臺灣二ＯＯ六年國際科學展覽會

科　　　別：數學科

作品名稱：耍「薛骰」-Sicherman Dice 的探討

得獎獎項：第三名
西班牙正選代表:西班牙 2006 年科學博覽會

學校 / 作者：新竹市立建功高級中學　　陳皓嫵

目　　錄

作者簡介

我是陳皓嬿，目前就讀新竹市立建功高中國中部三年級，家中只有我和弟弟兩個小孩。父母親非常重視我們的品德養成與待人接物，也鼓勵我們參加各種活動。我喜愛聽音樂，尤其是古典音樂與爵士樂，也喜歡彈奏鋼琴及小提琴；在繁忙的課業學習之餘，能夠彈奏一首自己喜歡的曲子，的確能夠舒緩壓力，在優美的旋律中放鬆自己。我喜歡數學及科學，藉著大量的閱讀及親自動手做，讓我一窺其中的奧妙與迷人之處。參加科學展覽，讓我對科學求真求實的精神與方法，有了更深一層的認識與體驗。在新竹市科展及全國科展得到還不錯的成績，也給了我持續努力的動力。我非常喜歡旅行，體驗不同的語言、文化與生活及認識新的朋友。也曾經代表新竹市參加日本岡山青少年夏令

營及美國加州庫比提諾市的美語見習團。對我而言，參加活動就是一種學習，

也是自我挑戰。

The Exploration of Sicherman Dice

Abstract

George Sicherman discovered that it is possible to take a couple of 6-sided dice re-labeling them with different positive integers (1,2,2,3,3,4) and (1,3,4,5,6,8) having the same probability distribution as rolling a standard pair of 6-sided dice. Such unique pair of dice is calling Sicherman dice.

The secret behind the Sicherman dice can be studied by combining the powerful mathematical tool "Generating functions" with the symbolic manipulation software "Derive 6", The same procedure may be applied to studying the possibility of the generalized Sicherman dice along the consideration of :

(1) Adding more dice.

(2) Changing the number of faces.

To this end, we introduce the concept of the Sicherman Bound. For a given integer n, the number of n-sided Sicherman dice is finite. We computed manually such numbers for n≤50 based on the method of "Elimination of negative terms".

耍「薛骰ㄊㄡˊ」--- Sicherman Dice 的探討

<u>中文摘要</u>

Sicherman Dice 就是一對點數配置與正常骰子(6 面正立方體，點數為1到6)不同的骰子，它所拋擲出的每一種不同點數和(2,3,4...,12)的機率恰好與一對正常的骰子相同。這種骰子是美國的Col. George Sicherman 所發現的。 Sicherman 更進一步指出：在不使用Sicherman Dice 的情形下，不可能找到一組大於或等於三顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。

本研究的目標在於

1. 尋求計算「Sicherman Dice 的組合和正常的骰子有相同的出現機率」的方法
2. 證明Sicherman 結論的真偽及是否適用於其他正多面體(4 面 / 8 面 / 12 面 / 20 面) 的標準骰子
3. 修正Sicherman 的結論，並定義 Sicherman 極限(Sicherman Limit)。在假設 n 面正多面體(n 為自然數，$n \le 50$)存在的情形下，探討每一個正多面體的 Sicherman 極限
4. Sicherman Dice (Crazy Dice) 的延伸探討
   (1) 不同面數骰子的組合，是否可以找到面數組合相同，但點數配置不同的 Crazy Dice
   (如4 面與6 面的標準骰子組合，找到4 面與6 面的Crazy Dice)
   (2) 多個面數相同或不同骰子的組合，是否可以找到面數、個數及點數配置皆不同的 Crazy Dice (如 3 個 4 面標準骰子組合，找到 2 個 8 面的 Crazy Dice)

在研究的過程中，我發現以下的現象：

(1) Sicherman Dice 的產生，是生成函數因式重新組合的結果

(2) Sicherman Dice 是否存在，則視上述重新組合的結果是否有負項產生

由於上述的觀察，我使用自行發展的「負項消去」法來檢驗Sicherman 結論的正確性及求得 n 面正多面體其對應的 Sicherman 極限。

同時我也和 Col. George Sicherman 取得聯繫，討論當年他發現 Sicherman Dice 的經過及其結論的限制條件，作為本研究未來發展的參考。

耍「薛骰ㄊㄡˊ」--- Sicherman Dice 的探討

壹、前言

在一個偶然的機會中，接觸到一篇名爲「骰子漫談」的文章。其中提到一種名爲 Sicherman Dice 的骰子：就是一對點數配置與正常骰子(6 面正立方體，點數爲1到6) 不同的骰子，它所拋擲出的每一種不同點數和(2,3,4...,12) 的機率恰好與一對正常的骰子相同。之後蒐尋相關的書籍及文章，得知這種骰子是美國的 Col. George Sicherman 所發現的。 Sicherman 更進一步指出：在不使用 Sicherman Dice 的情形下，不可能找到 1 組大於或等於 3 顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。換句話說， Sicherman 所發現的這一對組合，是唯一的解。

這引發了我相當大的興趣，一方面覺得這種骰子真是太神奇了，另一方面也懷疑 Sicherman 的說法：數字的排列組合這麼多，難道真的找不出第 3 組 Sicherman Dice？ 如果可以找到其他的組合，如何證明所找到的組合和正常的骰子有相同的出現機率? Sicherman Dice 的組合與現象，會出現在其他正多面體(4 面/8 面/12 面/20 面) 的骰子嗎?這些疑問讓我決定對 Sicherman Dice 做個較深入的研究。在資料蒐集的過程中，我發現之前已有人做過 Sicherman Dice 的研究。不過，他們的重點在於求出各個不同的面數中，2 個或是 3 個的 Sicherman Dice 的組合。所使用的方法，則是以排列組合求解。之後我發現 Sicherman 的網站中，已有一套程式來求得各個不同面數 2 個 Sicherman Dice 的組合。在這些資料研讀與簡單的試算中，我不禁懷疑：對於多個骰子(如 4 個，甚至於 10 個)，我仍然可以找同樣個數的 Sicherman Dice 組合嗎？不同面數的組合，可以找到相對應的 Sicherman Dice(Crazy Dice)組合嗎？於是，我的研究方向便由「面數」轉爲「個數」,「同一面數組合」轉爲「不同面數組合」。這樣的轉變，使我發現 Sicherman Dice 有趣又神奇的一面。

本研究的目的在於：

一、尋求計算「Sicherman Dice 的組合和正常的骰子有相同的出現機率」的方法

二、證明Sicherman 結論的真僞

1. 即證明Sicherman 所述「在不使用Sicherman Dice 的情形下，不可能找到 1 組大於或等於 3 顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同」的真僞
2. 證明 1 中的敘述，是否適用於其他正多面體(4 面/8 面/12 面/20 面) 的標準骰子

三、修正Sicherman 的結論，並定義 Sicherman 極限(Sicherman Limit)。在假設 n 面正多面體(n 爲自然數， $n \le 50$)存在的情形下，探討每一個正多面體的 Sicherman 極限

四、 Sicherman Dice 的延伸探討

1. 不同面數骰子的組合，是否可以找到面數組合相同，但點數配置不同的Crazy Dice [註一]

(1) 4 面與 6 面的標準骰子組合，找到 4 面與 6 面的 Crazy Dice
(2) 6 面與 8 面的標準骰子組合，找到 6 面與 8 面的 Crazy Dice
(3) 4 面與 8 面的標準骰子組合，找到 4 面與 8 面的 Crazy Dice
(4) 4 面、6 面與 8 面的標準骰子組合，找到 4 面、6 面與 8 面的 Crazy Dice

2. 多個不同面數骰子的組合，是否可以找到面數、個數及點數配置皆不同的 Crazy Dice
(1) 3 個 4 面的標準骰子組合，找到 2 個 8 面的 Crazy Dice
(2) 4 面與 12 面的標準骰子組合，找到 6 面與 8 面的 Crazy Dice
(3) 6 面與 8 面的標準骰子組合，找到 4 面與 12 面的 Crazy Dice

[註一]在各種參考文獻中，Sicherman Dice 只出現在 6 面標準骰子的討論中。在本報告中，Sicherman Dice 泛指可以取代數個正多面體標準骰子組合的同個數、同面數的非標準骰子。其他各種不同組合所產生的非標準骰子，則用 Crazy Dice 代表，以有所區別。同時，不考慮骰子任一面點數為 0 或負數的情形。

貳、研究方法或過程

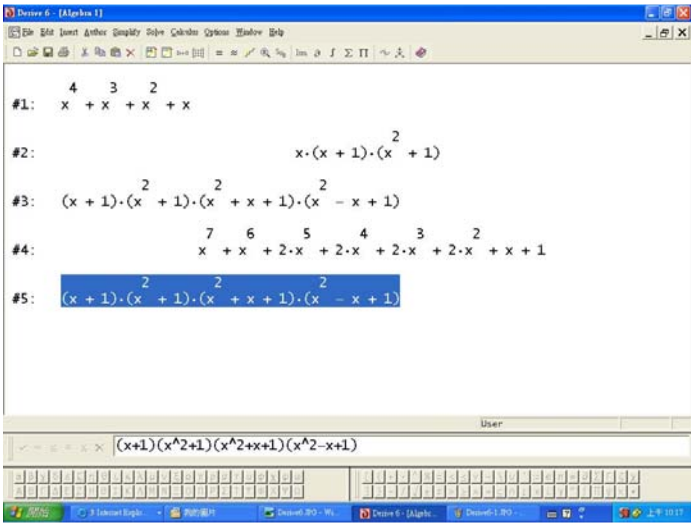
一、研究設備及器材

1. 個人電腦

2. 微軟(*Microsoft*) Excel 軟體

3. 德州儀器(*Texas Instruments*) Derive 6 軟體

利用 Derive 6 軟體進行多項式的因式分解，及多個多項式的乘積與展開。



圖一　Derive 6 可以作多項式的因式分解(#1,#2)
及多項式的展開(#3,#4)

二、研究過程或方法

1. 背景說明

(1) Sicherman Dice 的發現

一般標準的正常骰子(正 6 面體)，其點數是由1 至 6 點所組成。兩顆正常的骰子所擲出點數和如表一所示。而 Sicherman 所發現的 Sicherman Dice ，其點數分別爲 $(1, 2, 2, 3, 3, 4)$ 及 $(1, 3, 4, 5, 6, 8)$ ，2 顆 Sicherman Dice 所擲出點數和如表二所示。經過比對後可以發現，表一和表二各點數和出現的次數是一樣的。

表一　兩顆正常的骰子所擲出點數和

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

表二　兩顆 Sicherman Dice 所擲出點數和

	1	**2**	**2**	**3**	**3**	**4**
1	2	3	3	4	4	5
3	4	5	5	6	6	7
4	5	6	6	7	7	8
5	6	7	7	8	8	9
6	7	8	8	9	9	10
8	9	10	10	11	11	12

(2) 生成函數(Generating Function)

在許多參考文獻中，一個標準的6面骰子，可以用生成函數 $f(x)$ 來表示

$$f(x)=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x) \qquad (1)$$

其中 x 的次方項係數，表示此一點數出現的次數。如

cx^b 表示 b 點出現 c 次。

因此，2個標準的六面骰子所擲出的點數和，則可以以兩個(1)式相乘來表示

$$(f(x))^2=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)^2$$

$$=(x^{12}+2x^{11}+3x^{10}+4x^9+5x^8+6x^7+5x^6+4x^5+3x^4+2x^3+x^2) \qquad (2)$$

比對表一、表二及(2)式，發現可以利用多項式相乘及指數相加的特性來描述投擲骰子所出現點數和的情形。

(3) 生成函數的條件

由(2)中生成函數的討論可以得知，如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 分別代表Sicherman 所發現的兩個6面非正常骰子，則 $g(x)$ 和 $h(x)$ 相乘必然等於(2)式。

$$(f(x))^2=g(x)h(x)$$

再利用Derive 6對 $f(x)$ 做因式分解，可以得到

$$f(x)=x(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$$

$$g(x)h(x)=x^2(x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^2+x+1)^2 \qquad (3)$$

在求 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的過程中，有兩個重要的條件，必須提出討論：

(ii) 由於 $g(x)$ 和 $h(x)$ 中出現的最小點數必爲1，所以 $g(x)$ 和 $h(x)$ 中各僅有一個 x 項。否則其中便會出現點數爲0的情形

(iii)由標準六面骰子的生成函數 $f(x)$ 可知， $f(1)=6$ 。即 $f(1)$ 代表骰子的面數

所以 $g(1)=h(1)=6$ 且 $g(1)h(1)=2^2\times3^2$ 。其中2是由 $(x+1)$ 所產生， 3則是由

x^2+x+1所產生。因此 $g(x)$ 和 $h(x)$ 中僅各有一個 $(x+1)$ 及 (x^2+x+1) 項。對照 (3) 式， $g(x)$ 和 $h(x)$ 各分得一個 $x,(x+1)$ 及 (x^2+x+1) 項，僅剩下 $(x^2-x+1)^2$ 項尚未討論：

(i) 如果 $g(x)$ 和 $h(x)$ 各分得一個 (x^2-x+1) 項，對照生成函數 $f(x)$ 可知，$g(x)$ 和 $h(x)$ 爲標準 6 面骰子。

(ii) 如果 $g(x)$ 分得 $(x^2-x+1)^2$ 項，而 $h(x)$ 沒有分配到任何 (x^2-x+1) 項，則

$$g(x)=x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2=x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x$$

$$h(x)=x(x+1)(x^2+x+1)=x^4+2x^3+2x^2+x$$

$g(x)$ 和 $h(x)$ 正是Sicherman 所發現的一對非正常 6 面骰子。[註二]

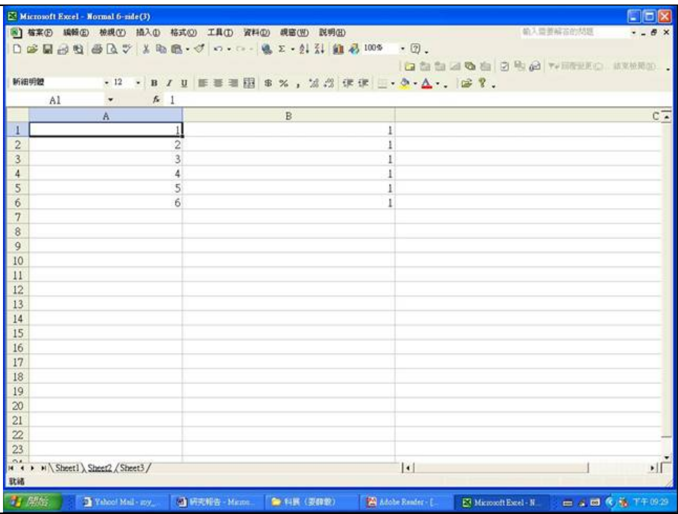
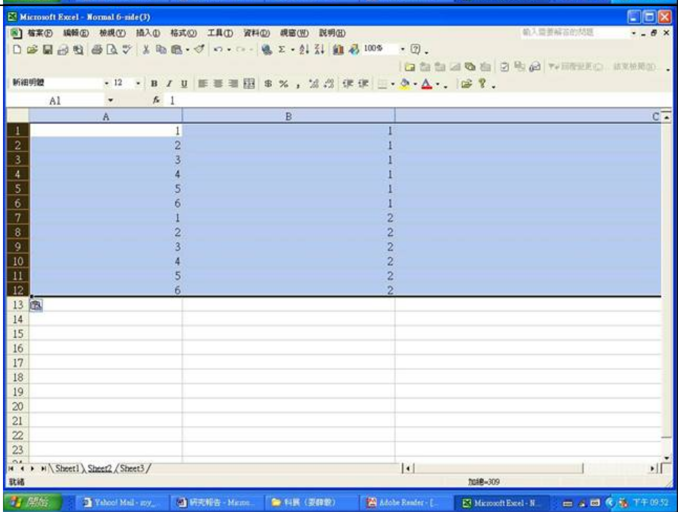
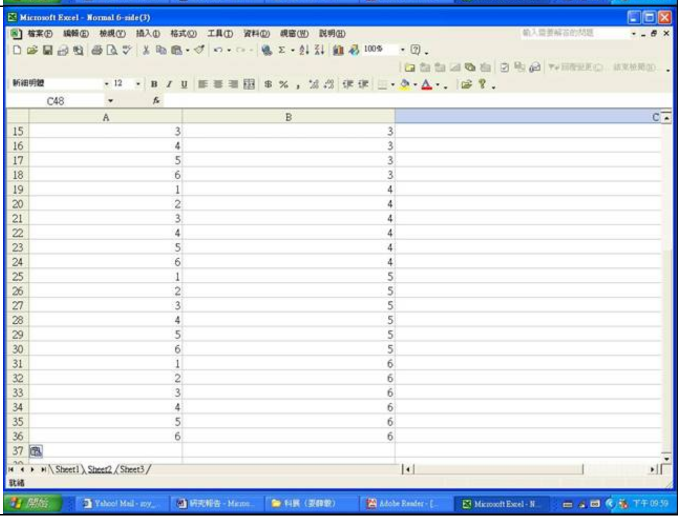
由以上的討論，將以生成函數 $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 中出現的最小點數必爲1及 $f(1)$ 代表骰子的面數等原則來進行問題的探討。

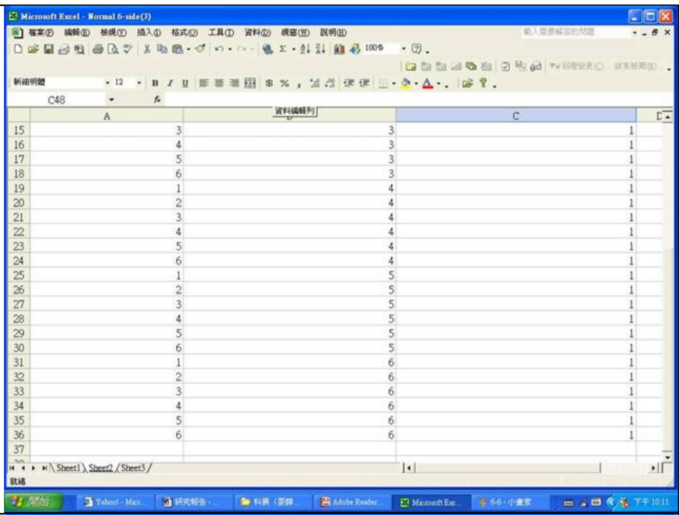
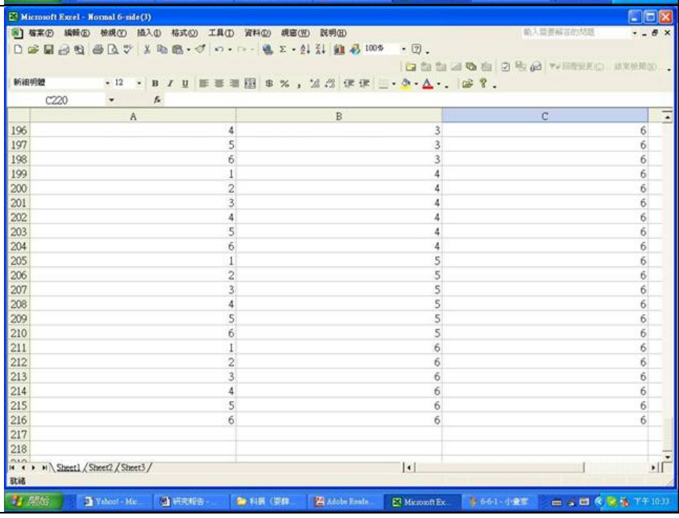
[註二] 如果將Sicherman Dice 的其中一組骰子 (如 $g(x)$) 所有的點數都加1，則點數組合成爲 $(2,4,5,6,7,9)$，另一組骰子 (如 $h(x)$) 所有的點數都減1，則點數組合成爲 $(0,1,1,2,2,3)$ 。將這兩組新的骰子點數代入表二，表二點數和的出現次數依然不變 ($g(x)$ 所有的點數都減1， $h(x)$ 所有的點數都加1，亦成立) 。因此點數爲 0 (或負數) 的情形是可以藉由加減法來產生，其組合爲無窮多組。這也是不考慮骰子任一面點數爲 0 或負數的原因。

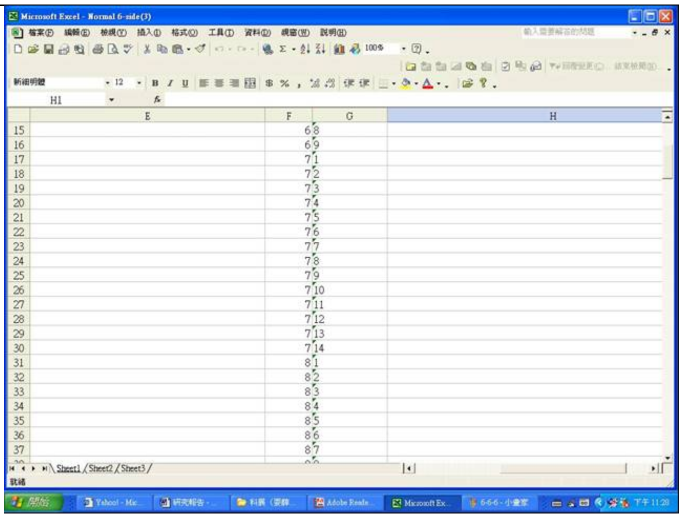
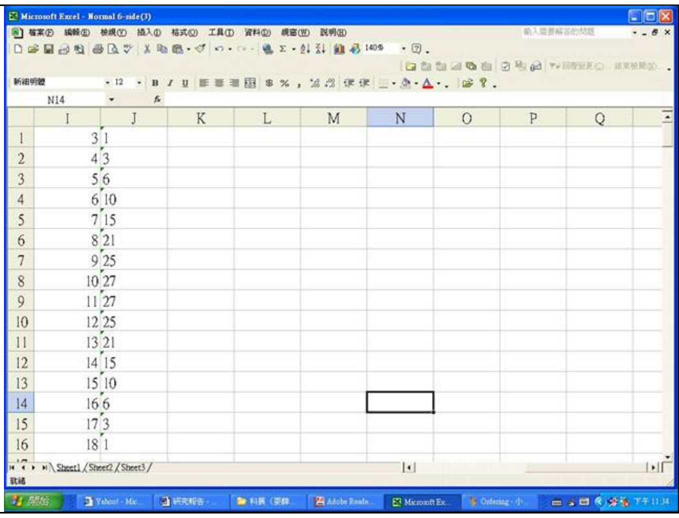
2. 尋求計算「Sicherman Dice 的組合和正常的骰子有相同的出現機率」的方法

由表一和表二的計算，可以知道正常的骰子和Sicherman Dice 所擲出點數和出現的次數是相同的。但是如果討論的骰子個數更多或面數更多，是否有較簡便及有效率的方法，來計算各種點數和的出現次數，藉以驗證其他Sicherman Dice 的組合有和正常的骰子有相同的出現機率？由於Microsoft Excel 有加法及排序的功能，藉由排列組合的安排，以下的方法，可以解決上述的問題。表三將藉由計算 3 顆 6 面標準骰子各點數和出現的次數，來說明這個計算方法的步驟。任何個數及面數(點數)骰子的點數和出現的次數都可利用這個方法來計算。

表三　使用 Microsoft Excel 來計算3顆6面標準骰子各點數和出現的次數

步驟	圖示	說明
(一)		開啓一個 Excel 的新檔案，將 1 至 6 分別填入 A1 至 A6，B1 至 B6 則填入 1。
(二)		將 1 至 6 列複製並貼至 7 至 12 列，並將 B7 至 B12 則填入 2。
(三)		依照(二)的方式將 1 至 6 列複製並依序貼至 13 至 36 列，並將 B13 至 B36，以 6 列爲單位分別則填入 3 至 6。

(四)		將 C1 至 C36 填入 1。
(五)		將 1 至 36 列複製並依序貼至 37 至 216 列，並將 C37 至 C216，以 36 列為單位分別則填入 2 至 6。此 216 列代表 3 顆 6 面標準骰子所有擲出點數的組合。
(六)		將 D 行做函數運算，即 D1=A1+B1+C, D2=A2+B2+C2,…, D216=A216+B216+C216, D 行代表 3 顆 6 面標準骰子所有擲出點數組合的和。
(七)		將 D 行複製並以「值」的方式貼至另一行(如 F 行)，再將 F 行的值做「遞增排序」。則 Excel 會將(六)中的點數和，以小到大排列。

<table>
<tr><td>(八)</td><td>
</td><td>將 G 行的儲存格內容改為「文字」。在 F 行各排序數字中的第一個數字所對應的 G 行的儲存格輸入 1，再將此一儲存格向下拉至最後一個數字所對應的 G 行的儲存格。以 7 為例，第一個 7 出現在 F17，則在 G17 填入 1，並將 G17 向下拉至 G30(最後一個 7 出現在 F30)，此時 G30 出現的數字是 14，由此可得知：7 一共出現 14 次。</td></tr>
<tr><td>(九)</td><td>
</td><td>將各數字出現的次數加以整理，便可得到 3 顆 6 面標準骰子各點數和出現的次數。</td></tr>
<tr><td>(十)</td><td></td><td>依照(一)至(九)的方法，可以算出任何點數、個數、面數骰子的組合。如果任兩種組合，其結果相同，則可以判定這兩種組合有相同的點數出現機率。</td></tr>
</table>

參、研究結果與討論

一、證明Sicherman 結論的真偽

1. 尋找3顆6面的Sicherman Dice

依據第二章的研究方法，尋找3顆6面的Sicherman Dice ，其擲出的點數和會和3顆標準6面骰子相同。假設3顆6面的Sicherman Dice ，其生成函數分別爲 $f(x), g(x), h(x)$ ，標準6面骰子的生成函數爲 $(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$ 。

$$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=x^3(x+1)^3(x^2+x+1)^3(x^2-x+1)^3 \qquad (4)$$

$$f(x)=x(x+1)^a(x^2+x+1)^b(x^2-x+1)^c$$

$$g(x)=x(x+1)^d(x^2+x+1)^e(x^2-x+1)^f$$

$$h(x)=x(x+1)^{3-(a+d)}(x^2+x+1)^{3-(b+e)}(x^2-x+1)^{3-(c+f)}$$

a,b,c,d,e,f 爲整數， $0\le a,b,c,d,e,f\le 3$

由第二章「生成函數的條件」（ $f(x)$, $g(x)$ 和 $h(x)$ 中出現的最小點數必爲1及 $f(1), g(1), h(1)$ 代表骰子的面數)求得

$$f(1)=2^a\cdot 3^b=6$$

$$g(1)=2^d\cdot 3^e=6 \qquad (5)$$

$$h(1)=2^{3-(a+d)}\cdot 3^{3-(b+e)}=6$$

由(5)的聯立方程式求得 $a=b=d=e=1$ (6)

接著討論 c 和 f ，由於 $0\le c,f\le 3$ ，$c(=0,1,2,3)$ 和 $f(=0,1,2,3)$ 一共有16種 (4×4) 組合

(1) $c=1, f=1$ (7)

由(6)和(7) 求得

$$f(x)=g(x)=h(x)=x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$$

$f(x), g(x), h(x)$ 爲標準六面骰子

(2) $c=2, f=1$ (8)

由於 $c=2, f=1$ 和 $(c=1, f=2)$,$(c=1, f=0)$,$(c=0, f=1)$,$(c=0, f=2)$,$(c=2, f=0)$ 有相同的解，故一起討論。

由(6)和(8) 求得

$$f(x)=x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x$$

$$g(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x$$

$$h(x)=x^4+2x^3+2x^2+x$$

即 $f(x), g(x), h(x)$ 為一組標準六面骰子與Sicherman 所發現的一對非正常6面骰子的組合。

(3) $c=3, f=0$ (9)

由於 $c=3, f=0$ 和 $(c=0, f=3)$, $(c=0, f=0)$ 有相同的解。這幾組的解都會讓 $f(x), g(x), h(x)$ 中出現

$$x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^3$$
$$=x^{10}-x^9+2x^8+x^6+x^5+2x^3-x^2+x \qquad (10)$$

由 (10) 可以發現，雖然 $x=1$ 代入後其值為6 ，但與先前所設定所有係數必須大於或等於零的條件不符合，所以這類的解不列入考慮。為了方便起見，在之後的運算中，如果出現這類的解，皆以「出現負項」表示，並自動將這類的解去除。

(4) $c=2, f=2$ (11)

由於 $c=2, f=2$ 和 $(c=3, f=3)$, $(c=2, f=3)$, $(c=3, f=2)$, $(c=1, f=3)$, $(c=3, f=1)$ 都會使 $3-(c+f)<0$ ，所以這類的解不列入考慮。

由(1)至(4)討論中發現，在3顆6面骰子的組合中，的確無法再找到另一組不同於Sicherman 所發現的Sicherman Dice 。

2. 尋找4顆6面的Sicherman Dice

假設4顆6面的Sicherman Dice ，其生成函數分別為 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ ，6面骰子的生成函數為 $(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$

$$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\cdot i(x)=x^4(x+1)^4(x^2+x+1)^4(x^2-x+1)^4$$
$$f(x)=x(x+1)^a(x^2+x+1)^b(x^2-x+1)^c$$
$$g(x)=x(x+1)^d(x^2+x+1)^e(x^2-x+1)^f$$
$$h(x)=x(x+1)^g(x^2+x+1)^h(x^2-x+1)^i$$
$$i(x)=x(x+1)^{4-(a+d+g)}(x^2+x+1)^{4-(b+e+h)}(x^2-x+1)^{4-(c+f+i)}$$

a,b,c,d,e,f,g,h,i 為整數， $0\le a,b,c,d,e,f,g,h,i\le 4$

由「生成函數的條件」求得

$$\left.\begin{aligned} f(1)&=2^a\cdot 3^b=6\\ g(1)&=2^d\cdot 3^e=6\\ h(1)&=2^g\cdot 3^h=6\\ i(1)&=2^{4-(a+d+g)}\cdot 3^{4-(b+e+h)}=6 \end{aligned}\right. \qquad (12)$$

由 (12) 的聯立方程式求得 $a=b=d=e=g=h=1$ (13)

接著討論$c, f, i,$由於$0 \le c, f, i \le 4$,$c(=0,1,2,3,4)$, $f(=0,1,2,3,4)$,$i(=0,1,2,3,4)$一共有125種($(5\times5\times5)$組合。依據上一節尋求3顆6面的Sicherman Dice的經驗，可以先行去除一些讓 $4-(c+f+i)<0$的組合，並將有相同解的組合合併討論。

(1) $c=1, f=1, i=1,$ (14)

(13)和(14) 求得

$f(x)=g(x)=h(x)=i(x)=x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$

即$f(x),g(x),h(x),i(x)$爲標準6面骰子

(2) $c=2, f=1, i=1,$ (15)

由於$c=2, f=1, i=1,$和$(c=2, f=0, i=1)$, $(c=2, f=1, i=0)$, $(c=1, f=2, i=1)$, $(c=0, f=2, i=1)$, $(c=1, f=2, i=0)$, $(c=1, f=1, i=2)$, $(c=0, f=1, i=2)$, $(c=1, f=0, i=2)$, $(c=0, f=1, i=1)$, $(c=1, f=0, i=1)$, $(c=1, f=1, i=0)$,有相同的解，所以一起討論。

(13)和(15) 求得

$f(x)=x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x$

$g(x)=h(x)=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x$

$i(x)=x^4+2x^3+2x^2+x$

即$f(x),g(x),h(x),i(x)$爲2個標準6面骰子與Sicherman所發現的一對非正常6面骰子的組合

(3) $c=2, f=2, i=0,$ (16)

由於 $c=2, f=2, i=0,$ 和 $(c=2, f=0, i=2)$, $(c=0, f=2, i=2)$, $(c=2, f=0, i=0)$, $(c=0, f=2, i=0)$, $(c=0, f=0, i=2)$,有相同的解，所以一起討論。

(16)和(13) 求得

$f(x)=g(x)=x^8+x^6+x^5+x^4+x^3+x$

$h(x)=i(x)=x^4+2x^3+2x^2+x$

即$f(x),g(x),h(x),i(x)$爲兩對Sicherman所發現的非正常6面骰子的組合

(4) $c=3, f=1, i=0,$ (17)

由於 $c=3, f=1, i=0,$ 和 $(c=3, f=0, i=1)$, $(c=1, f=3, i=0)$, $(c=0, f=3, i=1)$, $(c=1, f=0, i=3)$, $(c=0, f=1, i=3)$, $(c=0, f=1, i=0)$, $(c=0, f=0, i=1)$, $(c=1, f=0, i=0)$, $(c=0, f=3, i=0)$, $(c=3, f=0, i=0)$, $(c=0, f=1, i=0)$,有相同的解，所以一起討論。

由(10)得知

$x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^3$

$=x^{10}-x^9+2x^8+x^6+x^5+2x^3-x^2+x$

以上的組合，皆會使$f(x),g(x),h(x),i(x)$中的某一式「出現負項」，因此這些

解並不符合需求。

(5) $c=4, f=0, i=0,$ (18)

由於 $c=4, f=0, i=0,$ 和 $(c=0, f=4, i=0),$ $(c=0, f=0, i=4),$ $(c=0, f=0, i=0),$ 有相同的解，所以一起討論。

由 *Derive* 6 的運算得知

$x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^4$

$=x^{12}-2x^{11}+4x^{10}-3x^9+3x^8+3x^5-3x^4+4x^3-2x^2+x$ (19)

以上的組合，皆會使 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ 中的某一式「出現負項」，因此這些解並不符合需求。

由(1)至(5)討論中發現，在4顆標準6面骰子的組合中，的確無法再找到另一組不同於Sicherman 所發現的Sicherman Dice。

3. 尋找5顆6面的Sicherman Dice

在 1. 與 2. 的運算過程中發現以下的現象：

(1) $(x^2-x+1)^n$ $n>2$ (n 爲整數) (20)

無論 n 爲任何整數，(20) 式一定會「出現負項」。同時發現

$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$ (21)

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$ (22)

(2) 尋找第三組Sicherman Dice 的關鍵，在於 $(x^2-x+1)^n$ 的討論。Sicherman 所發現的兩組Sicherman Dice，n 的値分別爲 0 和 2。由 (10) 及 (19) 的現象，大膽地推論，多個Sicherman Dice 的生成函數

$x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^n$ (23)

當 $n>2$ 時，必然會「出現負項」。理由是當 $n>2$ 時，生成函數已經沒有 $(x+1)$ 或 (x^2+x+1) 來「消去」(x^2-x+1) 項，使其不產生負項。

此處，可以利用下列的方法來證明我的推論，稱爲「**負項係數證明法**」:

當 $n\geq 3$ 時，$f(x)=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^n$ 的展開式

$a_{2n+3}x^{2n+3}+a_{2n+2}x^{2n+2}+\bullet\bullet\bullet+a_1x+a_0$ 的係數不可能全爲正數

證明：

如果 $a_{2n+3}x^{2n+3}+a_{2n+2}x^{2n+2}+\bullet\bullet\bullet+a_1x+a_0$ 的每一項係數都是正數，則對於一個大於 0 的數 k，$f(k)>f(-k)$，即 $\dfrac{f(-k)}{f(k)}<1$。

因此 $\dfrac{(1-k)(k^2-k+1)(k^2+k+1)^n}{(1+k)(k^2+k+1)(k^2-k+1)^n}<1$，所以 $\dfrac{(1-k)(k^2+k+1)^{n-1}}{(1+k)(k^2-k+1)^{n-1}}<1$。

令 $k=\frac{1}{3}$，$\frac{(\frac{2}{3})}{(\frac{4}{3})}(\frac{\frac{13}{9}}{\frac{7}{9}})^{n-1}<1$，即 $\frac{1}{2}(\frac{13}{7})^{n-1}<1$，也就是 $(\frac{13}{7})^{n-1}<2$。

因爲 $n\ge 3$，所以 $n-1\ge 2$。我可以得到 $(\frac{13}{7})^{2}<(\frac{13}{7})^{n-1}<2$，即 $(\frac{169}{49})<2$。此處產生矛盾，所以 $f(x)=(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^n$ 的展開式的係數不可能全爲正數。

綜合以上的現象與推論，尋找 5 顆 6 面的 Sicherman Dice，即是對 5 個生成函數中的 $(x^2-x+1)^n$ 項來的討論。對 5 個生成函數的 $(x^2-x+1)^n$ 項而言，其符合規定的分配模式如表四

表四　生成函數的 $(x^2-x+1)^n$ 項分配與結果

5 個生成函數中 $(x^2-x+1)^n$ 的 n 值分配	結果說明
(1,1,1,1,1)	5 個標準六面骰子
(2,1,1,1,0)	3 個標準六面骰子，與 Sicherman 所發現的一對非正常六面骰子的組合
(2,2,1,0,0)	1 個標準六面骰子，與兩對 Sicherman 所發現的非正常六面骰子的組合

至於尋找 6 顆(及以上) 6 面的 Sicherman Dice，雖然組合數增加，但始終無法突破 (23) 式中，當 $n>2$ 時，必然會「出現負項」的限制。6 顆(及以上) 6 面的 Sicherman Dice，也僅限於標準 6 面骰子與 Sicherman 所發現的非正常 6 面骰子的組合，無法再找到另一組不同於 Sicherman 所發現的 Sicherman Dice。

4. 尋找 2 顆 4 面的 Sicherman Dice

假設 2 顆 4 面的 Sicherman Dice，其生成函數分別爲 $f(x), g(x)$, 標準 4 面骰子的生成函數爲 $(x^4+x^3+x^2+x)=x(x+1)(x^2+1)$

$$f(x)\cdot g(x)=x^2(x+1)^2(x^2+1)^2 \qquad (24)$$

$$f(x)=x(x+1)^a(x^2+1)^b$$

$$g(x)=x(x+1)^{2-a}(x^2+1)^{2-b}$$

a,b 爲整數，$0\le a,b\le 2$

由「生成函數的條件」求得

$$f(1)=2^{a}\cdot 2^{b}=4$$
$$g(1)=2^{4-(a+b)}=4 \qquad (25)$$

由(25)的聯立方程式求得 $a+b=2$ (26)

接著討論 a 和 b

(1) $a=1,b=1$ (27)

由(24)和(27) 求得

$$f(x)=g(x)=x(x+1)(x^{2}+1)$$
$$=(x^{4}+x^{3}+x^{2}+x)$$

$f(x),g(x)$ 爲標準4面骰子

(2) $a=2,b=0$ (28)

由於 $a=2,b=0$ 和 $a=0,b=2$ 有相同的解，所以一起討論。

由(24)和(28) 求得

$$f(x)=x(x+1)^{2}=x^{3}+2x^{2}+x \qquad (29)$$
$$g(x)=x(x^{2}+1)^{2}=x^{5}+2x^{3}+x \qquad (30)$$

$f(x),g(x)$ 爲一組非標準4面骰子的Sicherman Dice。其點數分別爲 $(1,2,2,3)$ 及 $(1,3,3,5)$。

5. 尋找3顆4面的Sicherman Dice

假設3顆4面的Sicherman Dice，其生成函數分別爲 $f(x),g(x),h(x)$，標準四面骰子的生成函數爲 $(x^{4}+x^{3}+x^{2}+x)=x(x+1)(x^{2}+1)$

$$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=x^{3}(x+1)^{3}(x^{2}+1)^{3} \qquad (31)$$
$$f(x)=x(x+1)^{a}(x^{2}+1)^{b}$$
$$g(x)=x(x+1)^{c}(x^{2}+1)^{d}$$
$$h(x)=x(x+1)^{3-(a+c)}(x^{2}+1)^{3-(b+d)}$$

a,b,c,d 爲整數，$0\le a,b,c,d\le 3$

由「生成函數的條件」求得

$$f(1)=2^{a}\cdot 2^{b}=4$$
$$g(1)=2^{c}\cdot 2^{d}=4 \qquad (32)$$
$$h(1)=2^{3-(a+c)}\cdot 2^{3-(b+d)}=4$$

由(32)的聯立方程式求得 $a+b=2$，c+d = 2 (33)

接著討論 a,b,c,d 的9種組合((a,b))有3種組合 $(2,0),(1,1),(0,2)$，(c,d) 亦同)，先去除 $a+b$>3，c+d>3的情形，並將有相同解的組合合併討論

(1) $a=b=c=d=1$ (34)

求得

$f(x)=g(x)=h(x)=x(x+1)(x^2+1)=(x^4+x^3+x^2+x)$

即 $f(x),g(x),h(x)$ 爲標準4面骰子

(2) $a=2,b=0,c=d=1$ (35)

由於 $a=2,b=0,c=d=1$ 和 $(a=0,b=2,c=d=1)$ ， $(a=b=1,c=0,\ d=2)$ ， $(a=b=1,c=2,\ d=0)$，$(a=0,\ b=2,\ c=2,\ d=0)$，$(a=2,\ b=0,\ c=0,\ d=2)$ 有相同的解，所以一起討論

求得

$f(x)=x(x+1)^2=x^3+2x^2+x$

$g(x)=x(x+1)(x^2+1)=(x^4+x^3+x^2+x)$

$h(x)=x(x^2+1)^2=x^5+2x^3+x$

即 $f(x),g(x),h(x)$ 爲一組標準4面骰子與先前由(29) (30)所發現的一對非標準4面骰子的組合。

6. 尋找4顆4面的Sicherman Dice

假設4顆4面的Sicherman Dice，其生成函數分別爲 $f(x),g(x),h(x),i(x)$,標準4面骰子的生成函數爲 $(x^4+x^3+x^2+x)=x(x+1)(x^2+1)$

$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)\cdot i(x)=x^4(x+1)^4(x^2+1)^4$ (36)

$f(x)=x(x+1)^a(x^2+1)^b$

$g(x)=x(x+1)^c(x^2+1)^d$

$h(x)=x(x+1)^e(x^2+1)^f$

$i(x)=x(x+1)^{4-(a+c+e)}(x^2+1)^{4-(b+d+f)}$

a,b,c,d,e,f 爲整數， $0\le a,b,c,d,e,f\le 4$

由「生成函數的條件」求得

$$\begin{aligned}
f(1)&=2^a\cdot 2^b=4\\
g(1)&=2^c\cdot 2^d=4\\
h(1)&=2^e\cdot 2^f=4\\
i(1)&=2^{4-(a+c+e)}\cdot 2^{4-(b+d+f)}=4
\end{aligned}\qquad (37)$$

由(37)的聯立方程式求得 $a+b=2$, c+$d=2$, e+f $=2$ ，其組合共有27組((a,b))有3種組合 $(2,0),(1,1),(0,2)$, $(c,d),(e,f)$ 亦同)。由上述 5. 的推演，a,b,c,d,e,f 的最大值爲2。因此所有的解只能分爲以下三種類型

(1) $a=b=c=d=e=f=1$

$f(x), g(x), h(x), i(x)$ 為4個標準4面骰子。

(2) $a=2, b=0, \mathrm{c}=0, \mathrm{d}=2, \mathrm{e}=f=1$

$f(x), g(x), h(x), i(x)$ 為2個標準4面骰子與(29) (30)所發現的一對非標準4面骰子的組合

(3) $a=2, b=0, \mathrm{c}=0, \mathrm{d}=2, \mathrm{e}=2, f=0$

即 $f(x), g(x), h(x), i(x)$ 為兩對(29) (30)所發現的非標準4面骰子的組合。

至於尋找5顆(及以上) 4面的Sicherman Dice，雖然組合數增加，但始終無法突破「生成函數中的各項，其次方數最大值為2」的限制。5顆(及以上) 4面的Sicherman Dice，也僅限於標準4面骰子與(29) (30)所發現的非正常4面骰子的組合，無法再找到另一組不同於(29) (30)所發現的Sicherman Dice。

7. 尋找2顆8面的Sicherman Dice

假設2顆8面的Sicherman Dice，其生成函數分別為 $f(x), g(x)$, 標準8面骰子的生成函數為 $(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)=x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$。

$$f(x)\cdot g(x)=x^2(x+1)^2(x^2+1)^2(x^4+1)^2 \qquad (38)$$

$$f(x)=x(x+1)^t(x^2+1)^u(x^4+1)^v$$

$$g(x)=x(x+1)^{2-t}(x^2+1)^{2-u}(x^4+1)^{2-v}$$

t,u,v 為整數， $0\le t,u,v\le 2$

由「生成函數的條件」求得

$$\begin{aligned} f(1)&=2^t\cdot 2^u\cdot 2^v=8 \\ g(1)&=2^{6-(t+u+v)}=8 \end{aligned} \qquad (39)$$

由(39)的聯立方程式求得 $t+u+v=3 \qquad (40)$

接著討論 t,u,v，共有10種組合, ((t,u,v)=(1,1,1),(2,1,0),(2,0,1),(3,0,0),(0,2,1), (0,1,2),(0,3,0),(0,0,3),(1,2,0),(1,0,2), 先去除 t,u,v>3 的情形，並將有相同解的組合合併討論

(1) $t=u=v=1 \qquad (41)$

求得

$$f(x)=g(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$$

$$=(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$$

即 $f(x), g(x)$ 為標準8面骰子

(2) $t=2, u=1, v=0 \qquad (42)$

由於 $t=2, u=1, v=0$ 和 $t=0, u=1, v=2$ 有相同的解，所以一起討論。

求得

$$f(x)=x(x+1)^2(x^2+1)=(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x) \qquad (43)$$

$$g(x)=x(x^2+1)(x^4+1)^2=(x^{11}+x^9+2x^7+2x^5+x^3+x) \qquad (44)$$

即 $f(x),g(x)$ 為一對非標準8面骰子的Sicherman Dice 。其點數分別為 $(1,2,2,3,3,4,4,5)$ 及 $(1,3,5,5,7,7,9,11)$

(3) $t=2,\ u=0,\ v=1$ (45)

由於 $t=2,\ u=0,\ v=1$ 和 $t=0,\ u=2,\ v=1$ 有相同的解，所以一起討論。

求得

$$f(x)=x(x+1)^2(x^4+1)=(x^7+2x^6+x^5+x^3+2x^2+x) \qquad (46)$$

$$g(x)=x(x^2+1)^2(x^4+1)=(x^9+2x^7+2x^5+2x^3+x) \qquad (47)$$

即 $f(x),g(x)$ 為第2對非標準8面骰子的Sicherman Dice 。其點數分別為 $(1,2,2,3,5,6,6,7)$ 及 $(1,3,3,5,5,7,7,9)$

(4) $t=1,\ u=2,\ v=0$ (48)

由於 $t=1,\ u=2,\ v=0$ 和 $t=1,\ u=0,\ v=2$ 有相同的解，所以一起討論。

求得

$$f(x)=x(x+1)(x^4+1)^2=(x^{10}+x^9+2x^6+2x^5+x^2+x) \qquad (49)$$

$$g(x)=x(x+1)(x^2+1)^2=(x^6+x^5+2x^4+2x^3+x^2+x) \qquad (50)$$

即 $f(x),g(x)$ 為第3對非標準8面骰子的Sicherman Dice 。其點數分別為 $(1,2,5,5,6,6,9,10)$ 及 $(1,2,3,3,4,4,5,6)$

由1至4討論中發現，在2顆標準8面骰子的組合中，可以找到3對完全不同的Sicherman Dice 。

8. 尋找3顆8面的Sicherman Dice

假設3顆8面的Sicherman Dice ，其生成函數分別為 $f(x),g(x),h(x)$,

$$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=x^3(x+1)^3(x^2+1)^3(x^4+1)^3 \qquad (51)$$

$$f(x)=x(x+1)^a(x^2+1)^b(x^4+1)^c$$

$$g(x)=x(x+1)^d(x^2+1)^e(x^4+1)^f$$

$$h(x)=x(x+1)^{3-(a+d)}(x^2+1)^{3-(b+e)}(x^4+1)^{3-(c+f)}$$

a,b,c,d,e,f 為整數， $0\le a,b,c,d,e,f\le 3$

由「生成函數的條件」求得

$$\begin{aligned} f(1)&=2^a\cdot 2^b\cdot 2^c=8\\ g(1)&=2^d\cdot 2^e\cdot 2^f=8 \qquad (52)\\ h(1)&=2^{3-(a+d)}\cdot 2^{3-(b+e)}\cdot 2^{3-(c+f)}=8 \end{aligned}$$

由((52)的聯立方程式求得 $a+b+c=3$, d+e+f $=3$ (53)

接著討論 a,b,c,d,e,f 的100種組合(由(40)式可以得知(a,b,c)共有10種組合，(d,e,f)亦同)，先去除 $a+d$>3 , b+e>3, c+f>3的情形，並將有相同解的組合合併討論。一共得到10種不同組合

(1) $f(x)=x(x^2+1)^3=(x^7+3x^5+3x^3+x)$

$g(x)=x(x^4+1)^3=(x^{13}+3x^9+3x^5+x)$

$h(x)=x(x+1)^3=(x^4+3x^3+3x^2+x)$

其點數分別爲 $(1,3,3,3,5,5,5,7)$, $(1,5,5,5,9,9,9,13)$, $(1,2,2,2,3,3,3,4)$

(2) $f(x)=x(x^2+1)^3=(x^7+3x^5+3x^3+x)$

$g(x)=x(x+1)(x^4+1)^2=(x^{10}+x^9+2x^6+2x^5+x^2+x)$

$h(x)=x(x+1)^2(x^4+1)=(x^7+2x^6+x^5+x^3+2x^2+x)$

其點數分別爲 $(1,3,3,3,5,5,5,7)$, $(1,2,5,5,6,6,9,10)$, $(1,2,2,3,5,6,6,7)$

(3) $f(x)=x(x^4+1)^3=(x^{13}+3x^9+3x^5+x)$

$g(x)=x(x+1)(x^2+1)^2=(x^6+x^5+2x^4+2x^3+x^2+x)$

$h(x)=x(x+1)^2(x^2+1)=(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x)$

其點數分別爲 $(1,5,5,5,9,9,9,13)$, $(1,2,3,3,4,4,5,6)$, $(1,2,2,3,3,4,4,5)$

(4) $f(x)=x(x^2+1)(x^4+1)^2=(x^{11}+x^9+2x^7+2x^5+x^3+x)$

$g(x)=x(x^2+1)^2(x^4+1)=(x^9+2x^7+2x^5+2x^3+x)$

$h(x)=x(x+1)^3=(x^4+3x^3+3x^2+x)$

其點數分別爲 $(1,3,5,5,7,7,9,11)$, $(1,3,3,5,5,7,7,9)$, $(1,2,2,2,3,3,3,4)$

(5) $f(x)=x(x^2+1)(x^4+1)^2=(x^{11}+x^9+2x^7+2x^5+x^3+x)$

$g(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$

$h(x)=x(x+1)^2(x^2+1)=(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x)$

其點數分別爲 $(1,3,5,5,7,7,9,11)$, $(1,2,3,4,5,6,7,8)$, $(1,2,2,3,3,4,4,5)$

(6) $f(x)=x(x^2+1)(x^4+1)^2=(x^{11}+x^9+2x^7+2x^5+x^3+x)$

$g(x)=x(x+1)(x^2+1)^2=(x^6+x^5+2x^4+2x^3+x^2+x)$

$h(x)=x(x+1)^2(x^4+1)=(x^7+2x^6+x^5+x^3+2x^2+x)$

其點數分別爲 $(1,3,5,5,7,7,9,11)$, $(1,2,3,3,4,4,5,6)$, $(1,2,2,3,5,6,6,7)$

(7) $f(x)=x(x^2+1)^2(x^4+1)=(x^9+2x^7+2x^5+2x^3+x)$

$g(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$

$h(x)=x(x+1)^2(x^4+1)=(x^7+2x^6+x^5+x^3+2x^2+x)$

其點數分別爲 $(1,3,3,5,5,7,7,9)$, $(1,2,3,4,5,6,7,8)$, $(1,2,2,3,5,6,6,7)$

(8) $f(x)=x(x^2+1)^2(x^4+1)=(x^9+2x^7+2x^5+2x^3+x)$

$g(x)=x(x+1)(x^4+1)^2=(x^{10}+x^9+2x^6+2x^5+x^2+x)$

$h(x)=x(x+1)^2(x^2+1)=(x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x)$

其點數分別為 $(1,3,3,5,5,7,7,9)$, $(1,2,5,5,6,6,9,10)$, $(1,2,2,3,3,4,4,5)$

(9) $f(x)=g(x)=h(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$

$$=(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$$

$f(x),g(x),h(x)$ 為標準8面骰子

(10) $f(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)=(x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$

$g(x)=x(x+1)(x^4+1)^2=(x^{10}+x^9+2x^6+2x^5+x^2+x)$

$h(x)=x(x+1)(x^2+1)^2=(x^6+x^5+2x^4+2x^3+x^2+x)$

其點數分別為 $(1,2,3,4,5,6,7,8)$, $(1,2,5,5,6,6,9,10)$, $(1,2,3,3,4,4,5,6)$

在3顆標準8面骰子的組合中，可以找到10對(每對3組)Sicherman Dice。但是，經過仔細的觀察比對後，其中許多對是由標準8面骰子與在2顆標準8面骰子的組合中曾經出現的Sicherman Dice(如(43),(44),(46),(47),(49),(50))所組合而成。因此，真正符合原則(即未曾在2顆的組合中出現過)的Sicherman Dice，僅有4組(即上述的(1) (2)(3)(4))。

9. 尋找12面的Sicherman Dice

由2顆8面Sicherman Dice的推演，可以預期2顆12面的Sicherman Dice的組合可能更多。由於，本研究的目的不在於找到所有可能的Sicherman Dice。因此，嘗試轉換另一種方式，來驗證Sicherman的推論是否正確。如果可以找到3顆12面的Sicherman Dice中的某一組，並證明其不同於2顆12面的Sicherman Dice，即證明Sicherman的推論並不適用於12面的骰子。

假設3顆12面的Sicherman Dice，其生成函數分別為 $f(x),g(x),h(x),$

$$f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)=(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)^3 \quad (54)$$

$$=x^3(x+1)^3(x^2+1)^3(x^2+x+1)^3(x^2-x+1)^3(x^4-x^2+1)^3$$

$$f(x)=x(x+1)^a(x^2+1)^b(x^2+x+1)^c(x^2-x+1)^d(x^4-x^2+1)^e \quad (55)$$

$$g(x)=x(x+1)^f(x^2+1)^g(x^2+x+1)^h(x^2-x+1)^i(x^4-x^2+1)^j \quad (56)$$

$$h(x)=x(x+1)^{3-(a+f)}(x^2+1)^{3-(b+g)}(x^2+x+1)^{3-(c+h)}(x^2-x+1)^{3-(d+i)}(x^4-x^2+1)^{3-(e+j)}$$

a,b,c,d,e,f,g,h,i,j 為整數， $0\le a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\le 3$

由「生成函數的條件」求得

$$f(1)=2^a\cdot 2^b\cdot 3^c=12$$
$$g(1)=2^f\cdot 2^g\cdot 3^h=12 \quad (57)$$
$$h(1)=2^{3-(a+f)}\cdot 2^{3-(b+g)}\cdot 3^{3-(c+h)}=12$$

由(57)的聯立方程式求得 $a+b=2$, f+g = 2, c=h=1 (58)

由先前的推演經驗，影響Sicherman Dice能否形成的關鍵，通常在於含有負項式的討論，如(x^2-x+1) , (x^4-x^2+1)。再由*Derive* 6的運算，得到以下的式子

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)=x^4+x^2+1$

$(x^2+1)(x^4-x^2+1)=x^6+1$

$(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$

(x^2-x+1) , (x^4-x^2+1)都可以找到特定的式子，相乘之後讓負項消失。

選定(x^4-x^2+1)作爲討論的目標。

令 $a=0,\ b=2$, f = g =1, c = d = h = i = 1, e = 2, j =1。這樣的安排是特意讓(x^4-x^2+1)產生平方項，並讓$(x^2+1)^2$去「消去」它，使其不會出現負項。同時，讓$g(x)$成爲標準12面的骰子，以簡化複雜度。得到

$$f(x)=x(x^2+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)^2$$
$$=(x^{17}+x^{15}+x^{13}+2x^{11}+2x^9+2x^7+x^5+x^3+x) \quad (59)$$
$$g(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$$
$$=(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x) \quad (60)$$
$$h(x)=x(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$=(x^7+2x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x) \quad (61)$$

由先前的推演經驗，(59) (61)是2顆12面的Sicherman Dice，同時也證明了(x^4-x^2+1)平方項是可以形成Sicherman Dice。接下來的問題是，(x^4-x^2+1)的3次方項可以形成Sicherman Dice嗎？。如果(x^4-x^2+1)的3次方項可以形成Sicherman Dice，這一組Sicherman Dice是絕對不會出現在2顆12面的Sicherman Dice 的組合中，同時也證明Sicherman的推論並不適用於12面的骰子。

由Derive 6的運算，得到

$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)=(x^4+x^2+1)(x^4-x^2+1)=x^8+x^4+1$

於是又找到一個「消去」(x^4-x^2+1)使其不會出現負項的組合。

因此將(60)中的(x^4-x^2+1)移轉給(59)，形成(x^4-x^2+1)的3次方項，得到

$$f(x)=x(x^2+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)^3$$
$$=(x^{21}+x^{17}+2x^{15}+x^{13}+2x^{11}+x^9+2x^7+x^5+x) \quad (62)$$
$$g(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$=(x^8+x^7+2x^6+2x^5+2x^4+2x^3+x^2+x) \quad (63)$$

$$h(x)=x(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$
$$=(x^7+2x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x) \quad (64)$$

(62) (63) (64) 代表一對可以取代3顆12面標準骰子的Sicherman Dice，其中(62) 不可能在2顆12面的Sicherman Dice的組合中出現。因此，可以證明Sicherman的推論並不適用於12面的骰子。

10. 尋找20面的Sicherman Dice

由12面的Sicherman Dice的推演經驗，再加上20面骰子的生成函數非常相似

$$(x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x)$$
$$=x(x+1)(x^2+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$$

而且

$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=(x^8+x^6+x^4+x^2+1)$$
$$(x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)=x^{10}+1$$
$$(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)=x^5+1$$
$$(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)=(x^{16}+x^{12}+x^8+x^4+1)$$

因此大膽地仿照(62) (63) (64)

$$f(x)=x(x^2+1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)^3$$
$$=(x^{37}+x^{33}+x^{29}+2x^{27}+x^{25}+2x^{23}+x^{21}+2x^{19}+x^{17}+2x^{15}+x^{13}+2x^{11}+x^9+x^5+x)$$
$$g(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$
$$=(x^{12}+x^{11}+2x^{10}+2x^9+2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+2x^4+2x^3+x^2+x)$$
$$h(x)=x(x+1)^2(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$
$$=(x^{11}+2x^{10}+2x^9+2x^8+2x^7+2x^6+2x^5+2x^4+2x^3+2x^2+x)$$

如同在 9. 中所觀察的組合，$f(x)$ 不可能在2顆20面的Sicherman Dice的組合中出現，所以Sicherman的推論並不適用於20面的骰子。

二、 Sicherman 極限(Sicherman Limit)的探討

在先前正八面體、正十二體及正二十面體的討論與推演中，至少都可以找到三組不同的 Sicherman Dice，來證明 Sicherman 的推論並不適用。但隨著骰子數的增加，我可以不斷地找到新的點數組合的 Sicherman Dice 嗎？以尋找 4 顆正八面體的 Sicherman Dice 爲例，如果有新點數組合的 Sicherman Dice，必然出現在四次方項(如 $(x^2+1)^4$)。但是當 x=1 代入時，四次方項必定爲 $2^4=16$，與面數 8 的條件不合。因此，4 個正八面體新點數組合的 Sicherman Dice，可能就無法出現，更不用說 5 個以

上的情形。而在尋找 4 顆正十二體及正二十面體的 Sicherman Dice 的例子中，可能無法找到足夠的正項(如$(x+1),(x^2+1)$)，來「消去」負項(如(x^4-x^2+1))的四次方項。因此，4 個正十二體及正二十面體新點數組合的 Sicherman Dice，可能就無法出現，更不用說 5 個以上的情形。因此，我將 Sicherman 的推論修正爲「對於正多面體的標準骰子，在某一個數量 L(L 爲正整數，稱爲 **Sicherman 極限**)的骰子個數下，在不使用已發現的 Sicherman Dice 的情形下，不可能找到一組大於或等於 L 顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。」。在我的研究中可以得到：正四面體標準骰子及正六面體標準骰子的 L 爲 3；正八面體標準骰子、正十二面體標準骰子及正二十面體標準骰子，其 L 爲 4。

先前的推演，引發了我另一個想法。雖然其他面數的正多面體骰子並不存在於真實世界，但是利用輪盤的觀念，假設其每一面出現的機率是相同的，則這些正多面體骰子仍可視爲公平骰子。對於任意面數的正多面體骰子，它的 Sicherman 極限是否存在？如果存在，是否有規律性？我先將討論的範圍限制在 50 面以內的正多面體骰子，這樣做的目的是先以可控制的規模來確認我的推論及尋找規律性，並避免因太大的目標，而增加問題的複雜度。

由先前的研究可知，Sicherman Dice 是生成函數因式分解後的重新組合。而有相同型態的生成函數(或骰子面數，如 12 面及 20 面)，也會有相同的結論。於是我先將各個面數(1 至 50)進行因數分解，並將相同類型的數列爲同一組，針對不同的類型來討論。表五則是說明分類的結果。

表五　因數型態的分類

因數型態	代表數
P (P 爲質數)	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47
$P\times Q$ (P,Q 爲質數)	6, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 33, 34, 35, 38, 39, 46
P^n (P 爲質數, n 爲整數且 $n\geq 2$)	4, 8, 9,16, 25, 27, 32, 49
$P\times Q^n$ (P,Q 爲質數, n 爲整數且 $n\geq 2$)	12, 18, 20, 24, 28, 40, 44, 45, 48, 50
$P^n\times Q^m$ (P,Q 爲質數，m,n 爲整數且 $m,n\geq 2$)	36, 72*
$P\times Q\times R$ (P,Q,R 爲質數)	30, 42

*因小於 50 的數中，符合此一因數型態的數僅有 36，因此增加 72 來驗證我的研究結果

1. P(P 爲質數)

以 Derive 6 運算，發現其生成函數皆無法再做因式分解。因此，這些面數的骰子，並不存在相對應的 Sicherman Dice。

2. $P\times Q$ (P,Q 爲質數)

以 Derive 6 運算，其生成函數可分解成下列型態

表六 $P\times Q$ 面數骰子生成函數的因式分解

面數	因式分解
6	$x(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$
10	$x(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$
14	$x(x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$
15	$x(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$
21	$x(x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$
22	$x(x+1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ $(x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$
26	$x(x+1)(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ $(x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$
33	$x(x^2+x+1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ $(x^{20}-x^{19}+x^{17}-x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{11}-x^{10}+x^9-x^7+x^6-x^4+x^3-x+1)$
34	$x(x+1)(x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ $(x^{16}-x^{15}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$
35	$x(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ $(x^{24}-x^{23}+x^{19}-x^{18}+x^{17}-x^{16}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^8+x^7-x^6+x^5-x+1)$
38	$x(x+1)$ $(x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ $(x^{18}-x^{17}+x^{16}-x^{15}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$
39	$x(x^2+x+1)(x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ $(x^{24}-x^{23}+x^{21}-x^{20}+x^{18}-x^{17}+x^{15}-x^{14}+x^{12}-x^{10}+x^9-x^7+x^6-x^4+x^3-x+1)$
46	$x(x+1)$ $(x^{22}+x^{21}+x^{20}+x^{19}+x^{18}+x^{17}+x^{16}+x^{15}+x^{14}+x^{13}+x^{12}+x^{11}+x^{10}+x^9+x^8+x^7$ $+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ $(x^{22}-x^{21}+x^{20}-x^{19}+x^{18}-x^{17}+x^{16}-x^{15}+x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+x^{10}-x^9+x^8-x^7$

	$+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$

由表中的因式分解可知，這些面數的骰子，其生成函數可分解爲 $x\cdot A(x)\cdot B(x)\cdot C(x)$ 的形式，其中 $C(x)$ 是出現負項的多項式(例如 10 面中的 $(x^4-x^3+x^2-x+1)$)。由 6 面骰子的推演可知： $x\cdot A(x)\cdot B(x)\cdot[C(x)]^2$ 可以推得一組不會出現負項的 Sicherman Dice。但也因爲「資源不足」($A(x)$ 及 $B(x)$ 僅能出現一次)，而無法找到其他點數的 Sicherman Dice。因此有 $P\times Q$ 因數型態的面數，其 Sicherman 極限爲 $2+1=3$ 。

3. P^n (P 爲質數, n 爲整數且 $n\geq 2$)

以 Derive 6 運算，其生成函數可分解成下列型態

表七　P^n 面數骰子生成函數的因式分解

面數	因式分解
4	$x(x+1)(x^2+1)$
8	$x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)$
9	$x(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)$
16	$x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)$
25	$x(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)$
27	$x(x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^{18}+x^9+1)$
32	$x(x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^8+1)(x^{16}+1)$
49	$x(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{42}+x^{35}+x^{28}+x^{21}+x^{14}+x^7+1)$

由 4 面及 8 面骰子的推演可知：因式分解中沒有負項式存在，因此可以只針對「 $f(1)$ 等於面數」的條件來討論。因爲因式分解中的每一項最多只能單獨出現 n 次，所以其 Sicherman 極限爲 n+1。

4. $P\times Q^n$ (P,Q 爲質數, n 爲整數且 $n\geq 2$)

以 Derive 6 運算，其生成函數可分解成下列型態

表八　$P\times Q^n$ 面數骰子生成函數的因式分解

面數	因式分解
12	$x\ (x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)$
18	$x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$
20	$x(x+1)(x^2+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)$

24	$x\ (x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$
28	$x(x+1)(x^2+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$ $(x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1)$
40	$x\ (x+1)(x^2+1)(x^4+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^8+x^6+x^4-x^2+1)$ $(x^{16}-x^{12}+x^8-x^4+1)$
44	$x(x+1)(x^2+1)(x^{10}+x^9+x^8+x^7+x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ $(x^{10}-x^9+x^8-x^7+x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-x+1)$ $(x^{20}-x^{18}+x^{16}-x^{14}+x^{12}-x^{10}+x^8-x^6+x^4-x^2+1)$
45	$x(x^2+x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^6+x^3+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$ $(x^{24}-x^{21}+x^{15}-x^{12}+x^9-x^3+1)$
48	$x\ (x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^8+1)(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)$
50	$x(x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ $(x^{20}+x^{15}+x^{10}+x^5+1)(x^{20}-x^{15}+x^{10}-x^5+1)$

由 12 面及 20 面骰子的推演可知，這類骰子要求得 Sicherman Dice，必須利用「消去負項」的方式來進行因式之間的組合。經過多次的組合與計算，我有了以下的結論：

(1) 因式中有特定的項會顯示某一個因數的出現，如表九所示

表九 因數與因式的對應關係

因數	對應因式
2	$(x+1)$
2^2	(x^2+1)
2^3	(x^4+1)
2^4	(x^8+1)
3	(x^2+x+1)
3^2	(x^6+x^3+1)
5	$(x^4+x^3+x^2+x+1)$

(2) 如果要「消去」因式分解中含有最高次方的負項，必須利用這個面數因數分解中最高冪次所對應的因式

我以尋找 5 顆 48 面骰子的 Sicherman Dice 爲例，來說明我的推論與作法：

(1) 模仿 12 面的作法，令 $(x^8+1)^4$ 與 $(x^{16}-x^8+1)^5$ 相乘來「消去負項」，$(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$ 則可產生另一個項來「消去」$(x^{16}-x^8+1)$，使得因式的乘積不會出現負項。

(2) 餘下的一個 (x^8+1) 與 $(x+1)^5$、$(x^2+1)^5$、$(x^4+1)^5$ 組合分配，產生另外 4 組 Sicherman Dice，因此 5 顆 48 面骰子的 Sicherman Dice 分別爲

$f(x)=x(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^8+1)^4(x^8-x^4+1)(x^{16}-x^8+1)^5$
$g(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^8+1)(x^8-x^4+1)$
$h(x)=x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)^2(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$
$i(x)=x(x+1)(x^2+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$
$j(x)=x(x+1)^2(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^8-x^4+1)$

(3) 因爲 $(x+1)$ 、 (x^2+1) 、 (x^4+1) 皆無法「消去」 $(x^{16}-x^8+1)$ ，而 (x^2+x+1) 僅能出現一次，因此無法找到 6 顆 48 面骰子的 Sicherman Dice。

利用以上的作法，我可以找到(n+1)個 $P\times Q^n$ 面數骰子的 Sicherman Dice，因此其 Sicherman 極限爲 n+2。

5. $P^n\times Q^m$ (P,Q 爲質數, m,n 爲整數且 $m,n\geq 2$)

以 Derive 6 運算，其生成函數可分解成下列型態

表十 $P^n\times Q^m$ 面數骰子生成函數的因式分解

面數	因式分解
36	$x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)(x^{12}-x^6+1)$
72	$x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$ $(x^8-x^4+1)(x^{12}-x^6+1)(x^{24}-x^{12}+1)$

此處的運算，我似乎遇到瓶頸：先前「消去負項」的運算原則，無法產生正項，例如 $(x+1)(x^{12}-x^6+1)$ 、$(x^2+1)(x^{12}-x^6+1)$ 、$(x^2+x+1)(x^{12}-x^6+1)$ 皆會產生負項。由 $(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$ 及 (x^4-x^2+1) 可以不需配對出現的經驗，我嘗試以 $(x+1)$ 、 (x^2+1) 與 (x^4-x^2+1) 組合，得到 $(x^2+1)(x^4-x^2+1)(x^{12}-x^6+1)=x^{18}+1$ 。因此，我仍然使用先前「消去負項」的方法，只不過先前一直使用的(x^n+1)項，此處並不會直接出現在最簡因式中，而是要經過配對組合後才會出現，即 $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=x^6+1$ 。

因此，我找到 4 顆 36 面骰子的 Sicherman Dice，分別爲
$f(x)=x(x^2+1)^2(x^4-x^2+1)^2(x^6+x^3+1)^2(x^6-x^3+1)^2(x^{12}-x^6+1)^4$
$g(x)=x(x+1)^2(x^4-x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$
$h(x)=x(x^2+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)$
$i(x)=x(x+1)^2(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2$

由於符合 $P^n\times Q^m$ 形式且小於 50 的數只有 36。爲了更進一步確認上述的方法是否可行，我找到符合 $P^n\times Q^m$ 且大於 50 的數($2^3\times 3^2=72$)，來進行分析。由生成函數的因式分解可知， (x^4-x^2+1) 、 (x^8-x^4+1) 及 $(x^{12}-x^6+1)$ 皆是可以不需配對出現的項，我應如何挑選及組合，使其可以「消去」多個 $(x^{24}-x^{12}+1)$ 項？以

Derive 6 運算，得知

$$(x^4+1)(x^8-x^4+1)(x^{24}-x^{12}+1)=x^{36}+1$$

$$(x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)(x^{12}-x^6+1)(x^{24}-x^{12}+1)=x^{48}+x^{24}+1$$

$$(x^2+1)(x^4-x^2+1)=x^6+1$$

因此，我鎖定以上的配對，得到 5 顆 72 面骰子的 Sicherman Dice，分別爲

$$f(x)=x(x^4+1)^3(x^8-x^4+1)^3(x^6+x^3+1)^2(x^6-x^3+1)^2 (x^{12}-x^6+1)^2(x^{24}-x^{12}+1)^5$$

$$g(x)=x(x^2+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)(x^4+1)(x^8-x^4+1) (x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)(x^{12}-x^6+1)$$

$$h(x)=x(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+1)(x^4-x^2+1) (x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)(x^8-x^4+1)(x^{12}-x^6+1)$$

$$i(x)=x(x^2+1)^3(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4-x^2+1)^2 (x^6+x^3+1)(x^6-x^3+1)(x^{12}-x^6+1)$$

$$j(x)=x(x+1)^3(x^2+x+1)^2(x^2-x+1)^2(x^4-x^2+1)$$

所以，符合 $P^n\times Q^m$ 形式面數的骰子，其 Sicherman 極限爲 n+m+1。

6. $P\times Q\times R$ (P,Q,R 爲質數)

以 Derive 6 運算，其生成函數可分解成下列型態

表十一　$P\times Q\times R$ 面數骰子生成函數的因式分解

面數	因式分解
30	$x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ $(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$
42	$x(x+1)(x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+1)(x^6-x^5+x^4-x^3+x^2-1)$ $(x^{12}+x^{11}-x^9-x^8+x^6-x^4-x^3+x+1)(x^{12}-x^{11}+x^9-x^8+x^6-x^4+x^3-x+1)$

以 Derive 6 運算，我求得

$(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$ 出現負項，$(x^2+x+1)(x^2-x+1)$ 及 $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ 全爲正項。又 $(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$ 及 $(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)$ $(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)$ 全爲正項，因此我找到 2 顆 30 面骰子的 Sicherman Dice，分別爲

$$f(x)=x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

$$g(x)=x(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

$(x^8+x^7-x^5-x^4-x^3+x+1)^2(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)^2$。其 Sicherman 極限爲 2+1=3。而 42 面骰子也有相同的情形。

在完成上述的分析後，我使用各個小節的推論，去試著尋找每一個面數在其個數小於 Sicherman 極限時，可以產生最多組數的各組 Sicherman Dice，並使用 Derive 6 去驗證。結果發現，使用各個小節的推論所求得的各組 Sicherman Dice，皆不會產生負項。也初步證明，我研究推論的方向是正確的。

接著，我想利用先前所提到的「**負項係數證明法**」，來驗證我對 Sicherman 極限的推論。假設每一個面數骰子的生成函數可以以下列的式子表示：

$g(x) = x \bullet g_1(x) \bullet g_2(x) \cdots \bullet g_n(x)$

令 $H(x) = g_1(x) \bullet g_2(x) \cdots \bullet [g_n(x)]^{m-1}$，

$G(x) = g_1(x) \bullet g_2(x) \cdots \bullet [g_n(x)]^{m}$

其中 m 為該面數的 Sicherman 極限，$g_n(x)$ 則為 $g(x)$ 中出現負項的最高次方項。如果我可以找到適合的 k，讓 $\dfrac{H(-k)}{H(k)} < 1$，$\dfrac{G(-k)}{G(k)} > 1$，Sicherman 極限的觀念得以證實。附件一說明我的計算結果。

三、Sicherman Dice 的延伸探討

在 Sicherman Dice 的延伸探討中，我嘗試以不同面數的骰子加以組合，找出符合 Sicherman Dice 原則的點數組合；即各個骰子 (Crazy Dice) 的點數和及出現次數與標準骰子的組合相同。運算原則則是第四章所提到的生成函數中最小點數必為1及 $f(1)$ 代表骰子的面數。表四則說明各種 Crazy Dice 的點數組合。

表十二　　各種 Crazy Dice 的點數組合

標準骰子的組合	Crazy Dice 的組合
4 面與 6 面 (1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,6)	(1,3,4,6)及(1,2,2,3,3,4) (1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,6)(標準骰子) (1,2,4,5)及(1,2,3,3,4,5) (1,2,2,3)及(1,3,3,5,5,7)
6 面與 8 面 (1,2,3,4,5,6)及(1,2,3,4,5,6,7,8)	(1,2,3,4,5,6)及(1,2,3,4,5,6,7,8) (標準骰子) (1,2,2,3,3,4)及(1,3,4,5,6,7,8,10) (1,3,3,5,5,7)及(1,2,2,3,5,6,6,7) (1,2,3,3,4,5)及(1,2,4,5,5,6,8,9)

	(1,3,5,5,7,9)及(1,2,2,3,3,4,4,5) (1,2,3,5,6,7)及(1,2,3,4,4,5,6,7)
4 面與 8 面 (1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,6,7,8)	(1,2,2,3)及(1,3,3,5,5,7,7,9) (1,3,3,5)及(1,2,2,3,5,6,6,7) (1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,6,7,8) (標準骰子) (1,2,5,6)及(1,2,3,3,4,4,5,6) (1,3,5,7)及(1,2,2,3,3,4,4,5,)
4 面、6 面與 8 面 (1,2,3,4) (1,2,3,4,5,6) (1,2,3,4,5,6,7,8)	1. (1,2,2,3) (1,2,3,4,5,6) (1,3,3,5,5,7,7,9) 2. (1,3,3,5) (1,2,3,4,5,6) (1,2,2,3,5,6,6,7) 3. (1,2,5,6) (1,2,3,4,5,6) (1,2,3,3,4,4,5,6) 4. (1,2,3,4) (1,2,3,4,5,6) (1,2,3,4,5,6,7,8) (標準骰子) 5. (1,3,5,7) (1,2,3,4,5,6) (1,2,2,3,3,4,4,5) 6. (1,2,4,5) (1,2,2,3,3,4) (1,3,3,5,5,7,7,9) 7. (1,3,3,5) (1,2,2,3,3,4) (1,2,4,5,5,6,8,9) 8. (1,4,5,8) (1,2,2,3,3,4) (1,2,3,3,4,4,5,6) 9. (1,2,5,6) (1,2,2,3,3,4) (1,3,3,4,5,6,6,8) 10.(1,3,4,6) (1,2,2,3,3,4) (1,2,3,4,5,6,7,8) 11. (1,2,3,4) (1,2,2,3,3,4) (1,3,4,5,6,7,8,10) 12.(1,3,5,7) (1,2,2,3,3,4) (1,2,3,4,4,5,6,7) 13. (1,2,2,3) (1,3,3,5,5,7) (1,2,3,4,5,6,7,8) 14. (1,2,5,6) (1,3,3,5,5,7) (1,2,2,3,3,4,4,5) 15. (1,2,3,4) (1,3,3,5,5,7) (1,2,2,3,5,6,6,7) 16. (1,3,5,7) (1,3,3,5,5,7) (1,2,2,2,3,3,3,4) 17. (1,2,4,5) (1,2,3,3,4,5) (1,2,3,4,5,6,7,8) 18. (1,2,2,3) (1,2,3,3,4,5) (1,3,4,5,6,7,8,10) 19. (1,4,5,8) (1,2,3,3,4,5) (1,2,2,3,3,4,4,5) 20. (1,2,5,6) (1,2,3,3,4,5) (1,2,3,4,4,5,6,7) 21. (1,3,4,6) (1,2,3,3,4,5) (1,2,2,3,5,6,6,7) 22. (1,2,3,4) (1,2,3,3,4,5) (1,2,4,5,5,6,8,9) 23. (1,3,5,7) (1,2,3,3,4,5) (1,2,2,3,4,5,5,6) 24. (1,2,2,3) (1,3,5,5,7,9) (1,2,3,3,4,4,5,6) 25. (1,3,3,5) (1,3,5,5,7,9) (1,2,2,2,3,3,3,4) 26. (1,2,3,4) (1,3,5,5,7,9) (1,2,2,3,3,4,4,5) 27. (1,2,4,5) (1,2,3,5,6,7) (1,2,3,3,4,4,5,6) 28. (1,2,2,3) (1,2,3,5,6,7) (1,3,3,4,5,6,6,8) 29. (1,3,3,5) (1,2,3,5,6,7) (1,2,2,3,4,5,5,6)

	30. (1,3,4,6) (1,2,3,5,6,7) (1,2,2,3,3,4,4,5) 31. (1,2,3,4) (1,2,3,5,6,7) (1,2,3,4,4,5,6,7)
3 個 4 面 (1,2,3,4) (1,2,3,4) (1,2,3,4)	2 個 8 面 (1,3,3,3,5,5,5,7)及(2,3,3,3,4,4,4,5)[註三] (1,2,3,3,4,4,5,6)及(2,3,3,4,4,5,5,6) (1,2,2,3,3,4,4,5)及(2,3,4,4,5,5,6,7) (1,2,2,2,3,3,3,4)及(2,4,4,4,6,6,6,8)
4 面與 12 面 (1,2,3,4) (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)	6 面與 8 面 (1,2,2,3,3,4)及(1,3,4,6,7,9,10,12) (1,2,5,6,9,10)及(1,2,3,3,4,4,5,6) (1,2,3,4,5,6)及(1,2,3,4,7,8,9,10) (1,2,3,3,4,5)及(1,2,4,5,7,8,10,11) (1,3,5,7,9,11)及(1,2,2,3,3,4,4,5) (1,2,3,7,8,9)及(1,2,3,4,4,5,6,7) (1,3,3,5,5,7)及(1,2,2,3,7,8,8,9)
6 面與 8 面 (1,2,3,4,5,6) (1,2,3,4,5,6,7,8)	4 面與 12 面 (1,2,2,3)及(1,3,3,5,5,5,7,7,7,9,9,11) (1,2,4,5)及(1,2,3,3,4,5,5,6,7,7,8,9) (1,3,5,7)及(1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7) (1,2,3,4)及(1,2,3,4,5,5,6,6,7,8,9,10) (1,3,4,6)及(1,2,2,3,3,4,5,6,6,7,7,8) (1,2,5,6)及(1,2,3,3,4,4,5,5,6,6,7,8) (1,4,5,8)及(1,2,2,3,3,3,4,4,4,5,5,6)

[註三] 3 個正 4 面體的標準骰子組合其擲出最小的點數和爲 3，Crazy Dice 中出現的最小點數必爲 1 和 2，否則其中便會出現點數爲 0 的情形。

四、 討論

1. 在前述的研究過程中，分別證明了在不同個數的4面及6面標準骰子組合下，的確如Sicherman所推論：無法找到第3顆不同點數的Sicherman Dice。在4面標準骰子組合中，無法找到的原因是「生成函數中的各項，其次方數最大值爲2」的限制。而6面標準骰子組合中，無法找到的原因是「生成函數中已經沒有$(x+1)$或(x^2+x+1)來「消去」(x^2-x+1)項，使其不產生負項。」。而這些原因背後的關鍵便是 4 （2^2)和 6 (2×3)的數字太小，使其因數分解之後的組合太少，無法提供足夠的資源來產生變化。
2. 8面標準骰子的生成函數與4面標準骰子的生成函數型態極爲類似，但組成項較多，再加上沒有「負項」(如(x^2-x+1)項)的干擾及限制，使其在兩個Sicherman Dice的組合中，便已產生多對的組合。
3. 12及20面標準骰子的生成函數與6面標準骰子的生成函數型態極爲類似，其因數分解皆爲2的乘方(2^n)乘以一個質數，及「負項」(如(x^2-x+1)，(x^4-x^2+1)項)的產生。其差異在於12及20面標準骰子的因數分解含有4(2^2)，產生較多的組合(如$(x+1),(x^2+1)$)來「消去」「負項」。
4. 尋找3顆8面的Sicherman Dice過程中，得到10個各有3組Sicherman Dice的組合。經過仔細的整理與比對(詳見表十三及表十四)，發現這30組Sicherman Dice中，大部分都是2顆*Sicherman* Dice與標準8面骰子的組合，只有3組$((1,2,2,2,3,3,3,4),\ (1,3,3,3,5,5,5,7),\ (1,5,5,5,9,9,9,13))$是未曾出現在2顆Sicherman Dice的組合中。而這3組Sicherman Dice的生成函數分別爲$x(x+1)^3$，$x(x^2+1)^3$，$x(x^4+1)^3$。這個發現給我很大的啓發與靈感，因爲這些3次方項的確不會出現在2顆Sicherman Dice的組合中。而這個想法也運用在12及20面Sicherman Dice的證明中。

表十三　2顆正八面體的Sicherman Dice

12233445	1355779(11)
12235667	13355779
1255669(10)	12334456

表十四　3顆正八面體的Sicherman Dice　(*)爲標準八面骰子

13335557	1555999(13)	12223334
13335557	1255669(10)	12235667
1555999(13)	12334456	12233445
1355779(11)	13355779	12223334
1355779(11)	12345678 (*)	12233445

1355779(11)	12334456	12235667
13355779	12345678(*)	12235667
13355779	1255669(10)	12233445
12345678(*)	12345678(*)	12345678(*)
12345678(*)	1255669(10)	12334456

5. 雖然在8面、12面及20面的討論與推演中，至少都可以找到3組不同的 Sicherman Dice，來證明Sicherman的推論並不適用。但隨著骰子數的增加，我可以不斷地找到新的點數組合的Sicherman Dice嗎？答案可能是否定的。以尋找4顆8面的Sicherman Dice爲例，如果有新點數組合的Sicherman Dice，必然出現在4次方項(如$(x^2+1)^4$)。但是當$x=1$代入時，4次方項必定爲$2^4=16$，與面數8的條件不合。因此，4個8面體新點數組合的Sicherman Dice，可能就無法出現，更不用說5個以上的情形。而在尋找4顆12面及20面的Sicherman Dice的例子中，可能無法找到足夠的正項(如$(x+1),(x^2+1)$)，來「消去」負項(如(x^4-x^2+1))的4次方項。因此，4個12面及20面新點數組合的Sicherman Dice，可能就無法出現，更不用說5個以上的情形。
6. 在研究各不同面數骰子的 Sicherman 極限中，我利用自行發展的「負項消去法」來尋求合於要求的 Sicherman Dice 的組合。不難發現，隨著因數/因式型態複雜度的增加，不出現負項 Sicherman Dice 的組合也無法藉由簡單的既有模式來取得。更深入的研究，勢必要藉助電腦程式來進行更有效率的計算與組合。
7. 在我使用「負項係數證明法」來驗證 Sicherman 極限時，對於某些面數的骰子(24, 30, 42, 36, 40, 45, 48, 50, 72)，始終無法找到適合的 k (或k_1)值來進行驗證。仔細觀察這些數字的因數型態，都是屬於相對複雜的形式。在未來的研究中，我將對這個問題進行更進一步的研究與探討。
8. 在Sicherman Dice的延伸探討「多個面數相同或不同骰子的組合，是否可以找到面數、個數及點數配置皆不同的Crazy Dice」中，不同組合配對的原則是這些組合有相同的「排列組合數」，如正4面體與正12面體有48種的點數排列組合，與正6面體與正8面體排列組合數相同。這也是尋找Sicherman Dice (Crazy Dice)最基本的原則。一般而言，Sicherman Dice的延伸探討中的各個組合，都不難找到解答，這與討論一中所提到的資源多寡有關。資源愈多，限制條件就愈寬鬆，找到解答的機會就愈大。特別值得注意的是，正4面體與正12面體和正6面體與正8面體互求Crazy Dice，是「可逆」的。而「3個正4面體的標準骰子組合，找到2個正8面體的Crazy Dice」則是「不可逆」的。因爲「2個正8面體的標準骰子組合，找到3個正4面體的Crazy Dice」中，3個正4面體的Crazy Dice中必須有一個點數出現零的組合，這和原先設定「不考慮骰子任一面點數爲0或負數的情形」的原則是相違背的。

9. 雖然利用生成函數可以找到對應標準骰子的Sicherman Dice ，但是所得到的Sicherman Dice 真的和標準骰子有相同的點數和及相同出現次數嗎？利用Microsoft Excel的計算方法，我可以將所得到的Sicherman Dice和標準骰子作計算比對，得到「眼見爲憑」的證明效果。這個方法是針對已求出的結果進行驗算證明，而非利用它來求得未知的Sicherman Dice組合。
10. 同時，我也和Col. George Sicherman取得聯繫，討論當年他發現Sicherman Dice的經過及其結論的限制條件，作爲本研究未來發展的參考。電子郵件之內容，請參閱附件二。

肆、結論與應用

一、 由研究的過程及結果，我可以發現: Sicherman Dice 的產生，是生成函數因式重新組合的結果。而 Sicherman Dice 是否存在，則視上述重新組合的結果是否有負項產生或是是否有足夠的資源來進行重新組合。

二、 我由以上的證明與討論可以知道Sicherman 的推論「在不使用Sicherman Dice 的情形下，不可能找到一組大於或等於3顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。」[註四]僅適用於4面體及6面體標準骰子，但對於8面體、12面體及20面體標準骰子的情形則不適用。

三、 我可以將Sicherman 的推論修正為「對於正多面體的標準骰子，在某一個數量L(L為正整數，稱為Sicherman **極限**)的骰子個數下，在不使用已發現的Sicherman Dice 的情形下，不可能找到一組大於或等於L顆的非正常骰子，它們拋擲出的每一種不同點數和的機率恰好與一組同數量的正常骰子相同。」。在我的研究中可以得到：4面標準骰子及6面體標準骰子的L為3；8面標準骰子、12面標準骰子及20面標準骰子，其L為4。

四、 Sicherman 推論的適用性討論，只針對自然界中實際存在的骰子(4 面，6 面，8 面，12 面，20 面)。至於是否適用其他假設存在的骰子，則不在本研究的討論範圍。對於假設存在的骰子，其對應Sicherman 極限的探討，則印證Sicherman 極限的存在及生成函數因式中資源有限的概念。

五、 如果骰子的面數具有相同的因數分解的型態，則其生成函數因式重新組合的方式也極為相似，也會有相同的 Sicherman 極限。

六、 在研究的過程中，我對於生成函數的特性與組合，有了更深一層的瞭解。對於本研究未來發展，也有了較清楚的方向。未來的研究目標，將是藉由電腦程式的運算，探討n面骰子其對應的Sicherman 極限($L(n)$)，以及Crazy Dice組合中是否也存在Sicherman 極限。

七、 對於本研究而言，生成函數的原理與應用，使我可以快速進入問題的核心，省去了蒐尋工具的時間。使用生成函數來計算及描述骰子的方法，使得骰子的點數及排列組合與數學工具有了完美的結合。

八、 運算軟體 Derive 6 的使用，使得我不需要絞盡腦汁去做多項式的因式分解，並可以快速進行多個多項式的乘積與展開。因此我可以大膽地假設，再利用 Derive 6 來驗證及計算這些假設。Derive 6 的使用對於本研究有相當大的幫助。

[註四]原文為「Sicherman also found that it is impossible to redesign a set of three or more dice that have the same odds as ordinary dice without utilizing his two dice. For example, Sicherman’ s pair plus one conventional die have the same odds as three ordinary dice, two pair of Sicherman dice behave like four ordinary dice and so on.」

伍、參考文獻

一、 孫文先（無日期）。**骰子漫談**。民 90 年 10 月 28 日，取自：
http://www.chiuchang.org.tw/download/docu/club/dice.pdf

二、 劉曉樺、林芳予，**由 6 面的 Sicherman 骰子來分析 n 面的 Sicherman 骰子**，台灣 2004 年國際科學展覽會研究報告

三、 Martin Gardner, William Watkins (1997). **Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers: And the Return of Dr Matrix (Spectrum)**, Sicherman Dice, the Kruskal Count and other Curiosities (pp. 265-267). The Mathematical Association of America.

四、 **Crazy Dice,** Chrix from Bloomington, MN,US, (2000, July 20) :
From http://www.mathnerds.com/mathnerds/best/crazydice/solution.asp

五、 From http://www.mathpuzzle.com/Dicepolynomials.txt

六、 **Nick's Mathematical Miscellany**
From http://www.qbyte.org/puzzles/p041s.html

評語

題目有趣，看版十分美觀大方。可惜本問題進一步的發展的空間十分有限。