台灣二〇〇五年國際科學展覽會

- 科 别:地球與太空科學
- 作品名稱:蟹狀星雲的擴張
- 得獎獎項:大會獎佳作
- 學 校:臺北市立南港高級中學
- 作 者:謝佳穎、葉千瑜

評語與建議事項:

本作品測量不同年代所攝得的蟹狀星雲圖片,分別就包狀物 及絲狀物探討星雲的擴張速度,並參考光譜攝影的位移速度 以判別星雲的爆發時間,大小及遠近距離,方法相當完備。 作者簡介

謝佳穎出生在基隆市,充滿人情味讓我喜歡與人相處。父母對我和妹妹的教 育講求公平,因此我學會了用分享和講道理的心去看待事物。

閱讀是我最大的興趣。我的個性活潑開朗,不拘小節,有時候會玩過頭,不 過很快就會收心了。

我對自己喜歡的事物就會全力以赴,我很喜歡國文,所以國文也是我最擅長 的科目,而數學解題出來時的成就感,也是令我很著迷的科目。



自傳

我一葉千瑜,身為雙胞胎的我,從小就備受矚目。我比較喜歡理科,而妹妹對 文科比較有興趣。數學是我最擅長的科目,我喜歡解題過程和算出答案時的那種 喜悅,還有美術是我喜歡的科目之一,可以培養自我的美感,沉浸在創作其中, 鋼琴在我的童年生活中佔了很重要的位置,彈鋼琴訓練了我的耐心和不斷練習

的決心,雖然現在比較少接觸它,不過還是很懷念那段日子。



作品名稱:蟹狀星雲的擴張(The expansion of the Crab nebula)

Abstract

By comparing eight different epoch images of the crab nebula taken through 1942 to 2004, we have calculated the expansion velocity of 27 optical bubble features and 60 filaments. The mean expansion velocity of bubble features and filaments is 0.173 arcsec/yr and 0.15 arcsec/yr, respectively. We also estimated the maximum radial velocity of the expansion by analyzing the emission spectrum of the nebula. The maximum radial velocity is 1385.5 km/s. Combining these measurements indicates that the crab nebular is approximately 5870 light year away.

In addition, if we assume that the nebula has been expanding at a constant rate, our expansion velocity projected backward indicates the mean date of the supernova event as A.D 1124, more than 70 yrs later than the accepted date of 1054. The result confirms the well-known acceleration in the crab's expansion. Although we have analyzed eight images with a 62 yr baseline, the acceleration still can't be derived from this study.

中文摘要:

透過量測由 1942 年到 2004 年之間八張不同年代的蟹狀星雲中爆炸後殘骸的位置變化, 可以計算出蟹狀星雲爆發的擴張速度。本研究選定了 27 個包狀物和 60 個纖狀物,計算出的 擴張速度分別為 0.173 arcsec/yr.和 0.150 arcsec/yr。再透過分析蟹狀星雲的光譜所計算出的徑向 速度(radial velocity)為 1385.5 km/yr,進而推得蟹狀星雲的距離分別為 5430 光年和 6370 光年, 平均値為 5870 光年。

另外,如果假設擴張速度是等速運動,那麼把求得的擴張速度倒推出的爆發日期是在西元 1124 年,這比中國紀錄中超新星爆發的 1054 年晚了 70 年。這顯示出蟹狀星雲的確非等速 擴張而是有加速度的狀態,才會造成以等速倒推發生日期時,晚了 70 年。雖然本研究中分析 了相差 62 年之久的八張影像,仍然無法分析出星雲的擴張的加速度情形。

壹、前言

我們是一群對天文有著深深的熱忱及濃厚興趣的小孩,在一次天文研習營中,我們由一 些有關星星的圖片中發現了蟹狀星雲。驚艷於她的美麗之外,也激起了我們想更進一步了解。

蟹狀星雲是一個極為著名的超新星殘骸,超新星 PSR 0531 +21 在西元 1054 年 7 月 4 日爆 炸,被我國宋朝天官首先觀測到,當時亮度和金星一樣亮(-4 星等),並且連續 23 個白天可用 肉眼看到她。蟹狀星雲也一直是天文學家最喜愛研究與持續觀測的對象之一,而這次我們要 探討的是蟹狀星雲爆炸後持續膨脹的運動情形。

利用不同年代的蟹狀星雲影像,比較其爆炸後殘骸的位置變化,便可以求出星雲的擴散 情形,加上分析光譜的訊息,進一步得到蟹狀星雲的距離。

2

貳、研究方法

找出不同年代的影像後,經過以下的步驟找出殘骸的運動。

一、蒐集蟹狀星雲影像

此次分析總共選擇了 1942 年、 1951 年 、 1976 年、 1990 年、 1991 年、 1996 年、 1999 年、 2004 年,這八年所拍所拍攝到的蟹狀星雲影像,作為我們分析的對象。

image	date (year)	Telescope	Scales	filter
			(arcsec/pixel)	
1042	1042 27	Mount Wilson 24.5m	0.45	灯业励武店巴
1942	1942.37	Telescope	0.45	私儿奴您应力
1951	1951.853	1.2 m Schmidt Telescope	2.82	紅光敏感玻片
1976	1976.159	4m Kitt Peak	0.46	紅光敏感底片
1990	1990 790	1.2 m Schmidt Telescope	1 71	紅光敏感的玻片
1770	1770.770	1.2 m bennnat Telescope	1.71	
1991	1991.796	1.2 m Schmidt Telescope	1.66	紅光敏感的玻片
1996	1996.785	1.2 m Schmidt Telescope	1.69	藍光敏感的玻片
1999	1999 860	8.2-meter VI T Telescone	0.21	紅外線 CCD 三色合成
1777	1777.000		0.21	
2004	2004.077	3.6-meter CFHT	0.94	紅外線 CCD 三色合成

Table 1. The eight images

Figure 1. The eight images





二、找出影像的比例尺

由於這八張影像並非由同一望遠鏡所拍攝,所以影像的比例尺也就不一樣。這個步驟主要 是要求出影像上一個像素(pixel)對應到天球座標相當於多少角秒。方法是在圖上找出距離遠 的兩顆以上的恆星,並利用電子星表 guide6.0 查出這些恆星的赤經、赤緯。有了恆星在圖上的 座標和它的天球座標就能換算出影像上一個像素等於多少角秒(Table 1)。

三、找出各張影像的比例關係

1999 年 VLT 所拍攝的影像解析度最高,故以 1999 年的影像作為標準,將其他的影像上同 一個的位置基準星換算為 1999 年的影像的尺寸,利用下列公式換算:

 $\beta_{i} = D_{i}X_{i} + E_{i}Y_{i} + F_{i}$ (2)

 (α_i, β_i) 表示各圖片轉換到與 1999 年的影像相同比例上的座標, A、B、D、E是該張影像上的轉換係數, C和F這兩項主要是修正不是因為口徑造成差異的其他因素, (X, Y)是原影像上的位置。

我們使用 Astroart 3.0 找了 46 顆星當作座標轉換的基準星,並利用線性回歸找出公式中的 A、B、C、D、E、F(Table 2)。

image	The transformation
1999 and 1942	α = 1.332359* X -0.02881* Y -598.008 β = 0.030208* X +1.316323*y+262.6766
1999 and 1951	α = 8.45893*X+0.087131* Y - 491.703 β = -0.09436*X+8.455708*Y-180.512
1999 and 1976	α = 1.337327* X -0.02284* Y -632.011 β = 0.022604* X +1.342887* Y +319.4392
1999 and 1990	α = 5.017913* X -0.00065* Y -493.977 β = 0.00797* X +5.010112* Y -197.112
1999 and 1991	α 2= 5.020767* X +0.064181* Y -512.825 β 2= -0.05936* X +5.005773* Y -179.422
1999and 1996	α 3=5.019189* X -0.00421* Y -493.307 β 3=0.005791* X +5.003204* Y -196.679
1999 and 2004	α s = 3.558844* X -0.04642* Y -196.679 β s = 0.044026* X +3.462394* Y +512.4225

Table 2. The transformation of eight images

四、測量蟹狀星雲爆發的擴張速度

想要找到蟹狀星雲爆發的速度,至少要兩張不同年代的影像。我們找出八張影像大致上皆 有的纖狀物 60 個,藉由(1)和(2)式換算出與 1999 年的影像相同比例的座標,求出該纖狀 物的移動速度。

五、利用光譜訊息求出蟹狀星雲的距離

蟹狀星雲面向地球和背向地球的運動造成光譜中同一元素的譜線有藍位移和紅位移的現

象,量測譜線的位移量可以求出徑向速度 V (radial velocity)。利用上述步驟中所求得的橫向擴張速度 μ (expansion velocity),進而求得蟹狀星雲的距離 d (第4式)。



參、研究結果與討論

一、蟹狀星雲的徑向擴張速度

被選定作為基準不動的恆星共有46顆,其分佈如Figure 2,被選定的作為分析的纖狀物分部如Figure 3,共有60個。不過,由於POSS所拍攝的影像中,蟹狀星雲中央部份已經過度曝光,很多的纖狀物不可見,所以蟹狀星雲最外圍的包狀物作量測對象補足,如此一來這八張影像中都可以量出位置,其包狀物的分佈如Figure 4,共有27個。



Figure 2. The position of the 46 stars



Figure 4. The position of the 27 bubbles



Figure 3. The position of the 60 filaments

1.位置轉換的準確度

確認所找的基準星無誤認的方法可以將任一年所量得未轉換前的位置與 1999 年的位置作圖,在線性關係外的星點可能是誤認或者是自行量過高的恆星,表示該星不宜作為座標轉換的基準星,並把該星去除(Figure 5),所以編碼上出現到 50 的號碼。



image	date (vr)	Numbers of	nosition	σ	σ
innage	uaic (yr)	stars	position	(pixel)	σ σ pixel)(arcsec)2.0860.438.8840.3962.6700.5612.8770.6041.8720.3932.0340.4272.0550.4322.2150.4651.8570.3901.5920.3342.0090.4221.4540.3051.6530.3471.4920.313
1042	1012 27	16	Х	2.086	0.438
1942	1942.37	40	Y	1.884	0.396
1051	1051 853	41	Х	2.670	0.561
1951	1951.055	41	Y	2.877	0.604
1076	1076 150	16	Х	1.872	0.393
1970	1970.139	46	Y	2.034	0.427
1000	1000 700	16	Х	2.055	0.432
1990	1990.790	3 41 9 46 0 46 6 46	Y	2.215	0.465
1001	1001 706	16	Х	1.857	0.390
1991	1991.790	40	Y	1.592	0.334
1006	1006 785	16	Х	2.009	0.422
1990	1990.765	40	Y	1.454	0.305
2004	2004 077	16	Х	1.653	0.347
2004	2004.077	46 41 46 46 46 46 46	Y	1.492	0.313

Table 3. The Standard Deviation of images

從 Table 3. 可以知道 1951 年的影像的標準偏差最大,這是因為此幅影像解析度是最差的, 而八張影像在位置的轉換上 X 軸的位置誤差為 0.35 至 0.56 角秒, Y 軸 0.31 至 0.60 角秒。

2. 星雲擴張的擴張速度

由六十二年間影像可以知道蟹狀星雲的擴張運動在本分析中未如預期中的可以看出加速 度的運動。Fig. 6 中表示出所有纖狀物的運動與 Fig.7 包狀物的運動,僅是相較於 1999 年的相 對運動,在蟹狀星雲長軸方向的移動明顯比短軸的移動量大。



Figure 6 The expansion of 60 filaments





由 Fig 8. 清楚可見 1942 年至 2004 年間的八張影像中的包狀物的移動為線性,也就是等速 移動,運動狀態並未如期中的出現加速度的變化。理論上,加速度的變化加上中子星的自行量, 應該呈現曲線變化,而非直線。

欲求出爆發殘骸的運動必須扣除中子星本身的運動,然而只有 1942 年與 1999 年的影像可以清楚辨識出中子星的位置。所以在算星雲擴張的橫向速度時,僅取這兩年的數值。



Figure 9 The expansion of 27 bubble-position between 1942yr and 1999yr

依據纖狀物的位置變化推測爆發的時間為 874 年前,也就是西元 1125 年蟹狀星雲發生爆發。這是由 1999 年與 1942 年之間包狀物的位置變化所推測,如 Fig. 9,其資料列在 Table 4。此兩幅影像相距 57.49 年,平均的速度為 0.176 (arcsec/yr),推測爆發的時間為 874 年前,也就

	1999(a	urcsec)	1942(a	ircsec)	Distance to	Radial	Convergence
					pulsar	Velocity	age
Bubble	X-Xc	Y-Yc	α 1-xc	β1-yc	Δ s(arcsec)	V	s/v
1	-15.33	-107.1	-14.36	-98.37	8.781	0.153	708
2	-83.16	-116.55	-80.23	-107.06	9.933	0.173	829
3	-126.63	-90.72	-117.40	-84.39	11.190	0.195	800
4	-169.89	-30.66	-158.09	-28.62	11.972	0.208	829
5	-124.95	85.68	-117.41	82.38	8.230	0.143	1058
6	-75.81	123.48	-71.69	116.60	8.017	0.139	1039
7	-39.27	140.07	-37.34	132.87	7.458	0.130	1121
8	54.81	152.67	50.90	142.89	10.533	0.183	885
9	148.26	105.42	138.58	101.73	10.355	0.180	1010
10	157.71	86.52	146.57	82.28	11.923	0.207	867
11	143.01	54.18	135.51	50.22	8.479	0.147	1037
12	131.25	-72.03	123.71	-62.88	11.852	0.206	726
13	-160.86	-92.82	-150.41	-85.42	12.805	0.223	834
14	101.43	-97.44	95.73	-88.96	10.216	0.178	792
15	86.31	-94.08	80.26	-85.72	10.320	0.180	711
16	38.01	-109.62	33.28	-100.89	9.929	0.173	672
17	-51.03	-134.82	-50.46	-124.36	10.476	0.182	791
18	-137.55	-79.38	-128.59	-72.20	11.485	0.200	795
19	-145.32	3.36	-133.89	3.74	11.439	0.199	731
20	-132.93	23.1	-126.77	24.09	6.234		
21	-126.63	65.94	-118.95	62.98	8.232	0.143	997
22	-20.79	178.29	-20.84	172.24	6.053		
23	15.12	138.39	14.22	130.72	7.725	0.134	1036
24	72.66	150.15	67.17	141.32	10.394	0.181	923
25	116.13	138.81	107.72	130.35	11.927	0.207	872
27	145.11	-26.88	136.04	-25.27	9.207	0.160	921
					average	0.176	874
					σ	0.027	129
NS	0	0	0.2253	-3.366	3.374		

Table 4. Radial Velocity and Convergence age for 27 Bubbles in nebular Shell



依據纖狀物的位置變化推測爆發的時間為 876 年前,也就是西元 1123 年蟹狀星雲發生爆發。這是由 1999 年與 1942 年之間纖狀物的位置變化所推測,如 Fig. 10,其資料列在 Table 5。此兩幅影像相距 57.49 年,平均的擴張速度為 0.15 (arcsec/yr),由於纖狀物的選定有比較接近星雲中央的部分,不是星雲的最外圍,所以投影的效應,量測到的移動量會比較小,平均所得的橫向速度也比較小。

	1999.86		1942.37				
number	X-Xc(")	Y-Yc(")	α 1-xc(")	β 1-yc(")	Δs	V	s/v
1	124.53	100.38	116.67	92.53	11.112	0.19	827.55
2	89.67	62.16	84.09	58.88	6.472	0.11	969.18
3	81.69	84.42	74.65	81.07	7.800	0.14	865.85
4	128.73	79.8	118.98	76.54	10.284	0.18	846.70
5	161.49	104.16	145.67	97.33	17.225	0.30	641.38
6	98.49	53.34	91.55	50.47	7.505	0.13	857.99
7	163.17	75.6	152.09	72.87	11.413	0.20	905.84
8	83.37	49.56	77.11	45.17	7.644	0.13	729.44
9	101.85	91.14	93.58	85.64	9.927	0.17	791.52
10	67.83	111.72	63.78	104.60	8.190	0.14	917.48
11	86.73	139.86	79.13	132.06	10.893	0.19	868.56
12	61.53	124.74	57.53	121.33	5.254	0.09	1522.00
13	58.17	117.6	52.23	107.66	11.578	0.20	651.48
14	58.17	139.86	51.48	129.22	12.572	0.22	692.69
15	43.47	140.7	39.67	131.71	9.757	0.17	867.69
16	42.21	120.12	42.32	112.69	7.429	0.13	985.27

Table 5. Radial Velocity and Convergence age for 60 fialments in nebular Shell

	1999.86		1942.37				
number	X-Xc(")	Y-Yc(")	α 1-xc(")	β 1-yc(")	$\Delta \mathrm{s}$	V	s/v
17	9.03	116.76	9.34	110.56	6.207	0.11	1084.75
18	33.39	100.38	31.23	95.29	5.528	0.10	1100.20
19	-12.39	100.8	-13.79	92.89	8.033	0.14	726.80
20	-32.55	126.84	-30.32	119.07	8.089	0.14	930.74
21	-26.67	113.4	-26.15	107.82	5.603	0.10	1195.21
22	-49.35	122.22	-46.48	115.66	7.163	0.12	1057.86
23	-53.97	96.6	-50.71	91.50	6.053	0.11	1051.01
24	-78.33	90.09	-73.82	85.72	6.280	0.11	1092.89
25	-73.29	72.45	-71.79	69.73	3.110	0.05	1905.11
26	-103.53	77.91	-95.94	73.33	8.864	0.15	840.36
27	-63.63	48.51	-59.29	48.71	4.342	0.08	1059.33
28	-108.36	48.51	-105.96	44.89	4.344	0.08	1571.09
29	-146.37	32.13	-136.14	29.82	10.486	0.18	821.61
30	-103.11	20.58	-95.35	20.52	7.764	0.14	778.61
31	-96.81	-0.21	-90.99	0.70	5.887	0.10	945.38
32	-143.22	-11.34	-133.94	-6.91	10.286	0.18	802.97
33	-154.77	-26.67	-145.86	-25.16	9.043	0.16	998.47
34	-111.51	-15.96	-103.88	-11.76	8.712	0.15	743.35
35	-171.78	-46.83	-162.00	-42.12	10.857	0.19	942.80
36	-149.73	-48.72	-139.56	-44.10	11.170	0.19	810.39
37	-82.95	-25.62	-78.42	-23.63	4.945	0.09	1009.29
38	-93.24	-52.92	-87.67	-48.73	6.969	0.12	884.37
39	-119.07	-75.81	-115.76	-69.83	6.833	0.12	1187.64
40	-87.78	-82.11	-83.50	-73.25	9.844	0.17	701.98
41	-50.4	-103.53	-49.98	-95.44	8.099	0.14	817.35
42	-49.35	-127.68	-44.41	-119.65	9.425	0.16	834.97
43	-15.12	-81.27	-11.85	-72.73	9.148	0.16	519.52
44	7.35	-98.28	5.34	-77.87	20.508	0.36	276.28
45	18.69	-63.42	17.49	-57.13	6.405	0.11	593.46
46	34.02	-79.59	35.23	-74.70	5.033	0.09	988.65
47	28.56	-48.51	22.27	-45.40	7.016	0.12	461.29
49	68.88	-83.58	62.95	-74.90	10.511	0.18	592.38
50	95.97	-91.77	88.61	-83.73	10.901	0.19	700.26
51	104.58	-66.99	97.31	-59.19	10.660	0.19	669.81
52	87.99	-45.15	82.10	-42.11	6.625	0.12	858.24
53	90.3	-19.95	83.83	-18.84	6.561	0.11	810.26
54	117.18	-53.76	108.81	-47.31	10.564	0.18	701.63
55	116.13	-20.58	107.02	-16.66	9.919	0.17	683.55
57	129.99	14.49	120.89	14.91	9.114	0.16	825.00

	1999.86		1942.37				
number	X-Xc(")	Y-Yc(")	α 1-xc(")	β 1-yc(")	Δs	V	s/v
58	108.99	4.62	101.78	5.35	7.248	0.13	865.29
59	152.25	36.54	142.64	31.44	10.879	0.19	827.38
60	115.5	31.71	104.01	31.40	11.496	0.20	598.97
					average	0.15	875.98
					σ	0.05	258.00
ns	0	0	0.23	-3.37	3.374		

3. 蟹狀星雲的徑向速度

Figure 11. Emission lines of the crab nebula



Table 6. Maximun relative velocities of approaching and receding knots

Eimission line (埃)	$\Delta \lambda$ (pixel)	Scale(A/pixel)	$\Delta \lambda$ (Angstrom)	Relative v (km/s)
O II 3727	23	1.4965	34.42	2771

由於目前找到的蟹狀星雲的發射譜線,如 Fig 11.所示,狹縫是沿著蟹狀星雲的長軸所拍攝。僅只有在紫外線波段的 O II 這條譜線因星雲擴張有向著地球和背向地球的移動,造成線有偏藍端和偏紅端的效應,所以呈現兩條的現象。找出此區域的影像比例尺並量測 O II 的譜線 作為推測星雲的徑向速度。O II 分成兩條的譜線間,最大的 $\Delta \lambda$ =34.42 埃,那麼相對移動速度 v=2771 (km/s),假設譜線是對稱張開,則單一方向的徑向速度應該是 1385.5 (km/s)。

4. 蟹狀星雲的距離

如果以包狀物的移動橫向速度 0.176 (arcsec/yr) 與徑向速度 V=1385.5 (km/s) 以第 4 式來 換算出的距離 d=5430 光年。同樣的如果用纖狀物的移動橫向速度 0.150 (arcsec/yr) 與徑向速度 V=1385.5 (km/s) 以第 4 式來換算出的距離 d=6370 光年。那如果以包狀物和纖狀物的平均的移 動橫向速度 0.163 (arcsec/yr) 與徑向速度 V=1385.5 (km/s) 以第 4 式來換算出的距離 d=5870 光 年。

肆、結論與應用

依據本研究的分析, 蟹狀星雲在 1942 年至 1999 年間由纖狀物或者包狀物移動速度所推估 的爆發時間分別為 A.D.1123 年和 A.D.1125 年, 平均值是 A.D.1124 年。包狀物的移動橫向速度 為 0.173 (arcsec/yr), 徑向速度 V=1385.5 (km/s), 距離 d=5430 光年。纖狀物的移動橫向速度為 0.150 (arcsec/yr), 徑向速度 V=1385.5 (km/s), 距離 d=6370 光年。

Table 7. Maximun relative velocities of approaching and receding							
feature	Expansion velocity (arcsec/pixel)	Date of outburst	Distance (lyr)				
Bubbles	0.173	A.D.1126	4450				
filaments	0.150	A.D.1125	5520				
Mean	0.163	A.D.1124	4800				

在爆發的時間上,目前所有估計蟹狀星雲的爆發時間都多晚於1054年(Nugent 1998), 這顯示蟹狀星雲速度有加速現象,應該是磁場的加速作用。本研究預期相差62年的八幅影像 來分析蟹狀星雲的爆發過程中加速度的情形,即使中央有拍攝過亮的情形,爲得到不同年代 間更完善的資料點,增加以包狀物這樣的殘骸特徵,不過仍無法得到加速度的現象。

Observer and date	Date of outburst
Duncan 1939	A.D.1172 ± 21
Badde 1942	A.D.1180 ± 21
Trimble 1968	A.D.1140 ± 15
Wyckoff & Murray 1977	A.D.1120 ± 7
Bester et al. 1996	A.D.1160
Nugent 1998	A.D.1130 ± 16
Present	A.D.1124

Table 8. compare the date of the crab nebula' s outburst

在距離的推估上,Bester 等人在 1996 年發表的文獻上蟹狀星雲的距離約在 4000 至 7000 光年之間(Bester 1996),本研究用 OII 單一譜線的移動量推出星雲距離約 5430 至 6370 光年。 如果可取得更多的光譜訊息加以分析,才具統計意義。

Table 9. compare the distance of the crab nebula

Observer and date	Distance (lyr)	
Bester et al. 1996	5600	
Trimble 1973	6290	
Present	4450-5520	

伍、參考文獻

- 1. Matthew J. Bester & Matteo J. Paris, 1996. Determination of the Distance to the Crab Nebula, J. Undergrad. Sci. 3: 57-62
- 2. M. Bejger & P. Haensel , 2003. Accelerated expansion of the Crab Nebula and evaluation of its neutron-star parameters, A&A, Vol. 405. p 747B
- Richard L. Nugent, 1998. New Measurements of the Expansion of the Crab Nebula, PASP, Vol. 110:831 – 836
- 4. Virginia Trimble, 1973. The Distance to the Crab Nebula and NP 0532. Publications of the Astronomical Society of the Pacific, Vol. 85, No. 507, p. 579-585
- 5. Walter Baade, 1942. The Crab Nebula. AJ, Vol. 96, p. 188-198
- 密西根大學天文所之網頁 www.astro.lsa.umich.edu/Course/Labs/crab/crab-full.html

7.