

# 臺灣二〇〇六年國際科學展覽會

科 別：數學科

作 品 名 稱：心手相連的正方形

得 獎 獎 項：佳作

學校 / 作者：高雄市立龍華國民中學 葉芸瑄  
                  高雄市立龍華國民中學 陳以箴

## 作者 1 簡介



我是葉芸瑄，目前就讀高雄市龍華國中三年級資優班。

我對數學的興趣是源起於從小常常接觸到的益智遊戲，這也讓我養成追根究底的習慣。到了國中，數學成了我最拿手的一科，每每接觸到數學，總有種莫名的親切感。因此，在資優班的獨立研究中，我選擇了數學為題，經過了這一年半的努力及修改，不斷的增加與拓展，終於有了小小的成果。

很高興能有機會參與這次的比賽，在研究過程中，也讓我對數學的研究方法及幾何之美有更不一樣的體認。

## 作者 2 簡介



我是陳以箴，從一年級就加入了高雄市龍華國中資源資優班，今年已經國三，正爲了考高中而努力。

在一個偶然的機會裡，參加了這次的國際科展。本來我對於數學解題就擁有濃厚的興趣，但從這次參展的過程中，發現數學的範圍可以不只是課本，也不只是制式化的運算和考卷裡考不爛的題型；經由不斷的學習和探索，原來數學的天地可以如此廣泛、多樣和豐富！

我衷心感謝自己能有這次參展的機會！

# 心手相連的正方形

## 摘要

正方形兩條對角線的交點（即中心點）距四頂點等長，也與四邊等距。如果將正方形的頂點比擬成它的「手」，兩對角線的交點當成它的「心」，則兩個正方形頂點間、中心點間、或頂點與中心點間的線段相連（或重合），就如同「手」或「心」彼此相連。本文即探索當多個正方形間「心手相連」時，衍生圖形間的面積關係。

而四個正方形中某幾個頂點相接（邊未重疊），恰圍出兩個三角形的圖形則是本內容討論圖形的主體架構，我們以此架構向外作出「層出不窮」的正方形，再配合中心點連接成四邊形，將推導出這些四邊形與基準正方形（Reference Square）間的面積關係。

## Squares Connecting Hearts with Hands

### Abstract

In a square, the lengths from the intersection point (center point) of two diagonal lines to the four apexes are the same, and so are they from that point to the four sides. If the apexes are “hands” and the intersection point of two diagonal lines is the “heart” of a square, the connection or overlap of two squares’ apexes and apexes, center point and center point, or apexes and center points is just like the connection of hands with hearts. In this article, hence, we are to explore the relation in area of derivative graphs formed by several squares connected “heart in hand.”

When some apexes of four squares are overlain without sides overlapped, two triangles are created. And that’s the theme we are going to discuss. Furthermore, we extend the operation to infinitely overlain squares and frame out quadrangles referring to the center points of some squares. Then, the relation in areas of these overlapped squares and the *Reference Square* would be deduced.

# 心手相連的正方形

## 壹、研究動機：

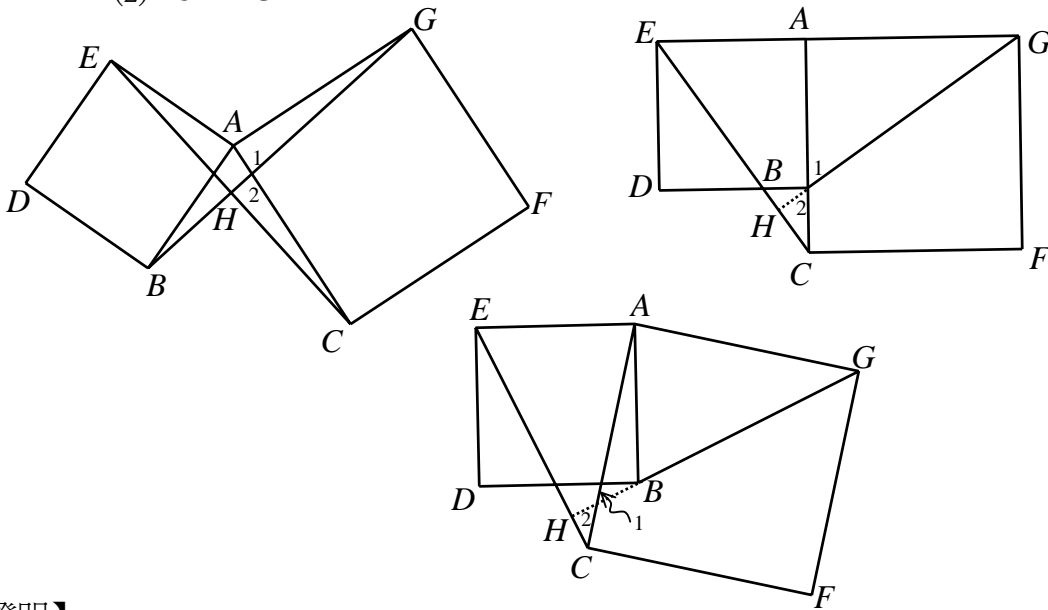
有一次上資優班充實課程的時候，老師提出數學競賽試題中一道有關正方形的問題與同學討論解法，甚至老師還改變問題條件，讓同學嘗試算出答案。由於這次的解題與命題經驗，讓我們得到研究靈感，並確立這個研究主題。

## 貳、研究目的：

正方形的頂點就好比是它的「手」，兩對角線的交點（即旋轉中心）又似它的「心」，而兩個正方形頂點間或旋轉中心間的線段相連（或重合），也如同「手」或「心」彼此相連。我們期望透過討論、命題與驗證，探索當多個正方形「心手相連」時，衍生圖形間的面積關係。

## 參、預備知識：

【知識 A】如以下三個圖形，四邊形  $ABDE$  和  $ACFG$  皆為正方形，試證：(1)  $\overline{EC} = \overline{BG}$ ；  
(2)  $\overline{EC} \perp \overline{BG}$ 。

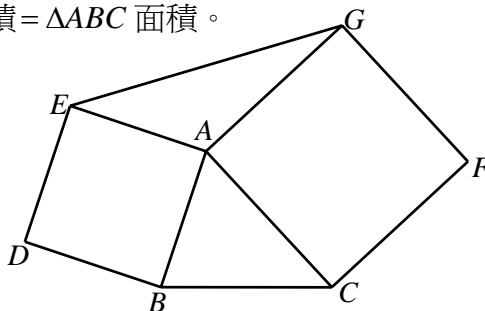


### 【證明】

(1)  $\because \overline{AE} = \overline{AB}$ ， $\overline{AC} = \overline{AG}$ ， $\angle EAC = \angle BAG$   $\therefore \triangle EAC \cong \triangle BAG$  故得證： $\overline{EC} = \overline{BG}$ 。  
(2) 由  $\triangle EAC \cong \triangle BAG \Rightarrow \angle AGB = \angle ACE$

又  $\angle 1 = \angle 2 \therefore \angle GHC = \angle GAC = 90^\circ$  故得證： $\overline{EC} \perp \overline{BG}$ 。

【知識 B】如下頁圖，以  $\triangle ABC$  的兩邊  $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$  為一邊各向外作正方形  $ABDE$  和正方形  $ACFG$ 。試證： $\triangle AEG$  面積 =  $\triangle ABC$  面積。



**【證明】**

(1) 令  $\overline{AE} = x$ ， $\overline{AC} = y$ ， $\angle BAC = \alpha$  ( $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ )，則  $\angle EAG = \pi - \alpha$ 。

(2)  $\Delta ABC$  面積 =  $\frac{1}{2}xy \sin \alpha = \frac{1}{2}xy \sin(\pi - \alpha) = \Delta AEG$  面積

故得證： $\Delta AEG$  面積 =  $\Delta ABC$  面積。

**【另證】** 如下圖

(1) 在  $\overline{AE}$  的延長線上取點  $H$ ，使得  $\overline{AH} = \overline{AE}$ ，連  $\overline{HG}$ 。

(2)  $\because \angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ \therefore \angle 1 = \angle 2$ 。

(3) 由  $\angle 1 = \angle 2$ ， $\overline{AB} = \overline{AE} = \overline{AH}$ ， $\overline{AC} = \overline{AG}$

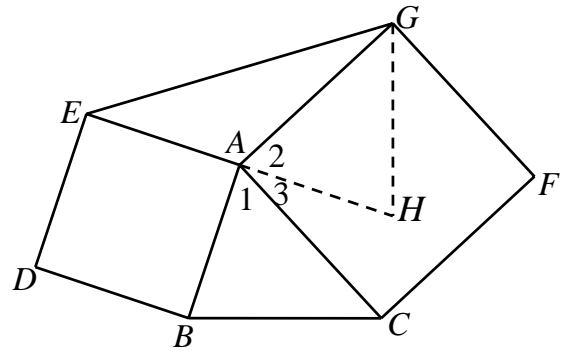
$\Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta AHG$

(以上如同以  $A$  為中心，將  $\Delta ABC$  逆轉  $90^\circ$  成  $\Delta AHG$ 。)

(4)  $\because \overline{GA}$  為  $\Delta GEH$  在  $\overline{EH}$  邊上的中線

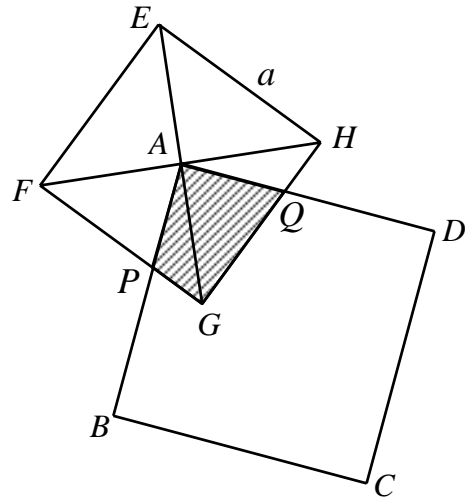
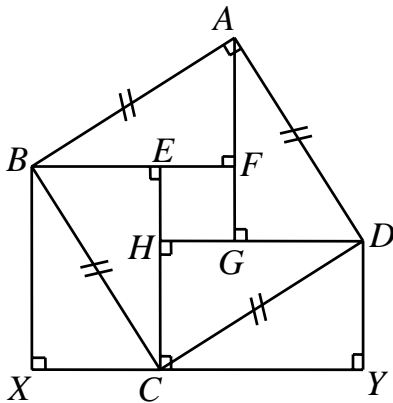
$\therefore \Delta AEG$  面積 =  $\Delta AHG$  面積

故得證： $\Delta AEG$  面積 =  $\Delta ABC$  面積。



**【知識 C】** 如下左圖， $ABCD$  為一正方形，而且  $\overline{BX} \perp \overline{XY}$ ， $\overline{DY} \perp \overline{XY}$ ，若  $\overline{BF} \parallel \overline{DH} \parallel \overline{XY}$ ， $\overline{AG} \parallel \overline{EC} \parallel \overline{BX}$ ，則  $\Delta ABF \cong \Delta DAG \cong \Delta CDH \cong \Delta BCE \cong \Delta CBX \cong \Delta DCY$ 。

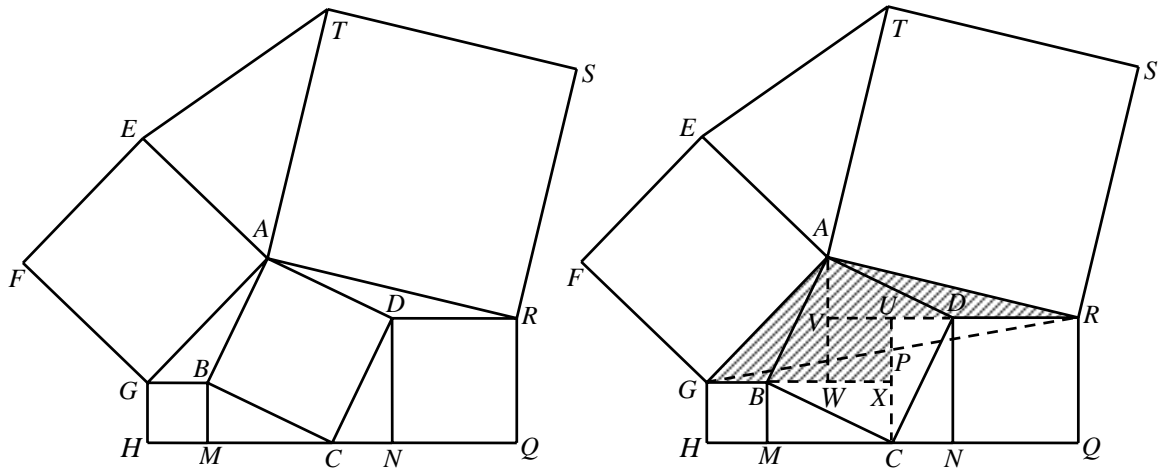
**【知識 D】** 如下右圖，將一個正方形  $ABCD$  的頂點  $A$  置於另一個正方形  $EFGH$  的兩對角線的交點上，若正方形  $EFGH$  的邊長為  $a$ ，則兩正方形斜線重疊處的面積為  $\frac{1}{4}a^2$ 。



**肆、研究過程：**

**(一)、從學習經驗尋找靈感，再發展新命題：**

**【問題 1】** 如下左圖，四邊形  $ABCD$ 、 $AEFG$ 、 $BGHM$ 、 $DNQR$ 、 $ARST$  均為正方形，且  $H$ 、 $M$ 、 $C$ 、 $N$ 、 $Q$  五點共線， $\overline{HM} < \overline{NQ}$ ，若  $\overline{AB} = 3$ ，求：(1)  $\Delta AET$  的面積；(2) 正方形  $AEFG$  與  $ARST$  的面積和。(3) 正方形  $ABCD$ 、 $AEFG$ 、 $BGHM$ 、 $DNQR$ 、 $ARST$  的面積和。(改寫自數學競賽試題)



【解答】如上右圖

(1)分別延長 $\overline{GB}$ 、 $\overline{RD}$ ，使 $\overline{BX} = \overline{CM}$ ， $\overline{DV} = \overline{DR}$ 。

作 $\overline{AV} \perp \overline{BX}$ ， $\overline{CX} \perp \overline{DV}$ ，垂足分別為 $W$ ， $U$ ，連 $\overline{GR}$ 交 $\overline{CU}$ 於點 $P$ 。

$\therefore \triangle BMC \cong \triangle CND \quad \therefore \overline{BM} = \overline{CN}$ ， $\overline{CM} = \overline{DN}$ 。

$\therefore \overline{UR} \parallel \overline{GX}$ ， $\overline{UR} = \overline{GX} \quad \therefore \triangle RUP \cong \triangle GXP$

$\Rightarrow \triangle AGR$ 的面積 = 多邊形 $AGXUR$ 的面積（如上圖中的斜線區域）

又 $\triangle AGB$ 面積 =  $\triangle BMC$ 面積 =  $\triangle BXC$ 面積， $\triangle ADR$ 面積 =  $\triangle DNC$ 面積 =  $\triangle CUD$ 面積

故 $\triangle AET$ 面積 =  $\triangle AGR$ 面積 = 正方形 $ABCD$ 面積 =  $3^2 = 9$ 。

(2)令 $\overline{BM} = a$ ， $\overline{CM} = b$

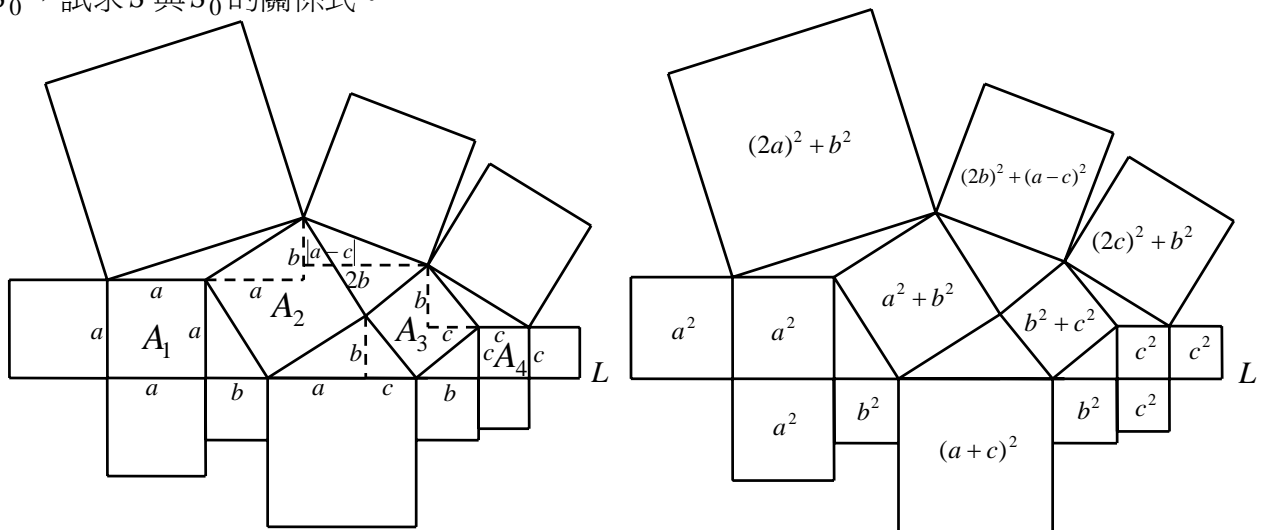
$\therefore \overline{AG}^2 = (2a)^2 + b^2 = 4a^2 + b^2$ ， $\overline{AR}^2 = (2b)^2 + a^2 = 4b^2 + a^2$

$\Rightarrow$  正方形 $AEFG$ 與 $ARST$ 的面積和 =  $5a^2 + 5b^2 = 5 \times (a^2 + b^2)$

= 正方形 $ABCD$ 面積的5倍 =  $3^2 \times 5 = 45$

(3)五個正方形 $ABCD$ 、 $AEFG$ 、 $BGHM$ 、 $DNQR$ 、 $ARST$ 的面積和為 $45 + 9 + 9 = 63$ 。

【問題2】如下圖， $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 皆為正方形（也當成其面積），其中 $A_1$ 與 $A_4$ 各有一邊重疊在直線 $L$ 上， $A_2$ 與 $A_3$ 各有一個頂點落在直線 $L$ 上。圖中除正方形 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 以外，還有另十個正方形，假設這十個正方形面積和為 $S$ ，正方形 $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 面積和為 $S_0$ ，試求 $S$ 與 $S_0$ 的關係式。



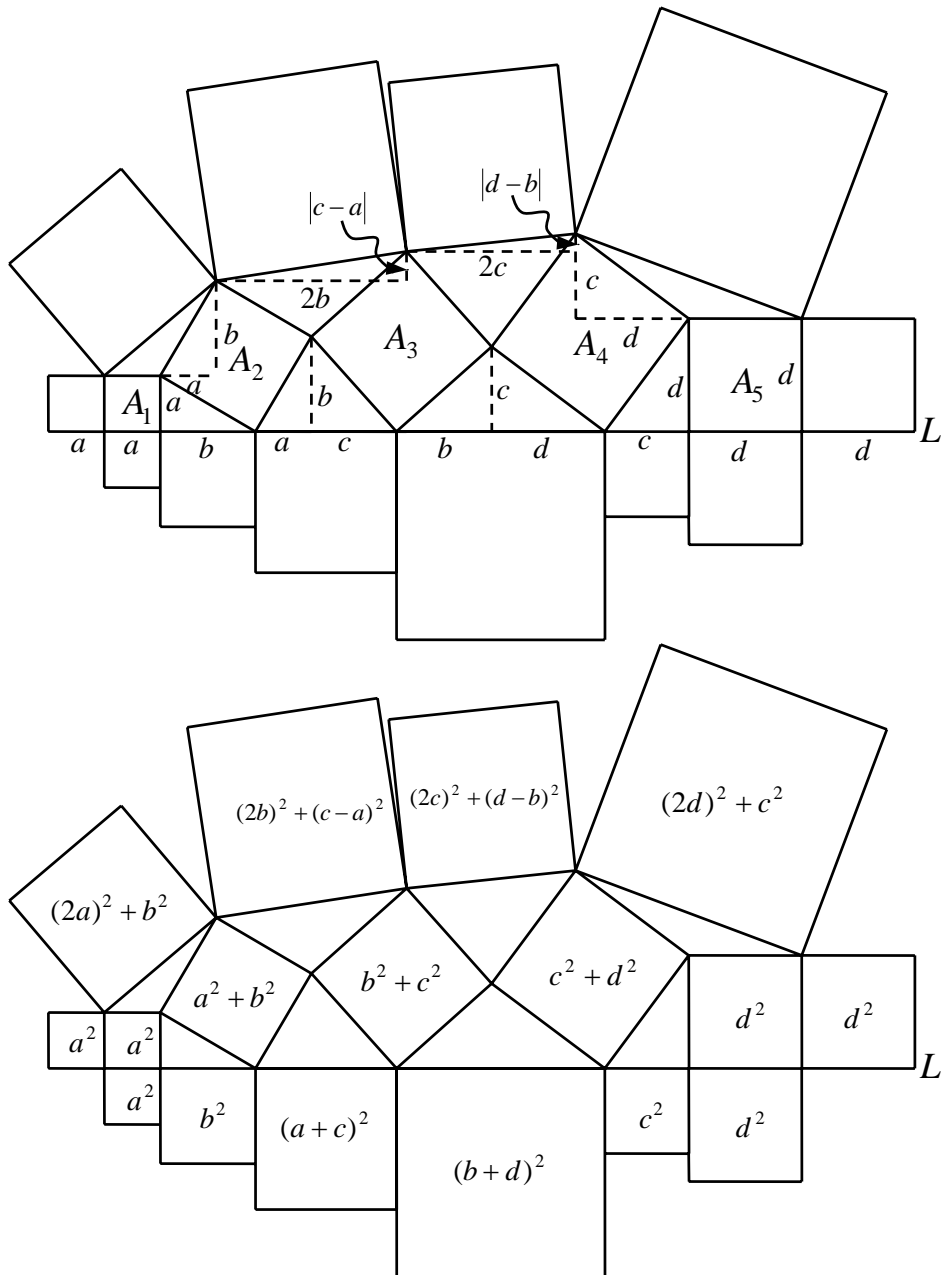
**【解答】**

我們先作一些與直線  $L$  互相平行或垂直的線段（如上頁左圖的虛線部分），並將有一邊重疊於直線  $L$  上的正方形邊長以代數表示（如圖中的  $a$ 、 $b$ 、 $c$ ），可依序推知一些直角三角形的兩股長，並表示出所有正方形的面積（如上頁右圖）。

$$\therefore S = (4a^2 + b^2) + (4b^2 + a^2 - 2ac + c^2) + (4c^2 + b^2) + c^2 + c^2 + b^2 + (a^2 + c^2 + 2ac) + b^2 + a^2 + a^2 = 8a^2 + 8b^2 + 8c^2$$

而  $S_0 = a^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$  故推得： $S = 4S_0$ 。

**【推論】**較前一問題的圖再多一個正方形（指的是「恰有一頂點落在直線  $L$  上的正方形」，如下圖）。



$$\therefore S = (4a^2 + b^2) + (4b^2 + c^2 - 2ac + a^2) + (4c^2 + d^2 - 2bd + b^2) + (4d^2 + c^2) + d^2$$

$$+d^2+c^2+(b^2+d^2+2bd)+(a^2+c^2+2ac)+b^2+a^2+a^2=8a^2+8b^2+8c^2+8d^2$$

$$\text{而 } S_0 = a^2 + (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + d^2) + d^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2$$

故推得：  $S = 4S_0$  。

**【引理 1】**  $ABCD$ 、 $FRSH$ 、 $CEFG$ 、 $DGHQ$  皆為正方形，試證：正方形  $ABCD$  與  $FRSH$  的面積和 = 正方形  $CEFG$  與  $DGHQ$  面積和的 2 倍。

**【證明】**

(1) 顯然當  $\overline{CD} = \overline{FH}$  時，本引理成立。

以下假設  $\overline{CD} < \overline{FH}$ ，則不失一般性。

(2) 以  $G$  為旋轉中心，將  $\triangle GCD$  與正方形  $ABCD$

順轉  $90^\circ$  成  $\triangle GC'D'$  正方形  $A'B'C'D'$ 。

(3)  $\because \overline{GF} = \overline{GC'}$ ， $\overline{GD} = \overline{GD'} = \overline{GH}$ ，

$$\angle FGH + \angle C'GH = 180^\circ$$

$\therefore \overline{HG}$  為  $\triangle HFC'$  的一中線。

(4) 作  $\overline{HK} \perp \overline{FC'}$ ，垂足為  $K$

$$\begin{aligned} \overline{CD}^2 &= \overline{C'H}^2 = (\overline{GC'} - \overline{GK})^2 + \overline{KH}^2 \\ &= \overline{GC'}^2 - 2\overline{GC'} \times \overline{GK} + \overline{GH}^2 \dots\dots ① \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{FH}^2 &= (\overline{FG} + \overline{GK})^2 + \overline{KH}^2 = \overline{FG}^2 + 2\overline{FG} \times \overline{GK} + \overline{GK}^2 + \overline{KH}^2 \\ &= \overline{FG}^2 + 2\overline{GC'} \times \overline{GK} + \overline{GH}^2 \dots\dots ② \end{aligned}$$

(5) 由 ①+②  $\Rightarrow \overline{CD}^2 + \overline{FH}^2 = 2\overline{FG}^2 + 2\overline{GH}^2$

故得證：正方形  $ABCD$  與  $FRSH$  的面積和 = 正方形  $CEFG$  與  $DGHQ$  的面積和 2 倍。

**【另證】**

(1) 令  $\overline{CG} = x$ ， $\overline{GD} = y$ ， $\angle CGD = \alpha$  ( $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ )，則  $\angle FGH = \pi - \alpha$ 。

(2) 由餘弦定理

$$\Rightarrow \overline{GD}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha, \quad \overline{FH}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos(\pi - \alpha)$$

$$\therefore \overline{GD}^2 + \overline{FH}^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha + x^2 + y^2 - 2xy \cos(\pi - \alpha)$$

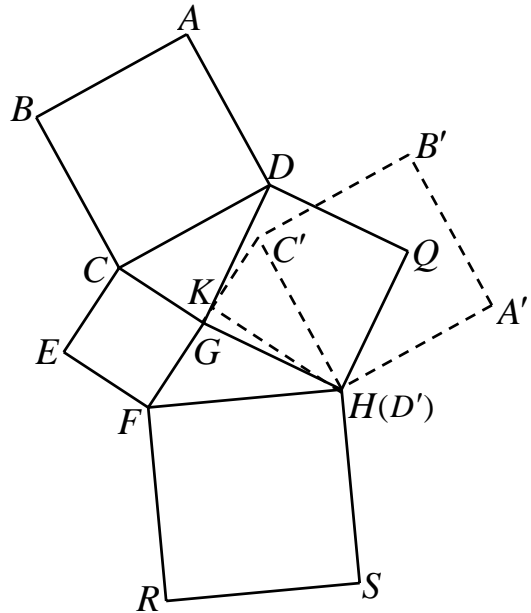
$$= x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha + x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha = 2(x^2 + y^2)$$

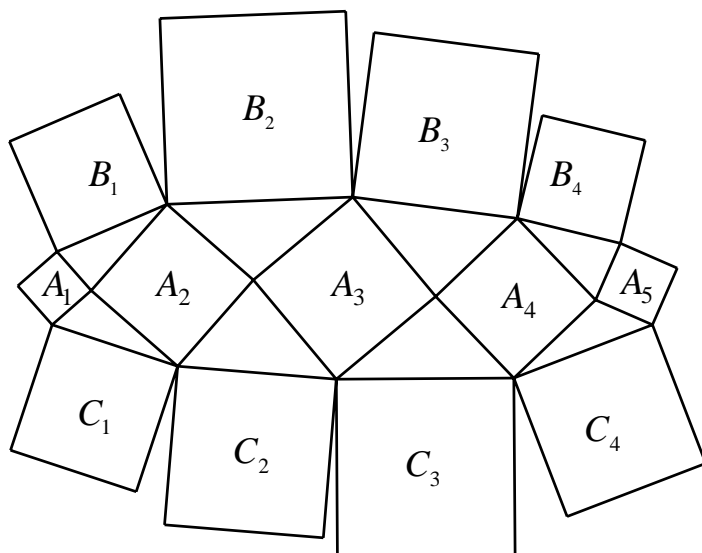
故得證：正方形  $ABCD$  與  $FRSH$  的面積和 = 正方形  $CEFG$  與  $DGHQ$  的面積和 2 倍。

依據以上的引理，可推得下圖中的正方形面積有以下的關係：

$$B_1 + C_1 = (A_1 + A_2) \times 2, \quad B_2 + C_2 = (A_2 + A_3) \times 2, \quad B_3 + C_3 = (A_3 + A_4) \times 2,$$

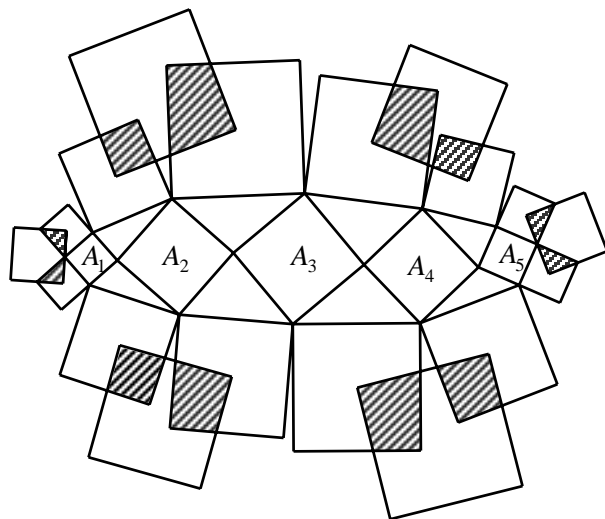
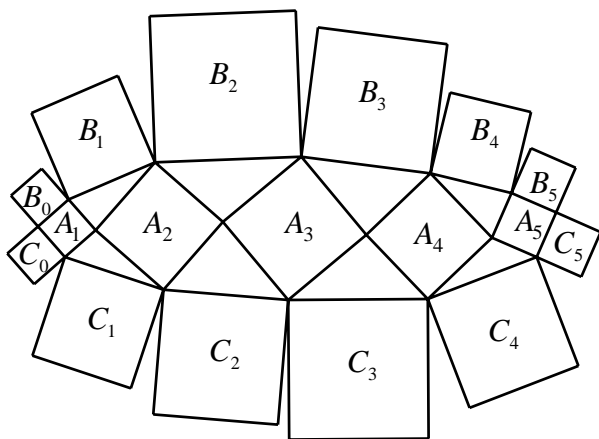
$$B_4 + C_4 = (A_4 + A_5) \times 2 \Rightarrow \sum_{i=1}^4 (B_i + C_i) = 2A_1 + 4A_2 + 4A_3 + 4A_4 + 2A_5$$





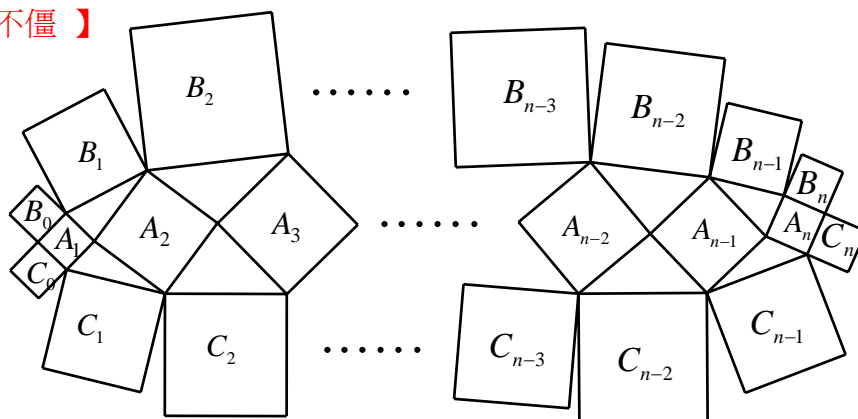
∴若在  $A_1$  與  $A_5$  兩個正方形的邊再各添加兩個正方形（如下圖之  $B_0$ 、 $C_0$ 、 $B_5$ 、 $C_5$ ），則可推得各正方形間的面積有以下關係：

$$\sum_{i=1}^6 (B_{i-1} + C_{i-1}) = 4 \times \sum_{j=1}^5 A_j$$



我們依序作出  $B_0$ 、 $C_0$ ； $B_5$ 、 $C_5$ ； $B_1$ 、 $B_2$ ； $B_3$ 、 $B_4$ ； $C_1$ 、 $C_2$ ； $C_3$ 、 $C_4$  兩個相鄰正方形的中心點連線段，並以這六條線段為邊向外作六個正方形，這些新作正方形與前述正方形的重疊面積和（如上圖示）會等於  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $A_3$ 、 $A_4$ 、 $A_5$  的面積和。

**【百足之蟲，死而不僵】**



若  $A_1, A_2, \dots, A_n; B_0, B_1, B_2, \dots, B_n; C_0, C_1, C_2, \dots, B_n$  皆表正方形 (面積)  $\Rightarrow \sum_{i=1}^{n+1} (B_{i-1} + C_{i-1}) = 4 \times \sum_{j=1}^n A_j$

## (二)、確立主體架構，向外探求生機：

【引理 2】 $P, R$  分別為正方形  $ABCD, DEFG$  的中心點， $Q$  為  $\overline{CE}$  的中點，試證： $\Delta PQR$  為等腰直角三角形。

【證明】

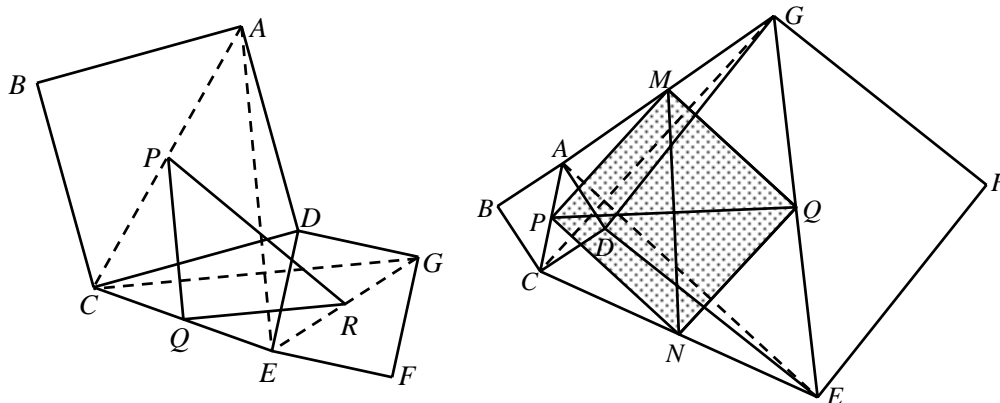
(1) 連  $\overline{AE}, \overline{CG}, \overline{AC}, \overline{EG}$ 。

(2)  $\because ABCD, DEFG$  為正方形  $\therefore \overline{AE}$  與  $\overline{CG}$  互相垂直， $\overline{AE} = \overline{CG}$ 。

(3)  $\because P, Q$  分別為  $\overline{AC}$  與  $\overline{CE}$  中點  $\therefore \overline{PQ} = \frac{1}{2} \overline{AE}$ ， $\overline{PQ} \parallel \overline{AE}$ 。

同理可證： $\overline{QR} = \frac{1}{2} \overline{CG}$ ， $\overline{RQ} \parallel \overline{CG}$ 。

(4) 由(2)和(3)  $\Rightarrow \overline{PQ} \perp \overline{QR}$ ， $\overline{PQ} = \overline{QR}$ ，故得證： $\Delta PQR$  為等腰直角三角形。



【引理 3】 $P, Q$  分別為正方形  $ABCD, DEFG$  的中心點， $M, N$  分別為  $\overline{AG}, \overline{CE}$  的中點，試證： $MPNQ$  為正方形。

【證明】由引理 2 可推知  $\Delta PNQ$  與  $\Delta PMQ$  皆為等腰直角三角形，故得證： $MPNQ$  為正方形。

【定理 1】 $ABCD, CEQP, DEFG, AGNM$  皆為正方形， $T, R, V, H$  分別是各個正方形的中心點， $S, U$  分別是  $\overline{AG}, \overline{CE}$  的中點，試證：(I)  $\overline{HD} = \overline{DR}$ ；(II)  $\overline{HR}$  與  $\overline{TV}$  互相垂直；(III) 四邊形  $HTRV$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times 2$ 。(如下頁圖，我們將四個斜線正方形的特殊組合，稱為「傑克結構」(Jack Construction)，此圖是下段研究圖形的主架構，而正方形  $STUV$  稱為「基準正方形」(Reference Square)。)

【證明】如下頁圖

(1)

(1) 連  $\overline{AC}, \overline{AN}, \overline{GE}$ 。

(2) 以  $D$  點為旋轉中心，將  $\Delta ADG$ 、正方形  $AGNM$ 、 $\overline{AN}$  與  $\overline{DH}$  分別順轉  $90^\circ$  而成  $\Delta A'DE$ 、正

方形  $A'EN'M'$ 、 $\overline{A'N'}$  與  $\overline{DH'}$   $\Rightarrow \overline{DA'} = \overline{DA} = \overline{DC}$ ， $\angle CDA + \angle ADA' = 180^\circ$ 。

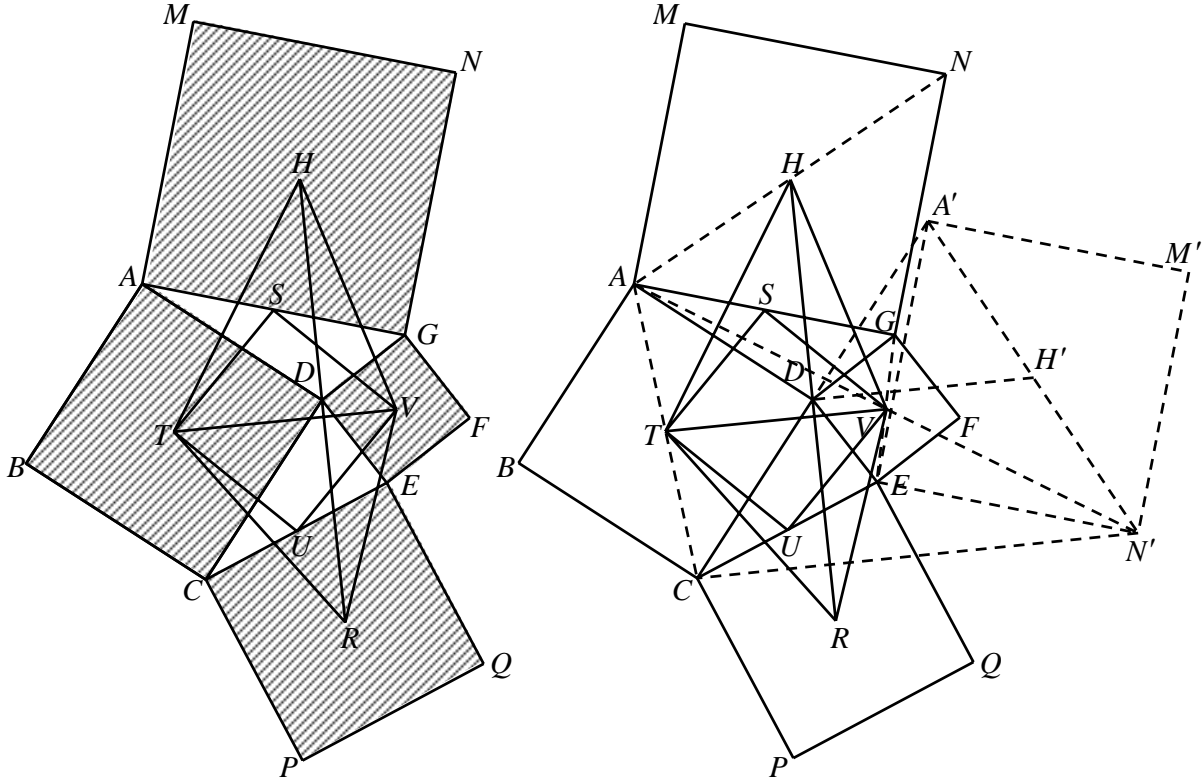
(3) 由引理 2  $\Rightarrow \overline{DR} = \overline{DH'}$ ， $\overline{DR} \perp \overline{DH'}$

又  $\overline{DH} = \overline{DH'}$   $\Rightarrow \angle HDH' + \angle H'DR = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

(4) 故得證： $\overline{HD} = \overline{DR}$ ， $H$ 、 $D$ 、 $R$  三點共線。

(II)

(1) 連  $\overline{AV}$ 、 $\overline{VN'}$ 、 $\overline{CN'}$ 。



(2) 在  $\triangle AVG$  與  $\triangle N'VE$  中  $\because \overline{AG} \parallel \overline{EN'}$   $\therefore \angle AGV = \angle N'VE$  又  $\overline{AG} = \overline{EN'}$ ， $\overline{GV} = \overline{EV}$   
 $\therefore \triangle AVG \cong \triangle N'VE \Rightarrow \overline{AV} = \overline{VN'}$ ，且  $A$ 、 $V$ 、 $N'$  三點共線。

(3)  $\because \overline{AV} = \overline{VN'}$ ， $\overline{AT} = \overline{TC}$   $\therefore \overline{TV} \parallel \overline{CN'}$ ， $\overline{TV} = \frac{1}{2} \overline{CN'}$

$\because \overline{A'D} = \overline{DC}$ ， $\overline{AH'} = \overline{H'N'}$   $\therefore \overline{DH'} \parallel \overline{CN'}$ ， $\overline{DH'} = \frac{1}{2} \overline{CN'}$

$\Rightarrow \overline{TV} \parallel \overline{DH'}$ ， $\overline{TV} = \overline{DH'} = \overline{DH}$

(4)  $\because \overline{HR} \perp \overline{DH'}$  故得證： $\overline{HR}$  與  $\overline{TV}$  互相垂直。

(III)

(1)  $HTRV$  的面積  $= \frac{1}{2} \times \overline{HR} \times \overline{TV} = \frac{1}{2} \times 2\overline{DH} \times \overline{TV} = \overline{DH} \times \overline{TV}$

(2)  $\because \overline{DH} = \overline{TV}$   $\therefore HTRV$  的面積  $= \overline{TV}^2 = 2 \times \overline{ST}^2$

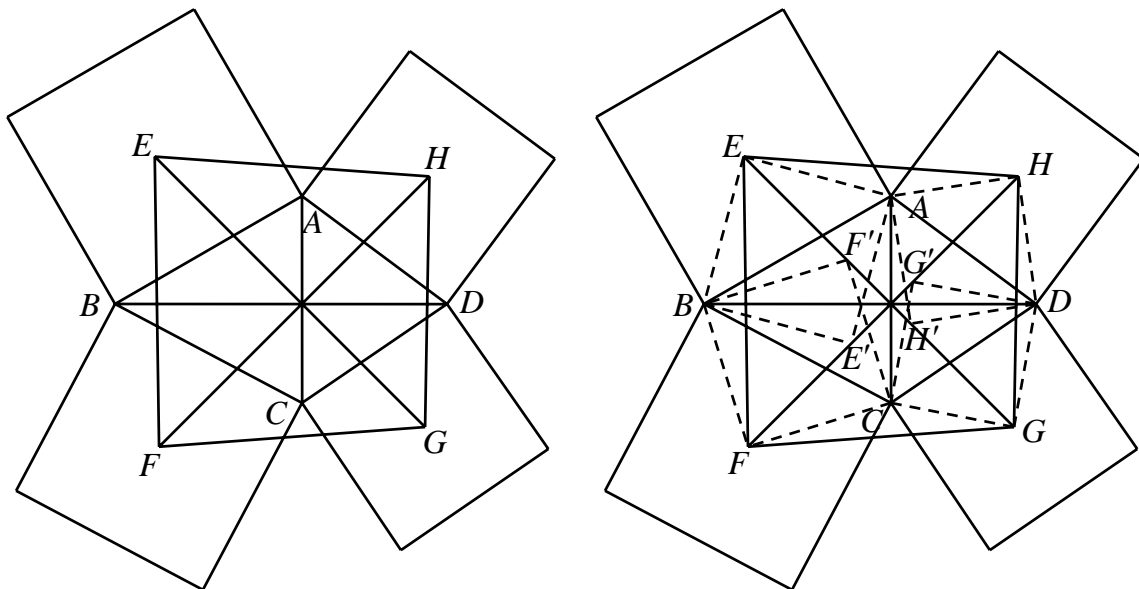
故得證：四邊形  $HTRV$  的面積  $= (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times 2$ 。

(三)、掌握根本、用「心」追求，終於發現「無盡」之美：

【引理 4】四邊形  $ABCD$  中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ， $\overline{AC} = a$ ， $\overline{BD} = b$ ，若分別以  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$  為邊，向外作四個正方形，且  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分別為四個正方形的中心點，試證：(I)  $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ，

$\overline{EG} = \overline{FH}$  (II)  $EFGH$  的面積 =  $ABCD$  面積的  $\frac{(a+b)^2}{2ab}$  倍。

【證明】



(I)

(1) 分別以  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$  為一條對角線，作正方形  $AEBE'$ 、 $BFCF'$ 、 $CGDG'$ 、 $DHAH'$ 。

(2)  $\because AEBE'$ 、 $AHDH'$  為正方形  $\therefore \overline{AB} : \overline{AE} = \overline{AD} : \overline{AH'} = \sqrt{2} : 1$

且  $\angle BAD = \angle BAH' + \angle DAH' = \angle BAH' + 45^\circ = \angle BAH' + \angle EAB = \angle EAH'$

$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle AH'E \Rightarrow \overline{BD} = \overline{EH'} \times \sqrt{2}$ ， $\angle AH'E = \angle ADB$

同理可證： $\triangle DAC \sim \triangle DH'G$ ， $\overline{AC} = \overline{H'G} \times \sqrt{2}$ ， $\angle DH'G = \angle DAC$

$\Rightarrow \angle AH'E + \angle DH'G + \angle AH'D = \angle ADB + \angle DAC + 90^\circ = 180^\circ$

$\therefore \overline{EG} = \overline{EH'} + \overline{GH'} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\overline{BD} + \overline{AC}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a+b)$

(3) 同理可證： $\overline{FH} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a+b)$

(4)  $\because AEBE'$ 、 $AHDH'$  為正方形  $\therefore \overline{E'H} \perp \overline{EH'} \Rightarrow \overline{EG} \perp \overline{FH}$

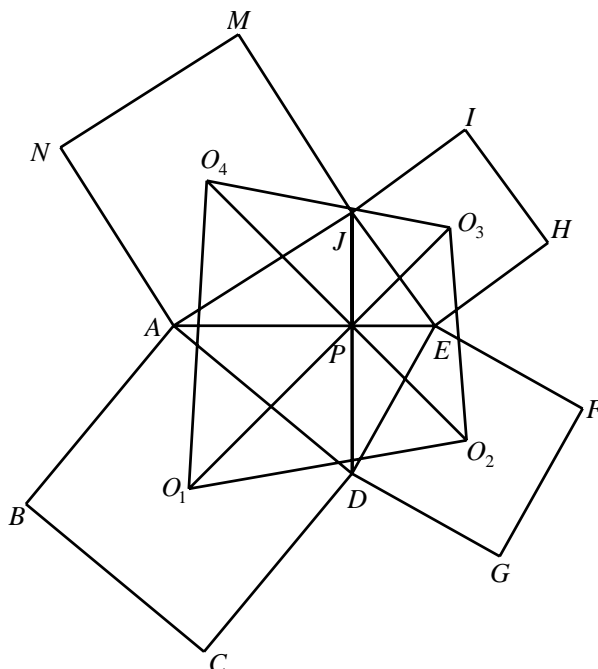
故得證： $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ， $\overline{EG} = \overline{FH} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a+b)$ 。

(II)

由  $EFGH$  的面積 =  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} (a+b) \times \frac{1}{\sqrt{2}} (a+b) = \frac{1}{4} (a+b)^2$ ，又  $ABCD$  面積 =  $\frac{1}{2} ab$

故可推得： $EFGH$  的面積 =  $ABCD$  面積的  $\frac{(a+b)^2}{2ab}$  倍。

【引理 5】四邊形  $ADEJ$  中， $\overline{AE} = \overline{DJ}$ ， $\overline{AE} \perp \overline{DJ}$ （垂足為  $P$ ），且  $ABCD$ 、 $DEFG$ 、 $EHIJ$ 、 $AJMN$  皆為正方形， $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$  分別是每個正方形的中心點，試證： $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$ ， $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ ，四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 = (四邊形  $ADEJ$  面積)  $\times 2$ 。



【證明】

令  $\overline{AE} = \overline{DJ} = a$

由引理 4 知： $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$ ， $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ ， $O_1O_2O_3O_4$  的面積 =  $ADEJ$  面積的  $\frac{(a+a)^2}{2a^2}$  倍。

故得證：四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 = (四邊形  $ADEJ$  面積)  $\times 2$ 。

【定理 2】四邊形  $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$  皆為正方形， $T$ 、 $R$ 、 $V$ 、 $H$  四點分別是每一個正方形的中心點， $S$ 、 $U$  分別是  $\overline{AG}$ 、 $\overline{CE}$  的中點；四邊形  $THIJ$ 、 $TRLK$ 、 $VRWX$ 、 $HVYZ$  皆為正方形， $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$  分別是每個正方形的中心點，試證： $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$ ， $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ ，且四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times \frac{9}{2}$ 。

【證明】

(1) 由定理 1 可知：四邊形  $HTRV$  面積 = 正方形  $STUV$  面積的 2 倍。

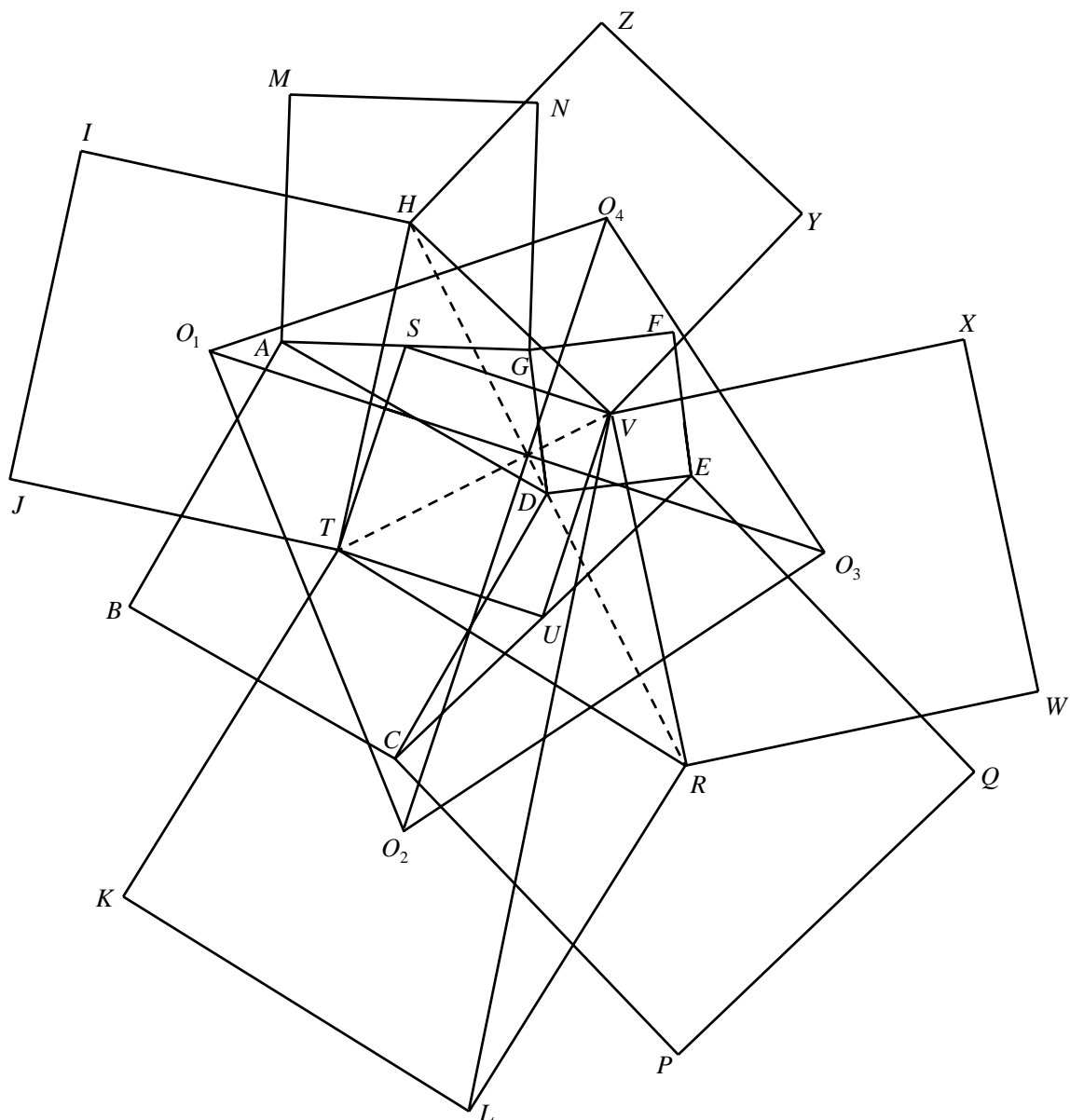
(2) 連  $\overline{HR}$ 、 $\overline{TV}$ ，則  $\overline{HR} = 2\overline{TV}$ （令  $\overline{TV} = r$ ， $\overline{HR} = 2r$ ）， $\overline{HR} \perp \overline{TV}$ 。

(3) 由引理 4 知： $\overline{O_1O_3} = \overline{O_2O_4}$ ， $\overline{O_1O_3} \perp \overline{O_2O_4}$ ，四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  面積 =  $HTRV$  面積的

$$\frac{(2r+r)^2}{2 \cdot 2r \cdot r} \text{ 倍} \Rightarrow O_1O_2O_3O_4 \text{ 面積} = HTRV \text{ 面積的 } \frac{9}{4} \text{ 倍}$$

$$\therefore \text{四邊形 } O_1O_2O_3O_4 \text{ 面積} = \text{正方形 } STUV \text{ 面積的 } \frac{9}{4} \times 2 \text{ 倍}$$

故得證：四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times \frac{9}{2}$ 。



【引理 6】 $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$  皆為正方形， $T$ 、 $R$ 、 $V$ 、 $H$  分別是各個正方形的中心點， $S$ 、 $U$  分別是  $\overline{AG}$ 、 $\overline{CE}$  的中點，試證：(I)  $\overline{HR} = \overline{BF}$ ， $\overline{HR}$  與  $\overline{BF}$  互相垂直；(II) 四邊形  $HBRF$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times 4$ 。

【證明】

(I)

(1) 作正方形  $AHGK$ 。

(2) 由定理 1 可知： $\overline{HD} = \overline{DR}$ ， $\overline{HR} = 2\overline{TV}$ 。

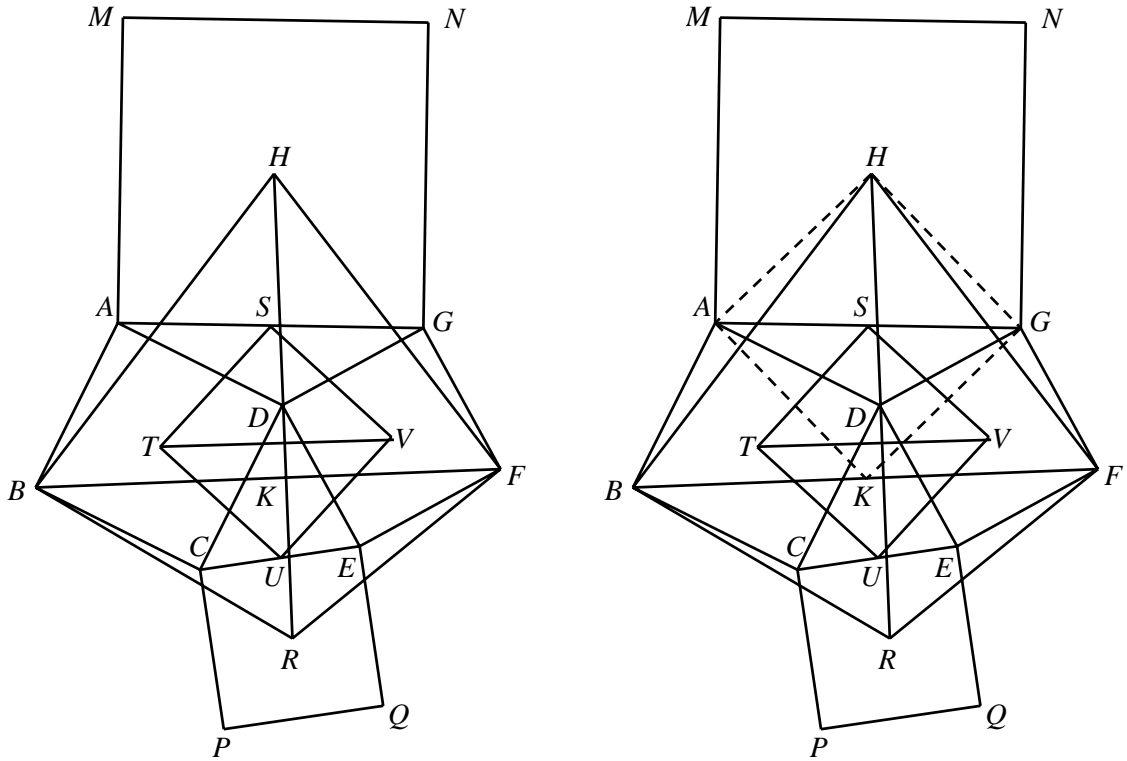
(3) 由正方形  $AHGK$  與正方形  $ABCD$  共頂點於  $A \Rightarrow \overline{BK} = \overline{HD}$ ， $\overline{BK} \perp \overline{HD}$ ；

由正方形  $AHGK$  與正方形  $DEFG$  共頂點於  $G \Rightarrow \overline{FK} = \overline{HD}$ ， $\overline{FK} \perp \overline{HD}$

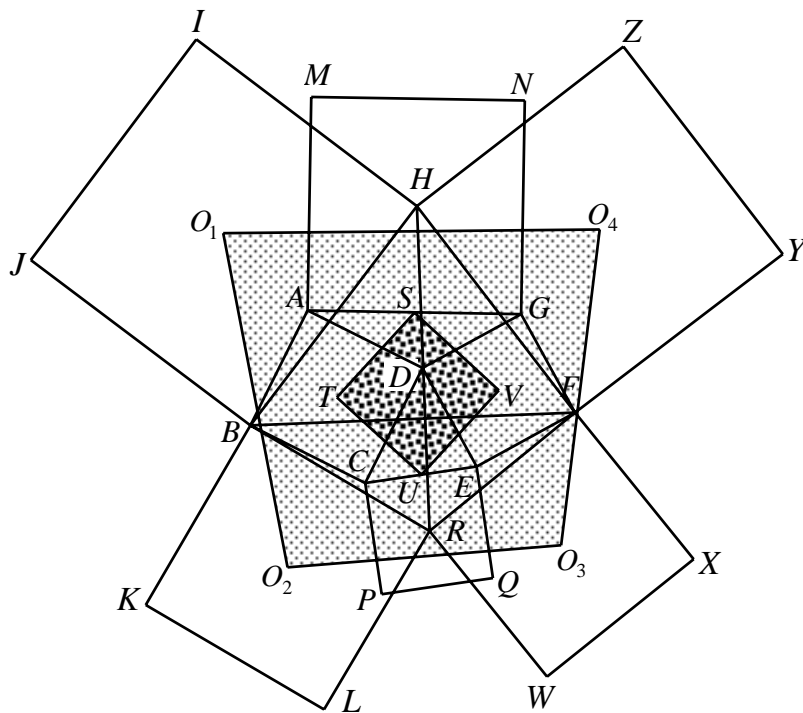
$\therefore B$ 、 $K$ 、 $F$  三點共線  $\Rightarrow \overline{BF} = 2\overline{HD} = \overline{HR}$ ， $\overline{HR}$  與  $\overline{BF}$  互相垂直。

(II)

四邊形  $HBRF$  的面積 =  $\frac{1}{2} \times \overline{BF} \times \overline{HR} = \frac{1}{2} \times 2\overline{TV} \times 2\overline{TV} = 2\overline{TV}^2 = (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times 4$ 。



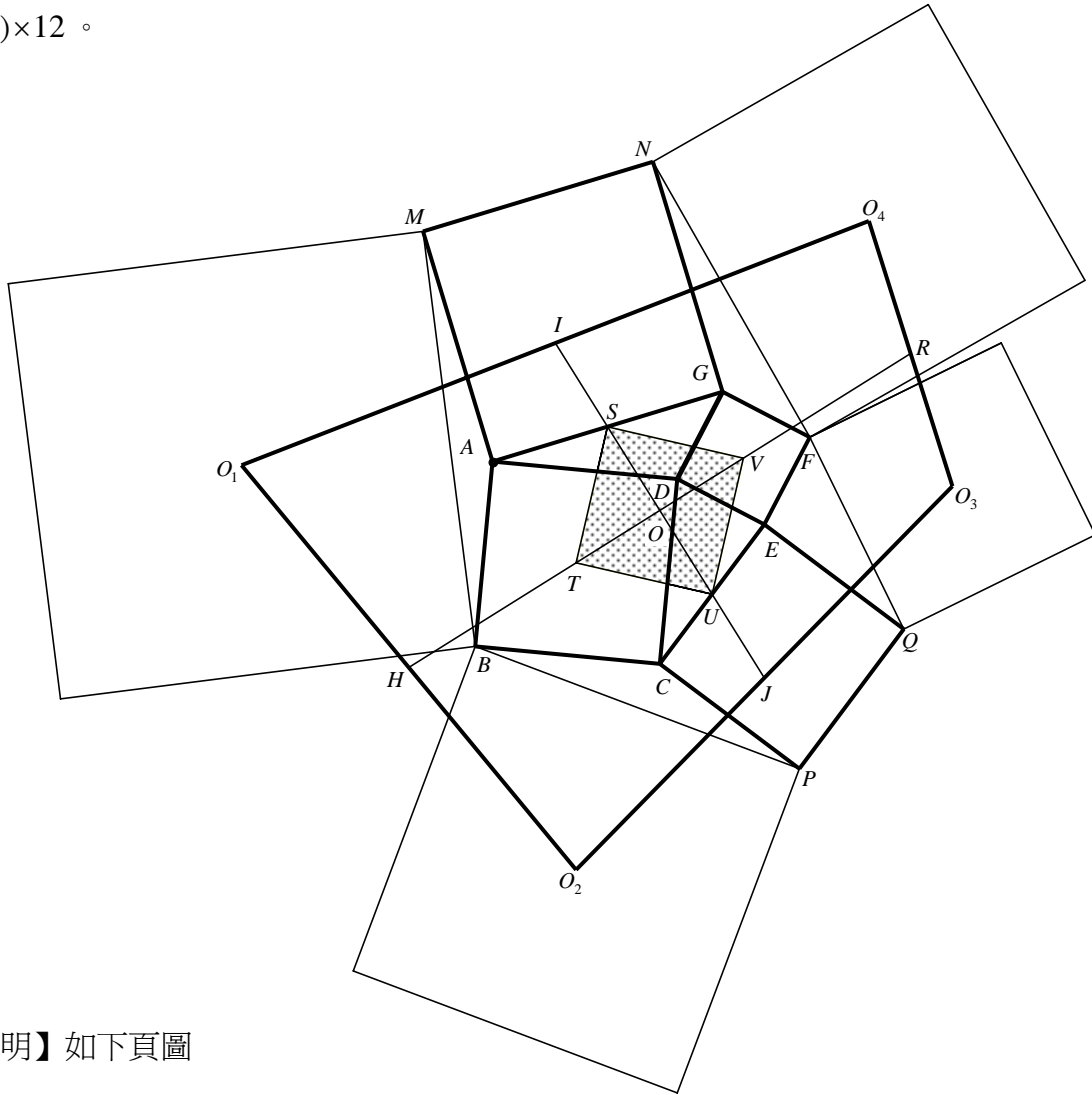
【定理 3】四邊形  $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$  皆為正方形， $T$ 、 $R$ 、 $V$ 、 $H$  分別是每個正方形的中心點， $S$ 、 $U$  分別是  $\overline{AG}$ 、 $\overline{CE}$  的中點；四邊形  $BHIJ$ 、 $BRLK$ 、 $FRWX$ 、 $HFYZ$  皆為正方形， $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$  分別是每個正方形的中心點，試證：四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times 8$ 。



【證明】

- (1) 由引理 6 可知：四邊形  $HBRF$  面積 = 正方形  $STUV$  面積的 4 倍。
- (2) 由引理 5 可知：四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  面積 =  $HBRF$  面積的 2 倍  
 $\therefore$  四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times 8$ 。

【引理 7】如下圖，四邊形  $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$  皆為正方形， $T$ 、 $V$  分別是  $ABCD$  與  $DEFG$  的中心點， $S$ 、 $U$  分別是  $\overline{AG}$ 、 $\overline{CE}$  的中點。若分別以  $\overline{BM}$ 、 $\overline{BP}$ 、 $\overline{FQ}$ 、 $\overline{FN}$  為邊向外作四個正方形， $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$  分別是這四個正方形的中心點，且  $\overline{TV}$  分別交  $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$  於  $H$ 、 $R$ ； $\overline{SU}$  分別交  $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$  於  $I$ 、 $J$ ，試證：(I)  $\overline{HR} = 3\overline{TV}$ ， $\overline{IJ} = 2\overline{SU}$ ， $H$ 、 $R$ 、 $I$ 、 $J$  分別是  $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$  的中點；(II) 四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times 12$ 。



【證明】如下頁圖

(I)

(1) 連  $\overline{VO_1}$ 、 $\overline{VO_2}$ 、 $\overline{TO_3}$ 、 $\overline{TO_4}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{EG}$ ，由定理 1  $\Rightarrow \overline{VA} = \overline{AO_1}$ ， $\overline{VC} = \overline{CO_2}$ ， $\overline{TE} = \overline{EO_3}$ ， $\overline{TG} = \overline{GO_4} \Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{O_1O_2}$ ， $\overline{EG} \parallel \overline{O_3O_4}$ 。  
 $\Rightarrow \overline{VT} = \overline{TH}$ ， $\overline{TV} = \overline{VR} \Rightarrow \overline{HR} = \overline{TH} + \overline{TV} + \overline{VR} = 3\overline{TV}$  又  $\overline{AT} = \overline{TC} \therefore \overline{O_1H} = \overline{HO_2}$   
 同理可證： $\overline{O_3R} = \overline{RO_4}$ 。

(2) 分別取  $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$  的中點  $X$  與  $Y$ ，連  $\overline{AX}$ 、 $\overline{GX}$ 、 $\overline{O_1A}$ 、 $\overline{O_1G}$ 、 $\overline{TO_1}$ 。

(3)  $\because \overline{VA} = \overline{AO_1}$ ， $\overline{VO} = \overline{OT} \therefore \overline{OA} \parallel \overline{O_1T}$ ， $\overline{OA} = \frac{1}{2} \overline{O_1T}$

又  $\overline{O_4G} = \overline{GT}$ ， $\overline{O_4X} = \overline{XO_1} \therefore \overline{GX} \parallel \overline{O_1T}$ ， $\overline{GX} = \frac{1}{2} \overline{O_1T}$

$\Rightarrow \overline{OA} \parallel \overline{GX}$  ,  $\overline{OA} = \overline{GX} \Rightarrow$  四邊形  $GXAO$  為平行四邊形  $\Rightarrow \overline{OX}$  通過  $\overline{AG}$  的中點  $S$   
 又  $\overline{OS}$  交  $\overline{O_1O_4}$  於  $I$   $\therefore$  點  $X$  與  $I$  重合  $\Rightarrow I$  為  $\overline{O_1O_4}$  的中點。

同理可證：點  $Y$  與  $J$  重合  $\Rightarrow J$  為  $\overline{O_2O_3}$  的中點。

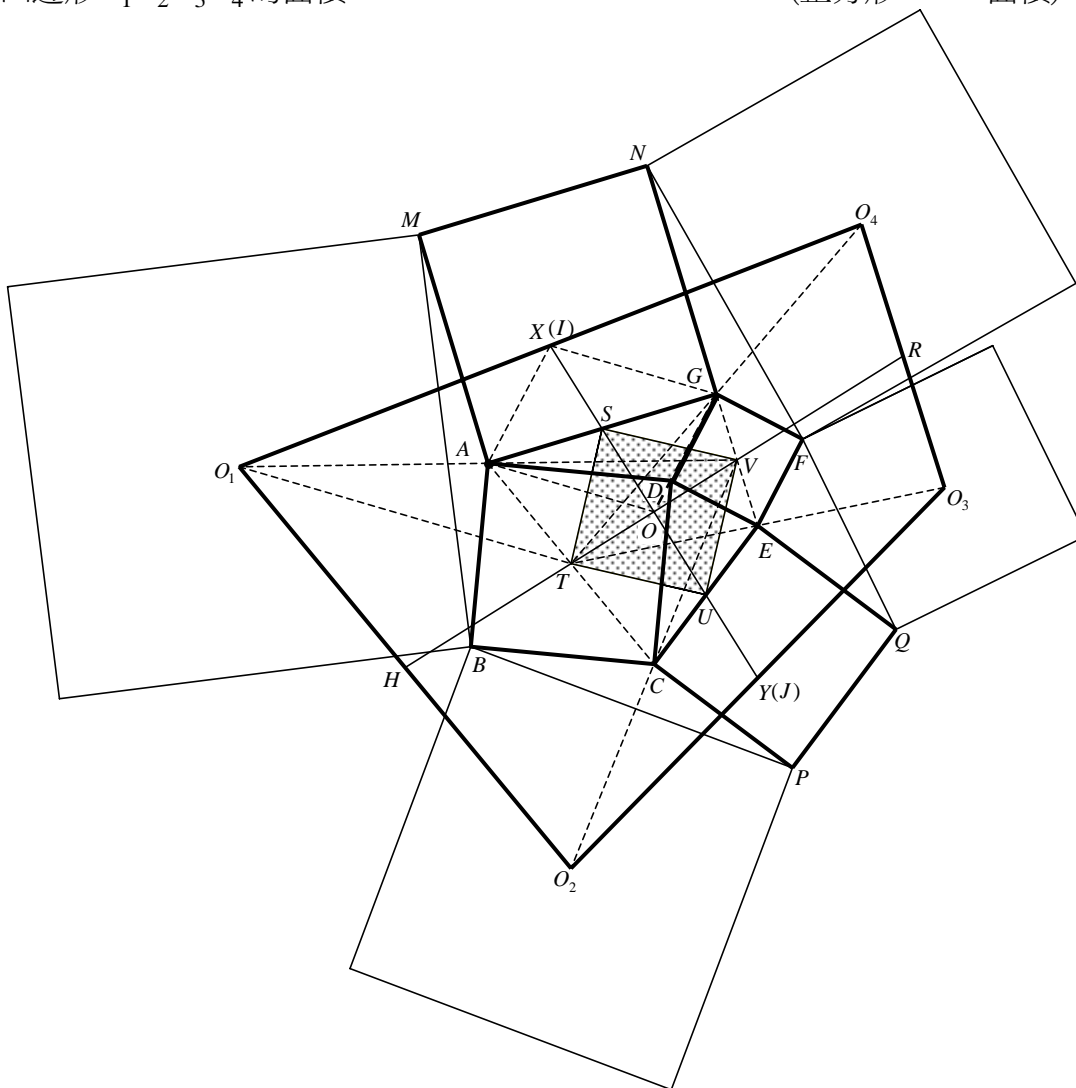
(4)  $\therefore GXAO$  為平行四邊形  $\therefore \overline{IS} = \overline{SO} \Rightarrow \overline{IO} = \overline{SU}$

同理可證： $\overline{JU} = \overline{UO} \Rightarrow \overline{JO} = \overline{SU} \therefore \overline{IJ} = \overline{IO} + \overline{JO} = 2\overline{SU}$

(5) 由以上(1)~(4)得證： $\overline{HR} = 3\overline{TV}$  ,  $\overline{IJ} = 2\overline{SU}$  ,  $H$ 、 $R$ 、 $I$ 、 $J$  分別是  $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$  的中點。

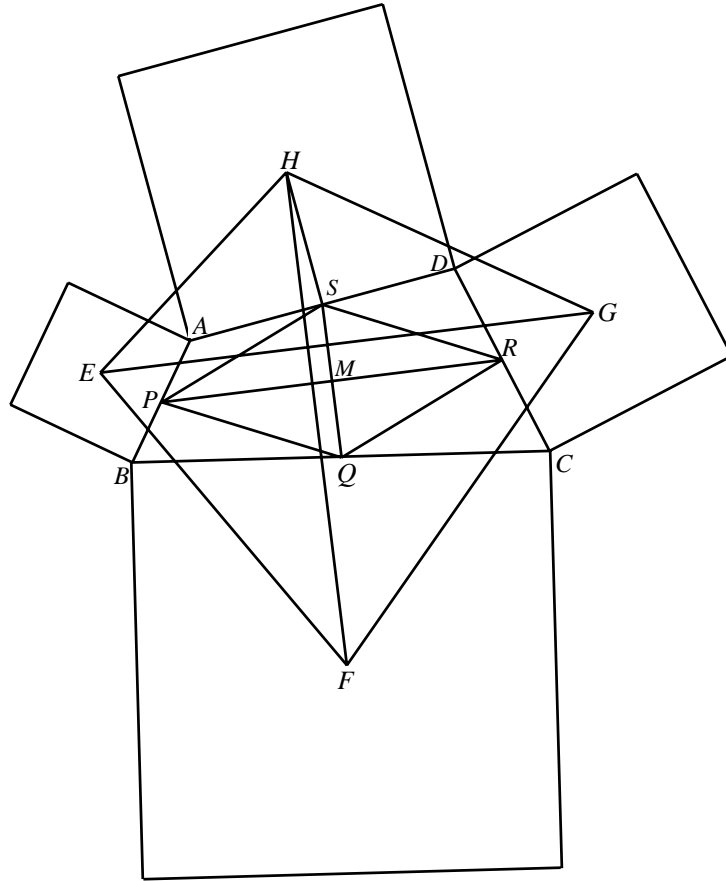
(II)  $\therefore H$ 、 $R$ 、 $I$ 、 $J$  分別是  $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$  的中點， $\overline{IJ} \perp \overline{HR}$

$\therefore$  四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 =  $\overline{IJ} \times \overline{HR} = 2\overline{SU} \times 3\overline{TV} = 6\overline{TV}^2 = (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times 12$ 。



【引理 8】四邊形  $ABCD$  中， $P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  分別是  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$  的中點， $\overline{PR} = a$ ， $\overline{SQ} = b$ ，且  $\overline{PR} \perp \overline{SQ}$ （垂足為  $M$ ）。若分別以  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$  為邊，向外作四個正方形，且  $E$ 、 $F$ 、 $G$ 、 $H$  分別為四個正方形的中心點，試證：(I)  $\overline{EG} = \overline{FH}$ ， $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ；(II)

四邊形  $EFGH$  的面積 = 四邊形  $ABCD$  面積的  $\frac{(a+b)^2}{2ab}$  倍。



【證明】

(1)

(1)分別以  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$  為一條對角線，作正方形  $AEBE'$ 、 $BFCF'$ 、 $CGDG'$ 、 $DHAH'$ 。

(2)連  $\overline{EH'}$ 、 $\overline{HE'}$ 。

(3) $\because P$ 、 $Q$ 、 $R$ 、 $S$  分別是  $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{AD}$  的中點

$$\therefore SPQR \text{ 為平行四邊形 } \Rightarrow \overline{SM} = \overline{MQ}, \overline{PM} = \overline{RM}$$

$$\text{又 } \overline{PR} \perp \overline{SQ} \quad \therefore SPQR \text{ 為菱形 } \Rightarrow \overline{SP} = \overline{SR} = \overline{RQ} = \overline{PQ}。$$

(4) $\because AEBE'$ 、 $AHDH'$  為正方形  $\therefore \triangle AEH' \cong \triangle AE'H \Rightarrow \overline{EH'} = \overline{E'H}$

$$\because \overline{AE} : \overline{AP} = \overline{AH'} : \overline{AS} = \sqrt{2} : 1, \text{ 且}$$

$$\angle EAH' = \angle EAP + \angle PAH' = 45^\circ + \angle PAH' = \angle H'AS + \angle PAH' = \angle PAS$$

$$\Rightarrow \triangle AEH' \sim \triangle APS \Rightarrow \overline{EH'} = \overline{PS} \times \sqrt{2} \quad \therefore \overline{EH'} = \overline{E'H} = \overline{PS} \times \sqrt{2}$$

$$\text{同理可證： } \overline{HG'} = \overline{GH'} = \overline{SR} \times \sqrt{2}, \overline{GF'} = \overline{FG'} = \overline{RQ} \times \sqrt{2}, \overline{FE'} = \overline{EF'} = \overline{PQ} \times \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \overline{EH'} = \overline{E'H} = \overline{HG'} = \overline{GH'} = \overline{GF'} = \overline{FG'} = \overline{FE'} = \overline{EF'}$$

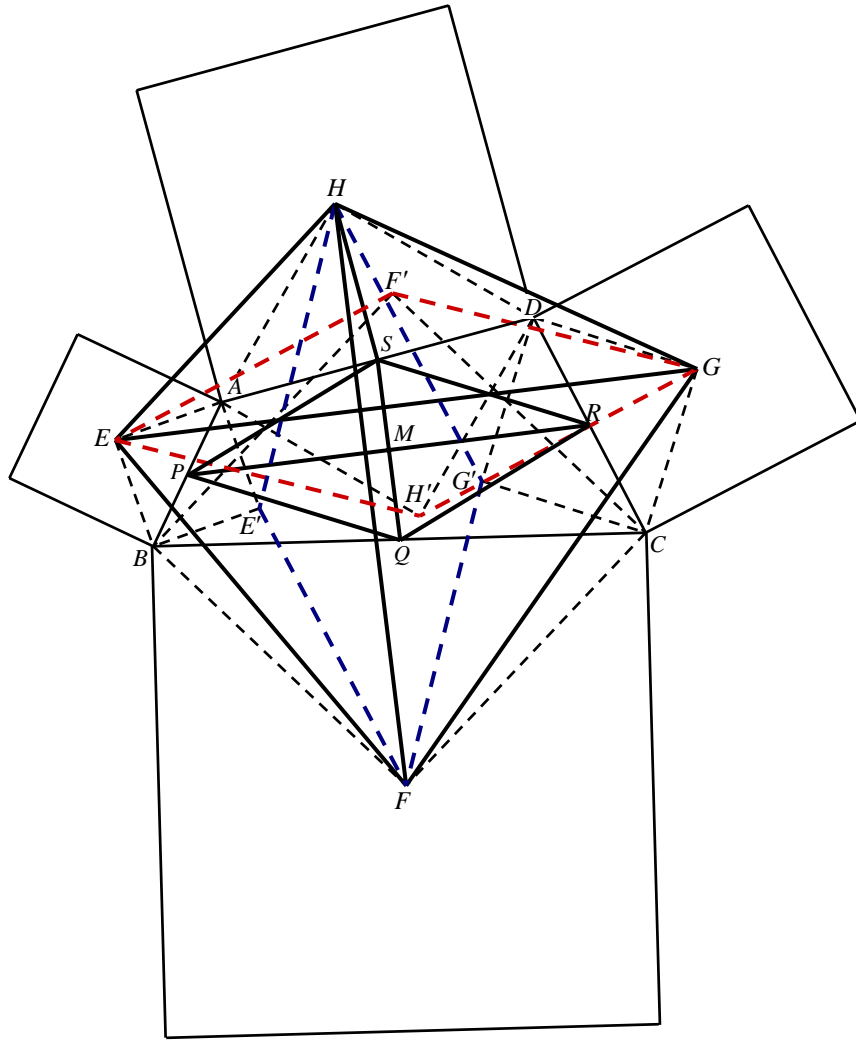
即四邊形  $HE'FG'$  與  $EH'GF'$  皆為菱形。

(5) $\because \overline{EF'} \perp \overline{E'F}$ ， $\overline{E'F} \parallel \overline{HG'}$   $\therefore \overline{EF'} \perp \overline{HG'}$

$$\text{又 } \overline{HE'} \perp \overline{EH'} \Rightarrow \angle F'E'H' = \angle E'HG'$$

$$\Rightarrow HE'FG' \text{ 與 } EH'GF' \text{ 為全等形 } \Rightarrow \overline{EG} = \overline{HF}$$

$$\because \overline{HE'} \perp \overline{EH'} \text{ 又 } \angle GEH' = \angle FHE' \quad \therefore \overline{EG} \perp \overline{FH}$$



(II)

$$(1) \because \triangle AEH' \sim \triangle APS \quad \therefore \angle AH'E = \angle ASP$$

$$\text{又 } \triangle DH'G \sim \triangle DSR \quad \therefore \angle DH'G = \angle DSR$$

$$\Rightarrow \angle EH'G + \angle PSR = (\angle AH'E + \angle AH'D + \angle DH'G) + \angle PSR$$

$$= \angle ASP + 90^\circ + \angle DSR + \angle PSR = 90^\circ + (\angle ASP + \angle DSR + \angle PSR) = 90^\circ + 180^\circ = 270^\circ$$

$$\therefore \angle F'EH' + \angle SPQ = 90^\circ$$

$$(2) \text{ 令 } \angle SPM = \theta, \overline{SP} = c, \text{ 則 } \angle F'EG = \frac{\pi}{4} - \theta, \overline{EF'} = \sqrt{2} \cdot \overline{SP} = \sqrt{2}c$$

$$\Rightarrow \overline{EG} = \overline{EF'} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \cdot 2 = 2\sqrt{2}c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos \theta + \sin \theta) = 2c \left( \frac{a}{2c} + \frac{b}{2c} \right) = a + b$$

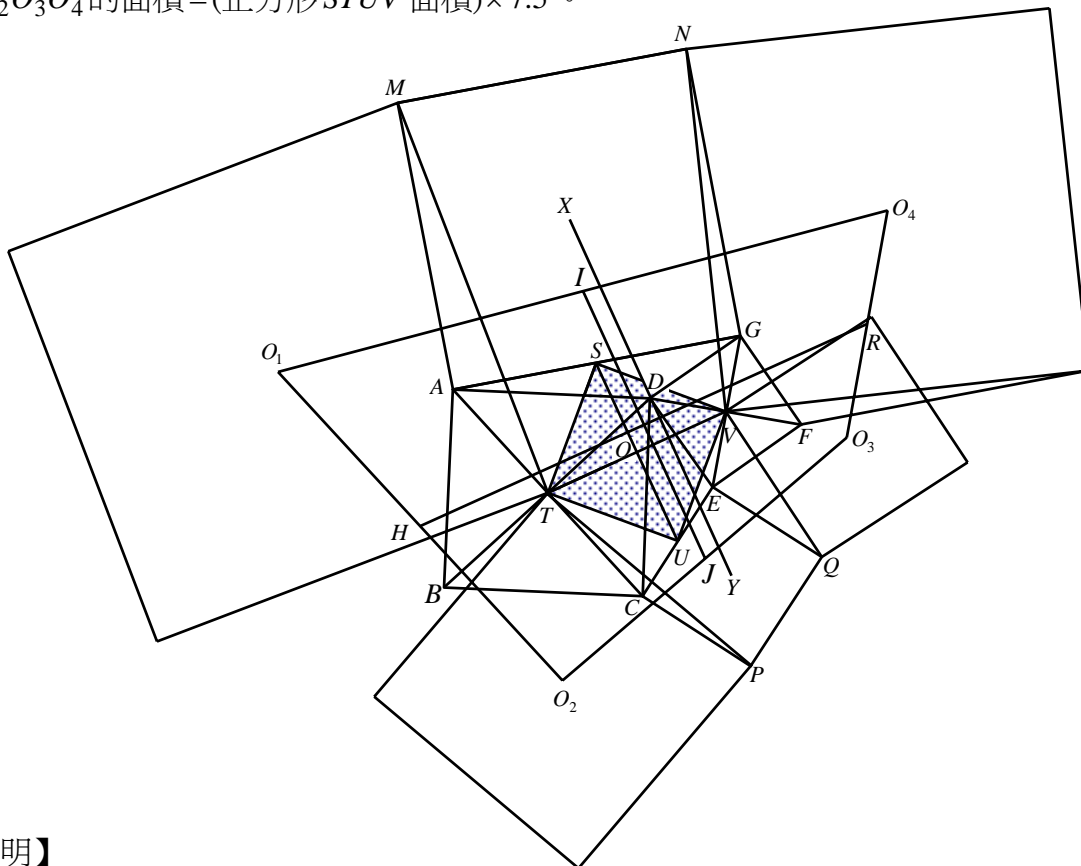
$$(3) \therefore EFGH \text{ 的面積} = \frac{1}{2}(a+b)^2, \quad ABCD \text{ 面積} = ab$$

四邊形  $EFGH$  的面積 = 四邊形  $ABCD$  面積的  $\frac{(a+b)^2}{2ab}$  倍。

【定理 4】四邊形  $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$  皆為正方形， $T$ 、 $V$  分別是  $ABCD$  與  $DEFG$  的中心點， $S$ 、 $U$  分別是  $\overline{AG}$ 、 $\overline{CE}$  的中點。若分別以  $\overline{BM}$ 、 $\overline{BP}$ 、 $\overline{FQ}$ 、 $\overline{FN}$  為邊向外作四個正方形， $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$  分別是這四個正方形的中心點，若分別以  $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_4O_1}$  為邊向外作四個正方形， $O_5$ 、 $O_6$ 、 $O_7$ 、 $O_8$  分別是這些正方形的中心點，而  $H$ 、 $J$ 、



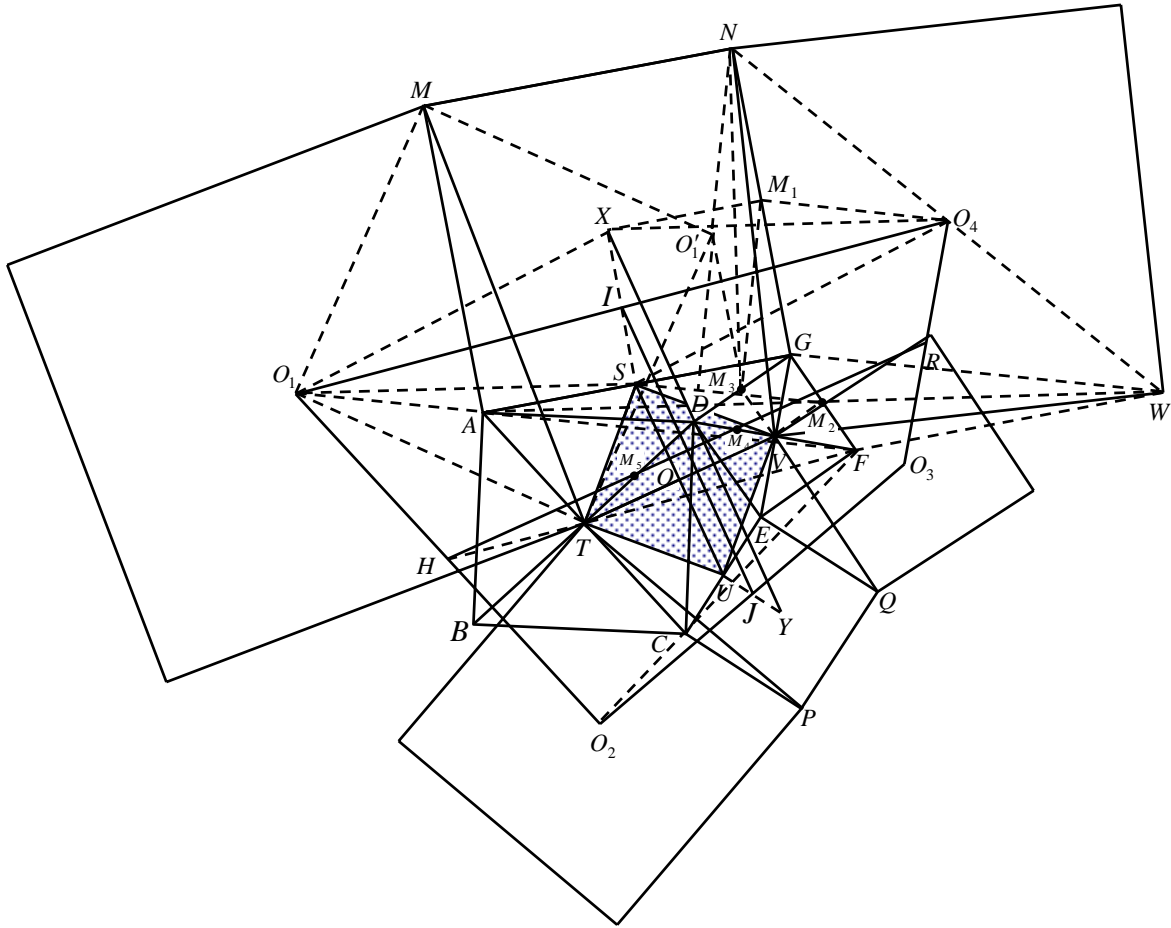
【引理 9】如下圖，四邊形  $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$  皆為正方形， $T$ 、 $V$  分別是  $ABCD$  與  $DEFG$  的中心點， $S$ 、 $U$  分別是  $\overline{AG}$ 、 $\overline{CE}$  的中點。若分別以  $\overline{MT}$ 、 $\overline{TP}$ 、 $\overline{QV}$ 、 $\overline{VN}$  為邊向外作四個正方形， $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$  分別是這四個正方形的中心點， $H$ 、 $R$ 、 $I$ 、 $J$  分別是  $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_1O_4}$ 、 $\overline{O_2O_3}$  的中點，試證：(I)  $\overline{IJ} = 1.5 \times \overline{SU}$ ， $\overline{HR} = 2.5 \times \overline{TV}$ ；(II) 四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times 7.5$ 。



【證明】

- (I)
- (1) 分別取  $\overline{NG}$ 、 $\overline{GF}$ 、 $\overline{DG}$  的中點  $M_1$ 、 $M_2$ 、 $M_3$ ，並連  $\overline{M_1O_4}$ 、 $\overline{NM_3}$ 、 $\overline{AM_2}$ 、 $\overline{M_2W}$ 、 $\overline{XM_1}$ 。
  - (2) 作正方形  $O_1MO_1'T$ ，連  $\overline{NO_1'}$ 、 $\overline{O_1'D}$ 、 $\overline{DT}$ 、 $\overline{SM_2}$ 、 $\overline{VM_2}$ 、 $\overline{VM_3}$ 。
  - (3)  $\because \triangle NGM_3 \cong \triangle AGM_2 \Rightarrow \overline{AM_2} = \overline{NM_3}$ ， $\overline{AM_2} \perp \overline{NM_3}$ ；  
 $\because \triangle NVM_3 \cong \triangle WVM_2 \Rightarrow \overline{M_2W} = \overline{NM_3}$ ， $\overline{M_2W} \perp \overline{NM_3}$   
 $\Rightarrow \overline{AM_2} = \overline{M_2W}$ ，又  $\overline{AS} = \overline{SG}$   $\therefore \overline{SM_2} \parallel \overline{GW}$ ， $\overline{SM_2} = \frac{1}{2} \times \overline{GW}$ 。
  - (4)  $\because \overline{M_1O_4} \parallel \overline{GW}$ ， $\overline{M_1O_4} = \frac{1}{2} \times \overline{GW}$   $\therefore \overline{SM_2} \parallel \overline{M_1O_4}$ ， $\overline{SM_2} = \overline{M_1O_4}$ 。
  - (5)  $\triangle M_1GM_3 \cong \triangle SGM_2 \Rightarrow \overline{M_1M_3} = \overline{SM_2}$ ， $\overline{M_1M_3} \perp \overline{SM_2}$ 。
  - (6) 由(4)與(5)  $\Rightarrow \overline{M_1O_4} = \overline{M_1M_3}$ ， $\overline{M_1O_4} \perp \overline{M_1M_3}$ 。
  - (7)  $\because \triangle MO_1A \cong \triangle MO_1'N \Rightarrow \overline{O_1A} = \overline{O_1'N}$ ， $\overline{O_1A} \perp \overline{O_1'N}$   
 $\because \triangle O_1TA \cong \triangle O_1'TD \Rightarrow \overline{O_1A} = \overline{O_1'D}$ ， $\overline{O_1A} \perp \overline{O_1'D}$   
 $\therefore \overline{NO_1'} = \overline{O_1'D}$ ，且  $N$ 、 $O_1'$ 、 $D$  三點共線。
  - (8) 又  $M_1$ 、 $M_3$  分別為  $\overline{NG}$ 、 $\overline{DG}$  的中點  $\therefore \overline{M_1M_3} \parallel \overline{NO_1'}$ ， $\overline{M_1M_3} = \overline{NO_1'}$ 。

- (9) 由(6)、(7)與(8)  $\Rightarrow \overline{M_1O_4} \perp \overline{NO_1}$  ,  $\overline{M_1O_4} = \overline{NO_1} \Rightarrow \overline{M_1O_4} = \overline{O_1A}$  ,  $\overline{M_1O_4} \parallel \overline{O_1A}$  。
- (10)  $\because \overline{XM_1} = \overline{AS}$  ,  $\overline{XM_1} \parallel \overline{AS}$  ;  $\overline{M_1O_4} = \overline{O_1A}$  ,  $\overline{M_1O_4} \parallel \overline{O_1A}$   
 $\therefore \Delta O_1AS \cong \Delta O_4M_1X \Rightarrow \overline{XO_4} = \overline{O_1S}$  ,  $\overline{XO_4} \parallel \overline{O_1S}$  。
- (11) 連  $\overline{O_1X}$  、  $\overline{O_4S}$   $\therefore XO_1SO_4$  為平行四邊形  $\Rightarrow \overline{XS}$  通過  $I$  點。
- (12) 同理可證得： $\overline{UY}$  通過  $J$  點。
- (13)  $\because \overline{SU} \parallel \overline{XY} \therefore \overline{IJ} = \frac{1}{2}(\overline{SU} + \overline{XY}) = \frac{1}{2}(\overline{SU} + 2\overline{SU}) = 1.5 \times \overline{SU}$  。



- (14)  $\because \overline{GM_2} = \overline{M_2F}$  、  $\overline{AM_2} = \overline{M_2W}$   $\therefore AGWF$  為平行四邊形  $\Rightarrow \overline{GW} = \overline{AF}$  。
- (15)  $\because \overline{GW} = 2\overline{M_1O_4} = 2\overline{O_1A}$  ,  $\overline{GW} \parallel \overline{O_1A}$   $\therefore O_1$  、  $A$  、  $F$  三點共線，且  $\overline{FA} = 2\overline{O_1A}$  。
- (16) 連  $\overline{FC}$  、  $\overline{CO_2}$  ，則同理可證得： $\overline{FC} = 2\overline{CO_2}$  。
- (17) 由(15)與(16)  $\Rightarrow \overline{FA} : \overline{AO_1} = \overline{FC} : \overline{CO_2} = 2 : 1 \Rightarrow \overline{AC} \parallel \overline{O_1O_2}$   
 $\Rightarrow \overline{FT} : \overline{TH} = 2 : 1$  又  $\overline{AT} = \overline{TC}$   $\therefore \overline{FT}$  通過  $\overline{O_1O_2}$  的中點  $H$
- (18) 分別取  $\overline{VD}$  、  $\overline{TD}$  的中點  $M_4$  、  $M_5 \Rightarrow \overline{FV} : \overline{VM_4} = 2 : 1 = \overline{FT} : \overline{TH}$   
 $\therefore \overline{M_4H} = \frac{3}{2} \times \overline{TV}$  ,  $\overline{M_4H} \parallel \overline{TV}$  同理： $\overline{M_5R} = \frac{3}{2} \times \overline{TV}$  ,  $\overline{M_5R} \parallel \overline{TV}$
- (19)  $\because \overline{M_4M_5} = \frac{1}{2} \times \overline{TV}$  ,  $\overline{M_4M_5} \parallel \overline{TV}$

$$\therefore \overline{HR} \parallel \overline{TV}, \text{ 且 } \overline{HR} = \overline{M_4H} + \overline{M_5R} - \overline{M_4M_5} = \frac{3}{2}\overline{TV} + \frac{3}{2}\overline{TV} - \frac{1}{2}\overline{TV} = 2.5 \times \overline{TV}。$$

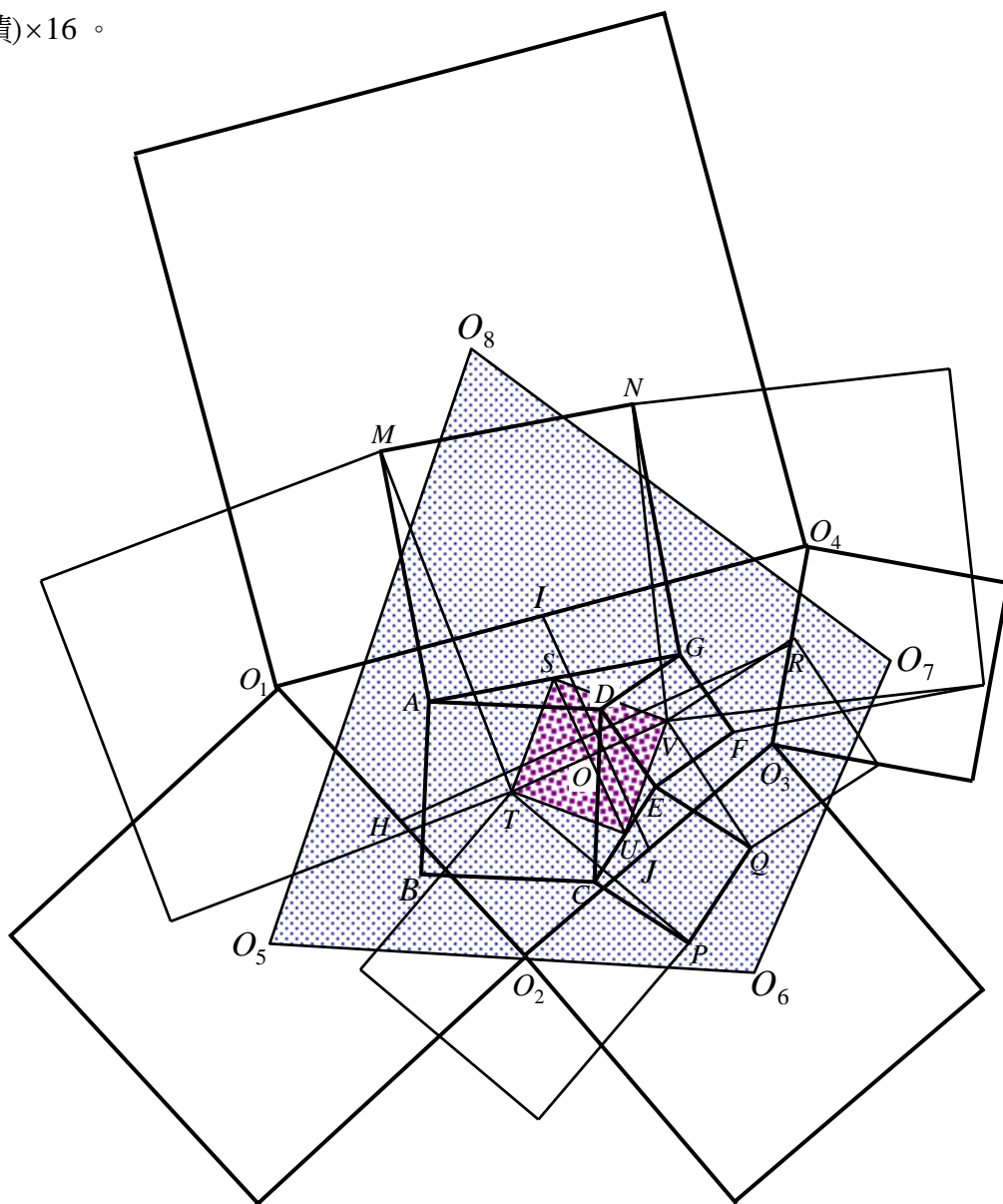
(II)

$$\because \overline{HR} \parallel \overline{TV} \quad \therefore \overline{HR} \perp \overline{IJ}$$

$$\Rightarrow \text{四邊形 } O_1O_2O_3O_4 \text{ 面積} = \overline{HR} \times \overline{IJ} = (2.5 \times \overline{TV}) \times (1.5 \times \overline{SU})$$

$$= \frac{15}{4} \times \overline{TV}^2 = (\text{正方形 } STUV \text{ 面積}) \times 7.5。$$

【定理 5】四邊形  $ABCD$ 、 $CEQP$ 、 $DEFG$ 、 $AGNM$  皆為正方形， $T$ 、 $V$  分別是  $ABCD$  與  $DEFG$  的中心點， $S$ 、 $U$  分別是  $\overline{AG}$ 、 $\overline{CE}$  的中點。若分別以  $\overline{MT}$ 、 $\overline{TP}$ 、 $\overline{QV}$ 、 $\overline{VN}$  為邊向外作四個正方形， $O_1$ 、 $O_2$ 、 $O_3$ 、 $O_4$  分別是這四個正方形的中心點，若分別以  $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_4O_1}$  為邊向外作四個正方形， $O_5$ 、 $O_6$ 、 $O_7$ 、 $O_8$  分別是這些正方形的中心點，而  $H$ 、 $J$ 、 $R$ 、 $I$  分別為  $\overline{O_1O_2}$ 、 $\overline{O_2O_3}$ 、 $\overline{O_3O_4}$ 、 $\overline{O_4O_1}$  的中點，試證：四邊形  $O_5O_6O_7O_8$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times 16$ 。



【證明】

(1)由引理 9 可知：四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  面積 = 正方形  $STUV$  面積的 7.5 倍。

(2)連  $\overline{IJ}$ 、 $\overline{HR}$ ，則  $\overline{HR} = 2.5 \times \overline{TV}$ ， $\overline{IJ} = 1.5 \times \overline{TV}$  (令  $\overline{TV} = r$ ， $\overline{HR} = 3.5r$ ， $\overline{IJ} = 1.5r$ )， $\overline{HR} \perp \overline{IJ}$ 。

(3)由引理 8 知： $O_5O_6O_7O_8$  面積 =  $O_1O_2O_3O_4$  面積的  $\frac{(2.5r + 1.5r)^2}{2 \cdot (2.5r) \cdot (1.5r)}$  倍

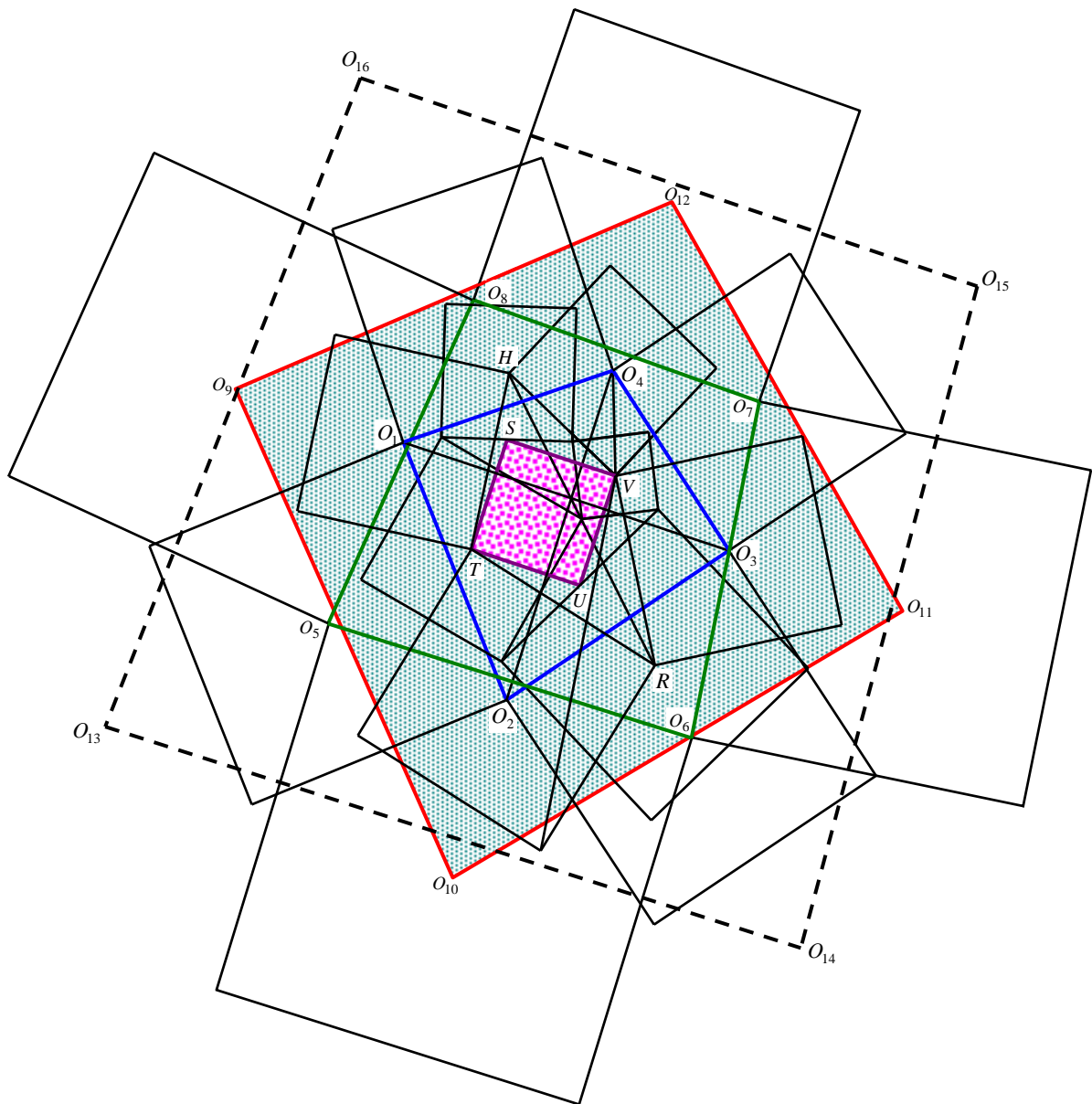
$$\Rightarrow O_5O_6O_7O_8 \text{ 面積} = O_1O_2O_3O_4 \text{ 面積的 } \frac{32}{15} \text{ 倍}$$

$$\therefore \text{四邊形 } O_5O_6O_7O_8 \text{ 面積} = \text{正方形 } STUV \text{ 面積的 } \frac{32}{15} \times \frac{15}{2} \text{ 倍}$$

故得證：四邊形  $O_5O_6O_7O_8$  的面積 = (正方形  $STUV$  面積)  $\times 16$ 。

### 伍、研究結論：

【「以管窺天，以蠡測海」之一】

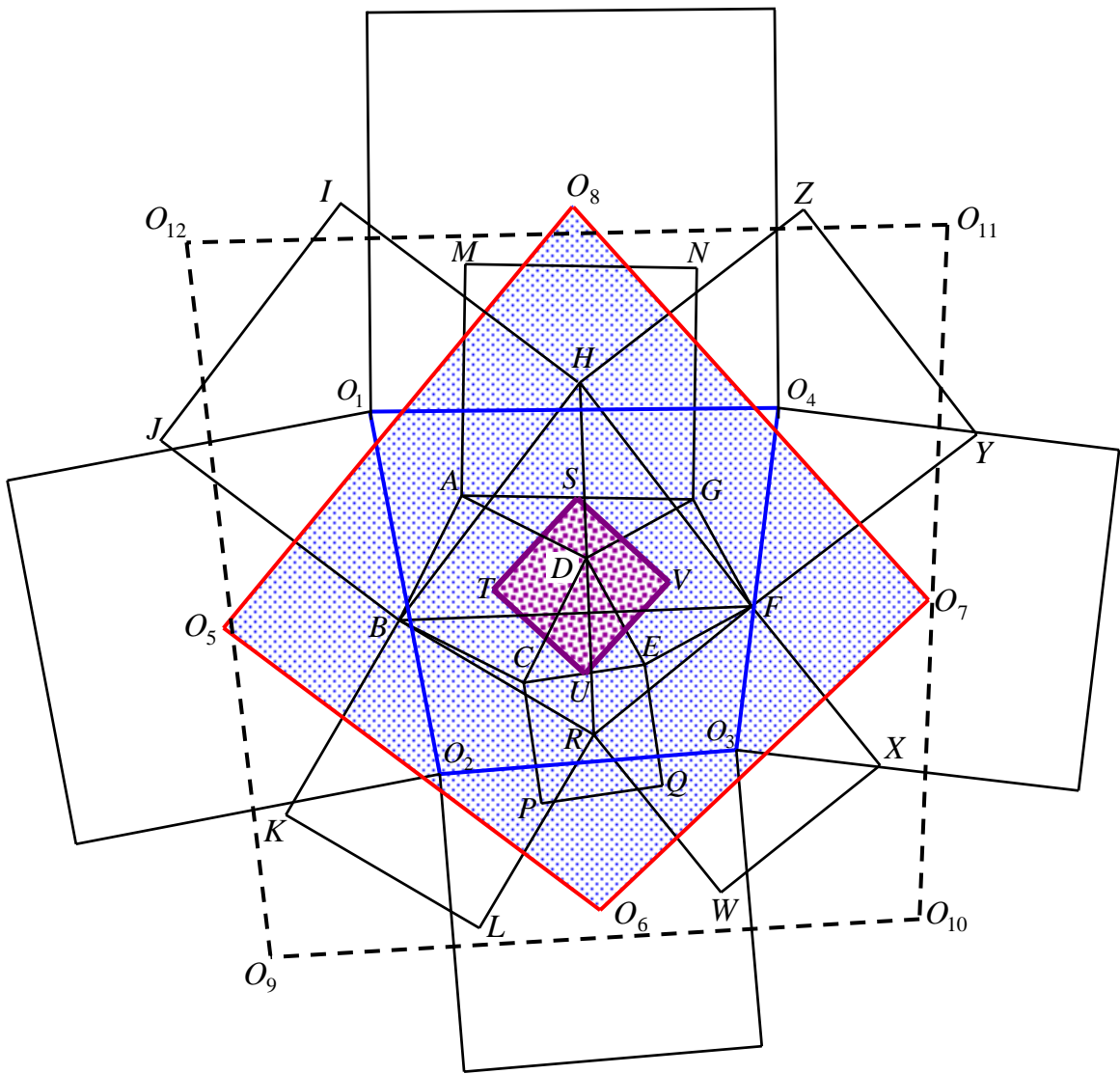


若  $H、T、R、V；O_1、O_2、O_3、O_4；O_5、O_6、O_7、O_8；O_9、O_{10}、O_{11}、O_{12}；\dots\dots；O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}；\dots\dots$  皆各表上圖中正方形的中心點，四邊形  $STUV$  為正方形，且令  $STUV$  的面積為 1，四邊形  $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$  面積 =  $\Gamma_n$ ，則：

- (1)  $\Gamma_1 =$  四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積  $= 1 \times \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$  (第 1 層);
- (2)  $\Gamma_2 =$  四邊形  $O_5O_6O_7O_8$  面積  $= \frac{9}{2} \times 2 = 9$  (第 2 層);
- (3)  $\Gamma_3 =$  四邊形  $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$  面積  $= 9 \times 2 = 18$  (第 3 層);
- .....
- (n)  $\Gamma_n =$  四邊形  $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$  面積  $= 9 \times 2^{n-2}$  (第 n 層);
- .....

【說明】綜合定理 1、引理 5、定理 2，即可證得。

【「以管窺天，以蠡測海」之二】



若  $H、T、R、V；O_1、O_2、O_3、O_4；O_5、O_6、O_7、O_8；\dots；O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}；\dots$  皆各表上圖中正方形的中心點，四邊形  $STUV$  為正方形，且令  $STUV$  的面積為 1，則：

(1)四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 =  $1 \times 4 = 4$  (第 1 層);

(2)四邊形  $O_5O_6O_7O_8$  面積 =  $4 \times 2 = 8$  (第 2 層);

(3)四邊形  $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$  面積 =  $8 \times 2 = 16$  (第 3 層);

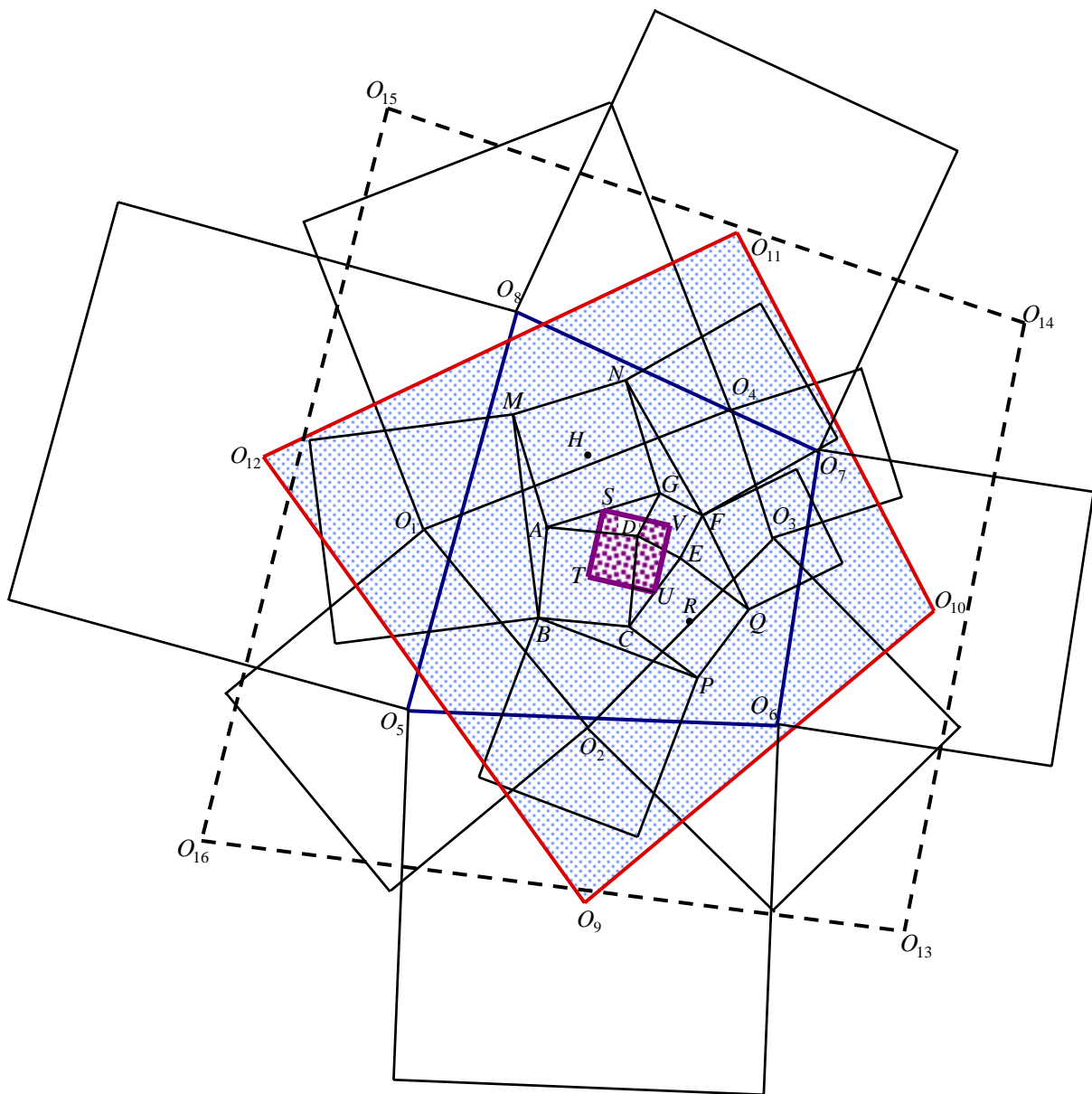
.....

( $n$ )四邊形  $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$  面積 =  $2^{n+1}$  (第  $n$  層);

.....

【說明】綜合引理 6、定理 3 與引理 5，即可證得。

【「以管窺天，以蠡測海」之(三)】



若  $H、T、R、V$  ;  $O_1、O_2、O_3、O_4$  ;  $O_5、O_6、O_7、O_8$  ;  $O_9、O_{10}、O_{11}、O_{12}$  ; ..... ;  $O_{4n-3}、O_{4n-2}、O_{4n-1}、O_{4n}$  ; ..... 皆各表上頁圖中正方形的中心點，四邊形  $STUV$  為正方形，

且令  $STUV$  的面積為 1，四邊形  $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$  面積 =  $\Omega_n$ ，則：

(1)  $\Omega_1$  = 四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 =  $1 \times 12 = 12$  (第 1 層)；

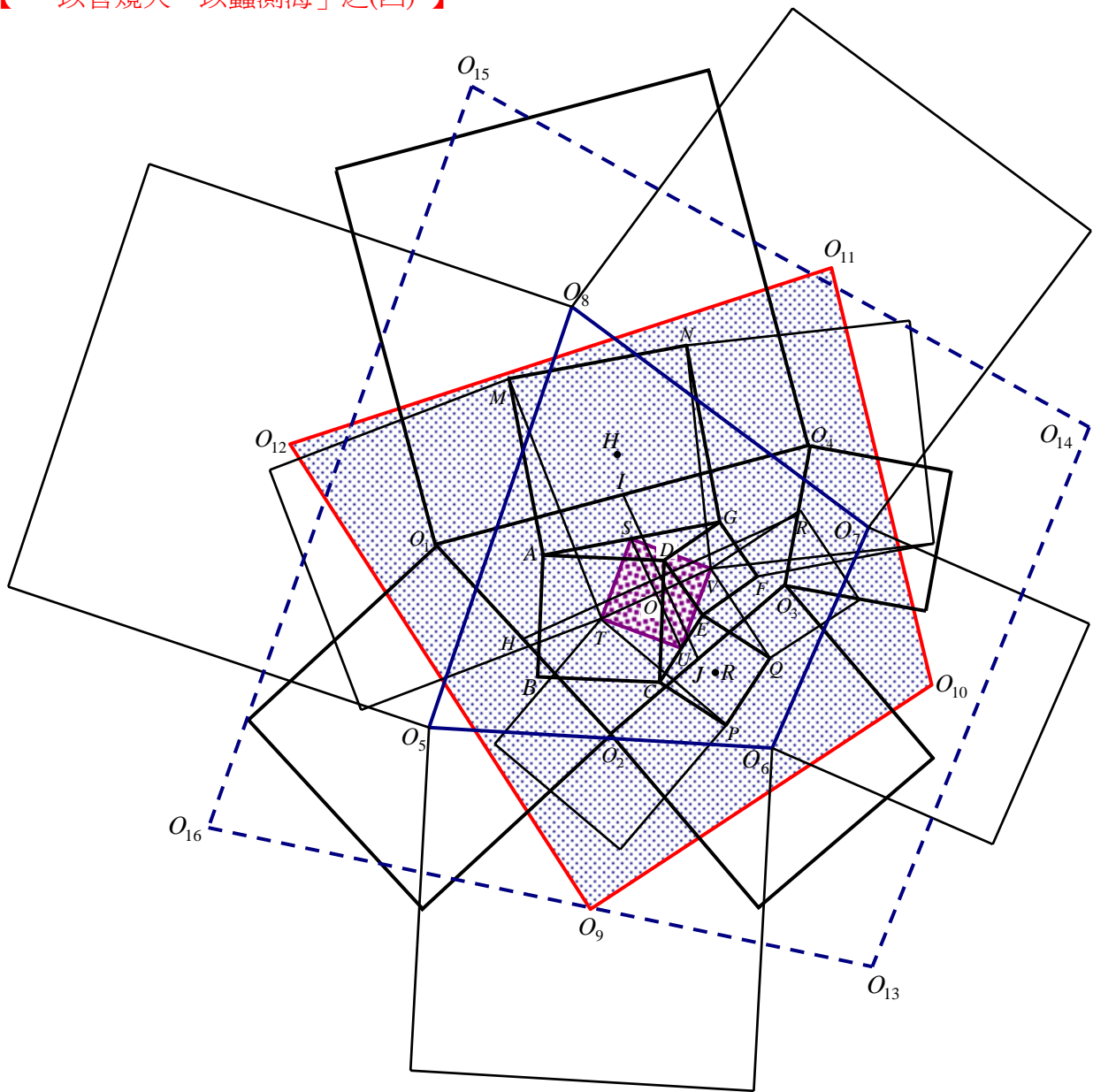
(2)  $\Omega_2$  = 四邊形  $O_5O_6O_7O_8$  面積 =  $12 \times \frac{25}{12} = 25$  (第 2 層)；

(3)  $\Omega_3$  = 四邊形  $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$  面積 =  $25 \times 2 = 50$  (第 3 層)；

.....  
 (n)  $\Omega_n$  = 四邊形  $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$  面積 =  $25 \times 2^{n-2}$  (第  $n$  層,  $n \geq 2$ ) ;  
 .....

【說明】綜合引理 7、引理 8、定理 4 與引理 5，即可證得。

【 「以管窺天，以蠡測海」之(四) 】



若  $H、T、R、V$  ;  $O_1、O_2、O_3、O_4$  ;  $O_5、O_6、O_7、O_8$  ;  $O_9、O_{10}、O_{11}、O_{12}$  ; ..... ;

$O_{4n-3}$ 、 $O_{4n-2}$ 、 $O_{4n-1}$ 、 $O_{4n}$ ；……皆各表上頁圖中正方形的中心點，四邊形  $STUV$  為正方形，且令  $STUV$  的面積為 1，四邊形  $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$  面積 =  $\Psi_n$ ，則：

(1)  $\Psi_1$  = 四邊形  $O_1O_2O_3O_4$  的面積 =  $1 \times 7.5 = 7.5$  (第 1 層)；

(2)  $\Psi_2$  = 四邊形  $O_5O_6O_7O_8$  面積 =  $7.5 \times \frac{32}{15} = 16$  (第 2 層)；

(3)  $\Psi_3$  = 四邊形  $O_9O_{10}O_{11}O_{12}$  面積 =  $16 \times 2 = 32$  (第 3 層)；

.....

( $n$ )  $\Psi_n$  = 四邊形  $O_{4n-3}O_{4n-2}O_{4n-1}O_{4n}$  面積 =  $16 \times 2^{n-2}$  (第  $n$  層， $n \geq 2$ )；

.....

【說明】綜合引理 9、定理 5 與引理 5，即可證得。

### 【「以管窺天，以蠡測海」之(五)】

對於任一個「傑克結構」(Jack Construction)而言，假設其「基準正方形」(Reference Square)的面積為 1，若  $n$ ，且定義  $\Gamma_n$ 、 $\Omega_n$ 、 $\Psi_n$  分別如本段結論之(一)、(三)、(四)，由於  $\Gamma_1 = 4.5$ ， $\Gamma_n = 9 \times 2^{n-2}$  ( $n \in N$ )； $\Psi_1 = 7.5$ ， $\Psi_n = 16 \times 2^{n-2}$  ( $n \geq 2$ )； $\Omega_1 = 12$ ， $\Omega_n = 25 \times 2^{n-2}$  ( $n \geq 2$ )，故  $\Gamma_n$ 、 $\Psi_n$ 、 $\Omega_n$  三者具有以下關係：

$$\underline{\underline{\Gamma_n + \Psi_n = \Omega_n \quad \forall n \in N}}$$

### 陸、心得感想：

無論生活上或學習經驗裡，正方形是很常見的幾何圖形，這次的研究成果，也讓自己更加了解正方形的性質。

研究過程中，我們曾為幾個複雜的幾何圖形，因為理不清證明思緒而感到挫折，但感謝數學老師一再鼓勵、指導，讓我們堅持一定要找出命題的解答才肯罷手。

我們期待討論得出的面積關係能具有實質的參考價值，我們也相信相關主題還有很大的探討空間，也期許將來有機會做進一步研究，以發現更奧妙的正方形世界。

### 柒、參考資料：

- 一、台北市九十一年度資賦優異教育方案數學競賽 – 隊際賽問題第參題。
- 二、嚴鎮軍主編《初中數學競賽教程》；台北市；九章出版社；民 88.11。

## 評語

問題具有視覺直觀性，可惜未能掌握到動態幾何環境，將作圖過程的層次表現清楚。