

臺灣二〇〇六年國際科學展覽會

科 別：數學科

作 品 名 稱：輸贏一線間-淘汰賽的相關探討

學 校 / 作 者：臺北市立第一女子高級中學 于小涵



我是于小涵，目前就讀於北一女中數理資優班三年溫班，很喜歡數學和物理，喜歡不顧一切思考一個自己有興趣的問題，有多次參加科展的經驗。樂器學的是琵琶，2002年曾去新加坡參加華樂民族音樂文化交流演出。很高興通過了中學生參與科學專題研究計劃，這是我第一次參加國際科展，也是我第一次嘗試個人專題研究，運氣很好遇見了兩位超好的教授，在期間我學了相當多。夢想將來能成為研究員。

On Totally-Seeded Knockout Tournaments

中文摘要:

單淘汰賽是一種失敗一次即遭淘汰的賽制; 在此假定每位選手都有一相對應的能力數值, 本文主要探討在均高的單淘汰賽程表之下, 若賽程安排完全依照種子安排原則 (亦即最強的選手對最弱的選手、次強對次弱...), 則對於能力越強的選手越有保障, 直觀上而言能力最強的選手應有最大的奪冠機率, 探討此種賽程安排是否滿足能力較強的選手有較大的勝率? 因發現在某些特殊的選手能力數值分布之下會發生次強選手勝率大於最強選手的情況, 令A、B代表最強與次強選手, $P(A)$ 、 $P(B)$ 代表 A、B 奪冠的機率, 故擬定 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 為參考依據, 尋求 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 的最大值發生處作為最極端的狀況。發現四位選手的情況下, $\frac{P(B)}{P(A)}$ 最大值 = 1; 八位選手的情況下, $\frac{P(B)}{P(A)}$ 最大值 = $\frac{196\sqrt{2}+98}{343} = 1.0938$, 當選手數為 2^n 時, $\frac{P(B)}{P(A)}$ 最大值隨 n 的增加而遞增。

英文摘要(Abstract):

Knockout Tournament is a highly competitive system in which any player losing a game can no longer play in the tournament. Here we suppose that every player has a numerical value that corresponds to his ability. We consider a totally-seeded knockout tournament with 2^n players where in the first round, the strongest player matches the weakest player, the second strongest player matches the second weakest player, and so on. We examine whether a stronger player always has a greater probability of winning the tournament. The answer is in the affirmative for $n = 2$. For a tournament with eight players ($n = 3$), the situation is much more complicated. In certain cases, the second strongest player has the greatest probability of winning the tournament. Specifically, let A and B denote the strongest and second strongest players, $P(A)$ and $P(B)$ their respective probability of winning the tournament. We find that the maximum value of $\frac{P(B)}{P(A)}$ equals $\frac{196\sqrt{2}+98}{343} = 1.0938$. For $n > 3$, we have not obtained the maximum value of $\frac{P(B)}{P(A)}$. However, it can be readily seen that the maximum value of $\frac{P(B)}{P(A)}$ is non-decreasing as n increases.

記憶猶新，高一時學校舉辦的班際籃球競賽及高二時的班際排球競賽，當時學校採用的即為單淘汰賽制，而在這兩場比賽中，自信於我們班的實力堅強，卻都沒有得到前面的名次...。這讓我開始懷疑這樣的賽制的合理性，或者是說它對於實力如何的隊伍有較大的保障？(當然，這些想法有大半的起因是因為輸了比賽...) 這樣的想法引發我對單淘汰賽制的興趣，決定對它作一些更深入的研究和了解，也讓我的心靈得到了不少的安慰...

相信單淘汰賽對大多數人來說都不陌生，即使沒有參加過類似的競賽，在籃球比賽、網球比賽或等等的運動競賽轉播時應多少也有所接觸；單淘汰賽是一種失敗一次即遭淘汰的賽制，因此較節省時間和經費；每場比賽中會有一位選手(或隊伍)晉級(亦即有一方遭淘汰)，因此有 n 位選手即須舉辦 $(n-1)$ 場比賽，且除了選手數為 2^k 的賽程表中每位選手起始高度均相同外，其餘選手數的賽程表皆有種子位置(即可以少打一場的賽程表位置)。在沒有加賽線的情況下，單淘汰賽只能取第一名，即冠軍選手。

這次的研究主要是想探討在一個均高的單淘汰賽賽程表中，並在交叉安排選手的賽程安排之下(即目前最常見的安排方式)，假定每位選手都有一個相對應的能力值，探討是否能力越強的選手有越大的奪冠機率的問題，發現在某些情況下有違反直觀的情況，進而探討何種類型的選手能力數值分佈會對造成能力最強的選手最不利的情況，並找出次強選手勝率 and 最強選手勝率比值的上限。

由於選手數非 2^k 的情況較為複雜，故僅考慮選手數為 2^k 的情況。

貳、研究過程及方法

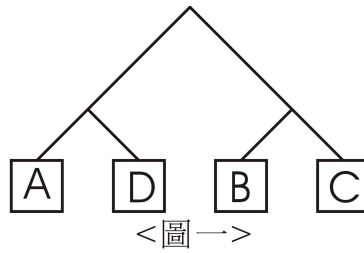
為了使問題得以討論，於此訂立了幾個前提：

- 一、每位選手皆有其相對應的能力值，為相對的概念，故將最強選手的能力值訂為 1，其餘選手所對應的能力皆介於 0 與 1 之間。
- 二、將選手依能力值由強至弱排列，依序命名為 A、B、C、D、E...，而每位選手對應的能力值依序為 a, b, c, d, e, \dots ， $1=a \geq b \geq c \geq d \geq e \dots \geq 0$ 依此類推。
- 三、令 P_{AB} 為選手 A 和選手 B 進行比賽時，選手 A 得勝的機率，並規定 $P_{AB} = \frac{a}{a+b}$ 。
- 四、令 $P(A)$ 為選手 A 奪冠的機率。
- 五、令 $G_Q(t)$ 為 T 選手(能力值為 t) 在他所進行的第一場比賽中勝出的情況下，Q 選手奪冠的條件機率。

一、在四位選手的情況下(如圖一)：

$$P(A) = \frac{a}{a+d} \times \frac{b}{b+c} \times \frac{a}{a+b} + \frac{a}{a+d} \times \frac{c}{b+c} \times \frac{a}{a+c}$$

$$P(B) = \frac{b}{b+c} \times \frac{a}{a+d} \times \frac{b}{a+b} + \frac{b}{b+c} \times \frac{d}{a+d} \times \frac{b}{b+d}$$



$$P(C) = \frac{c}{b+c} \times \frac{a}{a+d} \times \frac{c}{a+c} + \frac{c}{b+c} \times \frac{d}{a+d} \times \frac{c}{c+d}$$

$$P(D) = \frac{d}{a+d} \times \frac{b}{b+c} \times \frac{d}{b+d} + \frac{d}{a+d} \times \frac{c}{b+c} \times \frac{d}{c+d}$$

1、比較 $P(A)$ 和 $P(B)$:

$$P(A) \geq P(B)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{a+d} \times \frac{a}{b+c} \times \left(\frac{b}{a+b} + \frac{c}{a+c} \right) \geq \frac{b}{a+d} \times \frac{b}{b+c} \times \left(\frac{a}{a+b} + \frac{d}{b+d} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2bcd(a^2 - b^2) + 2ab^2(ac - bd) + a^2bd(a - b) + abc(a^2 - b^2)$$

$$+ a^2b^2(a - b) + acd(a^2 - b^2) \geq 0$$

.....恆成立

2、比較 $P(B)$ 和 $P(C)$:

$$\because \frac{b}{b+c} \geq \frac{c}{b+c}; \frac{b}{a+b} \geq \frac{c}{a+c}; \frac{b}{b+d} \geq \frac{c}{c+d};$$

故可知 $P(B) \geq P(C)$ 恆成立

3、比較 $P(C)$ 和 $P(D)$:

$$P(C) \geq P(D)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c}{b+c} \times \frac{c}{a+d} \times \left(\frac{c(a+d) + 2ad}{(a+c)(c+d)} \right) \geq \frac{d}{a+d} \times \frac{d}{b+c} \times \left(\frac{d(b+c) + 2bc}{(b+d)(c+d)} \right)$$

$$\Leftrightarrow ab(c^3 - d^3) + acd(c^2 - d^2) + 2abcd(c - d) + bcd(c^2 - d^2)$$

$$+ c^2d^2(c - d) + 2c^2d^2(a - b) \geq 0$$

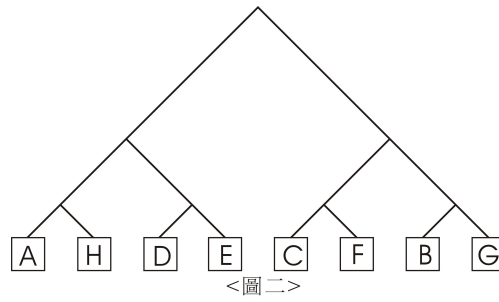
.....恆成立

綜合以上1,2,3可知, 無論選手們的能力值分別為多少, 皆不影響結果 $P(A) \geq P(B) \geq P(C) \geq P(D)$, 故在四位選手的情況下, 此種賽程排法符合能力越強的選手奪冠的機率越高, 為一理想的賽程表。

二、在八位選手的情況下:(如圖二)

討論此時選手 A 勝率和選手 B 勝率的相對關係:

先從直觀出發, 若將賽程表分為兩邊來看, 一邊含有選手 A, 另一邊含有選手 B, 則可發現在和選手 B 同一邊含有 F 選手, 而 F 選手的能力值 \leq 選手 D 及選手 E 的能力值, 故推測在



某些特定的選手能力值分布之下，會發生 $P(B) > P(A)$ 的逆轉情形。

以一組數值為例：

$$a=1$$

$$b=0.99$$

$$c=0.98$$

$$d=0.97$$

$$e=0.96$$

$$f=0.25$$

$$g=0.02$$

$$h=0.01$$

$$\text{此時的 } P(A) = 0.260442$$

$$P(B) = 0.276841$$

$$\frac{P(B)}{P(A)} = 1.062966, \text{ 即大過 } 1。$$

在此處以選手 B 的勝率和選手 A 作比較，基於 B 選手為對 A 選手最有威脅性的競爭者，且 B 選手的能力值上升會造成其餘所有選手的奪冠機率皆下降。

⇒求 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 的最大值：

為了方便之後的微分求極值，在此先進行分析使變數減少

1、討論次強選手能力值 b 分布對 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 值的影響：

b 值上升可使 $P(B)$ 上升且 $P(A)$ 下降

故可知 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 最大時，必符合 $a = b$ 。

2、討論最弱選手能力值 h 分布對 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 值的影響：

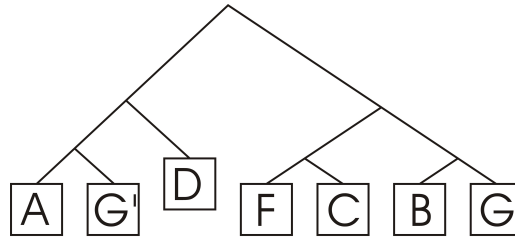
$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{P_{BG} \times (P_{CF} \times P_{BC} + P_{FC} \times P_{BF}) \times (P_{AH} \times \dots + P_{HA} \times \dots)}{P_{AH} \times G_A(a)}$$

→ 這裡 $G_A(a)$ 表示在 A 贏得第一場比賽的情況下，最後奪冠的 (條件) 機率。

將 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 分爲兩項：

前項爲：

$$\frac{P_{AH} \times (P_{DE} \times P_{AD} \times P_{BA} + P_{DE} \times P_{DA} \times P_{BD} + P_{ED} \times P_{AE} \times P_{BA} + P_{ED} \times P_{EA} \times P_{BE}) \times P_{BG} \times (P_{CF} \times P_{BC} + P_{FC} \times P_{BF})}{P_{AH} \times G_A(a)}$$



<圖三>

這裡G'表示能力與G相同的選手

與 h 值無關;

後項為:

$$\frac{P_{HA} \times \{P_{DE} \times P_{HD} \times P_{BH} + P_{DE} \times P_{DH} \times P_{BD} + P_{ED} \times P_{HE} \times P_{BH} + P_{ED} \times P_{EH} \times P_{BE}\} \times P_{BG} \times (P_{CF} \times P_{BC} + P_{FC} \times P_{BF})}{P_{AH} \times G_A(a)}$$

若再將後項 $P_{HA} \times \{\dots\} \times \dots$ 依據 $\{\dots\}$ 中的四項拆成(a)、(b)、(c)、(d)四部分
先看 (a)、(c) 兩部分:

$\because a = b, \therefore P_{BH} = P_{AH} \Rightarrow$ 可和分母消去;

又當 h 值上升, P_{HA} 、 P_{HD} 、 P_{HE} 值皆上升,

再看 (b)、(d) 兩部分:

和分母消去後所剩會受 h 值影響的部分只有 $\frac{h}{d+h}$ 和 $\frac{h}{e+h}$

又當 h 值上升, $\frac{h}{d+h}$ 上升且 $\frac{h}{e+h}$ 上升,

故可知 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 最大時,必符合 $g = h$ 。

3、探討e值分布對 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 值的影響:

$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{\frac{d}{d+e} \times G_B(d) + \frac{e}{d+e} \times G_B(e)}{\frac{d}{d+e} \times G_A(d) + \frac{e}{d+e} \times G_A(e)}$$

考慮函數 $\frac{G_B(x)}{G_A(x)}, f \leq x \leq c$, 假設最大值為 M 且發生於 $x = \pi$;

$$\therefore \frac{G_B(d)}{G_A(d)} \leq M, G_B(d) \leq M \times G_A(d)$$

$$\frac{G_B(e)}{G_A(e)} \leq M, G_B(e) \leq M \times G_A(e)$$

$$\therefore \frac{P(B)}{P(A)} \leq \frac{\frac{d}{d+e} \times M \times G_A(d) + \frac{e}{d+e} \times M \times G_A(e)}{\frac{d}{d+e} \times G_A(d) + \frac{e}{d+e} \times G_A(e)} = M$$

\therefore 知若滿足 $d = \pi$ 且 $e = \pi$,可使 $\frac{P(B)}{P(A)} = M$ 最大,即此時 $d = e$,

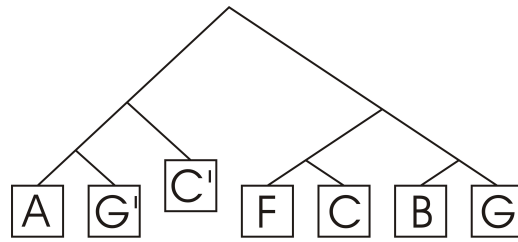
以下僅需考慮 $a = b, g = h, d = e$ 的情形,圖二可簡化為如圖三所示。

4、探討d值分布對 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 值的影響:

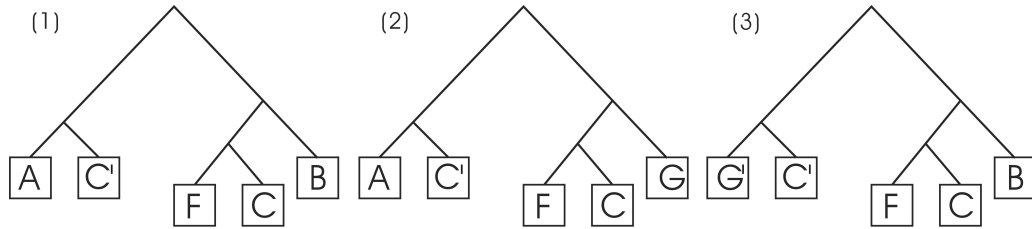
$$\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{P_{BG} \times (P_{CF} \times P_{BC} + P_{FC} \times P_{BF}) \times \{P_{AG} \times P_{DA} \times P_{BD} + P_{AG} \times P_{AD} \times P_{BA} + P_{GA} \times P_{DG} \times P_{BD} + P_{GA} \times P_{GD} \times P_{BG}\}}{P_{AG} \times P_{AD} \times \dots}$$

將分子中含有d的部分分為 (a)、(b)、(c)、(d) 四項

先看 (b): $\frac{P_{AG} \times P_{AD} \times P_{BA}}{P_{AD}} = P_{AG} \times P_{BA} =$ 定值



<圖四>



<圖五>

再看 (a): $\frac{P_{AG} \times P_{DA} \times P_{BD}}{P_{AD}} = P_{AG} \times P_{DA} = P_{AG} \times \frac{d}{a+d}$,

可發現 d 值上升, P_{DA} 值亦上升, 而 P_{AG} 不變;

故可知 d 值上升使 (a) 部分上升

再看 (c)+(d)

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{a+d}{a} \times \left(\frac{g}{a+g} \times \frac{d}{d+g} \times \frac{b}{b+d} + \frac{g}{a+g} \times \frac{g}{d+g} \times \frac{b}{b+g} \right) \\ &= \frac{g}{a+g} \times \frac{a+d}{a} \times \frac{b[b(d+g) + 2dg]}{(d+g)(b+d)(b+g)} \\ &= \frac{b^2g}{a(a+g)(b+g)} + 2bg^2 \times \frac{d}{d+g} \times \frac{1}{a(a+g)(b+g)} \end{aligned}$$

前項為定值, 後項 d 值上升時 $\frac{d}{d+g}$ 亦上升;

故可知 d 值上升使 (c)+(d) 部分上升

\therefore 知要使 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 最大時, 必符合 $c = d$

綜合以上條件可知賽程表可簡化為如圖四所示。

再將圖四的賽程表拆為三個子賽程表 (1)、(2)、(3), 如圖五所示,

而以 $P_i(A)$ 、 $P_i(B)$ 表示在子賽程表之下 A 及 B 奪冠的機率。

5、探討 g 值分布對 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 值的影響:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{P(B)}{P(A)} &= \frac{P_{AG} \times P_{BG} \times P_1(B) + P_{GA} \times P_{BG} \times P_3(B)}{P_{AG} \times P_{BG} \times P_1(A) + P_{AG} \times P_{GB} \times P_2(A)} \\ &= \frac{P_1(B) + \frac{g}{a} \times P_3(B)}{P_1(A) + \frac{g}{b} \times P_2(A)} \end{aligned}$$

$\therefore P_1(A)$ 與 $P_1(B)$ 與 g 無關

$\therefore g$ 值上升只對 $\frac{g}{a} \times P_3(B)$ 和 $\frac{g}{b} \times P_2(A)$ 造成影響

⇒ 探討 g 值上升對 $\frac{P_3(B)}{P_2(A)}$ 的影響:

$$\frac{P_3(B)}{P_2(A)} = \frac{(P_{FC} \times P_{BF} + P_{CF} \times P_{BC}) \times (P_{GC} \times P_{BG} + P_{CG} \times P_{BC})}{P_{AC} \times P_{CF} \times (P_{CG} \times P_{AC} + P_{GC} \times P_{AG}) + P_{AC} \times P_{FC} \times (P_{FG} \times P_{AF} + P_{GF} \times P_{AG})}$$

其中會隨 g 值變動的部分為

$$\frac{P_{GC} \times P_{BG} + P_{CG} \times P_{BC}}{P_{CF} \times (P_{CG} \times P_{AC} + P_{GC} \times P_{AG}) + P_{FC} \times (P_{FG} \times P_{AF} + P_{GF} \times P_{AG})}$$

令 (a) = $\frac{c}{c+f} \times \frac{a[a(c+g)+2cg]}{(c+g)(a+c)(a+g)}$ (即分母前項);

(b) = $\frac{f}{c+f} \times \frac{a[f+g]+2fg}{(f+g)(a+f)(a+g)}$ (即分母後項);

(c) = $\frac{b[b(c+g)+2cg]}{(c+g)(b+g)(b+c)}$ (即分子);

探討 g 值上升對 $\frac{(c)}{(a) + (b)}$ 的影響:

先看 $\frac{(a)}{(c)}$:

$$\frac{(a)}{(c)} = \frac{c}{c+f} \quad (\because a = b)$$

∴ g 值上升 $\frac{(a)}{(c)}$ 為定值。

再看 $\frac{(b)}{(c)}$:

$$\frac{(b)}{(c)} = \frac{f}{c+f} \times \frac{a(f+g)+2fg}{(f+g)(a+f)} \times \frac{1}{\frac{b(c+g)+2cg}{(c+g)(b+c)}}$$

$$\text{受 } g \text{ 影響的部分} \Rightarrow \left(a + \frac{2fg}{(f+g)}\right) \times \frac{1}{\left(b + \frac{2cg}{c+g}\right)} = \frac{\left[a + \frac{2fg}{(f+g)}\right]}{\left[a + \frac{2fg}{(f+g)}\right] + \left[\frac{g^2(2c-2f)}{(c+g)(f+g)}\right]}$$

令分子部分為 (p)、分母前項為 (q)、分母後項為 (r);

$$\frac{(q) + (r)}{(p)} = \frac{(q)}{(p)} + \frac{(r)}{(p)},$$

g 值上升: $\frac{(q)}{(p)}$ 不變、 $\frac{(r)}{(p)}$ 上升

∴ g 值上升使 $\frac{(q) + (r)}{(p)}$ 上升

即 $\frac{(p)}{(q) + (r)}$ 下降; $\frac{(b)}{(c)}$ 下降

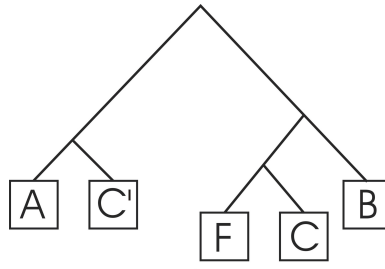
綜合以上:

g 值上升: $\frac{(a)}{(c)}$ 不變、 $\frac{(b)}{(c)}$ 下降 ∴ $\frac{(a) + (b)}{(c)}$ 下降

即 g 值上升使 $\frac{(c)}{(a) + (b)}$ 上升、 $\frac{P_3(B)}{P_2(A)}$ 上升

且 g 值上升時, $\frac{g}{a}P_3(B)$ 和 $\frac{g}{b}P_2(A)$ 皆上升

又令 $\frac{\frac{g}{a}P_3(B)}{\frac{g}{b}P_2(A)} = R$



<圖六>

$$\frac{P_1(B)}{P_1(A)} = r$$

(當 g 值上升, R 上升, r 不變)

以下分為兩種情況:

(1) 當 $g = f$ 時, $R \leq r$:

$$\text{則 } \frac{P(B)}{P(A)} \leq r = \frac{P_1(B)}{P_1(A)},$$

故 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 之最大值發生在 $g = h = 0$ 時。

(2) 當 $g = f$ 時, $R > r$:

將 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 視為 g 的函數 ($0 \leq g \leq f$), 假設最大值發生在 $0 < g_0 < f$ 時,

$$\text{令 } x = P_1(A), y = \frac{g}{b} \times P_2(A)$$

$$\text{則 } \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{rx + Ry}{x + y}, \text{ 視為 } g \text{ 的函數 (} r \text{ 及 } x \text{ 與 } g \text{ 值無關)}$$

$$\text{當 } g = 0 \text{ 時, } \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{P_1(B)}{P_1(A)} = r,$$

現已假設 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 之最大值發生在 $0 < g_0 < f$,

$$\text{故當 } g = g_0 \text{ 時, } \frac{P(B)}{P(A)} > r = \frac{P_1(B)}{P_1(A)},$$

因此當 $g = g_0$ 時, $R > r$

由此可知當 g 值由 g_0 上升到 f 時,

$R - r$ 均為正值且上升, 而 $\frac{y}{x+y}$ 亦上升,

因此 $\frac{P(B)}{P(A)} = r + (R - r) \frac{y}{x+y}$ 亦隨之上升,

得到矛盾的結論;

故若當 $g = f$ 時 $R > r$,

則 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 之最大值發生於 $g = h = f$ 。

故以下分為 $g = h = 0$ 和 $g = h = f$ 兩種情況探討:

(1) $g = h = 0$:

則賽程表可簡化為如圖六所示。

在 $a = b = 1, c = d = e, g = h = 0$ 的情況下

令 $c = d = e = x, f = y$, 求 (x, y) 使 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 最大:

$$\begin{aligned} \frac{P(B)}{P(A)} &= \frac{\frac{x}{x+y} \times \frac{1}{1+x} \times \left(\frac{1}{1+x} \times \frac{1}{2} + \frac{x}{1+x} \times \frac{1}{1+x}\right) + \frac{y}{x+y} \times \frac{1}{1+y} \times \left(\frac{1}{1+x} \times \frac{1}{2} + \frac{x}{1+x} \times \frac{1}{1+x}\right)}{\frac{x}{x+y} \times \frac{1}{1+x} \times \left(\frac{1}{1+x} \times \frac{1}{2} + \frac{x}{1+x} \times \frac{1}{1+x}\right) + \frac{y}{x+y} \times \frac{1}{1+y} \times \left(\frac{1}{1+y} \times \frac{1}{2} + \frac{y}{1+y} \times \frac{1}{1+y}\right)} \\ &= \frac{x \times \frac{1+3x}{(1+x)^2} + y \times \frac{1+3x}{(1+x)(1+y)}}{x \times \frac{1+3x}{(1+x)^2} + y \times \frac{1+3y}{(1+y)^2}} \end{aligned}$$

$$\frac{P(B)}{P(A)} - 1 = \frac{2y \times (1+x)(x-y)}{x(1+3x)(1+y)^2 + y(1+3y)(1+x)^2}$$

$$\frac{\partial[\frac{P(B)}{P(A)} - 1]}{\partial x} \text{ 消去恆正的部分後} = 4y(3x^2y^2 + 6xy^2 + x^2y - x^2 + 4xy + 2y^2)$$

$$\text{令 } 3x^2y^2 + 6xy^2 + x^2y - x^2 + 4xy + 2y^2 = 0 \text{ 爲(a)}$$

$$\frac{\partial[\frac{P(B)}{P(A)} - 1]}{\partial y} \text{ 消去恆正的部分後} = -(2x^2y + 4xy^2 - x^2 + 2xy + y^2)$$

$$\text{令 } 2x^2y^2 + 4xy^2 - x^2 + 2xy + y^2 = 0 \text{ 爲(b)}$$

$$(a) \times 2 - (b) \times 3$$

$$2x^2y + x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

\therefore 可知極值必發生於邊界

\Rightarrow 探討極值發生處:

令一變數 t 滿足 $0 \leq t \leq 1$

$$\text{a、}(x, y) = (t, 0), \text{ 則 } \frac{P(B)}{P(A)} - 1 = 0 \text{ 不合}$$

$$\text{b、}(x, y) = (1, t), \text{ 則 } \frac{P(B)}{P(A)} - 1 = \frac{4t(1-t)}{4(4t^2+3t+1)} \Rightarrow \text{進一步探討}$$

$$\text{c、}(x, y) = (t, t), \text{ 則 } \frac{P(B)}{P(A)} - 1 = 0 \text{ 不合}$$

對於 b 中的函數微分求極值:

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\frac{P(B)}{P(A)} - 1]}{\partial t} \text{ 的分子部分} &= (4t^2 + 3t + 1)(1 - 2t) - (t - t^2)(8t + 3) \\ &= -7\left(t + \frac{1}{7}\right)^2 + \frac{8}{7} \\ &\Rightarrow \left(t + \frac{1}{7}\right)^2 = \frac{8}{49} \\ t &= \frac{2\sqrt{2}-1}{7} \text{ (負不合)} \end{aligned}$$

故最大值成立於 $(x, y) = (1, \frac{2\sqrt{2}-1}{7})$ 時

亦即 $a = b = c = d = e = 1, f = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}, g = h = 0$ 時

此時 $\frac{P(B)}{P(A)} = \frac{196\sqrt{2}+98}{343}$ (約為 1.0938362)

(2) $g = h = f$:

令 $a = b, c = d = e, f = g = h$ 為 0.00005 的任意倍數, 以電腦進行運算後發現:

$\frac{P(B)}{P(A)}$ 最大值發生於 $f = g = h = 0.2424$ 時,

此時 $\frac{P(B)}{P(A)} = 1.07954887657505$, 小於 (1) 中所求得的數值。

比較 (1) 與 (2) 之後,

可知 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 最大值應發生於 $a = b = c = d = e = 1, f = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}, g = h = 0$ 。

三、探討在 2^n 位選手的情況下:

若令 W_n 為有 2^n 位選手時 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 的最大值,

仔細觀察可發現若在 2^k 位選手的情況下, 使後 2^{k-1} 位選手能力值皆為 0,

即為 2^{k-1} 位選手的情況。

故可知 2^{k-1} 位選手的情形 \subset 2^k 位選手的情況中

故可推論 $W_1 = W_2 = 1 < W_3 \leq W_4 \leq W_5 \dots$ 依此類推

參、研究結果與討論

一、目前已得的結果:

1、在四位選手的情況下, $P(A) \geq P(B) \geq P(C) \geq P(D)$,

$\frac{P(B)}{P(A)} \leq 1$ (等號成立於 $a = b$ 且 $c = d$ 時)。

2、在八位選手的情況下, 當 $a = b = c = d = e = 1, f = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}, g = h = 0$ 時,

$\frac{P(B)}{P(A)}$ 有最大值 $= \frac{196\sqrt{2}+98}{343}$ (約為 1.0938362)

3、推論 $W_1 = W_2 < W_3 \leq W_4 \leq W_5 \dots$ (W_n 為有 2^n 位選手時 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 的最大值)。

二、討論:

1、在此處所採取的違反直觀 (亦即次強選手的勝率大於最強選手) 程度的定義以 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 的最大值為指標, 但亦可採取找出 $P(B), P(C), P(D) \dots$ 等之中最大者和 $P(A)$ 的比值作為指標。

2、關於推論 $W_1 = W_2 < W_3 \leq W_4 \leq \dots \leq W_n \leq \dots$,

可進一步探討當 $n \rightarrow \infty$ 時, W_n 是否有上限?

肆、結論與應用

以此種最能為人們直觀所接受的賽程排法出發, 不過度刻意保障某些選手以維持比賽的意義, 檢驗它是否具備了對能力越強選手越有利的特質; 發現雖在某些特殊的選手能力值分布之下, 會發生最強選手奪冠機率並非最大的情形, 而在八位選手的情況下, 若選手的能力數值分布接近 $a = b = c = d = e = 1, f = \frac{2\sqrt{2}-1}{7}, g = h = 0$ 時, 則會發生此處所討論次強選手勝率大於最強選手, 亦即 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 大於 1 且接近最大值 $\frac{196\sqrt{2}+98}{343}$ 的情況; 由此可發現, 在此種極端的選手能力值分布狀況下, 參考標準 $\frac{P(B)}{P(A)}$ 值亦小於 1.1, 雖無法完全達成 '保障能力最強選手' 但亦可以接受, 可由此看出此種賽程表排法的數學基礎, 也可認定它為通用於一般情況下的適當賽程排法。希望此種運算模式以及次強

選手勝率大過最強選手時的選手能力數值分布可作為參考依據,用以分析生活中採取單淘汰賽的競賽,並深入探討其選手能力和勝率間的關係。 12

伍、參考文獻

- 一、黃光明 (1978) 淘汰賽 數學傳播 第三卷第二期 2-5
- 二、國立台灣師範大學學校體育與研究發展中心 (1994) 中小學體育教師手冊
台北市: 師大體育研究中心
- 三、F.R.K.Chung and F.K.Hwang (1978) Do Stronger Players Win More Knockout Tournaments? Journal of the American Statistical Association
Vol.73 593-596
- 四、R.B.Israel (1981) Stronger Players Need Not Win More Knockout Tournaments Journal of the American Statistical Association
Vol.76 950-951

評語

題目有趣，可惜解決方法平凡，宜進一步作一般性的探討。