

台灣二〇〇五年國際科學展覽會

科 別：化學

作品名稱：分散質的結構與張力

得獎獎項：大會獎佳作

學 校：國立嘉義女子高級中學

作 者：呂婉甄、王琦雅

評語與建議事項：

題目很有趣，兩泡連通法及框上薄膜總面積法皆有相當的創意，若能適度修正框膜法，符合兩泡連通法的結果，應會是一篇高水平的研究。

The surfactant and Tension of Solvent

The Substract

The dispersion of surfactant used for the purpose of cleasing,if dipped on a blowpipe,can be blown into bubbles and,if dipped on a frame,will form a certain shape of membrane.For these two different situations,according to the principle of their quality,measuringdevices can be respectively designed to explore the relation of surfact tension to its concentrate.It is discovered that,with the measuring device of the Two Bubble Connection Method,the sensitivy measured is better;and that,because of the difference of the structures of the frames,the total area of the membrane and the change trend of the degree of the surface tension will also be different and the probable error of the measured digits is always larger and it is not easy to find regularity.

For the two categories of dispersion,soaps on the market and synthesis detergent,when they are measured with the Two Bubble Connection Method about the relationship of their surface tension to the degree of their concentrate,the trend of change is exactly opposite.The surface tension and concentrate of the category of soap are in right proportion whereas,for synthesis detergent used for cleaning bowls and plater and washing clothes,when its concentrate is less,its surface tension is more intense.Based on the findings of this study,the concentrate and the change trend of the degree of tension have no connection with whether there is benzene structure in the solvent.

With the Capillary Rise Method assisted by digital photography to observe the relation of the tension of standard solution to the concentrate,we have found that they totally correspond to the result measured with the Two Bubble Connection Method designed in this study.

分散質的結構與張力

摘要

洗滌用的界面活性劑分散系，沾在吸管可吹成泡，沾在框上則生成特定形體的薄膜；兩種不同現象，依據各自的性質原理，分別設計為可測量的裝置，研討表面張力與濃度間的關係，發現『兩泡連通法』，測量的靈敏度較佳，並且；薄膜總面積法則會因為框的形不同，測得薄膜總面積與表面張力大小的變化趨勢不一樣，而且數據誤差都比『兩泡連通法』大。

市售的洗劑有肥皂與合成清潔劑兩類，它們溶於水的分散系，表面張力與濃度大小的變化趨勢正好相反；肥皂的濃度愈大表面張力愈大，合成清潔劑的濃度愈小表面張力愈大。這種現象發生的原因，和分散質是否含苯環結構無關。

用數位照相輔助毛細管上升法，觀測『兩泡連通法』標準液的張力與濃度關係，數據顯示兩泡連通法與毛細管上升法，兩者比較各種分散系張力與濃度大小的結果相同。因此，用『兩泡連通法』比較不同分散系張力大小是簡便生動的可行方法。

壹. 研究動機

界面劑分散系的泡膜，有什麼特殊性質？沾在不同形體的框上，薄膜總面積與濃度有關嗎？分散質的結構和分散系的表面張力、濃度等的大小有關係嗎？

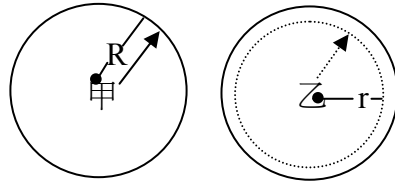
貳. 研究目的

- 一、改進『兩泡連通法』的裝置。
- 二、研究提高框上薄膜總面積測量的精準度。
- 三、研究不同洗劑的表面張力與濃度的關係
- 四、毛細管上升法與『兩泡連通』裝置測量表面張力的比照。
- 五、探討各種濃度下，皂類與合成洗劑張力變化趨勢相反的原因。

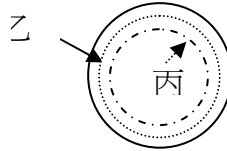
參. 文獻探討

- 一、莊淑雀老師指導，中華民國第三十六屆中小學科學展覽優勝作品—『泡泡的特性研究』測定表面張力的方法(我們稱它兩泡連通法)原理分析：
(一)、定量氣體在沒有膜的包覆下，呈球狀時的體積【如圖(一) 甲：半徑 R 】，比有

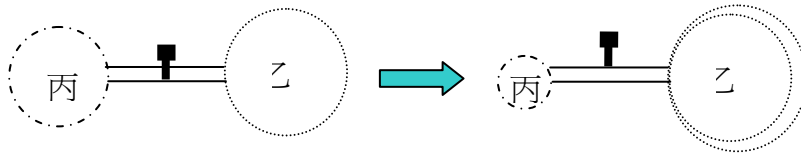
界面劑薄膜包覆的球體【如圖(一)乙—虛線，半徑 r 】大。



- (二)、用等量的同種氣體，將 A、B 兩種界面劑分散系各自吹成泡，泡的組成粒子不同，A、B 兩泡的實際總體積【如下圖(二)之乙、丙】不等值，兩泡內壓當然不等，體積較小者表面張力較大。



- (三)、本研究設計『兩泡連通』的裝置，使兩泡連通後，體積比較小的丙泡，內部氣體流向乙而體積縮小至完全消失，乙泡的體積變大【如下圖(三)所示】



- (四)、由參考文獻三的P14~P20 知道：(1)泡的內壓差 $\Delta P \propto \frac{2T}{r}$ 、(2)泡膜的張力 $T \propto r$ ，

及(3)球體體積 $V = \frac{4}{3} \pi r^3$ ，導出 $T \propto r \propto \sqrt[3]{V}$ 【即 A B 兩種界面劑張力比 $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\sqrt[3]{V_A}}{\sqrt[3]{V_B}}$ 】

我們推想到下列的實用測量方法：找出可連通的兩泡，等內壓時的體積比，即為兩泡組成液的張力比。故將表面張力小的A液，固定用 10 毫升空氣吹泡；表面張力大的B液，吹泡的空氣用量大於 10 毫升，此新B泡內壓小於只用 10 毫升吹出的B泡；循此性質，依序增加吹B泡的空氣體積，找出到適當空氣用量，使兩泡連通後內壓相等。兩泡各在一端停滯不動。(或兩泡的脹縮機率相等)

文中只探討不同的界面劑、加入添加劑、靜置數日等變因以致分散系的張力大小改變的現象，沒有研究界面劑在不同濃度時張力的改變與界面劑的種類的相關性。也沒有討論界面劑在框上產生薄膜總面積變化與張力關係等問題，我們認為些現象的變化十分有趣，皆值得分析研討。

二、市售商品的界面活性劑的類型研究：

- (一)依原料來源：1.天然的肥皂—主要含脂肪酸鈉 2.人造合成品—主要含苯磺酸鈉。
(二)依離子的類型：1.陰離子型 2.陽離子型 3.兩性型 4.非離子型。

本研究著重在原料來源差異，界面活性劑分子不同，分子間作用力不一樣，是否會呈現在表面張力與濃度關係的變化走勢上？或者還有其它理由？

三、毛細管上升法的研究：張力 $T = \frac{r h \rho g}{2 \cos \theta}$ 若 $\cos \theta = 1$ (即潤濕角接近零)則 $T = \frac{r h \rho g}{2}$

(r 是毛細管半徑， h 是分散系的上升高度， g 重力速度， ρ 為液體的密度)由公式中的數量可知，需量測的各項數量皆很小，現今的數位照相輸入電腦螢幕顯像的幫助，對毛細管法的測量準確度提高，應該有很好的效益。

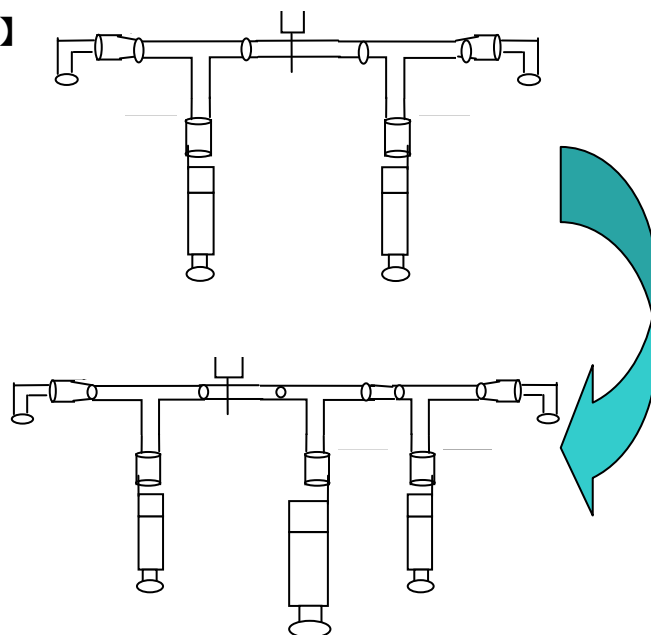
肆. 研究設備與試藥

名稱	數量	名稱	數量	試劑	數量
數位攝影機	1	硬脂酸鈉	1 盒	各種界面劑： A1、A2、A3、 A4、A5、B1、 B2、B3、B4、 B5、C1、C2、 C3、C4、C5 (配製分散系 的要點，見附 錄二)	適量
毛細管	20 支	苯磺酸鈉	1 盒		
超音波震盪儀	1 台	三叉管	3 支		
1000 cc的燒杯	30 個	橡皮管	50cm		
電子秤	1 台	濾網	1 個		
滴管	10 支	玻棒	2 根		
木條	5 支	有刻度注射筒	3 支		
鏡子固定架	2 個	試管夾	1 支		
兒童遊戲 Lego 積木	6 個	鏡子	2 個		

伍. 研究步驟

- 一、改進『兩泡連通』的裝置。因為有的分散系的張力很大，吹泡用的空氣總體積多，超出文獻載述的資料設計故串聯第三支注射筒可以滿足本研究研討的測量需求。

【見圖(四)】



圖(四)：改進前後的兩泡連通裝置

- 二、研究提高測量薄膜面積精準度的方法。【見下圖(五)】

(一) 鏡像連線測長度：

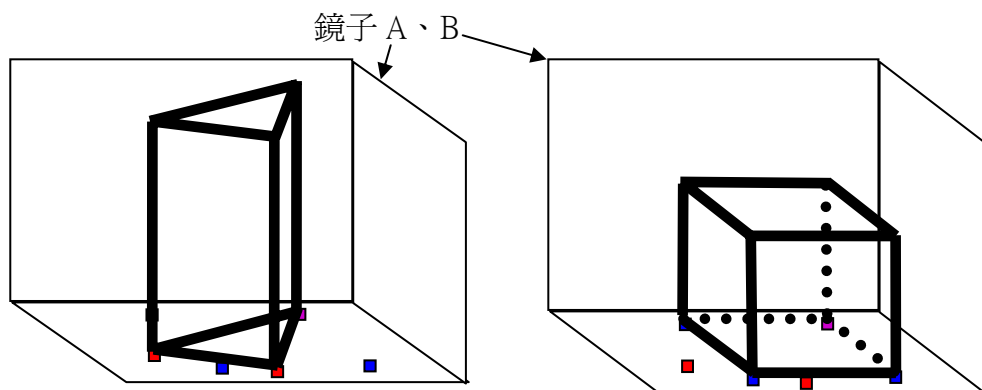
1. 自製透明的彩色方格紙，作刻度尺，並貼在的鏡面上【圖(六)】。
2. 將已沾界面洗劑的框放在鏡前，讀取實體與鏡像同一點的連線，通過鏡面上透明片的方格紙刻度。

(二) 框的結構有站立的支架，可精簡測量值的讀取次數、控制測量變因。

1. 立方框有六個面，任一面的四個頂角，突出長度 0.50cm，做框的站立支架。
2. 三角柱體的框之適當三個頂角，突出長度約 0.50cm，做框的站立支架。

(三) Lego 單孔積木做定點的孔洞

1. 鏡前約 3 cm 處，用電焊筆挖孔，以便樂高(Lego)的方形單孔積木定點黏附。
2. 選用切割較工整的樂高(Lego)積木，讓框的支架插入呈固定位置，使沾界面劑的框，每次皆站立在鏡前定點位置，框的每個頂角在刻度尺上讀數相同。



圖(六)：在 A、B 的鏡面上皆貼有方格紙做的刻度尺

三、不同洗劑在各種濃度下，表面張力的變化研究。

(一)兩泡連通法：

1. 選擇不易變質，起泡持久度好，張力大小適中的分散系，固定用 10 毫升空氣吹泡的標準液。
2. 待測分散系在連通裝置的另一端，用注射筒吹成泡，再打開通道上的鐵夾。
3. 適度增減待測分散系吹泡的空氣體積，使它的內壓與標準液相等【外觀上會出現兩端氣泡不動(或發生縮脹頻率相等)】，記錄空氣體積。

(二)膜：框沾洗潔劑分散系生成薄膜的面積測量。

1. 立方框沾分散系，讀取計算面積所需之讀數 X、Y、Z、L、K。【圖(八)】
2. 三角柱沾分散系後，讀取薄膜左、右尖頂讀數 h_1 、 h_2 。

四、毛細管上升法與『兩泡連通』法測量表面張力的比較。

(一)毛細管用膠布貼在透明尺上，插入待測張力的分散系中，用數位相機拍照。

(二)量取照片上的潤濕角 θ 、上升高度 h 、毛細管內徑 r 等的大小。【見圖(七)】

(三)用毛細管上升法測張力的任一種分散系，皆用兩泡連通法，測定吹泡與標準液等內壓時，需用的空氣體積。



圖(七)：毛細管上升法測量分散系的張力。

五、皂類、合成洗劑的表面張力大小與濃度關係，變化趨勢相反，與分散質結構是否相關的研究。

(一)用兩泡連通法測定下述分散系吹泡須用的空氣體積

- 1.十二烷基苯磺酸鈉。
- 2.硬脂酸鈉。
- 3.十二烷基苯磺酸鈉與 5 克的 NP9 混合液。
- 4.硬脂酸鈉與 5 克的 NP9 混合液。

陸. 研究記錄

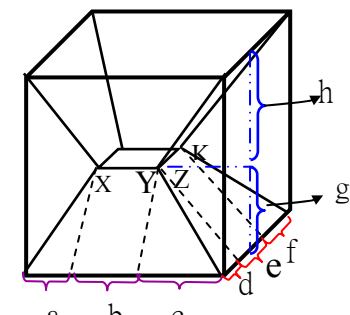
一、 研究提高框上薄膜總面積測量的精準度

(一)框上的薄膜面積的計算方法：

(1).立方框

$$(5+b) \cdot ((d^2 + h^2)^{0.5} + (h^2 + a^2)^{0.5} + (g^2 + d^2)^{0.5} + (g^2 + f^2)^{0.5}) + (5+e) \cdot ((h^2 + a^2)^{0.5} + (h^2 + c^2)^{0.5} + (g^2 + a^2)^{0.5} + (g^2 + c^2)^{0.5}) + 5 \cdot ((a^2 + d^2)^{0.5} + (f^2 + c^2)^{0.5} + (c^2 + d^2)^{0.5} + (f^2 + a^2)^{0.5}) + 2 \cdot b \cdot e$$

圖(八) 立方框結構與讀數

讀數	面積計算參數	薄膜結構讀數、計算面積參數
像與實物重疊的連線	X	
	Y	
Z		
L		
和鏡上刻度尺的交點	f	
	g	
K	h	

(2).三角柱框

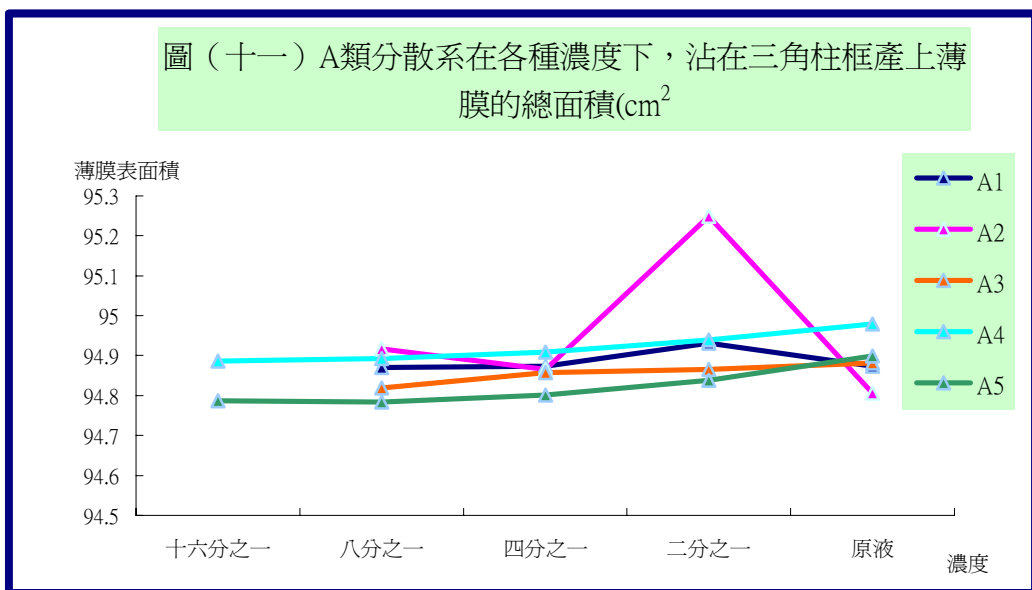
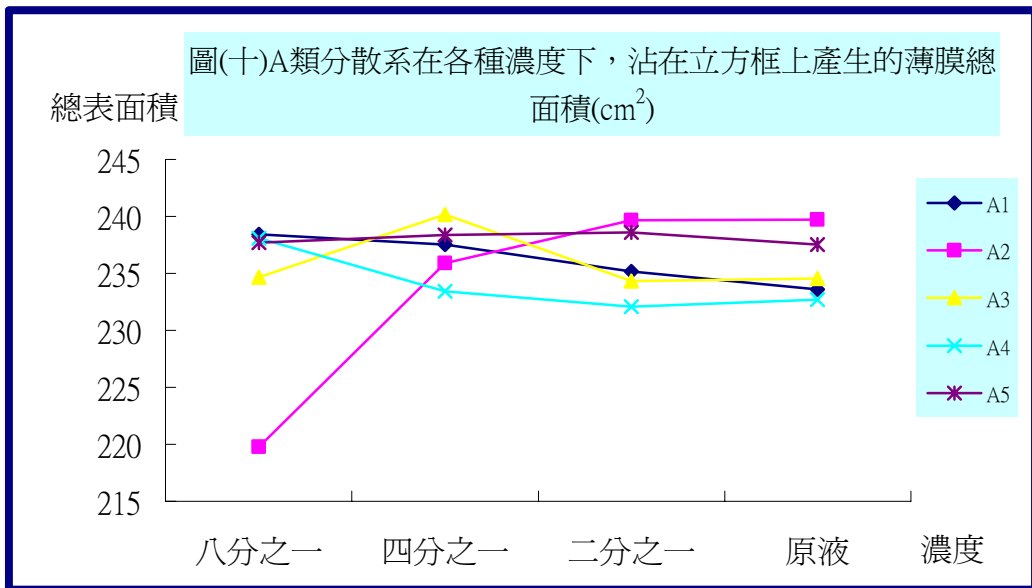
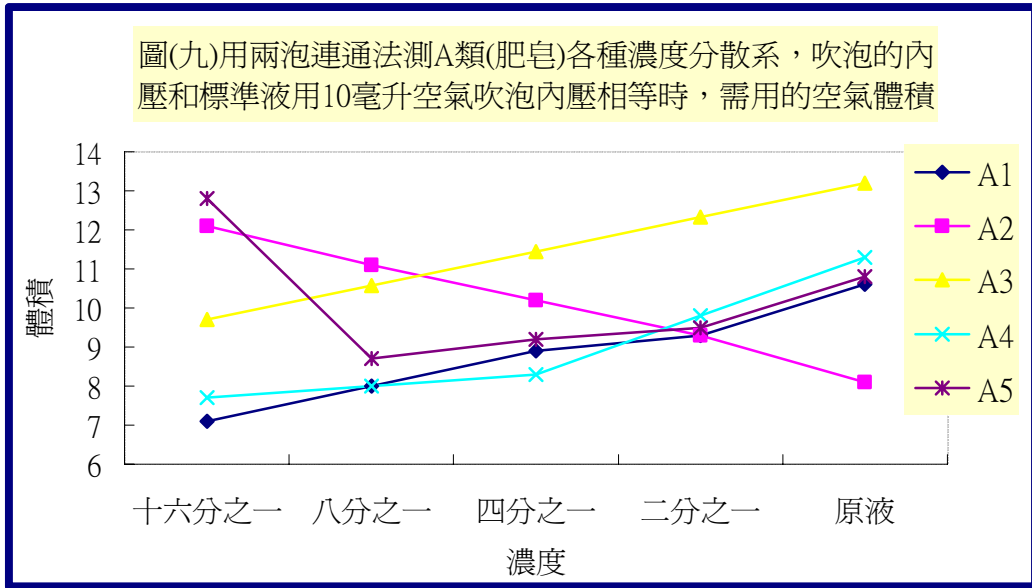
I. 三角柱框上的薄膜，在三角形的內心連線上，出現上、下對稱的尖頂。

$$II. f(h_1, h_2) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2l - h_1 - h_2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} a + \frac{3}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} a\right)^2} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6} a\right)^2}$$

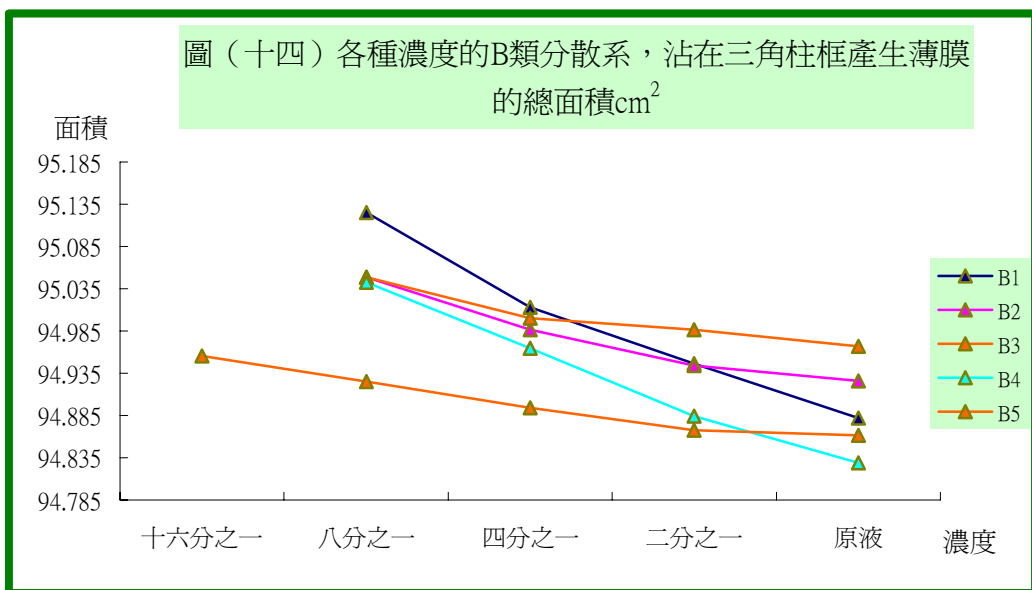
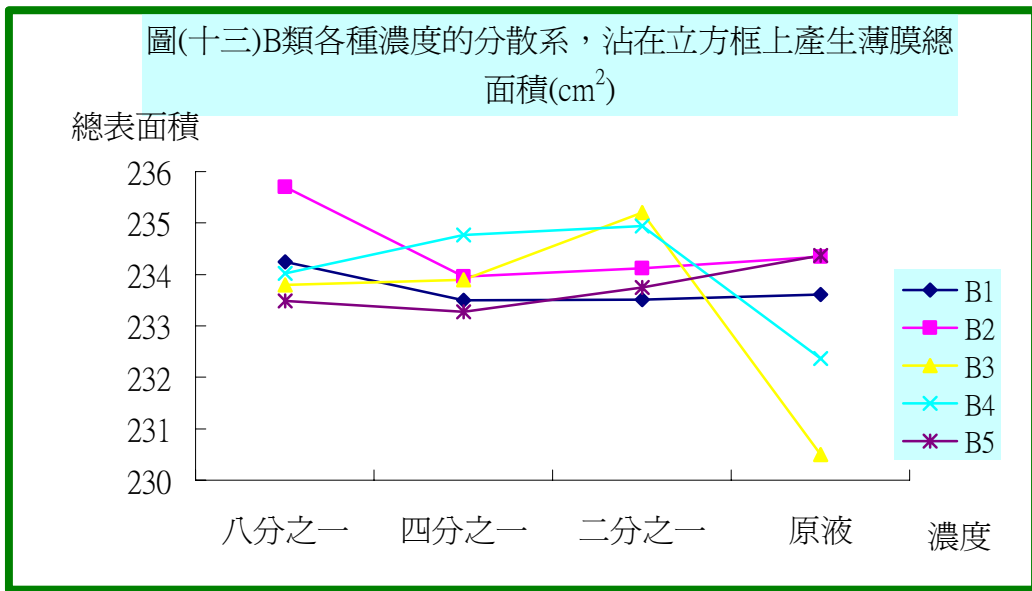
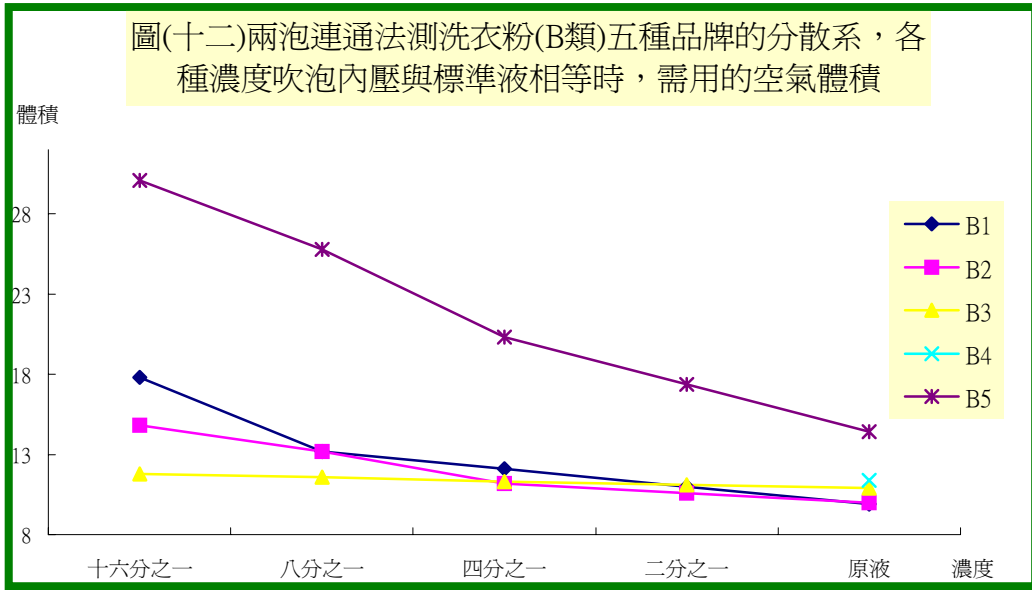
(本項的詳細推演導出過程見附錄四)

二、 不同洗劑的表面張力與濃度的關係。

1.五種品牌 A 類(肥皂)分散系，用兩泡連通法和薄膜總表面積法的測量記錄圖

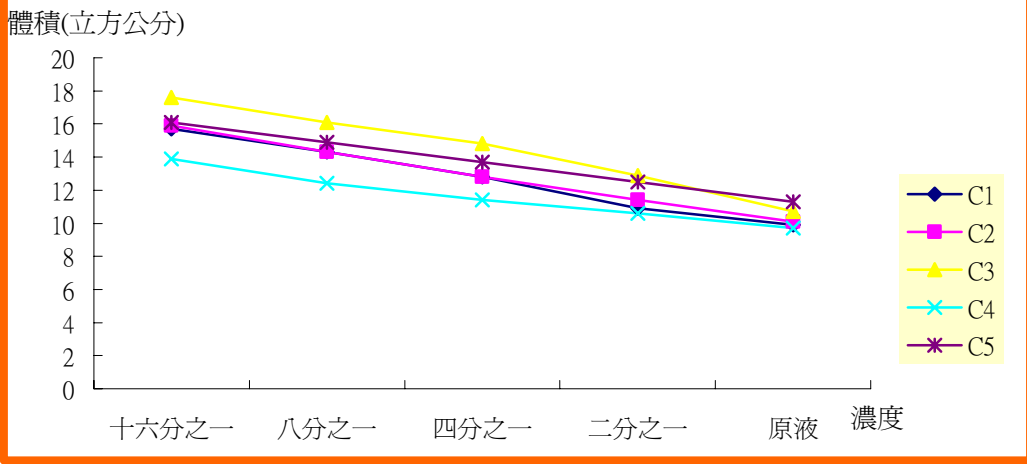


2.B 類(洗衣粉)五種品牌分散系，分別用兩泡連通法和薄膜總表面積法的測量記錄圖

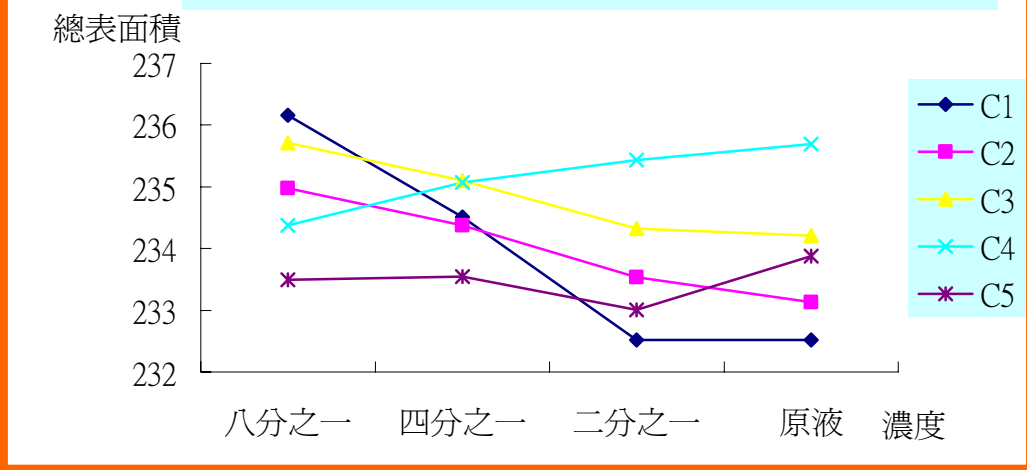


3.C 類(洗碗精)五種品牌分散系，分別用兩泡連通法和薄膜總表面積法的測量記錄圖

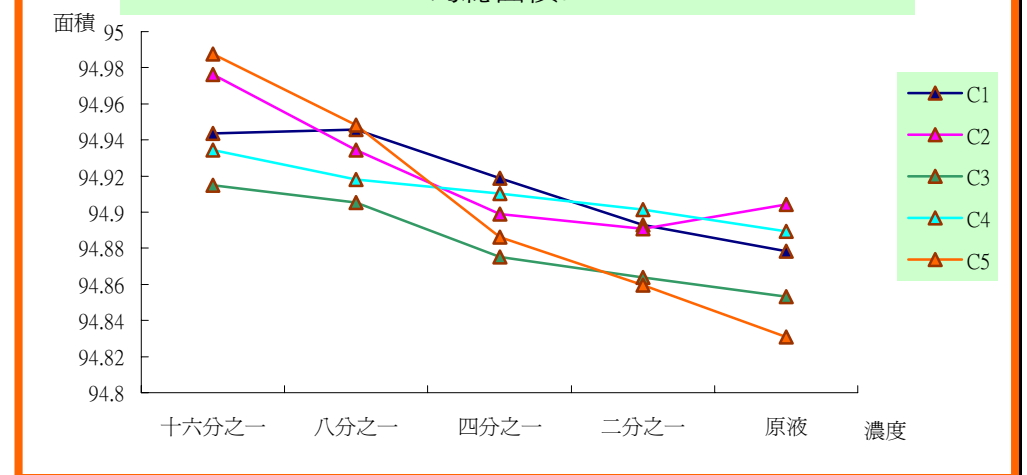
圖(十五)用兩泡連通法測五種品牌的C類分散系，在各種濃度下吹泡內壓和標準液相等時，需用的空氣體積



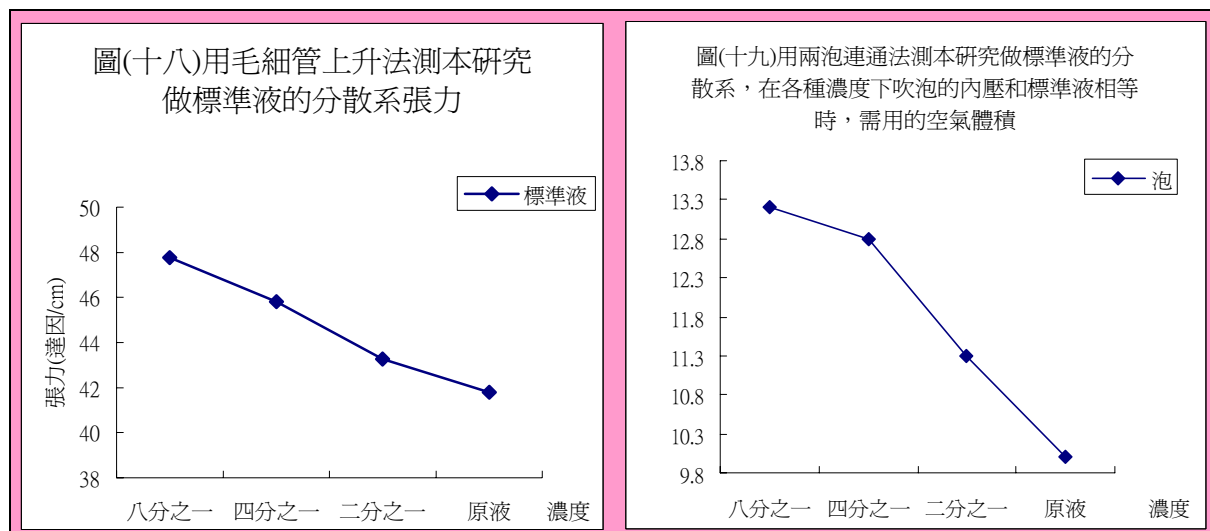
圖(十六)不同濃度的C類分散系，沾在立方框上產生的薄膜總面積(cm²)



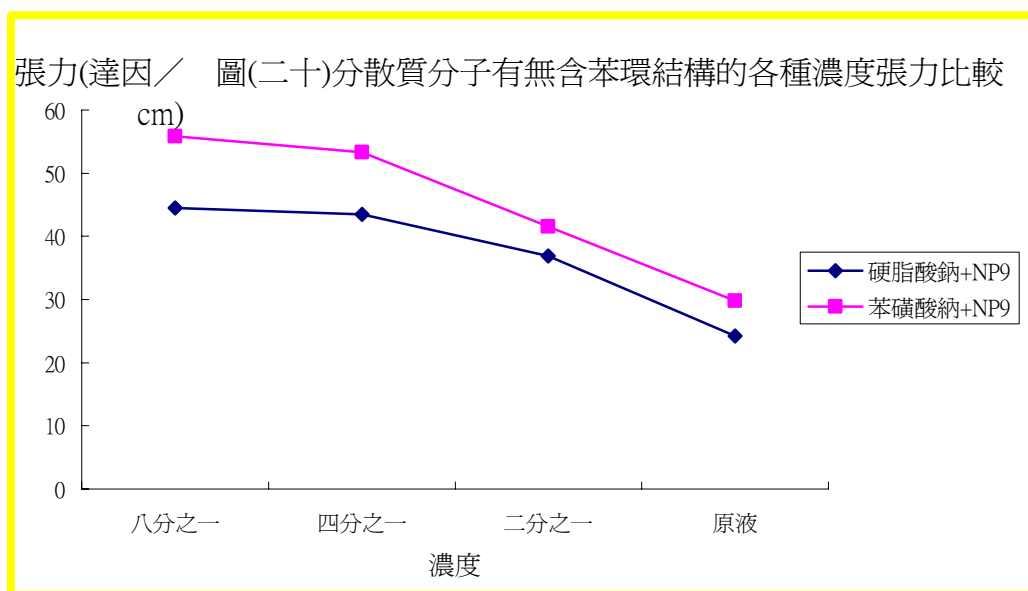
圖(十七)各種濃度的C類分散系，沾在三角柱框上薄膜的總面積cm²



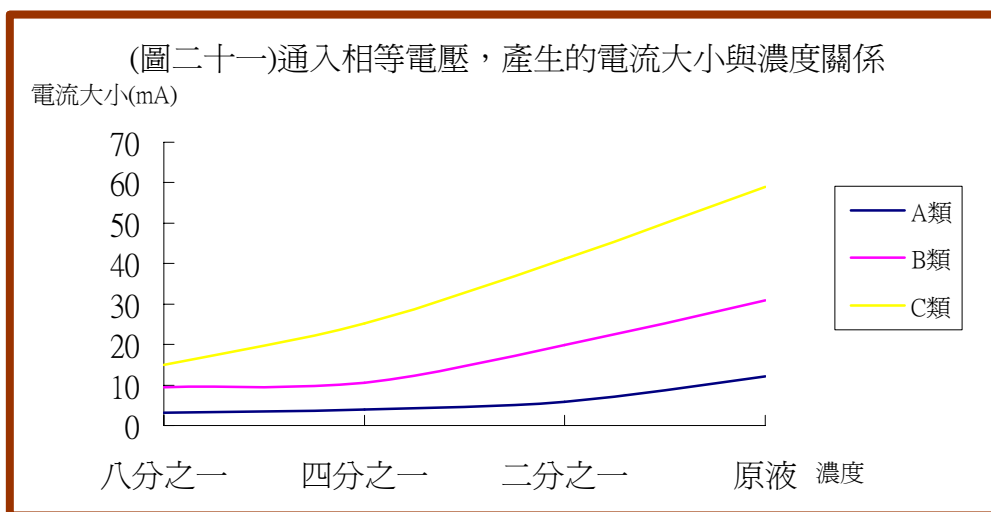
4.兩泡連通法與毛細管法測量分散系表面張力的比較



5.分散質結構對表面張力的影響



6.研討肥皂呈負界面活性和合成清潔劑呈正界面活性的原因，是否與電解質有關



柒. 討論

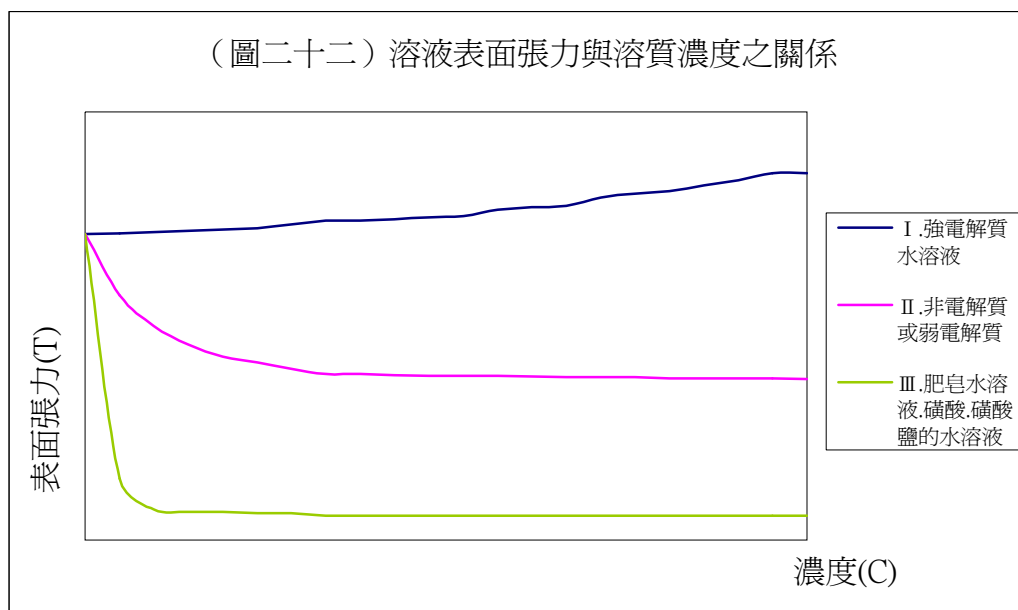
- 一、本研究設計兩種方法：1.兩泡連通法 2.框上的薄膜總面積法，比較各種分散系張力與濃度間的關係，從全部的記錄圖作綜合比較，可以發現如下的事實：
 1. 兩泡連通法的靈敏度較佳，而且兩泡等內壓時的體積開立方比等於毛細管上升法測出的張力比。
 2. 框上的薄膜總面積法，在儀器靈敏度方面的表現，不如兩泡連通法，而且不同框形測出的數據，總面積大小與濃度關係的變化趨勢恰好相反【註 1】，開啓我們對薄膜結構力學的疑問，有待後續再研討。
- 二、由圖(九)、(十二)、(十五)用兩泡連通法的記錄比較圖，可以發現多數的肥皂(A類)分散系，濃度愈大張力愈大；反之，B、C兩類的任意五種市售商品，沒有標示成分為(肥皂)的合成清潔劑分散系，濃度愈大張力愈小。探討這種現象發生的原因，記錄(圖二十)顯示硬脂酸鈉和十二烷基苯磺酸鈉的分散系，都是濃度愈低分散系張力愈大，所以肥皂濃度愈大分散系的張力大的現象，和分散質有無含苯環結構無關。
- 三、記錄圖(十八)是數位照相輔助毛細管上升法測量分散系的表面張力，所得的關係圖相似，其中任兩點之比等於圖(十九)之任兩點開立方比，印證文獻探討一、(四)之原理公式推導。【泡膜的張力 $T \propto r \propto \sqrt[3]{V}$ ；即 A B 兩種界面劑張力比 $\frac{T_A}{T_B} = \frac{\sqrt[3]{V_A}}{\sqrt[3]{V_B}}$ 】。
- 四、圖(六)實體上任一點與鏡像中該點的連線，會垂直鏡面；本研究即以連線和鏡面上刻度尺的交點讀數，作測量值，降低觀測視角不同產生的誤差；框上設支架，可插入單孔 Lego 製的鏡前定位點，使沾界面劑的框，每次站立在鏡前框時，每個頂角在刻度尺上讀數相同，精簡探討需讀取測量值的總個數，有助於提高本研究觀測值的精確度。本研究用的薄膜總面積法，在操作過程，須特別留意的事項如下
 - (一)用定量吹氣成泡的連通裝置，最怕有漏氣現象，會嚴重影響測定值；可在各個接口，用界面劑分散系潤濕予以避免，有時兩端接的可彎式吸管，未用前即是破損商品。
 - (二)膜的面積測量，在讀取讀數時，取觀測點(X、Y、Z、L、K)之膜厚內或外，必需每次一致。
- 五、立方框與三角柱框兩種結構，沾界面劑後產生的薄膜總面積大小與界面劑分散系表面張力大小關係比較：

(一). **立方框**：9 片薄膜共築的結構，中央方形薄膜與上下兩方呈對稱的 8 片梯形薄膜，呈現組成分子間作用力的較勁，直到取得力的平衡；本研究讀取記錄值，皆儘可能等到膜形穩定後再讀取。結果發現如下：表面張力愈**大**，薄膜的總積面積愈**小**。

(二). **三角柱框**：9 片薄膜共築的結構，在中央的三片梯形薄膜，與上下兩方各由 3 片三角形薄膜，築成無底面的對稱正角錐形結構，進行組成分子間作用力的較勁，在本研究的觀測過程，發現在上下的對稱正角錐形的收縮過程，對中央的三片梯形薄膜造成拉大面積的效應，兩者消長互抵的結果：表面張力愈**大**，薄膜的總積面積愈**大**。

兩種不同形的框，所得結果的差異性，我們討論後，認為可能是框內薄膜的上下方有重量差，也會影響薄膜總面積大小，本研究用這個方法測得的數據也較混亂，因此可以留等後續研討我；但是研討框內的薄膜總面積大小方面很大的空間。

六、根據參考資料二，各種不同溶液(或分散系)的表面張力與濃度的關係如下圖:



圖中的曲線 I，讓我們連想到一般肥皂的製造，是加氫氧化鈉(或氫氧化鉀)與油脂反應，再用鹽析法分離產物，可能殘留大量電解質產生的影響？【圖中曲線 I，分散質濃度增加時,分散系的表面張力變大，稱為負界面活性(Negative surface activity)；II.III.則相反，分散質濃度增加時，分散系的表面張力變小，稱為正界面活性(Positive surface activity)】。本研究以相等電壓對各種分散系通電，比較電路上的電流強度，發現如下：

- 1.本研究的各種分散系原液，通電後的電流大小排序如下：B類>C類>A類。
- 2.同種分散系在不同濃度下，濃度愈低電流愈小。沒有例外者。

我們曾推測含有微胞粒(microcell)的分散系，濃度愈高時分散系愈黏稠，離子移動速度可能比較慢，通電後電路上的電流強度小於濃度低的狀況；出現反常，與一般物質導電性規律不同的特例？(一般溶液濃度愈高，通電後電流愈大)但是到目前為止，我們的研究並沒有出現上述臆測的現象【圖二十一】。並且這些數據也不能做為陳指電解質就是使肥皂(脂肪酸鈉)呈負界面活性的原因。(註：含有十二烷基苯磺酸鈉的洗碗精、洗衣粉等等合成清潔劑呈正界面活性。)

捌. 結論

本研究有二項重要發現：

- 一、兩泡連通法比較分散系的表面張力大小，靈敏度高且簡單生動。
- 二、一般肥皂和合成清潔劑的分散系表面張力與濃度大小的變化關係，趨勢上正好相反，而且這種性質與分散質結構有無苯環無關。

玖. 應用

- 一、用各種界面劑及其不同濃度的總面積變化趨勢，會發現幾何問題；例如：三角柱框沾界面劑分散系後，薄膜總面積大小與薄膜的兩尖頂位置有關，尖頂距底面正三角形某特定高度(h)，薄膜總面積呈最大值，尖頂在兩 h 點之間移動時，兩 h 點間距愈大，薄膜總面積就愈大。
- 二、可以做幾何教材的教具：不同結構的框，沾界面劑後產生薄膜的幾何形狀不同，結構對稱的框中薄膜形狀有規則，作框的材質具有多樣性，可用容易彎折的金屬線代替木條；我們在研究中經常輕易的製造立方體的泡泡唷！

壹拾. 展望

- 一、本研究以兩泡連通法測分散系表面張力大小，探討它和濃度高低的關係，發現苯磺酸鈉與脂肪酸鈉兩類分散系的變化趨勢正好相反，這種差異與分散質有無苯環結構無關，查閱文獻【註：參考資料二】，我們推測它可能與分散系含電解質有關。但仍待進一步探討。
- 二、本研究發現：立方與三角柱兩種構造的框，沾界面劑後薄膜總面積，與界面劑的表面張力大小改變趨勢恰好相反；顯示各片薄膜作用力及其合力，與框的邊長、柱高比例有關，值得作後續研究。

三、本研究用的正三角柱框【三角形的邊長：柱高=5cm：9cm】，沾界面劑後，薄膜的總面積與兩尖頂的間距大小有關。可用那些數學方法推導或證明？

四、沾界面劑的正三角柱上的薄膜，用雷射筆之光線通過薄膜上兩角椎點之間的連線，投射在桌面上，發生多種有趣的現象，值得進一步研討。

壹拾壹. 參考文獻

- 一、 莊淑雀老師指導，中華民國第三十六屆中小學科學展覽優勝作品—『泡泡的特性研究』。
- 二、 物理化學編輯委員會著，黃定加主編，物理化學第 P409~423，高立圖書公司出版，82年5月25日第25版。
- 三、 Ben Selinger Chemistry In The marketplace Harcourt Brace & Company
- 四、 北原文雄原著，賴耿陽譯著，界面活性劑應用實務，復漢出版社出版，(1988)
- 五、 ARTHUR W. ADAMSON 原著，陶雨台譯著，表面物理化學 P465~491，國立編譯館主編，千華圖書出版事業有限公司發行，P2~14(1988)
- 六、 Catherine Sheldrick Ross 原著，陳順發譯著，快樂學習正方形，遠哲科學教育基金會出版，(1999)

壹拾貳. 附錄

- 一、 界面劑分散系的配製：市售商品的洗潔劑，皆為多種純質的混合物；用一定重量的分散質與定量水混合，有沉澱物時必須濾除，濾液即為原液；用原液加水稀釋，使總體積變為原液的 n 倍，則各種成分皆為原液 $1/n$ 倍。方法如下：
 - (一)、 清潔劑 A1~A5、B1~B5、C1~C5 十五種三類(肥皂、洗碗精、洗衣粉)，各取肥皂 50g、洗衣粉 60g 分別加 1000ml 蒸餾水及洗碗精 750g 加 250ml 蒸餾水，並攪拌均勻，A、B 類的界面劑製成溶液時，均未能完全溶解，需要過濾，取濾液作試驗。研究用的界面劑品牌以具有完整商品標示者隨機取樣。
 - (二)、 每種溶液採用連續稀釋法，配不同濃度（原液濃度 $1/2$ 、 $1/4$ 、 $1/8$ 、 $1/16$ ）的溶液，分類標記〈如下表一〉：

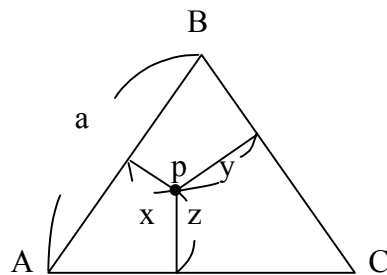
表一 分類標記肥皂洗碗精洗濃度

分類標記	肥皂					洗碗精					洗衣粉					濃度
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	
a	A _{1a}	A _{2a}	A _{3a}	A _{4a}	A _{5a}	B _{1a}	B _{2a}	B _{3a}	B _{4a}	B _{5a}	C _{1a}	C _{2a}	C _{3a}	C _{4a}	C _{5a}	原液
b	A _{1b}	A _{2b}	A _{3b}	A _{4b}	A _{5b}	B _{1b}	B _{2b}	B _{3b}	B _{4b}	B _{5b}	C _{1b}	C _{2b}	C _{3b}	C _{4b}	C _{5b}	原 $\frac{1}{2}$
c	A _{1c}	A _{2c}	A _{3c}	A _{4c}	A _{5c}	B _{1c}	B _{2c}	B _{3c}	B _{4c}	B _{5c}	C _{1c}	C _{2c}	C _{3c}	C _{4c}	C _{5c}	原 $\frac{1}{4}$
d	A _{1d}	A _{2d}	A _{3d}	A _{4d}	A _{5d}	B _{1d}	B _{2d}	B _{3d}	B _{4d}	B _{5d}	C _{1d}	C _{2d}	C _{3d}	C _{4d}	C _{5d}	原 $\frac{1}{8}$
e	A _{1e}	A _{2e}	A _{3e}	A _{4e}	A _{5e}	B _{1e}	B _{2e}	B _{3e}	B _{4e}	B _{5e}	C _{1e}	C _{2e}	C _{3e}	C _{4e}	C _{5e}	原 $\frac{1}{16}$

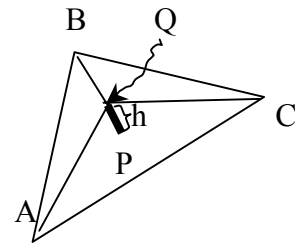
二、三角柱上的薄膜，在上下底的三角形內心連線上產生對稱的上、下尖頂時，薄膜面積大小的計算公式導出過程如下：

(一)、 設 P 為正三角形 ABC 內的一點，且其到三邊長分別為 x, y, z 【圖(甲)】，
所以 $x + y + z = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ，【 a 為正三角形的邊長】。

(二)、 若 Q 為其正上方之一點，且 $\overline{PQ} = h$ 【圖(乙)】，則 $\Delta QAB + \Delta QBC + \Delta QAC$
的面積和為 $\frac{1}{2} \cdot a \cdot (\sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h^2 + y^2} + \sqrt{h^2 + z^2})$



圖(甲) 正三角形 ABC



圖(乙) 三角形 P 點的正上方 Q

(三)、 欲使 $\Delta QAB + \Delta QBC + \Delta QAC$ 面積和最小，利用 Lagrange 差值法

$$f(x, y, z) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (\sqrt{h^2 + x^2} + \sqrt{h^2 + y^2} + \sqrt{h^2 + z^2}) - \lambda \left(x + y + z - \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)$$

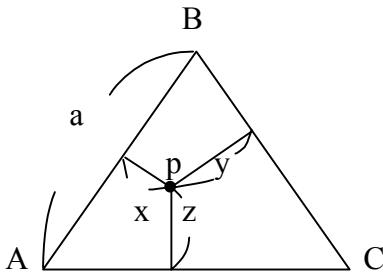
$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + h^2}} - \lambda = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{z}{\sqrt{y^2 + h^2}} - \lambda = 0\end{aligned}$$

所以

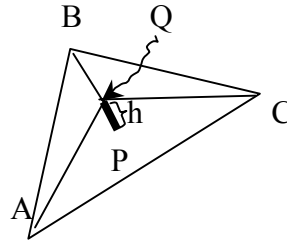
$$\frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2 + h^2}} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{z}{\sqrt{y^2 + h^2}} \Rightarrow x = y = z$$

$$\text{, 故當 } x = y = z = \frac{\sqrt{3}}{6}a \text{ 時, } f(x, y, z) \text{ 有最小值 } \frac{3}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}$$

(四)、對於正三角柱而言，在兩底面重心連線上有兩點，其到兩正三角形的距離分別為 h_1, h_2 ，則所有最小表面積總和之函數為



圖(甲) 正三角形 ABC



圖(乙) 三角形 P 點的正上方 Q

$$f(h_1, h_2) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2l - h_1 - h_2) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}a + \frac{3}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h_1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2} + \frac{3}{2} \cdot a \cdot \sqrt{h_2^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)^2}$$