta) \\ &= \sin A\sin B\sin C\cos \theta - \cos A\cos B\cos C\sin \theta - \sin \theta \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$\therefore \sin \theta(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \sin A\sin B\sin C\cos \theta - \cos A\cos B\cos C\sin \theta$$

故 $\sin \theta = \sin A\sin B\sin C\cos \theta - \cos A\cos B\cos C\sin \theta$

左右同除以 $\sin \theta$ 得 $1 = \sin A\sin B\sin C\cot \theta - \cos A\cos B\cos C$

$$\begin{aligned} \text{推得性質三：} \cot \theta &= \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C} \\ &= \frac{1}{\sin A \sin B \sin C} + \cot A \cot B \cot C \\ &= \csc A \csc B \csc C + \cot A \cot B \cot C \end{aligned}$$

又由性質一(1)， $\cot \theta = \cot A + \cot B + \cot C$ 及性質三(3)

得到一個有趣的等式， $\cot A + \cot B + \cot C = \csc A \csc B \csc C + \cot A \cot B \cot C$

由性質三(3)， $\cot \theta = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C}$ 及

附記四中[1]： $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 \cos A \cos B \cos C + 2$

可推得性質四， $\cot \theta = \frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{2 \sin A \sin B \sin C}$

由性質三(3)， $\cot \theta = \frac{1 + \cos A \cos B \cos C}{\sin A \sin B \sin C}$ 及

附記六中[3]： $a^2 + b^2 + c^2 = 8R^2(1 + \cos A \cos B \cos C)$

推得 $\cot \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{8R^2 \cdot \frac{a}{2R} \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{c}{2R}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{abc}{R}} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$

因此得性質五， $\cot \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$

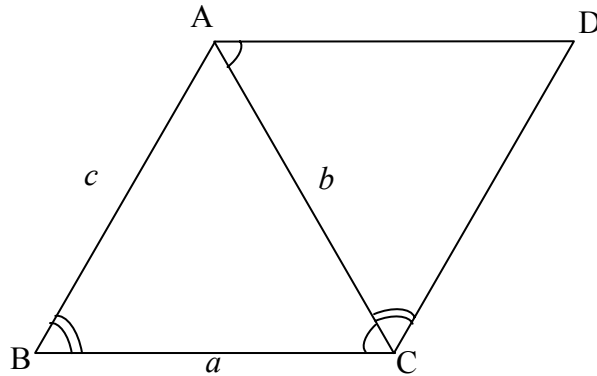
由性質五， $\cot \theta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}$ 及附記七中[4]： $8\Delta^2 = abc(a \cos A + b \cos B + c \cos C)$

$$\begin{aligned} \text{可推得 } \cot \theta &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta} \\ &= \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\Delta}{4\Delta^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R} \cdot \frac{abc}{8\Delta^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{\frac{2R}{8\Delta^2}} \\ &= \frac{abc}{\frac{2R}{8\Delta^2}} \\ &= \frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C} \end{aligned}$$

因此得性質六， $\cot \theta = \frac{a \sin A + b \sin B + c \sin C}{a \cos A + b \cos B + c \cos C}$

二、藉由相似三角形尋找 Brocard Point 的性質

如〈圖十二〉，已知 $\triangle ABC$ ，並作 $\triangle DCA$ ，使得 $\triangle DCA \sim \triangle ABC$



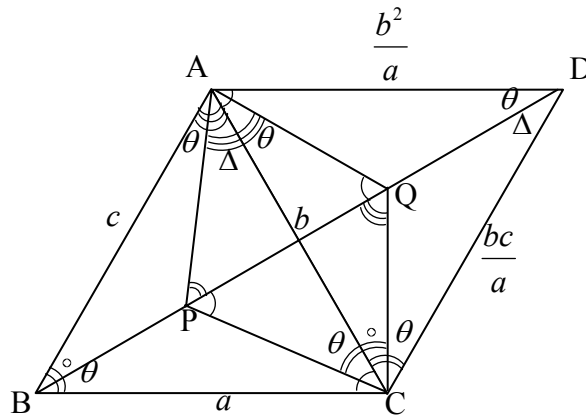
〈圖十二〉

由〈圖十二〉， $\therefore \triangle ABC \sim \triangle DCA$

$$\therefore \frac{\overline{AC}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{DA} \Rightarrow b^2 = a \times \overline{DA} \Rightarrow \overline{DA} = \frac{b^2}{a}$$

$$\text{又 } \frac{b}{\frac{b^2}{a}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DA}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{CA}} = \frac{a}{b} \Rightarrow a \overline{CD} = b \overline{AB} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{bc}{a}$$

如〈圖十三〉，先在〈圖十二〉的 $\triangle ABC$ 中找出 $\triangle ABC$ 的 Brocard Point P



〈圖十三〉

作 $\angle CAQ = \theta$ ，並作 \overline{CQ}

$\therefore \angle CAQ = \theta = \angle CBQ \quad \therefore A, B, C, Q$ 共圓 $\therefore \angle ABD = \angle ACQ$ 故 $\angle QCD = \angle QBC = \theta$

得到推論：Q 為 $\triangle ACD$ 的 Brocard Point

(一) $\triangle ABP \sim \triangle ACQ$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{c}{b} \overline{AQ} \quad (1)$$

$$\overline{BP} = \frac{c}{b} \overline{CQ} \quad (2)$$

(二) $\triangle BCP \sim \triangle DAQ$

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{AQ}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DA}} = \frac{a}{\frac{b^2}{a}} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{a^2}{b^2} \overline{DQ} \quad (3)$$

$$\overline{CP} = \frac{a^2}{b^2} \overline{AQ} \quad (4)$$

(三) $\triangle ACP \sim \triangle DCQ$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{DQ}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{b}{\frac{bc}{a}} = \frac{a}{c} \Rightarrow \overline{AP} = \frac{a}{c} \overline{DQ} \quad (5)$$

$$\overline{CP} = \frac{a}{c} \overline{CQ} \quad (6)$$

(四) $\triangle APQ \sim \triangle QCP$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{QC}} = \frac{\overline{AQ}}{\overline{QP}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{CP}} \Rightarrow \overline{PQ}^2 = \overline{AQ} \times \overline{CP} \quad \text{又由(4)知} \overline{CP} = \frac{a^2}{b^2} \overline{AQ}$$

$$\therefore \overline{PQ}^2 = \frac{b^2}{a^2} \overline{CP}^2 \Rightarrow \overline{PQ} = \frac{b}{a} \overline{CP} \quad (7)$$

由(1)及(4)知 $\overline{AP} = \frac{c}{b} \overline{AQ}$ 及 $\overline{CP} = \frac{a^2}{b^2} \overline{AQ}$

$$\text{得到} \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\frac{c}{b} \overline{AQ}}{\frac{a^2}{b^2} \overline{AQ}} = \frac{c}{b} \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{bc}{a^2} \quad (8)$$

由(2)及(6)知 $\overline{BP} = \frac{c}{b} \overline{CQ}$ 及 $\overline{CP} = \frac{a}{c} \overline{CQ}$

$$\text{得到} \frac{\overline{BP}}{\overline{CP}} = \frac{\frac{c}{b} \overline{CQ}}{\frac{a}{c} \overline{CQ}} = \frac{c}{b} \times \frac{c}{a} = \frac{c^2}{ab} \quad (9)$$

由(3)及(5)知 $\overline{BP} = \frac{a^2}{b^2} \overline{DQ}$ 及 $\overline{AP} = \frac{a}{c} \overline{DQ}$

$$\text{得到} \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} = \frac{\frac{a^2}{b^2} \overline{DQ}}{\frac{a}{c} \overline{DQ}} = \frac{a^2}{b^2} \times \frac{c}{a} = \frac{ac}{b^2} \quad (10)$$

由⑧及⑨得到 $\overline{AP} = \frac{bc}{a^2} \overline{CP}$ 及 $\overline{BP} = \frac{c^2}{ab} \overline{CP}$

$$\begin{aligned} \text{推得性質八： } \overline{AP} : \overline{BP} : \overline{CP} &= \frac{bc}{a^2} \overline{CP} : \frac{c^2}{ab} \overline{CP} : \overline{CP} \\ &= \frac{bc}{a^2} : \frac{c^2}{ab} : 1 \\ &= b^2 c : ac^2 : a^2 b \\ &= \frac{b}{a} : \frac{c}{b} : \frac{a}{c} \end{aligned}$$

因此, 可令 $\overline{AP} = \frac{b}{a} t$, $\overline{BP} = \frac{c}{b} t$, $\overline{CP} = \frac{a}{c} t$, 其中 $t \in R$

由⑤、⑦、性質八及〈圖十三〉可知

$$\begin{aligned} \overline{BD} &= \overline{BP} + \overline{PQ} + \overline{QD} \\ &= \overline{BP} + \frac{b}{a} \overline{CP} + \frac{c}{a} \overline{AP} \\ &= \frac{c}{b} t + \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{c} t + \frac{c}{a} \cdot \frac{b}{a} t \\ &= \frac{a^2 c^2 + a^2 b^2 + b^2 c^2}{a^2 bc} t \end{aligned} \quad (11)$$

由〈圖十三〉中的 $\triangle ABD$ 可知 $\overline{BD}^2 = c^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2 - 2 \cdot c \cdot \frac{b^2}{a} \cdot \cos \angle BAD$

$$\begin{aligned} &= c^2 + \frac{b^4}{a^2} + \frac{2b^2 c}{a} \cos B \\ &= c^2 + \frac{b^4}{a^2} + \frac{2b^2 c}{a} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \\ &= \frac{a^2 c^2 + b^4 + a^2 b^2 + b^2 c^2 - b^4}{a^2} \\ &= \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2} \end{aligned}$$

由⑪又知 $\overline{BD}^2 = \left(\frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}{a^2 bc}\right)^2 t^2$

$$\begin{aligned} \text{因此由⑪、⑫, } t^2 &= \frac{a^4 b^2 c^2}{a^2} \times \frac{1}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \\ &= \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \end{aligned}$$

推得 $t = \frac{abc}{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}$ 且 $\overline{BD} = \frac{\sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2}}{a}$

由此及性質八可推得性質九：

$\triangle ABC$ 的 Brocard Point P 至三頂點 A、B、C 的距離和為

$$\begin{aligned}\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP} &= \left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \right) t \\ &= \frac{b^2c + ac^2 + a^2b}{abc} \cdot \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \\ &= \frac{b^2c + ac^2 + a^2b}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}\end{aligned}$$

由〈圖十三〉可知

$$\begin{aligned}\Delta ABP &= \frac{1}{2} c \overline{AP} \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} c \cdot \frac{b}{a} \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \sin \theta \\ &= \frac{b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \sin \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta BCP &= \frac{1}{2} a \overline{BP} \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} a \cdot \frac{c}{b} \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \sin \theta \\ &= \frac{a^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \sin \theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta ACP &= \frac{1}{2} b \overline{CP} \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} b \cdot \frac{a}{c} \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \sin \theta \\ &= \frac{a^2b^2}{2\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \sin \theta\end{aligned}$$

由上列三個三角形 $\triangle ABP$ 、 $\triangle BCP$ 及 $\triangle ACP$ 的面積，可推得性質十：

$$\begin{aligned}\Delta ABP : \Delta BCP : \Delta ACP &= b^2c^2 : a^2c^2 : a^2b^2 \\ &= \frac{1}{a^2} : \frac{1}{b^2} : \frac{1}{c^2}\end{aligned}$$

由〈圖十一〉可得

$$\sin \theta = \frac{\overline{AQ}}{\overline{BD}} = \frac{\frac{2\Delta}{a}}{\frac{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}{a}} = \frac{2\Delta}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \quad (13)$$

$$\sin^2 \theta = \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)}{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)} \\
&= \frac{(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin^2 \theta} &= \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4\Delta^2} \\
&= \frac{4R^2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2b^2c^2} \\
&= 4R^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \\
&= \frac{1}{\frac{a^2}{4R^2}} + \frac{1}{\frac{b^2}{4R^2}} + \frac{1}{\frac{c^2}{4R^2}} \\
&= \frac{1}{\sin^2 A} + \frac{1}{\sin^2 B} + \frac{1}{\sin^2 C}
\end{aligned}$$

因此得到性質七： $\csc^2 \theta = \csc^2 A + \csc^2 B + \csc^2 C$

三、附件：

附記一：

證明： $\cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$

pf：先證 $\cot A \cot B + \cot B \cot C + \cot C \cot A = 1$

$$\cot(A+B) = \cot(\pi - C)$$

$$\frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = -\cot C$$

$$\cot A \cot B - 1 = -\cot A \cot C - \cot B \cot C$$

$$\Rightarrow \cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C = 1$$

$$(\cot A + \cot B + \cot C)^2$$

$$= \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2(\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C)$$

$$= \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C + 2$$

由柯西不等式得

$$(\cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C)^2 \geq (\cot A \cot B + \cot A \cot C + \cot B \cot C)^2$$

$$\Rightarrow \cot^2 A + \cot^2 B + \cot^2 C \geq 1$$

$$\text{則 } (\cot A + \cot B + \cot C)^2 \geq 1 + 2 = 3 \quad \text{故 } \cot A + \cot B + \cot C \geq \sqrt{3}$$

附記二：*Menelaus's Theorem*

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \times \frac{\overline{BS}}{\overline{SC}} \times \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta ARQ}{\Delta BRQ} \times \frac{\Delta BSQ}{\Delta CSQ} \times \frac{\Delta BCQ}{\Delta ABQ} = 1$$

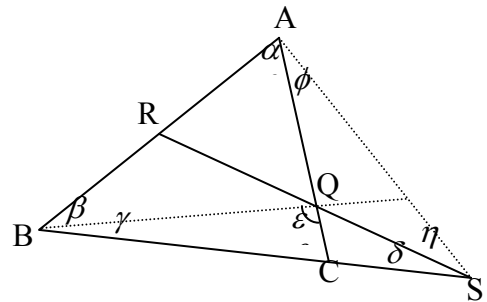
$$\Rightarrow \frac{\overline{AR} \cdot \overline{AQ} \cdot \sin \alpha}{\overline{BR} \cdot \overline{BQ} \cdot \sin \beta} \times \frac{\overline{BQ} \cdot \overline{BS} \cdot \sin \gamma}{\overline{SQ} \cdot \overline{CS} \cdot \sin \delta} \times \frac{\overline{BQ} \cdot \overline{CQ} \cdot \sin \varepsilon}{\overline{AQ} \cdot \overline{BQ} \cdot \sin(\pi - \varepsilon)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AR}}{\overline{BR}} \cdot \frac{\overline{BS}}{\overline{CS}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{QA}}{\overline{SQ}} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \gamma \sin \varepsilon}{\sin \beta \sin \delta \sin \varepsilon} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{QA}}{\overline{SQ}} \cdot \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta \sin \delta} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \eta}{\sin \phi} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = 1$$

此為 *Trigonometric Form of Ceva's Theorem*



附記三：

設 $A+B+C=\pi$ ，試證： $\sin^2 A=\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A$

$$\begin{aligned} pf: & \sin^2 B+\sin^2 C-2\sin B\sin C\cos A \\ & =\sin^2 B+\sin^2 C-(\cos(B-C)-\cos(B+C))\cos A \\ & =\sin^2 B+\sin^2 C-\cos(B-C)\cos A+\cos(B+C)\cos A \\ & =\sin^2 B+\sin^2 C+\cos(B-C)\cos(B+C)-\cos^2 A \\ & =\sin^2 B+\sin^2 C+\cos^2 B-\sin^2 C-\cos^2 A \\ & =1-\cos^2 A \\ & =\sin^2 A \end{aligned}$$

附記四：

設 $A+B+C=\pi$ ，試證： $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2\cos A\cos B\cos C+2$

1

$$\begin{aligned} pf: & \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C \\ & =\frac{1-\cos 2A}{2}+\frac{1-\cos 2B}{2}+\frac{1-\cos 2C}{2} \\ & =\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C) \\ \text{但 } & \cos 2A+\cos 2B+\cos 2C \\ & =\cos 2A+\cos 2B+\cos(2A+2B) \\ & =2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1 \\ & =2\cos(A+B)[\cos(A-B)+\cos(A+B)]-1 \\ & =2\cos(\pi-C)\cdot 2\cos A\cos B-1 \\ & =-4\cos A\cos B\cos C-1 \\ \text{故 } & \sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-4\cos A\cos B\cos C-1) \\ & =2\cos A\cos B\cos C+2 \end{aligned}$$

附記五：

設 $A+B+C=\pi$ ，試證： $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\sin A\sin B\sin C$

2

$$\begin{aligned} pf: & \sin 2A+\sin 2B+\sin 2C \\ & =2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C \\ & =2\sin C\cos(A-B)+2\sin C(-\cos(A+B)) \\ & =2\sin C[\cos(A-B)-\cos(A+B)] \\ & =2\sin C \cdot 2\sin A\sin B \\ & =4\sin A\sin B\sin C \end{aligned}$$

附記六：

設 $A+B+C=\pi$ ，試證： $a^2+b^2+c^2=8R^2(1+\cos A\cos B\cos C)$

3

$$\begin{aligned} pf: & a^2+b^2+c^2 \\ & =(2R\sin A)^2+(2R\sin B)^2+(2R\sin C)^2 \\ & =4R^2(\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C) \\ & =4R^2(2+2\cos A\cos B\cos C) \cdots \cdots (\text{請見附記四 } \boxed{1}) \\ & =8R^2(1+\cos A\cos B\cos C) \end{aligned}$$

附記七：

在 $\triangle ABC$ 中，試證： $8\Delta^2=abc(\cos A+\cos B+\cos C)$

4

$$\begin{aligned} pf: & \cos A+\cos B+\cos C \\ & =2R(\sin A\cos A+\sin B\cos B+\sin C\cos C) \\ & =R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C) \\ & =4R\sin A\sin B\sin C \cdots \cdots (\text{請見附記五 } \boxed{2}) \\ & \quad abc(\cos A+\cos B+\cos C) \\ & =4Rabc\sin A\sin B\sin C \\ & =2a^2 b\sin B\sin C \\ & =2(abc\sin C)(a\sin B) \\ & =2 \cdot 2\Delta \cdot 2\Delta \\ & =8\Delta^2 \end{aligned}$$

附記八：

在 $\triangle ABC$ 中， $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\Delta$ (Weitzenberk 魏琴伯克不等式)

$$pf: a^2+b^2+c^2-4\sqrt{3}\Delta$$

$$=a^2+b^2+a^2+b^2-2ab\cos C-2\sqrt{3}ab\sin C$$

$$=2(a^2+b^2-ab\cos C-\sqrt{3}ab\sin C)$$

$$=2(a^2+b^2-2ab\sin(C+\frac{\pi}{6}))$$

$$\geq 2(a^2+b^2-2ab) \geq 0$$

“=” $\Leftrightarrow \angle C+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ ， $\angle C=\frac{\pi}{3}$ ，且 $a=b$ ，即 $\triangle ABC$ 為正三角形

附記九：

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2R}\left(\frac{1}{\sin A}+\frac{1}{\sin B}+\frac{1}{\sin C}\right) \geq \frac{1}{2R} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{\sin A \sin B \sin C}}$$

$$\text{又 } \frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \geq \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C} \Rightarrow \frac{3}{\sin A + \sin B + \sin C} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}}$$

$$\therefore \sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3}{2} \sqrt{3} \quad \therefore \frac{1}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{則 } \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{3}{2R} \sqrt[3]{\frac{1}{\sin A \sin B \sin C}} \geq \frac{9}{2R} \frac{1}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \frac{9}{2R} \times \frac{2\sqrt{3}}{9} = \frac{\sqrt{3}}{R}$$

$$ab+bc+ca = \frac{4R\Delta}{c} + \frac{4R\Delta}{a} + \frac{4R\Delta}{b} = 4R\Delta \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$$

$$\geq 4R\Delta \frac{\sqrt{3}}{R} = 4\sqrt{3}\Delta$$

捌、參考資料：

- 1.黃家禮編著：幾何明珠，台北，九章出版社，1997。
- 2.Eric W. Weisstein. Brocard Point. *MathWorld*. Retrieved May 10, 2004, from [http://mathworld.wolfram.com/First Brocard Point.html](http://mathworld.wolfram.com/FirstBrocardPoint.html)
- 3.Eric W. Weisstein. Brocard Angle. *MathWorld*. Retrieved May 10, 2004, from [http://mathworld.wolfram.com/Brocard Angle.html](http://mathworld.wolfram.com/BrocardAngle.html)
- 4.Eric W. Weisstein. Brocard Point. *MathWorld*. Retrieved May 10, 2004, from [http://mathworld.wolfram.com/Brocard Circle.html](http://mathworld.wolfram.com/BrocardCircle.html)
- 5.Eric W. Weisstein. Brocard Point. *MathWorld*. Retrieved May 10, 2004, from [http://mathworld.wolfram.com/ Brocard Triangles.html](http://mathworld.wolfram.com/BrocardTriangles.html)
- 6.Victor Oxman.(1996).solutions 2188. *Crux Mathematicorum No.8 Vol.23,1997*.Canadian Mathematical Society. Retrieved May 2,2003,from <http://journals.cms.math.ca/cgi-bin/vault/public/view/CRUXv23n8/body/HTML/522?template=CRUX>

評語

由題目看來，這應該是個具有視覺直觀性的數學探討。可惜所獲得的不等式只見代數關係而與 Brocard Point 毫無關係。