臺灣二ＯＯ六年國際科學展覽會

科　　　　別：數學科

作 品 名 稱 ：數列生成遞迴

學校／作者 ：臺北市立第一女子高級中學　陳錦儀
臺北市立第一女子高級中學　李容瑄

作者簡介及照片

這張照片由左而右依序爲陳錦儀、李容瑄和王安蘭老師

自介

李容瑄，
平常喜歡聽音樂，偶爾會把算數學當成是一種樂趣
喜歡理科勝過於文科
記憶力不太好，理解力比較好
喜歡對著藍天白雲發呆
喜歡獨自思索萬物的起源
我相信
思考　是人之所以　與眾不同的原因

陳錦儀，
從小對各種事物充滿好奇心，最好的天份是在社會學科上
但不可否認的學數學改變了我的一生，
至少這18年來沒有數學我不會成長
這次有幸能夠完成一件作品，過程中學到很多東西，包括做海報。

中文摘要

數列生成遞迴

這個題目是源自2003年的TRML思考賽的題目，原題目並不難，它只有用到簡單的排列方法，主要是討論a_n、b_n兩種數字的排列，

其中a_n為滿足下列所有條件之N位數A的個數。

I. A中每一個數字爲1或2

II. A中至少有相鄰的兩數字是1

而b_n表示滿足下列所有條件的N位數B的個數

I. B中每一個數字爲0或1

II. B中至少有相鄰的兩數字是1

以及探討a_n、b_n與費氏數列c_n之關係，其中$c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$，$n \ge 3, c_1 = 1, c_2 = 2$。

其中a_n如果改成考慮爲一數列，其值不變；而b_n如果改爲數列，那麼就不需要考慮0不能爲首位數字的情況。如此，讓人聯想到一個用生成函數解的題目「一個N項數列，其中每一項只能是0或1或2，其中0和2永不能相鄰，求這個數列個數的一般式。」，因此，我們嘗試將這個題目改變它的要求繼續做下去，發現其中有某些規則，例如：不只是原來的11相鄰，甚至是排列其它種方式，都可能從其遞迴式看出它排列的意義，甚至這種排列數是可以用遞迴式求出來的。這提供了我們另一種求數字排列的方法，也是我們覺得有趣的地方。

在過程中我們初步得到以下結論：

一、a_n和b_n遞迴關係的比較：

1.比較a_n和b_n中$a_n(11)$ ($b_n(11)$)跟$a_n(111)$ ($b_n(111)$)，發現如果是排列相同元素而增加相鄰位數時，只是將遞迴的項數多增一個位數。

2.比較$a_n(112)$和 $a_n(1122)$ <只有固定順序的一種排列>，發現差異是在扣去的位數。因為 1122 比 112 條件嚴苛了一位。

3.比較固定 121 或 212 跟固定 12 或 21 中間的項係數都是(S-1)，可以推測出如果要求的是(12121)或(21212)結果會是

$$2*S^{n-5} + (S-1)a_{n-1} + (S-1)a_{n-2} + (S-1)a_{n-3} + (S-1)a_{n-4} + (S-2)a_{n-5}$$

二、a_n、b_n除了起始位數不一樣以外，它們的遞迴關係式通常只要代換掉次方項就可以了。

三、$a_n^S(11) = -F_{n+2} + S^n$；$b_n^S(11) = -F_n + S^{n-1}$；$c_n = F_{n+1}$；

$$a_n^S(11) = (S-1)\{S^n - \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}]\}$$

$$b_n^S(11) = (S-1)\{S^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}]\}$$

此為當固定至少一組 11 相鄰出現時三者跟費氏數列的關係，可以知道當 S=2 時，有等式$a_n - b_n + c_n = 2^{n-1}$

英文摘要

This solution is according to power contest of 2003 TRML. It is composed of two number arrangements, a_n , b_n .

First, suppose a_n is the total number conforming to the following rules.

I. Each number is 1 or 2 in A.

II. There is a couple of (11) in A at least.

Then, suppose b_n is the total number conforming to the following conditions.

I. Each number is 0 or 1 in B.

II. There is a couple of (11) in B at least.

Furthermore , we give the thought to the relation among a_n ， b_n ，and c_n (Fibonacci Sequence).

By the way, if a_n is changed to a sequence, and the result is the same. But if b_n is to arrange number, we have to give thought to the fact that the first number can't be zero. If it is a sequence, we don't have to consider it.

The problem belongs to combinatorics. After we do this problem, we find not only original question but also other permutation can be understood by its formula. The problem provides us with other means to solve permutation and combination question.

Then, we get the conclusion as follows：

a. We compare the $a_n(11)$ ($b_n(11)$)and $a_n(111)$ ($b_n(111)$). If we arrange the same element and add the consecutive place value, we only have to add a recursive term.

b. We compare the $a_n(112)$ and $a_n(1122)$ which there are only the fixed forms. We find that the difference in those formulas is because $a_n(1122)$ has one more place values than $a_n(112)$.

c. Comparing the $a_n(121\cup 212)$'s and $a_n(12\cup 21)$'s recursive terms, we find the recursive term' s coefficient are all (S-1) ；therefore ，we can suppose the formula of the $a_n(12121\cup 21212)$ as follows：

$$2*S^{n-5}+(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}+(S-1)a_{n-4}+(S-2)a_{n-5}$$

d. a_n is different from b_n in the first place value. We only have to rewrite their quadratic terms.

e. $a_n^S(11)=-F_{n+2}+S^n$ ； $b_n^S(11)=-F_n+S^{n-1}$ ； $c_n=F_{n+1}$ ；

$$a_n^S(11)=(S-1)\{S^n-\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}]\}$$

$$b_n^S(11)=(S-1)\{S^{n-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}]\}$$

There is the relation among $a_n(11)$, $b_n(11)$ ，and c_n

After that，we get the equality， $a_n-b_n+c_n=2^{n-1}$ ，when S=2.

壹、前言:

一、研究動機：

這個題目是源自2003年的TRML思考賽的題目，原題目並不難，它只有用到簡單的排列方法，主要由 a_n 、 b_n 二種數字排列，

其中 a_n ， b_n 分別爲滿足下列所有條件之N位數A，B的個數。	
A中每一個數字爲1或2	B中每一個數字爲0或1
A中至少有相鄰的兩數字是1	B中至少有相鄰的兩數字是1

另外還考慮 a_n 、 b_n 與費氏數列 c_n 的關係。

其中 a_n 改爲數列其值不變，而 b_n 如果是排數列，就不需考慮0不能爲首位數字的情況，這讓人聯想到一個用生成函數解的題目，就是在一個N項數列，其中每一項只能是0或1或2，其中0和2永不能相鄰，求這個數列個數的一般式。這基本上是屬於組合與離散數學的領域，但是這個題目可以改變它的要求。或許可發現其中有某些規則，這就是我們覺得有趣的地方。

二、研究目的：

將原有的題目推廣，高中生傾向用排列組合解它，可是當排列數字有0的時候還要扣掉首位不爲0的情況，因此這裡提供另一種方式解題，並且在嘗試擴展的過程中，找出規律。

貳、研究方法或過程：

一、實驗器材：

1. Maple V
2. Dev C++(用電腦運算求解用)

二、研究過程或方法：

1.流程簡介:

首先是 a_n 這個數,我們先將原題目做個題解,也就是可排列元素 1~9 的數字中至少有一組(11)相鄰出現，接著我們限制固定形式是(12),發現它的排列數跟(11)的情況不同。注意我們第二個求的(12)並沒有直接讓 1 跟 2 至少一組相鄰出現,而是我們規定這相鄰的一組必須讓 1 在 2 的前面,如果要讓 1 跟 2 至少一組相鄰出現,那它相鄰的情況就會有(12)跟(21)。

第三個求的是固定至少(111)一組相鄰出現→求固定(112)的情況→固定(1122),在這裡我們回過來求讓 1 跟 2 固定一組相鄰出現，因爲固定(12)跟(21)的狀況是一樣的,可是在求讓 1 跟 2 至少一組相鄰出現時卻不是直接把(12)狀況乘以 2，表示中間有重複的情況，這裏引用排容原理討論其中的差數關係,如果再把位數增加的話,重複數就會增加,我們必須一直減去它中間的交集。

$$※\ n(12\cup 21)=n(12)+n(21)-n(12\cap 21)$$

接著求固定有一組(221)或(112)→固定(121)→固定(211)→固定(121)或(212)→固定需有一組 11 和 22 相鄰【也就是(1122)或(2211)】。在此先看這些情況的遞迴式展示，再走下去遞迴項會越來越多。

b_n 這個數差在它可以排列 0 這個數字，原先題目推廣是可排列元素 0~9 求至

少有一組(11)相鄰的情況，固定至少一組相鄰的情況從(11)→(12)→(01)→(10)[其中注意(01)跟(10)的情況有不同的地方]→(111)→(1122)→(1122)或(2211)→(0011)→(1100)，把各 b_n 求出來看是否有規律在，接著我們再做固定至少有一組 1 跟 2 相鄰，重複排列(121)跟(212)...，看看跟有一組 0 跟 1 相鄰,各個遞迴關係式之間的關係有什麼不同。

然後 b_n 這個數一樣先在這部分寫到至少有一組 11 跟 22 相鄰，大部分它的遞迴關係跟求 a_n 是一樣的，常常只是因為首位不能排 0,而把排列總數改掉。最後，部份的遞迴關係式項係數是一樣的,可以引進 c_n 費氏數列表示關係式並寫出一般解。

三、a_n 的研究：

為了方便辨別，我們用將數字的相關條件用下列符號表示:

$$a_N^S(\boxed{\text{XX}})$$

(XX)部分代表的是某種固定的排列方式，如果要固定至少一組 11 相鄰，就會是：$a_n(11)$。往後在遞迴式為了式子的簡潔有些會略去不寫，但在同一式中 a_n 都是一樣的，其中 S 代表的是可排列元素數。

1.固定至少有一組 11 相鄰，可排列元素 1~9：

從原題開始：a_n 中的每個數字只能是 1 或 2，且至少有一對 11

可排列如下：

$a_1^2(11)=0$	
$a_2^2(11)=1$	**(11)**
$a_3^2(11)=3$	**(111)、(112)、(211)**
$a_4^2(11)=8$	**(1111)、(1112)、(1121)、(1122)、(1211)、(2111)、(2112)、(2211)**

將以上結果大致分類一下：

1.當前 2 位數是 11 時，後 n-2 位可以任意排列，因此有 2^{n-2} 種方法

2.當前 2 位數為 12 時，只有一種排列如（1，2，a_{n-2}）因此即為 a_{n-2}

3.當前 1 位數為 2 時，有 3 種排列剛好是（1，2，a_{n-1}）為 a_{n-1}

因此 a_n 可表示為 $a_n^2(11)=a_{n-1}+a_{n-2}+2^{n-2}$

繼續看排數字 1~3 的情況：

$a_1^3(11)=0$	
$a_2^3(11)=1$	**(11)**
$a_3^3(11)=5$	**(111)、(112)、(113)、 (211) 、(311)**
$a_4^3(11)=21$	**(1111)、(1112)、(1113)、(1121)、(1122)、(1123)、(1131)、(1132)、(1133)、(1211)、(1311)、(2111)、(2112)、(2113)、(2211)、(2311)、**

	(3111)、(3112)、(3113)、(3211)、(3311)

一樣將其分類：

1.前兩位 11 的的話後（n-2）位可以任排，其中元素增加到 3 個，所以是3^{n-2}種

2.前面數字為 1X 的：因為需扣掉 11 所以是(3-1)*a_{n-2}

3.前面數字是 2 或 3 排列情況為（2 或 3，a_{n-1}）因此有(3-1)*a_{n-1}種

列出： $a_n^3(11)=2a_{n-1}+2a_{n-2}+3^{n-2}$

現在比較兩個遞迴式

$a_n^2(11)=a_{n-1}+a_{n-2}+2^{n-2}$

$a_n^3(11)=2a_{n-1}+2a_{n-2}+3^{n-2}$

相比較的結果發現似乎跟可排列的數字個數有關係，可再改寫為：

$a_n^2(11)=(2-1)a_{n-1}+(2-1)a_{n-2}+2^{n-2}$

$a_n^3(11)=(3-1)a_{n-1}+(3-1)a_{n-2}+3^{n-2}$

顯然 2 和 3 指的是元素個數，這裡我們使用 MapleV 列出算式及求部分解，推出遞迴式為(S 為元素個數)

$a_n^S(11)=(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+S^{n-2}$

現在用下文使用的結尾數字退位法驗證，不算 0 為元素的話，可排列 1~9，9 個元素，看有 9 個的排列情況是否符合推想的遞迴式：(詳細方法見下文)

$a_n^9(11)=(9-1)a_{n-1}+(9-1)a_{n-2}+9^{n-2}$

$X_n \to$N 位數中含(11)
$Y_n \to$N 位數中不含(11)，結尾是 1
$Z_n \to$N 位數中不含(11)，結尾是 2~9
$X_n+Y_n+Z_n=9^n$

關係式：

$X_{n+1}=9X_n+Y_n$

$Y_{n+1}=Z_n$

$Z_{n+1}=8Y_n+8Z_n$

有恆等式$X_n+Y_n+Z_n=9^n$，解之得$9^{n-2}+8X_{n-1}+8X_{n-2}=X_n^9(11)=a_n^9(11)$

因此我們驗證這個遞迴式是正確的。

2.可排列元素 1~9，a_n 中至少有一組(12)：

我們在排列元素時一向都把可排列元素數大過固定相鄰的組內含的元素數，當這兩者相等時，我們分類結尾數字會少一個分類項。

使用的方法：我們將結尾數字進行分類，每一項退一位，且每種分類方法都不重複。這是本來用到b_n 時才用的方式，但是推廣之後都會用這個方法解遞迴式。

注意其中X_n就是我們原來題目要求的a_n。

先求$a_n^2(12)$：

$X_n \to$N 位數中含(12)	$X_{n+1}=2X_n+Y_n$
$Y_n \to$N 位數中不含(12)，結尾是 1	$Y_{n+1}=Y_n+Z_n$
$Z_n \to$N 位數中不含(12)，結尾是 2	$Z_{n+1}=Z_n$

它們之間的關係式有：

$X_{n+1}=2X_n+Y_n$(原X_n結尾可任意接 1 或 2，原Y_n加一位 2 成X_n)

$Y_{n+1}=Y_n+Z_n$(原Y_n結尾加一位 1 仍是Y_n ，原Z_n加一位 1 成Y_n)

$Z_{n+1}=Z_n$(原Z_n加一位 2 仍爲Z_n)

且有恒等式$X_n+Y_n+Z_n=2^n$ ，解出遞迴式爲$2^{n-2}+2X_{n-1}-X_{n-2}=X_n^2(12)$

※ 解遞迴式的過程：

一般而言我們要求X_n都會把恆等式其他項代換成跟X_n的關係，所以：

$X_{n+1}-2X_n=Y_n \Rightarrow X_{n+2}-2X_{n+1}=Y_{n+1}=Y_n+Z_n$

$Y_{n+1}+X_n=Z_n+Y_n+X_n$

將以上代入恆等式$X_n+Y_n+Z_n=2^n$並將位數移位使最大位數爲 n 即可。

以同樣的方法求$a_n^3(12)$的情況：

X_n→N 位數中含(12)
Y_n→N 位數中不含(12)，結尾是 1
Z_n→N 位數中不含(12)，結尾是 2 或 3

關係式：

$X_{n+1}=3X_n+Y_n$(原X_n結尾可任意接 1 或 2 或 3，原Y_n加一位 2 成X_n)

$Y_{n+1}=Z_n+Y_n$ (原Y_n加一位 1 結尾 11，原Z_n加一位 1 成Y_n)

$Z_{n+1}=2Z_n+Y_n$ (原Z_n加一位 2 或 3， Y_n則可加一位 3)

有恆等式$X_n+Y_n+Z_n=3^n$ ，解之得$3^{n-2}+3X_{n-1}-X_{n-2}=X_n^3(12)$

將兩個遞迴式互相比較，不難發現係數的不同是跟排列的數字數有關

$2^{n-2}+2a_{n-1}-a_{n-2}=a_n^2(12)$

$3^{n-2}+3a_{n-1}-a_{n-2}=a_n^3(12)$

推得$a_n^S(12)$(令可排列元素數爲 S) $S^{n-2}+Sa_{n-1}-a_{n-2}=a_n^S(12)$

進行遞迴式$a_n^S(12)$與 S 關係的驗證

S 代 9 得$9^{n-2}+9a_{n-1}-a_{n-2}=a_n^9(12)$

X_n→N 位數中含(12)
Y_n→N 位數中不含(12)，結尾是 1
Z_n→N 位數中不含(12)，結尾是 2~9

關係式：

$X_{n+1}=9X_n+Y_n$(原X_n結尾可任意接 1~9，原Y_n加一位 2 成X_n)

$Y_{n+1}=Z_n+Y_n$ (原Y_n加一位 1 結尾 11，原Z_n加一位 1 成Y_n)

$Z_{n+1}=8Z_n+7Y_n$ (原Z_n加一位 2~9， Y_n則可加一位 3~9)

有恆等式$X_n+Y_n+Z_n=9^n$ ，解之得$9^{n-2}+9X_{n-1}-X_{n-2}=X_n^9(12)$

顯然，減掉的X_{n-2}項是表示重複的排列數。而排列(12)至少一組的遞迴式

$S^{n-2}+Sa_{n-1}-a_{n-2}=a_n^S(12)$與 S 的關係是正確的

3.固定至少有一組(111)，求$a_n^S(111)$：

求$a_n^2(111)$：

$X_n \to$ N 位數中含(111)
$Y_n \to$ N 位數中不含(111)，結尾是 11
$Z_n \to$ N 位數中不含(111)，結尾是 1，但非 11
$W_n \to$ N 位數中不含(111)，結尾是 2

關係式：

$X_{n+1}=2X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n$ ； $W_{n+1}=Z_n+W_n+Y_n$

且有恒等式$X_n+Y_n+Z_n+W_n=2^n$ ，解之得$2^{n-3}+X_{n-1}+X_{n-2}+X_{n-3}=X_n^2(111)$

求$a_n^3(111)$：

$X_n \to$ N 位數中含(111)
$Y_n \to$ N 位數中不含(111)，結尾是 11
$Z_n \to$ N 位數中不含(111)，結尾是 1，但非 11
$W_n \to$ N 位數中不含(111)，結尾是 2 或 3

關係式：

$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n$ ； $W_{n+1}=2Z_n+2W_n+2Y_n$ 且有恒等式

$X_n+Y_n+Z_n+W_n=3^n$ ，解之得$3^{n-3}+2X_{n-1}+2X_{n-2}+2X_{n-3}=X_n^3(111)$

比較兩個遞迴式改寫爲$S^{n-3}+(S-1)(a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3})=a_n^S(111)$

進行遞迴式$a_n^S(111)$與 S 關係的驗證

S 代 9 得$9^{n-3}+8(a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3})=a_n^9(111)$

$X_n \to$ N 位數中含(111)
$Y_n \to$ N 位數中不含(111)，結尾是 11
$Z_n \to$ N 位數中不含(111)，結尾是 1，但非 11
$W_n \to$ N 位數中不含(111)，結尾是 2~9

關係式：

$X_{n+1}=9X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n$ ； $W_{n+1}=8Z_n+8W_n+8Y_n$ 且有恒等式

$X_n+Y_n+Z_n+W_n=9^n$ ，解之得$9^{n-3}+8X_{n-1}+8X_{n-2}+8X_{n-3}=X_n^9(111)$

可以知道這個遞迴式與 S 的關係是對的。

4.固定至少有一組(112)，求$a_n^S(112)$：

先求$a_n^3(112)$：

$X_n \to$ N 位數中含(112)
$Y_n \to$ N 位數中不含(112)，結尾是 11
$Z_n \to$ N 位數中不含(112)，結尾是 1，但非 11
$W_n \to$ N 位數中不含(112)，結尾是 2 或 3

關係式：

$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Y_n+Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n$ ； $W_{n+1}=Y_n+2Z_n+2W_n$ 且有恒等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=3^n$ ，解之得 $X_n^3(112)=3^{n-3}+3X_{n-1}-X_{n-3}$ 。

※ 要初步判斷這些關係式對不對可以看它係數加起來是不是元素 S 的個數。例如在此例中 $X_{n+1}+Y_{n+1}+Z_{n+1}+W_{n+1}=3(X_n+Y_n+Z_n+W_n)$

再來求 $a_n^4(112)$ ：

X_n →N 位數中含(112)
Y_n →N 位數中不含(112)，結尾是 11
Z_n →N 位數中不含(112)，結尾是 1，但非 11
W_n →N 位數中不含(112)，結尾是 2 或 3 或 4

關係式：

$X_{n+1}=4X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Y_n+Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n$ ； $W_{n+1}=3W_n+3Z_n+2Y_n$ 有恆等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=4^n$ ，解之得 $X_n^4(112)=4^{n-3}+4X_{n-1}-X_{n-3}$ 。

相較 $a_n^4(112)$ 與 $a_n^3(112)$ 推遞迴式與 S 的關係是 $S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-3}=a_n^S(112)$ 。

進行遞迴式 $a_n^S(112)$ 與 S 關係的驗證

S 代 9 得 $9^{n-3}+9a_{n-1}-a_{n-3}=a_n^9(112)$

X_n →N 位數中含(112)
Y_n →N 位數中不含(112)，結尾是 11
Z_n →N 位數中不含(112)，結尾是 1，但非 11
W_n →N 位數中不含(112)，結尾是 2~9

關係式：

$X_{n+1}=9X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Y_n+Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n$ ； $W_{n+1}=8W_n+8Z_n+7Y_n$ 具有恆等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=9^n$ ，解之得 $X_n^9(112)=9^{n-3}+9X_{n-1}-X_{n-3}$ 。

顯然這個遞迴式與 S 的關係是正確的，而且它的 a_{n-3} 表示其重複的排列項。

5.固定至少一組(1122)，求 $a_n^S(1122)$ ：

先求 $a_n^3(1122)$ ：

X_n →N 位數中含(1122)
Y_n →N 位數中不含(1122)，結尾是 112
Z_n →N 位數中不含(1122)，結尾是 11
W_n →N 位數中不含(1122)，結尾是 1，但非 11
T_n →N 位數中不含(1122)，結尾是 2 或 3

關係式:

$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ；

$Z_{n+1}=Z_n+W_n$ ； $W_{n+1}=T_n+Y_n$ ；

$T_{n+1}=2W_n+2T_n+Y_n+Z_n$ 且有恒等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n+T_n=3^n$ ，解之得 $X_n^3(1122)=3^{n-4}+3X_{n-1}-X_{n-4}$ 。

再求$a_n^4(1122)$：

X_n→N 位數中含(1122)
Y_n→N 位數中不含(1122)，結尾是 112
Z_n→N 位數中不含(1122)，結尾是 11
W_n→N 位數中不含(1122)，結尾是 1，但非 11
T_n→N 位數中不含(1122)，結尾是 2 或 3 或 4

關係式:

$X_{n+1}=4X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=Z_n+W_n$ ； $W_{n+1}=T_n+Y_n$ ；

$T_{n+1}=3W_n+3T_n+2Y_n+2Z_n$ 且有恒等式$X_n+Y_n+Z_n+W_n+T_n=4^n$ ，跟$a_n^3(1122)$相對照下它們中間的$Y_{n+1}\sim W_{n+1}$的關係式是固定不變的，可以簡化成

$Y_n+Z_n+W_n+T_n=Y_{n+3}$ ， $X_n+Y_{n+3}=4^n$ 得$X_n^4(1122)=4^{n-4}+4X_{n-1}-X_{n-4}$推得與 S 的關係式爲： $a_n^S(1122)=S^{n-4}+Sa_{n-1}-a_{n-4}$

進行遞迴式$a_n^S(1122)$與 S 關係的驗證

S 代 9 得$a_n^9(1122)=9^{n-4}+9a_{n-1}-a_{n-4}$

X_n→N 位數中含(1122)
Y_n→N 位數中不含(1122)，結尾是 112
Z_n→N 位數中不含(1122)，結尾是 11
W_n→N 位數中不含(1122)，結尾是 1，但非 11
T_n→N 位數中不含(1122)，結尾是 2~9

關係式:

$X_{n+1}=9X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=Z_n+W_n$ ； $W_{n+1}=T_n+Y_n$ ；

$T_{n+1}=8W_n+8T_n+7Y_n+7Z_n$ 且有恒等式$X_n+Y_n+Z_n+W_n+T_n=9^n$ ，解得

$X_n^9(1122)=9^{n-4}+9X_{n-1}-X_{n-4}$

得知遞迴式$a_n^S(1122)=S^{n-4}+Sa_{n-1}-a_{n-4}$與 S 的關係是正確的。同樣$a_{n-4}$是表示重複排列數的項。

6.固定至少一組 1 跟 2 相鄰出現：【相鄰情況有(12)和(21)】求$a_n^S(12\cup 21)$

先求$a_n^3(12\cup 21)$的情況：

X_n→N 位數中含(12)或(21)
Y_n→N 位數中不含(12)或(21)，結尾是 1 或 2
Z_n→N 位數中不含(12)或(21)，結尾是 3

關係式：$X_{n+1}=3X_n+Y_n$；$Y_{n+1}=2Z_n+Y_n$；$Z_{n+1}=Y_n+Z_n$且有恒等式$X_n+Y_n+Z_n=3^n$

解之得$X_n^3(12\cup 21)=2*3^{n-2}+2X_{n-1}+X_{n-2}$ 。

再求$a_n^4(12\cup 21)$：

X_n →N 位數中含(12)或(21)
Y_n →N 位數中不含(12)或(21)，結尾是 1 或 2
Z_n →N 位數中不含(12)或(21)，結尾是 3 或 4

關係式：$X_{n+1}=4X_n+Y_n$；$Y_{n+1}=2Z_n+Y_n$；$Z_{n+1}=2Y_n+2Z_n$ 有恆等式$X_n+Y_n+Z_n=4^n$

簡化得 $\frac{1}{2}(Y_{n+1}+Y_n)+X_n=4^n$，解之得$X_n^4(12\cup 21)=2*4^{n-2}+3X_{n-1}+2X_{n-2}$。

比較以上兩個遞迴式推測跟 S 的關係爲

$a_n^S(12\cup 21)=2*S^{n-2}+(S-1)a_{n-1}+(S-2)a_{n-2}$

進行遞迴式$a_n^S(12\cup 21)$與 S 關係的驗證

S 代 9 得： $a_n^9(12\cup 21)=2*9^{n-2}+8a_{n-1}+7a_{n-2}$

X_n →N 位數中含(12)或(21)
Y_n →N 位數中不含(12)或(21)，結尾是 1 或 2
Z_n →N 位數中不含(12)或(21)，結尾是 3~9

關係式: $X_{n+1}=9X_n+Y_n$；$Y_{n+1}=2Z_n+Y_n$；$Z_{n+1}=7Y_n+7Z_n$ 有恒等式$X_n+Y_n+Z_n=9^n$

解之得遞迴式$X_n^9(12\cup 21)=2*9^{n-2}+8X_{n-1}+7X_{n-2}$。

把排列情形寫在下面對照：

a_1 =0	
a_2 =2	(12)、(21)
a_3 =34	(X12)(12X)(21X)(X21)扣掉重複的(121)和(212)
a_4 =448	(12XX)(X12X)(XX12)(21XX)(X21X)(XX21)扣掉(121X)、(X121)、(212X)(X212)加重覆扣到的(1212)(2121)

這裏光是用排列的方式不難看出固定 12 跟 21 會重覆 121 或 212，因此在討論的部分我們有用排容原理討論分開排列的差數關係。總之這個遞迴式的結果也是正確的。

7.至少一組(112)或(221)，求$a_n^S(112\cup 221)$：

先求$a_n^3(112\cup 221)$：

X_n →N 位數中含(112)或(221)
Y_n →N 位數中不含(112)或(221)，結尾是 11 或 22
Z_n →N 位數中不含(112)或(221)，結尾是 1 或 2，但非 11 或 22
W_n →N 位數中不含(112)或(221)，結尾是 3

關係式：$X_{n+1}=3X_n+Y_n$；$Y_{n+1}=Y_n+Z_n$；$Z_{n+1}=Z_n+2W_n$；$W_{n+1}=W_n+Z_n+Y_n$且有恒等式$X_n+Y_n+Z_n+W_n=3^n$。簡化其項得$\frac{1}{2}(Y_{n+2}+Y_n)+X_n=3^n$解出遞迴式：

$X_n^3(112\cup 221)=2*3^{n-3}+3X_{n-1}-X_{n-2}+X_{n-3}$

再看$a_n^4(112\cup 221)$：

X_n →N 位數中含(112)或(221)
Y_n →N 位數中不含(112)或(221)，結尾是 11 或 22
Z_n →N 位數中不含(112)或(221)，結尾是 1 或 2，但非 11 或 22
W_n →N 位數中不含(112)或(221)，結尾是 3 或 4

關係式：$X_{n+1}=4X_n+Y_n$ ；$Y_{n+1}=Z_n+Y_n$ ；$Z_{n+1}=2W_n+Z_n$ ；$W_{n+1}=2W_n+2Z_n+2Y_n$ 且有恒等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=4^n$ 。簡化其項得 $\frac{1}{2}(Y_{n+2}+Y_n)+X_n=4^n$ 解出遞迴式：

$X_n^4(112\cup 221)=2*4^{n-3}+4X_{n-1}-X_{n-2}+2X_{n-3}$

比較上面兩個遞迴式推測 $a_n^S(112\cup 221)$ 跟 S 的關係爲

$a_n^S(112\cup 221)=2*S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-2)a_{n-3}$

進行遞迴式 $a_n^S(112\cup 221)$ 與 S 關係的驗證

S 代 9 得： $a_n^9(112\cup 221)=2*9^{n-3}+9a_{n-1}-a_{n-2}+7a_{n-3}$

X_n →N 位數中含(112)或(221)
Y_n →N 位數中不含(112)或(221)，結尾是 11 或 22
Z_n →N 位數中不含(112)或(221)，結尾是 1 或 2，但非 11 或 22
W_n →N 位數中不含(112)或(221)，結尾是 3~9

關係式：$X_{n+1}=9X_n+Y_n$ ；$Y_{n+1}=Z_n+Y_n$ ；$Z_{n+1}=2W_n+Z_n$ ；$W_{n+1}=7W_n+7Z_n+7Y_n$ 且有恒等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=9^n$ 。遞迴式確定是 $X_n^9=2*9^{n-3}+9X_{n-1}-X_{n-2}+7X_{n-3}$ 。

實際排列情況：

$a_1=0$	
$a_2=0$	
$a_3=2$	(112)(221)
$a_4=36$	(X112)(112X)(X221)(221X)
$a_5=484$	(XX112)(X112X)(XX112)(221XX)(X221X)(XX221)扣掉重複的(11221)跟(22112)

驗證推測的遞迴式與 S 的關係是正確的。而它扣掉的 a_{n-2} 也是表示重覆的排列數。

8.固定出現至少一組(121)，求 $a_n^S(121)$ ：

先求 $a_n^3(121)$ ：

X_n →N 位數中含(121)
Y_n →N 位數中不含(121)，結尾是 12
Z_n →N 位數中不含(121)，結尾是 1
W_n →N 位數中不含(121)，結尾是 2 或 3，但非 12

關係式:

$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ ；$Y_{n+1}=Z_n$ ；$Z_{n+1}=W_n+Z_n$ ；$W_{n+1}=2W_n+Z_n+2Y_n$ 且有恒等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=3^n$ ，解之得 $X_n^3(121)=3^{n-3}+3X_{n-1}-X_{n-2}+2X_{n-3}$

※ 排列(121)跟(112)的結果並不一樣，可以用排列的觀點來解釋，因爲前者的情況是(1X1)而後者是(11X)，從全排列改變成所求的難易不同，例如(111112)改成(121)總共有 3 個位置選擇，而改成(112)也有 3 個位置選擇，但是實際上(112)的組有 4 個，含原來就有的(112)因此 $a_n^S(112)$ 的排列數比 $a_n^S(121)$ 多。

※ 比較：

固定(112)	固定(121)
$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ $Y_{n+1}=Y_n+Z_n$ $Z_{n+1}=W_n$ $W_{n+1}=2W_n+2Z_n+Y_n$	$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ $Y_{n+1}=Z_n$ $Z_{n+1}=W_n+Z_n$ $W_{n+1}=2W_n+Z_n+2Y_n$

再求 $a_n^4(121)$：

X_n→N 位數中含(121)
Y_n→N 位數中不含(121)，結尾是 12
Z_n→N 位數中不含(121)，結尾是 1
W_n→N 位數中不含(121)，結尾是 2 或 3 或 4，但非 12

關係式:

$X_{n+1}=4X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n+Z_n$ ； $W_{n+1}=3W_n+2Z_n+3Y_n$ 跟 $a_n^3(121)$ 關係式相較會變動係數的只有 X_{n+1} 跟 W_{n+1} ，中間的關係式固定不動。於是我們可以用固定的簡化式 $Y_n+Y_{n+2}+X_n=S^n$ 快速解出遞迴式。

推得遞迴式與 S 的關係爲 $a_N^S(121)=S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}$

進行遞迴式 $a_N^S(121)=S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}$ 與 S 關係的驗證

S 代 9 得： $a_N^9(121)=9^{n-3}+9a_{n-1}-a_{n-2}+8a_{n-3}$

X_n→N 位數中含(121)
Y_n→N 位數中不含(121)，結尾是 12
Z_n→N 位數中不含(121)，結尾是 1
W_n→N 位數中不含(121)，結尾是 2 或 3 或 4，但非 12

關係式： $X_{n+1}=9X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n+Z_n$ ； $W_{n+1}=8W_n+7Z_n+8Y_n$ 且有恒等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=9^n$ 。遞迴式確定是 $a_N^9(121)=9^{n-3}+9a_{n-1}-a_{n-2}+8a_{n-3}$ 。

9.固定出現至少一組(211)，求 $a_n^S(211)$ ：

先求 $a_n^3(211)$ ：

X_n→N 位數中含(211)
Y_n→N 位數中不含(211)，結尾是 21
Z_n→N 位數中不含(211)，結尾是 2
W_n→N 位數中不含(211)，結尾是 1 或 3

關係式:

$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=Y_n+W_n+Z_n$ ； $W_{n+1}=2W_n+Z_n+Y_n$ 且有恒等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=3^n$ ，解之得 $X_n^3(211)=3^{n-3}+3X_{n-1}-X_{n-2}+2X_{n-3}$

※ 排列(112)跟(211)的結果是一樣的，表示我們在排列的過程中用(11)與(2)對調的情況一樣，就像(1121)改成(2111)，同理在 4 位數固定排列中表示固定(1122)和固定(2211)結果一樣。從這裡我們可以歸納出一個小結論：再固定排列中凡是有相鄰的地方視為一組，**組與組對調位置不影響最後的遞迴式。**

※ 比較：

固定(112)	固定(211)
$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ $Y_{n+1}=Y_n+Z_n$ $Z_{n+1}=W_n$ $W_{n+1}=2W_n+2Z_n+Y_n$	$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ $Y_{n+1}=Z_n$ $Z_{n+1}=Y_n+W_n+Z_n$ $W_{n+1}=2W_n+Z_n+Y_n$

再求 $a_n^4(211)$ ：

X_n →N 位數中含(211)
Y_n →N 位數中不含(211)，結尾是 21
Z_n →N 位數中不含(211)，結尾是 2
W_n →N 位數中不含(211)，結尾是 1 或 3 或 4

關係式:

$X_{n+1}=4X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n+Z_n+Y_n$ ； $W_{n+1}=3W_n+2Z_n+2Y_n$ 跟 $a_n^3(211)$ 關係式相較會變動係數的只有 X_{n+1} 跟 W_{n+1} ，中間的關係式固定不動。於是我們可以用固定的簡化式 $Y_{n+2}+X_n=S^n$ 快速解出遞迴式 $a_N^9(211)=9^{n-3}+9a_{n-1}-a_{n-3}$ 。

推得遞迴式與 S 的關係為 $a_N^S(211)=S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-3}$

進行遞迴式 $a_N^S(211)=S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-3}$ 與 S 關係的驗證

S 代 9 得： $a_N^9(211)=9^{n-3}+9a_{n-1}-a_{n-3}$

X_n →N 位數中含(211)
Y_n →N 位數中不含(211)，結尾是 21
Z_n →N 位數中不含(211)，結尾是 2
W_n →N 位數中不含(211)，結尾是 1 或 3~9

關係式： $X_{n+1}=9X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=W_n+Z_n+Y_n$ ； $W_{n+1}=8W_n+7Z_n+7Y_n$ 且有恒等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=9^n$ 。遞迴式確定是 $a_N^9(211)=9^{n-3}+9a_{n-1}-a_{n-3}$ 。

10.固定至少一組(121)或(212)，求 $a_n^S(121\cup 212)$ ：

先求 $a_n^3(121\cup 212)$ 的情況：

X_n →N 位數中含(121)或(212)
Y_n →N 位數中不含(121)或(212)，結尾是 12 或 21
Z_n →N 位數中不含(121)或(212)，結尾是 1 或 2
W_n →N 位數中不含(121)或(212)，結尾是 3

關係式：$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ ；$Y_{n+1}=Z_n$ ；$Z_{n+1}=Y_n+Z_n+2W_n$ ；$W_{n+1}=Y_n+Z_n+W_n$ 且有等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=3^n$ 可以簡化成 $3^n=X_n+\frac{1}{2}(Y_{n+2}+Y_{n+1}+Y_n)$

解之得 $2*3^{n-3}+2X_{n-1}+2X_{n-2}+X_{n-3}=X_n^3(121\cup 212)$ 。

再看 $a_n^4(121\cup 212)$ 的情況:

X_n →N 位數中含(121)或(212)
Y_n →N 位數中不含(121)或(212)，結尾是 12 或 21
Z_n →N 位數中不含(121)或(212)，結尾是 1 或 2
W_n →N 位數中不含(121)或(212)，結尾是 3 或 4

關係式：$X_{n+1}=4X_n+Y_n$ ；$Y_{n+1}=Z_n$ ；$Z_{n+1}=Y_n+Z_n+2W_n$ ；$W_{n+1}=2Y_n+2Z_n+2W_n$

且有等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=4^n$ 。其中間 Y_{n+1} 、Z_{n+1} 的關係式是固定的。

解遞迴式得 $2*4^{n-3}+3X_{n-1}+3X_{n-2}+2X_{n-3}=X_n^4(121\cup 212)$

比較以上兩個遞迴式，推測跟元素數 S 的關係爲

$2*S^{n-3}+(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+(S-2)a_{n-3}=a_n^S(121\cup 212)$

進行遞迴式與 S 關係 $2*S^{n-3}+(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+(S-2)a_{n-3}=a_n^S(121\cup 212)$ 的驗證

S 代 9 得：$2*9^{n-3}+8a_{n-1}+8a_{n-2}+7a_{n-3}=a_n^S(121\cup 212)$

X_n →N 位數中含(121)或(212)
Y_n →N 位數中不含(121)或(212)，結尾是 12 或 21
Z_n →N 位數中不含(121)或(212)，結尾是 1 或 2
W_n →N 位數中不含(121)或(212)，結尾是 3~9

關係式：$X_{n+1}=9X_n+Y_n$ ；$Y_{n+1}=Z_n$ ；$Z_{n+1}=Y_n+Z_n+2W_n$ ；$W_{n+1}=7Y_n+7Z_n+7W_n$

且有等式 $X_n+Y_n+Z_n+W_n=9^n$ 。遞迴式確定是

$2*9^{n-3}+8a_{n-1}+8a_{n-2}+7a_{n-3}=a_n^S(121\cup 212)$

因此 $a_n^S(121\cup 212)$ 與 S 的關係是正確的。

10.固定至少有一組 11 跟 22 相鄰，相鄰情況有 2!種，要求 $a_n^S(11221\cup 2211)$ ：

先求 $a_n^3(1122\cup 2211)$ ：

X_n →N 位數中含(1122)或(2211)
Y_n →N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 112 或 221
Z_n →N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 11 或 22
W_n →N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 1 或 2，但非 11 或 22
T_n →N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 3

關係式：$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=Z_n+W_n$ ； $W_{n+1}=Y_n+2T_n+W_n$ ；
$T_{n+1}=W_n+T_n+Y_n+Z_n$ 且 $X_n+Y_n+Z_n+W_n+T_n=3^n=X_n+\frac{1}{2}(Y_{n+3}+Y_{n+1}+Y_n)$
解之得 $X_n^3(1122\cup 2211)=2*3^{n-4}+3X_{n-1}-X_{n-2}+2X_{n-3}+X_{n-4}$ 。
再看 $a_n^4(1122\cup 2211)$ ：

$X_n\rightarrow$N 位數中含(1122)或(2211)
$Y_n\rightarrow$N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 112 或 221
$Z_n\rightarrow$N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 11 或 22
$W_n\rightarrow$N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 1 或 2，但非 11 或 22
$T_n\rightarrow$N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 3 或 4

關係式：$X_{n+1}=4X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=Z_n+W_n$ ； $W_{n+1}=Y_n+2T_n+W_n$ ；
$T_{n+1}=2W_n+2T_n+2Y_n+2Z_n$ 且 $X_n+Y_n+Z_n+W_n+T_n=4^n$ ，中間的 Y.Z.W 的關係式跟 $a_n^3(1122\cup 2211)$ 比起來還是一樣的，解之得
$X_n^4(1122\cup 2211)=2*4^{n-4}+4X_{n-1}-X_{n-2}+3X_{n-3}+2X_{n-4}$
比較 $a_n^4(1122\cup 2211)$ 與 $a_n^3(1122\cup 2211)$ 推測其遞迴式跟 S 的關係為
$a_n^S(1122\cup 2211)=2*S^{n-4}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}+(S-2)a_{n-4}$
進行遞迴式 $a_n^S(1122\cup 2211)=2*S^{n-4}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}+(S-2)a_{n-4}$ 與 S 關係的驗證，S 代 9 得 $a_n^9(1122\cup 2211)=2*9^{n-4}+9a_{n-1}-a_{n-2}+8a_{n-3}+7a_{n-4}$ ：

$X_n\rightarrow$N 位數中含(1122)或(2211)
$Y_n\rightarrow$N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 112 或 221
$Z_n\rightarrow$N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 11 或 22
$W_n\rightarrow$N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 1 或 2，但非 11 或 22
$T_n\rightarrow$N 位數中不含(1122)或(2211)，結尾是 3~9

關係式：$X_{n+1}=9X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n$ ； $Z_{n+1}=Z_n+W_n$ ； $W_{n+1}=Y_n+2T_n+W_n$ ；
$T_{n+1}=7W_n+7T_n+7Y_n+7Z_n$ 且 $X_n+Y_n+Z_n+W_n+T_n=9^n$
解之得 $X_n^9(1122\cup 2211)=2*9^{n-4}+9X_{n-1}-X_{n-2}+8X_{n-3}+7X_{n-4}$
因此 $a_n^S(1122\cup 2211)=2*S^{n-4}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}+(S-2)a_{n-4}$ 與 S 的關係是正確的。

四、b_n 的研究：

$$b_N^S(\boxed{XX})$$

(XX)部分代表的是某種固定的排列方式，如果要固定至少一組 11 相鄰，就會是：$b_n(11)$ 。往後在遞迴式為了式子的簡潔有些會略去不寫，但在同一式中 b_n 都是一樣的，其中 S 代表的是可排列元素數，S 與 a_n 在此地方不同處為例如 S=3，則可選擇的數字是從 0~2。

1.至少有一組 11 相鄰，求 $b_n^S(11)$：

原題目題解：可選擇排列數字 0 跟 1，至少有一組 11 相鄰

$b_1^2(11)=0$	
$b_2^2(11)=1$	**(11)**
$b_3^2(11)=2$	**(111)、(110)**
$b_4^2(11)=5$	**(1100)、(1101)、(1110)、(1111)、(1011)**

考慮 $b_n^2(11)$ 的前兩位數字，會有以下兩種情況：

1.前 2 位為 11 時，後 n-2 位可以任意，故有 2^{n-2} 種

2.前 2 位為 10 時，後 n-2 位（因為第三位可以為 0）所以是 a_{n-2}^2 並非 b_{n-2}^2

寫出遞迴式：$b_n^2(11)=2^{n-2}+a_{n-2}^2(11)$

然而這只是我們看原題目的情況，當可排列的元素增加時，嘗試用這樣的分類並不能求出滿足的遞迴式，因此經由老師引導下，我們採用另外一種分類，由看全部排列方式著手。※在此 X_n 就是我們要求的 b_n

接著就來看 $b_n^3(11)$（其餘條件不變）：

將所有的三位數（以 0、1、2 表示的）分為三類

1. X_n 為 n 位數中含有(11)的個數
2. Y_n 為 n 位數中不含有(11)、卻是 1 結尾者
3. Z_n 為 n 位數中不含有(11)、卻是 0 或 2 結尾者

則 $X_{n+1}=3X_n+Y_n$ (X 最後一位任排有三種選擇，Y 令其末位加 1 位 1 就變成 X 的)

$Y_{n+1}=Z_n$ (Z 最後一位加上 1 併入 Y)

$Z_{n+1}=2Y_n+2Z_n$（Y 可再加上 0 或 2 併入 Z，原來的 Z 再加一位也有 2 種選擇）

(111)(112)(110)(211)(101)(221)(121)(201)(120)
(122)(212)(210)(222)(220)(102)(100)(202)(200)

初始條件為 $X_2=1$、$Y_2=1$、$Z_2=4$，且注意有等式 $X_n+Y_n+Z_n=2\times3^{n-1}$ 。

($2\times3^{n-1}$ 為首位不為 0 的總排列數)；解出遞迴式 $X_n^3(11)=2X_{n-1}+2X_{n-2}+2\times3^{n-3}$

接下來求 $b_n^4(11)$：

$X_n \rightarrow$N 位數中含(11)
$Y_n \rightarrow$N 位數中不含(11)，結尾是 1
$Z_n \rightarrow$N 位數中不含(11)，結尾是 0 或 2 或 3
$X_n+Y_n+Z_n=2*3^{n-1}$

關係式 $X_{n+1}=4X_n+Y_n$；$Y_{n+1}=Z_n$；$Z_{n+1}=3Y_n+3Z_n$

初始條件為 $X_2=1$、$Y_2=2$、$Z_2=9$，且 $X_n+Y_n+Z_n=3\times4^{n-1}$ 。

解出遞迴式：$X_n^4(11)=3X_{n-1}+3X_{n-2}+3\times4^{n-3}$

$b_n^3(11)=2b_{n-1}+2b_{n-2}+2\times3^{n-3}$；$b_n^4(11)=3b_{n-1}+3b_{n-2}+3\times4^{n-3}$

將以上兩個遞迴式相較，不難發現中間可能有 S 個元素排列規則(S={0,1,....,9})
因此我們將此遞迴式改寫爲 $b_n^S(11)=(S-1)b_{n-1}+(S-1)b_{n-2}+(S-1)\times S^{n-3}$
於是我們接下來驗證是否真爲如此，這個數我們可以排列 0~9，排列 10 個元素的過程大致如前，不過 Z 的尾數就可能是 0~9 除 1 外，有遞迴關係式：
$X_{n+1}=10X_n+Y_n$ (X 最後一位任排有三種選擇，Y 令其末位加 1 位 1 就變成 X 的)
$Y_{n+1}=Z_n$ (Z 最後一位加上 1 併入 Y)
$Z_{n+1}=9Y_n+9Z_n$（Y 可再加上 0~9 除 1 併入 Z，原來的 Z 再加一位也有 9 種選擇）
得出遞迴式 $b_n^{10}(11)=9b_{n-1}+9b_{n-2}+9\times 10^{n-3}$

＊一開始我用直接觀察得到 $b_n^2(11)=2^{n-2}+a_{n-2}$ 用我們解出的遞迴式代 S=2 $\Rightarrow b_n^2(11)=b_{n-1}+b_{n-2}+2^{n-3}$ 兩式相簡可得到 $b_{n-1}+b_{n-2}-2^{n-3}=a_{n-2}$ 這個關係對原來的題目排列 0 跟 1 適用。

2. b_n 中至少有一組(12)，求 $b_N^S(12)$：
先求 $b_N^3(12)$：

$X_n \to$ N 位數中含(12)
$Y_n \to$ N 位數中不含(12)，結尾是 1
$Z_n \to$ N 位數中不含(12)，結尾是 2 或 0
$X_n+Y_n+Z_n=2*3^{n-1}$

關係式：
$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ (原 X_n 結尾可任意接 1 或 2 或 0，原 Y_n 加一位 2 成 X_n)
$Y_{n+1}=Z_n+Y_n$ (原 Y_n 加一位 1 結尾 11，原 Z_n 加一位 1 成 Y_n)
$Z_{n+1}=2Z_n+Y_n$ (原 Z_n 加一位 2 或 0， Y_n 則可加一位 0)
有恆等式 $X_n+Y_n+Z_n=2*3^{n-1}$，跟 $a_n^3(12)$ 關係式一樣時只差總排列數不同而已。
因此遞迴式爲 $(S-1)*S^{n-3}+Sb_{n-1}-b_{n-2}=b_n^S(12)$

3. b_n 中至少有一組(01)，要求 $b_N^S(01)$：
先求 $b_N^3(01)$：

$X_n \to$ N 位數中含(01)
$Y_n \to$ N 位數中不含(01)，結尾是 0
$Z_n \to$ N 位數中不含(01)，結尾是 2 或 1
$X_n+Y_n+Z_n=2*3^{n-1}$

關係式：
$X_{n+1}=3X_n+Y_n$ ； $Y_{n+1}=Z_n+Y_n$ ； $Z_{n+1}=2Z_n+Y_n$ 且有恆等式 $X_n+Y_n+Z_n=2*3^{n-1}$，這跟排列(12)的情況一樣，因此遞迴式爲 $(S-1)*S^{n-3}+Sb_{n-1}-b_{n-2}=b_n^S(10)=b_n^S(01)$
而我們討論(10)的話，它也是這樣子的關係式，差別在於它的起始位數的不同，好比說 N=2 時兩個的數目就不一樣。
比較：<固定(10)的關係式>

$X_n \rightarrow$N 位數中含(10)
$Y_n \rightarrow$N 位數中不含(10)，結尾是 1
$Z_n \rightarrow$N 位數中不含(10)，結尾是 2 或 0
$X_n + Y_n + Z_n = 2*3^{n-1}$

關係式：

$X_{n+1}=3X_n + Y_n$ ； $Y_{n+1} = Z_n + Y_n$ ； $Z_{n+1}=2Z_n + Y_n$ 且有恆等式 $X_n + Y_n + Z_n = 2*3^{n-1}$

因此遞迴式為 $(S-1)*S^{n-3} + Sb_{n-1} - b_{n-2} = b_n^S(10) = b_n^S(01)$

4.固定至少有一組(111)，求 $b_N^S(111)$ ：

先求 $b_N^3(111)$ ：

$X_n \rightarrow$N 位數中含(111)
$Y_n \rightarrow$N 位數中不含(111)，結尾是 11
$Z_n \rightarrow$N 位數中不含(111)，結尾是 1，但非 11
$W_n \rightarrow$N 位數中不含(111)，結尾是 2 或 0

關係式:

$X_{n+1}=3X_n + Y_n$ ； $Y_{n+1} = Z_n$ ； $Z_{n+1} = W_n$ ； $W_{n+1}=2Z_n + 2W_n + 2Y_n$ 且有恒等式

$X_n + Y_n + Z_n + W_n = 2*3^{n-1}$ ，解之得 $2*3^{n-4} + 2X_{n-1} + 2X_{n-2} + 2X_{n-3} = X_N^3(111)$

當發現遞迴的關係式相等時，意味著解出來的遞迴項係數表示也是一樣的。將遞迴改寫為 $(S-1)*S^{n-4} + (S-1)(b_{n-1} + b_{n-2} + b_{n-3}) = b_n^S(111)$ 。

5.固定至少一組(0011)，求 $b_N^S(0011)$ ：

先看 $b_N^4(0011)$ ：

$X_n \rightarrow$N 位數中含(0011)
$Y_n \rightarrow$N 位數中不含(0011)，結尾是 001
$Z_n \rightarrow$N 位數中不含(0011)，結尾是 00
$W_n \rightarrow$N 位數中不含(0011)，結尾是 0，但非 00
$T_n \rightarrow$N 位數中不含(0011)，結尾是 1 或 2 或 3，但非 001

關係式: $X_{n+1}=4X_n + Y_n$ ； $Y_{n+1} = Z_n$ ； $Z_{n+1} = Z_n + W_n$ ； $W_{n+1} = T_n + Y_n$ ；

$T_{n+1}=3W_n + 3T_n + 2Y_n + 2Z_n$ 且有恒等式 $X_n + Y_n + Z_n + W_n + T_n = 3*4^{n-1}$，跟 $b_N^3(111)$ 關係式比起來它中間 $Y_{n+1} \sim W_{n+1}$ 的關係式是固定不變的，可以簡化成

$Y_n + Z_n + W_n + T_n = Y_{n+3}$ ， $X_n + Y_{n+3} = 3*4^{n-1}$ 得 $X_n^4(0011) = 3*4^{n-5} + 4X_{n-1} - X_{n-4}$ 改寫為 S 的關係式： $b_n^S(0011) = (S-1)*S^{n-5} + Sb_{n-1} - b_{n-4}$

※經過 5 個的示例之後發現改變的只有總排列數，因此以下所求的可以直接寫出。（此點可從排列組合的觀點來看）

6.固定至少出現一組(12 或 21)，求 $b_N^S(12 \cup 21)$ ：

$b_n^S(12 \cup 21) = 2*(S-1)*S^{n-3} + (S-1)b_{n-1} + (S-2)b_{n-2}$

7.固定至少出現一組(121)，求 $b_N^S(121)$ ：

$b_n^S(121)=(S-1)*S^{n-4}+Sb_{n-1}-b_{n-2}+(S-1)b_{n-3}$

8.固定至少出現一組(121)或(212)，求 $b_N^S(121\cup 212)$

$b_n^S(121\cup 212)=2*(S-1)*S^{n-4}+(S-1)b_{n-1}+(S-1)b_{n-2}+(S-2)b_{n-3}$

9.固定至少出現一組 11 跟 22 相鄰，求 $b_N^S(1122\cup 2211)$

$b_n^S(1122\cup 2211)=2*(S-1)*S^{n-5}+Sb_{n-1}-b_{n-2}+(S-1)b_{n-3}+(S-2)b_{n-4}$

参、研究結果與討論：

一、排容原理與疊加關係： $n(12\cup 21)=n(12)+n(21)-n(12\cap 21)$

這裡先把這幾個數的結果提出來討論，在此我們舉例 和 $a_N^2(12\cup 21)$

	$a_n^2(12\cup 21)=2*2^{n-2}+a_{n-1}$
$a_1=0$	$a_1=0$
$a_2=1$	$a_2=2$
$a_3=4$	$a_3=6$
$a_4=11$	$a_4=14$
$a_5=26$	$a_5=30$
$a_6=57$	$a_6=62$
$a_7=120$	$a_7=126$
$a_8=247$	$a_8=254$
$a_9=502$	$a_9=510$
$a_{10}=1013$	$a_{10}=1022$

因爲 $a_n^2(12)$ 與 $a_n^2(21)$ 排列數目一樣，如果將 $[a_n^2(12)+a_n^2(21)-a_n^2(12\cup 21)]$ 得出來的數就是有一組(12)和(21)的交集部分。譬如 N=3 時有 4*2-6=2，就是重覆了(121)跟(212)，再往上增 N=4 時，交集情況例如(1221)(2112)(1212)(2121)....。

我們發現 $a_n^2(12)+a_n^2(21)-a_n^2(12\cup 21)=a_{n-1}^2(12)+a_{n-1}^2(21)$

表示 $a_n^2(12)$ 可由 $a_n^2(12\cup 21)$ 與 $a_{n-1}^2(12)$ 生成。【註一】

以下再列出 a_n 其他當 S=2 時的項：

N	(11)	(12)	(111)	(112)	(12 或 21)	(112 或 221)	(121 或 212)	(121)
1	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	2	0	0	0
3	3	4	1	1	6	2	2	1
4	8	11	3	4	14	8	6	4
5	19	26	8	12	30	22	16	11
6	43	57	19	31	62	52	38	27
7	94	120	43	74	126	114	86	63
8	201	247	94	168	254	240	188	142
9	423	502	201	369	510	494	402	312
10	880	1013	423	792	1022	1004	846	673

※見附件一：[註二]

由表格中可觀察到：

$$1.\ a_n^2(112)=\sum_{n=1}^{k}a_n^2(111)$$

例如：$a_4^2(112)=a_4^2(111)+a_3^2(111)+a_2^2(111)+a_1^2(111)=3+1+0+0=4$

$$2.\ a_n^2(112\cup 221)=a_{n-1}^2(12\cup 21)+a_{n-1}^2(112\cup 221)$$

例如：$a_5^2(112\cup 221)=a_4^2(12\cup 21)+a_4^2(112\cup 221)=14+8=22$

$$3.\ a_n^2(111)=a_{n-1}^2(11)$$

二、數列之間：

a_n /固定(11)	$a_n^S(11)=(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+S^{n-2}$
a_n /固定(12)	$a_n^S(12)=S^{n-2}+Sa_{n-1}-a_{n-2}$
a_n /固定(111)	$a_n^S(111)=S^{n-3}+(S-1)(a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3})$
a_n /固定 (112)/(211)/(221)	$a_n^S(112)=S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-3}$
a_n /固定(121)/(212)	$a_N^S(121)=S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}$
a_n /固定(1122)	$a_n^S(1122)=S^{n-4}+Sa_{n-1}-a_{n-4}$
a_n /固定(12)或(21)	$a_n^S(12\cup 21)=2*S^{n-2}+(S-1)a_{n-1}+(S-2)a_{n-2}$
a_n /固定(112)或(221)	$a_n^S(112\cup 221)=2*S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-2)a_{n-3}$
a_n /固定(121)或(212)	$a_n^S(121\cup 212)=2*S^{n-3}+(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+(S-2)a_{n-3}$
a_n /固定(1122)或(2211)	$a_n^S(1122\cup 2211)=$ $2*S^{n-4}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}+(S-2)a_{n-4}$

1.比較 a_n 和 b_n 中 $a_n(11)$ ($b_n(11)$)跟 $a_n(111)$ ($b_n(111)$)，發現如果是排列相同元素而增加相鄰位數時，只是將遞迴的項數多增一個位數。

2.比較 $a_n(112)$ 和 $a_n(1122)$ <只有固定順序的一種排列>，發現差異是在扣去的位數。因爲 1122 比 112 條件嚴苛了一位。

3.比較固定 121 或 212 跟固定 12 或 21 中間的項係數都是(S-1)，可以推測出如果要求的是(12121)或(21212)結果會是

$$2*S^{n-5}+(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}+(S-1)a_{n-4}+(S-2)a_{n-5}$$

三、a_n 、 b_n 、 c_n ：

最後我們研究 $a_n b_n c_n$ 之間的關係，我們當初在看到 TRML 這個一般式的解答的係數挺複雜的，不是直觀可以想到，因此我們就想它是利用什麼方式列出一般式，後來我們想到之前曾經聽過一題類似題，它的係數跟這個一般式很像：

在一個 N 項數列，其中每一項只能是 0 或 1 或 2，其中 0 和 2 永不能相鄰，求這個數列個數的一般式，在此列出它的解法相對照：(Z_n 、 O_n 、 T_n 分別代表結尾數字爲 0,1,2)

$f_0 = 1$	$\{\emptyset\}$
$f_1 = 3$	$\{0\}$，$\{1\}$，$\{2\}$
$f_2 = 7$	$\{0,1\}$，$\{1,0\}$，$\{0,0\}$，$\{1,1\}$，$\{1,2\}$，$\{2,1\}$,$\{2,2\}$
$\forall n\ f_n = Z_n + O_n + T_n$	$Z_n(0)$ 只能和 0 或 1 相鄰排列 $O_n(1)$ 則可以和 0 或 1 或 2 相鄰排列 $T_n(2)$ 只能和 1 或 2 排列 $\Rightarrow O_n = Z_{n-1} + O_{n-1} + T_{n-1}$ (代表選擇方法) $T_n = O_{n-1} + T_{n-1}$ 因此 $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2}$ ； $O_n = f_{n-1}$, $O_{n-1} = f_{n-2}$ 輔以特徵方程式 $f_n = 2f_{n-1} + f_{n-2} \Rightarrow x^2 = 2x + 1 \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$ 因此 $f_n = a(1+\sqrt{2})^n + b(1-\sqrt{2})^n = (\frac{1+\sqrt{2}}{2})(1+\sqrt{2})^n + (\frac{1-\sqrt{2}}{2})(1-\sqrt{2})^n$

因此要列出一般式我們必須利用所謂的特徵方程式：

讓我們把 $a_N^S(11)$ 的一般式解出來，先將其冪次項(後解出得 $k=S^n$)消去：

$$\Rightarrow a_n - S^{(n-2)} = (S-1)a_{n-1} + (S-1)a_{n-2}$$

$$\Rightarrow a_n - k = (S-1)\left(a_{n-1} + a_{n-2} - \frac{k}{S} - \frac{k}{S^2}\right)$$

$$\Rightarrow a_n - k = (S-1)\left(a_{n-1} - \frac{k}{S}\right) + (S-1)\left(a_{n-2} - \frac{k}{S^2}\right)$$

令 $d_n = a_n - k$ ；得 $d_n = (S-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$ ，其實它的型態很像費氏數列，且此時 $d_1 = -2, d_2 = -3, d_3 = -5$,我們將 c_n 的項數列出$\{1,1,2,3,5,8,13,...\}$

可得 $d_n = -F_{n+2} = -(F_{n+1} + F_n)$ ，

※ $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ ⇨所對應的特徵方程式 $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$ ， $\alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(共有兩個相異的特徵根)，所以

$F_n = A_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + A_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ，其中 A_1, A_2 可由 $F_0 = 1, F_1 = 1$ 來決定

$$F_0 = 1 = A_1 + A_2$$

$$F_1 = 1 = A_1 * (\frac{1+\sqrt{5}}{2}) + A_2 * (\frac{1-\sqrt{5}}{2})$$

解之得 $A_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ $A_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$

因此 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$ ，現在我們先取 S=2 的情形，故

$$d_n = -[\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}] \Rightarrow d_{n+k} = a_n = 2^n - [\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}]$$

推廣到 S 個元素亦然，不過前面還需乘以(S-1)

也就是 $a_n = (S-1)\{S^n - [\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}]\}$

接下來求 b_n 的一般式

$$b_n^S(11) = (S-1)b_{n-1} + (S-1)b_{n-2} + (S-1)\times S^{n-3} = (S-1)(b_{n-1} + b_{n-2} + S^{n-3})$$

令 S=2 簡單探討

$b_n^S(11) = b_{n-1} + b_{n-2} + 2^{n-3}$ 消去冪次項 $b_n^S(11) - 2^{n-3} = b_{n-1} + b_{n-2}$

$\Rightarrow b_n - k = (b_{n-2} - \frac{k}{4}) + (b_{n-1} - \frac{k}{2})$ 比較係數 k= 2^{n-1}

令 $g_n = b_n - k = g_{n-2} + g_{n-1} = -F_n$ 且 ， ，$g_3 = -2$

當其有 S 元素時 $\Rightarrow b_n = (S-1)[-F_n + S^{n-1}]$

這是比較簡單的情況，其他像 $a_n^S(12 \cup 21) = 2 * S^{n-2} + (S-1)a_{n-1} + (S-2)a_{n-2}$ 之間係數不相同可以肯定不是費氏數列的關係，如果要是費氏數列其係數必須相同且都是偶項次的遞迴項例如：$a_n^S(11) = (S-1)a_{n-1} + (S-1)a_{n-2} + S^{n-2}$ ，不過沒有費氏數列的遞迴關係一樣可以解出一般式，一樣利用特徵方程式。只不過不在討論範圍內就不詳述了。這樣 、 、 的研究算是告一個段落了。

四、排列方法：

這邊屬於排列組合的部分我們都用遞迴的方式解它，主要因為當你要求的不是固定形式的排列時，我們還要考慮內排列跟重覆的問題，事實上是比較麻煩的，本來推廣是要到至少一組 11.22.33...99 相鄰，事實上這是已經可以解出來的，用相同的方法用結尾的數字分類會得到遞迴式，但是它的項數太多了，不是頂好的方法，所以在此就不列舉了。參考高二下的數學，如果你是要求兩組的相鄰，譬如至少有兩組 11 的相鄰，則可以令元素 A=11，這樣可以簡化問題，要刪去重覆的話只需要看有沒有 11 相關的字出現<就單純以 11 情況來說>，而且往往不比首尾的數字差異，看中間的排列是比較快的。

肆、結論與應用:

一、a_n 和 b_n 遞迴關係的比較：

a_n /固定(11)	$a_n^S(11)=(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+S^{n-2}$
a_n /固定(12)	$a_n^S(12)=S^{n-2}+Sa_{n-1}-a_{n-2}$
a_n /固定(111)	$a_n^S(111)=S^{n-3}+(S-1)(a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3})$
a_n /固定(112)/(211)/(221)	$a_n^S(112)=S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-3}$
a_n /固定(121)/(212)	$a_N^S(121)=S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}$
a_n /固定(1122)	$a_n^S(1122)=S^{n-4}+Sa_{n-1}-a_{n-4}$
a_n /固定(12)或(21)	$a_n^S(12\cup 21)=2*S^{n-2}+(S-1)a_{n-1}+(S-2)a_{n-2}$
a_n /固定(112)或(221)	$a_n^S(112\cup 221)=2*S^{n-3}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-2)a_{n-3}$
a_n /固定(121)或(212)	$a_n^S(121\cup 212)=2*S^{n-3}+(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+(S-2)a_{n-3}$
a_n /固定(1122)或(2211)	$2*S^{n-4}+Sa_{n-1}-a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}+(S-2)a_{n-4}$
b_n /固定 11	$b_n^S(11)=(S-1)b_{n-1}+(S-1)b_{n-2}+(S-1)\times S^{n-3}$
b_n /固定 12/10/01	$b_n^S(12)=(S-1)*S^{n-3}+Sb_{n-1}-b_{n-2}$
b_n /固定 111	$b_n^S(111)=(S-1)*S^{n-4}+(S-1)(b_{n-1}+b_{n-2}+b_{n-3})$ 。
b_n /固定 0011	$b_n^S(0011)=(S-1)*S^{n-5}+Sb_{n-1}-b_{n-4}$
b_n /固定 12 或 21	$b_n^S(12\cup 21)=2*(S-1)*S^{n-3}+(S-1)b_{n-1}+(S-2)b_{n-2}$
b_n /固定 121	$b_n^S(121)=(S-1)*S^{n-4}+Sb_{n-1}-b_{n-2}+(S-1)b_{n-3}$
b_n /固定(121 或 212)	$2*(S-1)*S^{n-4}+(S-1)b_{n-1}+(S-1)b_{n-2}+(S-2)b_{n-3}$
b_n /固定(1122 或 2211)	$2*(S-1)*S^{n-5}+Sb_{n-1}-b_{n-2}+(S-1)b_{n-3}+(S-2)b_{n-4}$

1.比較a_n 和b_n 中 11 跟 111，發現如果是排列相同元素而增加相鄰位數時，只是將遞迴的項數多增一個位數。

2.比較a_n 中 112 跟 1122<只有固定順序的一種排列>發現差異是在扣去的位數因為 1122 比 112 條件嚴苛了一位。

3.比較固定 121 或 212 跟固定 12 或 21 中間的項係數都是(S-1)，可以推測出如果要求的是(12121)或(21212)結果會是：

$$2*S^{n-5}+(S-1)a_{n-1}+(S-1)a_{n-2}+(S-1)a_{n-3}+(S-1)a_{n-4}+(S-2)a_{n-5}$$

二、a_n 、b_n 除了起始位數不一樣以外，他們的遞迴關係式通常只要代換掉次方項就可以了。

三、a_n 跟b_n 要以c_n 表示，項的係數都必須是相等的。

四、$a_n^S(11)=-F_{n+2}+S^n$ ；$b_n^S(11)=-F_n+S^{n-1}$ ；$c_n=F_{n+1}$ ；

$$a_n^S(11)=(S-1)\{S^n-\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}]\}$$

$$b_n^S(11)=(S-1)\{S^{n-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n}]\}$$

此為當固定至少一組 11 相鄰出現時三者跟費氏數列的關係，可以知道當 S=2 時，有等式$a_n-b_n+c_n=2^{n-1}$

五、這個用結尾數字分類解遞迴式的方法可以解所有的固定一組相鄰數字，檢查自己的關係式正確與否在於每項 N+1 項加起來係數是否都是它的可排列元素個數。要解兩組以上的可用排列組合把元素令成一個字母，排字母跟數字排列。

六、應用：

解出這麼多結果，想爲這個結果找些應用的地方，基本上費氏數列本身的應用就很大了，至於 a_n 、 b_n 分項之間的關係有一個地方譬如求排列(11)跟排列(111)時會發現它們的數字只是移了一位，因此讓我想到密碼學的移位加密法，如果我令分項的結果爲我們一般使用的文字像是英文字母，取 26 個數在與另外相對應的 26 個數會有相對關係，當我們跟另一方有公開跟私人的解碼鑰匙就可以利用這種結果加密，當然這只是猜想而已，希望有機會可以寫出程式證明他的應用。

再者，如果利用各個遞迴式彼此的關連，創造一把 Key 跟相對應的鎖，因爲它們的一般式都不是直觀可以想到的，可是彼此的關係卻很容易可以發現。

伍、參考資料及其他：

一、張子浩, 徐立編著 綜合離散數學

二、高中課本第四冊排列組合

三、2003 年 TRML 思考賽題

四、作者：夫蘭納里；數學小魔女；天下遠見；2001 年。

五、作者：辛；碼書：編碼與解碼的戰爭；台灣商務；2000 年出版。

附錄一：

【註一】：

$a_n^2(12)=2^{n-2}+2a_{n-1}-a_{n-2}$	$a_n^2(12\cup 21)=2*2^{n-2}+a_{n-1}$	$2a_n^2(12)-a_n^2(12\cup 21)=2a_{n-1}^2(12)$
$a_1=0$	$a_1=0$	
$a_2=1$	$a_2=2$	2*1-2=0
$a_3=4$	$a_3=6$	2*4-6=2
$a_4=11$	$a_4=14$	2*11-14=8
$a_5=26$	$a_5=30$	2*26-30=22
$a_6=57$	$a_6=62$	2*57-62=52
$a_7=120$	$a_7=126$	2*120-126=114
$a_8=247$	$a_8=254$	2*247-254=240
$a_9=502$	$a_9=510$	2*502-510=494
$a_{10}=1013$	$a_{10}=1022$	2*1013-1022=1004

$$a_n^2(12)+a_n^2(21)=a_n^2(12\cup 21)+a_{n-1}^2(12)+a_{n-1}^2(21)$$

在$a_{n-1}^2(12)$的(12)後面加 1，在$a_{n-1}^2(21)$的(21)後面加 2，而$a_{n-1}^2(12\cup 21)$原本就含有(12)或(21)將原式寫為$a_n^2(12)+a_n^2(21)-a_n^2(12\cup 21)=a_{n-1}^2(12)+a_{n-1}^2(21)$可以看出$a_{n-1}^2(21)$與$a_{n-1}^2(12)$就是它重覆的排列數。

【註二】：

1. $a_n^2(112)=\sum_{n=1}^{k}a_n^2(111)=a_n^2(111)+a_{n-1}^2(112)$

例如：$a_4^2(112)=a_4^2(111)+a_3^2(111)+a_2^2(111)+a_1^2(111)=3+1+0+0=4$

因為只要將$a_n^2(111)$的(111)改成(112)，而$a_{n-1}^2(111)$的(111)也改成(112)，讓$a_{n-1}^2(112)$一直往上展開會得到累加關係

2. $a_n^2(112\cup 221)=a_{n-1}^2(12\cup 21)+a_{n-1}^2(112\cup 221)$

例如：$a_5^2(112\cup 221)=a_4^2(12\cup 21)+a_4^2(112\cup 221)=14+8=22$

原因是將$a_{n-1}^2(12\cup 21)$的(12)的前面加 1 成(112)，而(21)的前面加 2 成(221)，再來是$a_{n-1}^2(112\cup 221)$的(112)的結尾加 2 成(1122)和(221)的結尾加 1 成(2211)

3. $a_n^2(111)=a_{n-1}^2(11)$

從$a_n^2(11)$到$a_n^2(111)$，直觀來想我們只需將一組(11)中間插入 1 個 1，就可生成$a_n^2(111)$，所以它的項只有移一位，表示(111)比(11)條件嚴苛了一位。

評語

口頭報告採用艱澀的數學符號，無法展示作者對於具體實例的計算及瞭解。