

台灣二〇〇五年國際科學展覽會

科 別：物理

作品名稱：波動奇蹟—皂膜與皂水共振模式之研究

得獎獎項：大會獎第三名

美國正選代表:參加美國第 56 屆國際科技展覽會

學 校：國立新竹高級中學

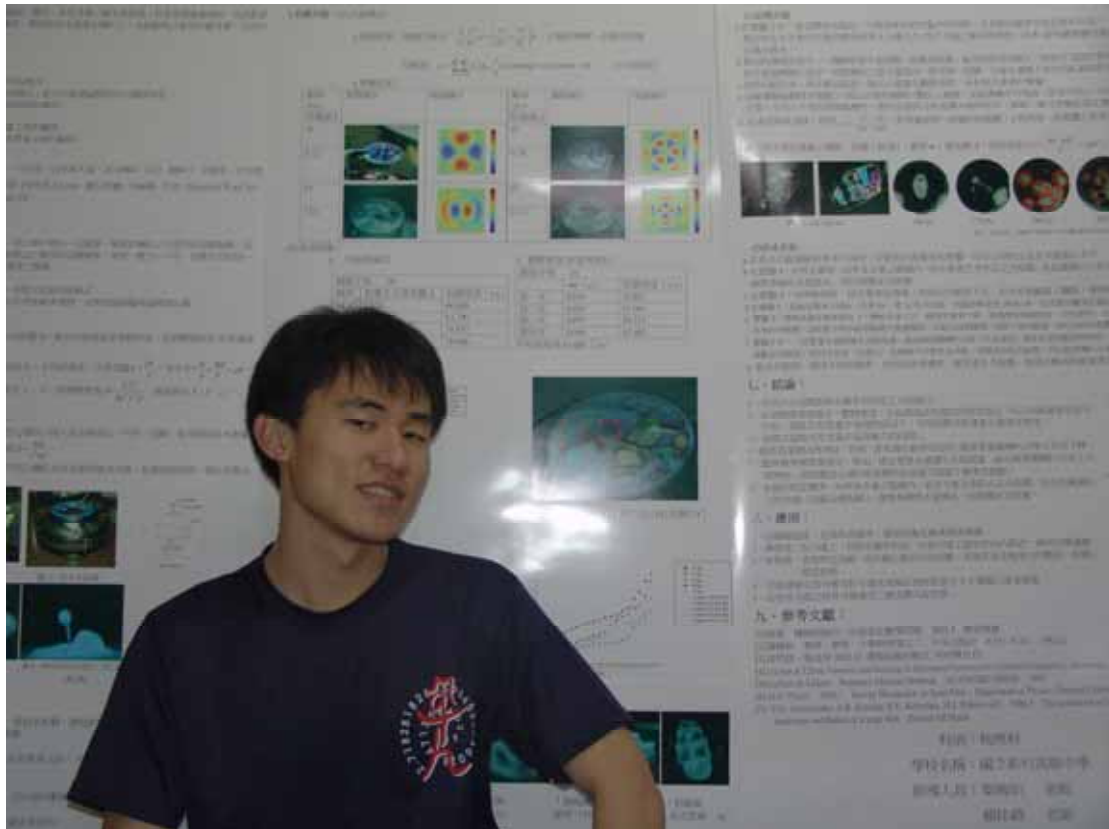
作 者：郭博鈞

評語與建議事項：

本作品主要自製實驗器材，測量光經單狹縫及雙狹縫的繞射具干涉之強度分佈，藉實驗上改進，成功地發展兩種方法測量光的繞射干涉圖案之能量分佈，得到較精確的結果，所設計裝置操作方便，可供學校做為教材使用，具有應用價值，頗為難得。

作者簡介

郭博鈞，目前就讀於國立新竹高中 2 年級興趣是數學、物理、攝影、電腦技術，喜歡研究生活上的點點滴滴，數學、物理、化學、天文.....等有趣的現象，尤其是在數學和物理方面，更是抱持著高度興趣，從小就喜歡思考，國小便常做電學相關的實驗，而國中便在巧合下學了微積分，高中時更往興趣發展，不只是高一獨自做物理科展，是實驗室的常客，同時也加入了數研社，在數學圖論上有所研究成果。



摘要

本研究探討肥皂膜與肥皂水的共振現象。在肥皂膜共振方面，我們以實驗探討皂膜的共振模式與頻率的關係；並配合共振理論模型求出薄膜厚度，再與體積密度-厚度測量方法比較。而又發現皂膜在共振時，皂膜保存時間較平常久，故進行皂膜生命期與頻率、強度的關係。在進行肥皂膜實驗時，肥皂水滴落在喇叭上，振動出奇特的形狀，進而探討皂水共振的特性並嘗試建立其數學模式。

Abstract

The research is about the resonance of soap film and soapsuds. For the resonante of soap film, we tried to find out the relation between the resonant pattern and frequency by experiment; according to the resonante model, we measured the thickness of soap film, which was compaired with volume-density method. We found that the life-time of the resonant soap film is longer than the normal one, so we proceeded to study the relation between the life-time, frequency, and power. We observed special resonant pattern while the soapsuds fell down on the speaker. So we studied the characteristics of resonant soapsuds, trying to make the mathematical pattern of resonant soapsuds.

目錄

壹、前言.....	P.3
貳、研究方法與過程.....	P.4
參、研究結果與討論—結果.....	P.7
研究結果與討論—討論.....	P.14
肆、結論與應用.....	P.16
伍、參考文獻.....	P.19
陸、附件.....	P.20

壹、前言：

一、研究動機：

在物理課中介紹了繩波共振的現象，繩波共振是一維的，我思考著二維共振現象，於是查閱書籍資料，並請教老師，因而進行肥皂膜的共振現象之研究；在實驗時，發現肥皂水滴落在喇叭上，其振動模式更為有趣多變，且前所未聞，故同時進行肥皂水共振模式之研究。

二、研究目的：

1、探討皂膜之共振模式與皂膜厚度測量：

- (1). 頻率與共振模式之關係，並建立皂膜共振模式。
- (2). 利用皂膜對特定頻率之聲音有一定共振模式，配合共振理論模型求出薄膜厚度。
- (3). 共振頻率、功率與皂膜保存於空氣中的時間的關係。

2、探討皂水共振因素及共振模式：

- (4). 皂水達到共振態時，其頻率與皂水質量上限的關係。
- (5). 皂水達到共振態時，其喇叭功率與皂水質量上限的關係。
- (6). 皂水共振模式之建立。

貳、研究方法與過程

一、器材：

自製器材：皂水共振器（見圖 3）

成品器材：波形產生器、示波器、功率放大器、10 吋喇叭（8Ω 200W）、支撐架、
白光燈泡×2、雙面開口壓克力圓管（半徑為 6.2 cm）、數位相機

耗材：洗碗精、甘油

電腦軟體：Microsoft Word Xp、MathWorks Matlab 6.5、Microcal Origin 6.0

二、方法與過程：

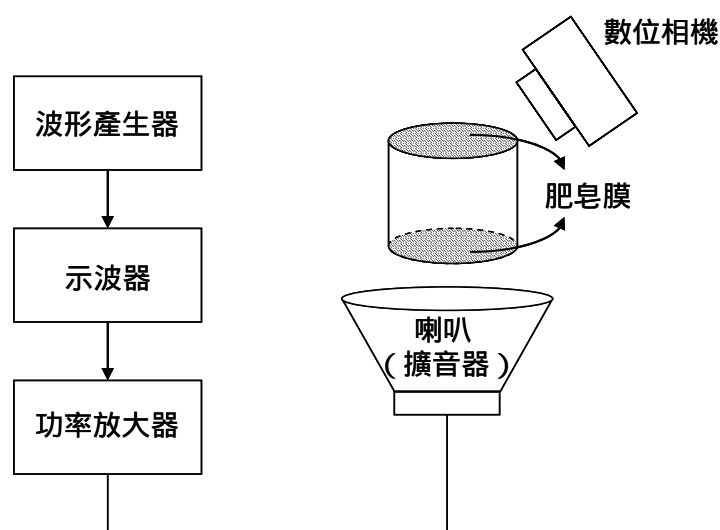


圖 1、裝置圖

1. 皂膜共振(見圖 1)

在壓克力圓管中製出平行的兩層皂膜(見討論)，再以喇叭發出一定頻率，使置於喇叭上方管內的皂膜振動。若固定皂水配方(水、洗潔精、甘油)，則影響皂膜共振模式之變因有訊號頻率、溫度、壓力……等。皂膜在共振時，生命期較平常久，而進行皂膜生命期與聲音頻率、強度之實驗。

(1). 共振模式：

目的：頻率與不同共振模式之關係，並建立皂膜共振模式。

方法：以不同頻率使皂膜共振，找出其共振頻率規律；並與電腦模擬理論模型比較。

(2). 厚度測量：

(1) 共振測量法：

目的：在特定頻率，皂膜有特定的共振模式(如圖 2)，配合共振理論求出薄膜厚度，並與體積密度-厚度測量法所得結果比較。

方法：膜上波速 $v=f\lambda=\sqrt{\frac{T}{\delta}}$ ，其中 T 為表面張力， δ 為面密度，介質波數 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ ，

其中 $\delta = \frac{m}{A} = \frac{md}{V} = \rho d$ ，而 ρ 為密度， d 為薄膜厚度，代入消去 λ 、 δ ，得

薄膜厚度 $d = \frac{k^2 T}{4\pi^2 f^2 \rho}$ ，測量值有 T 、 f 、 ρ 。

(2) 體積密度-厚度測量法：

目的：利用物質密度關係，估算皂膜厚度。

方法：以電子天秤測量皂水盒的總重，將空心圓柱口浸入皂水後取出，可得一

皂膜，並可測得皂水重量變化量 Δm ，圓瓶半徑 r ，得薄膜厚度 $d = \frac{\Delta m}{r^2 \pi \rho}$ 。

(3). 生命期：

目的：共振頻率、功率與皂膜生命期的關係。

方法：皂膜置於空氣中一段時間必會破裂，利用不同之喇叭功率及頻率使皂膜共振，紀錄破裂時間，以探討其與功率及頻率之關係。

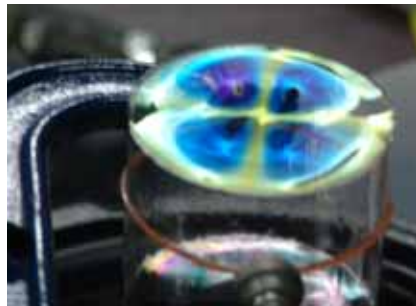


圖 2、皂膜共振 46Hz

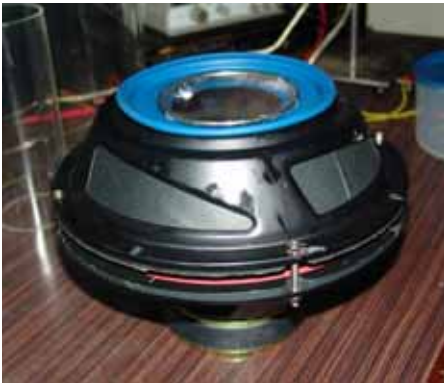
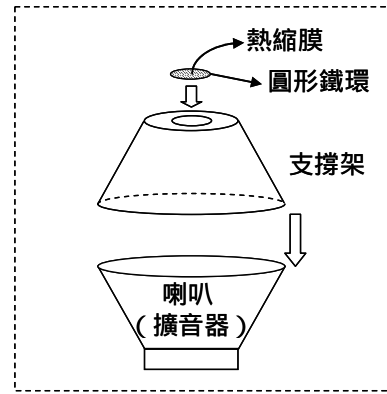


圖 3、皂水共振器

下為 10 吋喇叭，上為同樣大小的架子。將熱縮膜(一種受熱後會緊繃的塑膠膜)固定於環形鐵環上，並置於架子中央。



皂水共振器

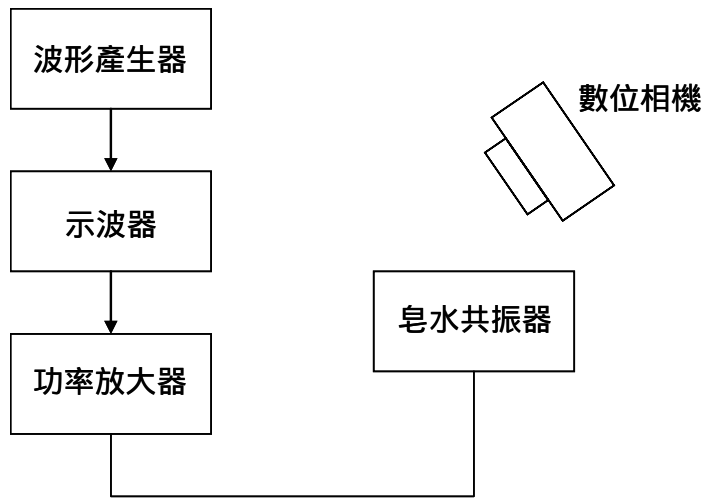


圖 4、裝置圖

2.皂水共振(見圖 4)

直接將皂水滴於熱縮膜上，再以喇叭發出單一頻率，使皂水振動。發現影響皂水振動之變因有皂水配方(水、洗潔精、甘油)、訊號頻率及強度(功率)，因而進行以下之實驗。

(4).臨界質量之測定：

在一定的喇叭功率和頻率下，水滴有特定共振模式，但有質量上限；所以固定數種頻率，分別改變喇叭功率，測定水滴共振時的質量上限。

(5).最高頻率之測定：

在一定的質量和喇叭功率下，共振的水滴有頻率上限；所以固定數種喇叭功率，分別改變頻率，以測定共振水滴的頻率上限。

(6).建立模式：依據以上結果，歸納水滴共振模式，進一步探求其原因。



圖 5、皂水共振



圖 6、將過多的皂水排出，即已達質量上限

參、研究結果與討論

一、結果：

1. 皂膜共振

(1). 共振模式：

a. 理論結果：

$$\text{波動方程式 } \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \quad (\text{詳見附件})$$

$$\text{以極座標改寫成 } \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \psi = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \psi + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \psi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \psi$$

$$\text{令 } \psi(r, \phi, t) = R(r)F(\phi)T(t), \text{ 則 } \frac{1}{v^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{R''(r)}{R(r)} + \frac{R'(r)}{r \cdot R(r)} + \frac{F''(\phi)}{r^2 \cdot F(\phi)}$$

$$\text{令 } T(t) = \cos(\alpha vt + \delta)$$

$$\text{則 } -\alpha^2 = \frac{R''(r) + \frac{R'(r)}{r}}{R(r)} + \frac{F''(\phi)}{r^2 \cdot F(\phi)}$$

$$\text{移項後 } \frac{R''(r) + \frac{R'(r)}{r}}{R(r)} + \alpha^2 = -\left(\frac{F''(\phi)}{F(\phi)} \right) = m^2$$

$$\text{令 } F(\phi) = g \cdot \cos(m\phi + \gamma)$$

$$\text{得 } r^2 R''(r) + rR'(r) + (\alpha^2 r^2 - m^2)R(r) = 0 \quad x \equiv \alpha r \quad R(r) \equiv J(x)$$


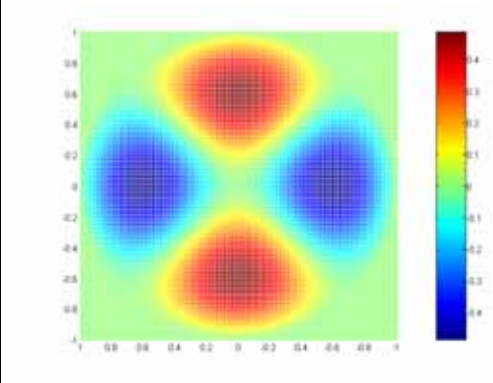

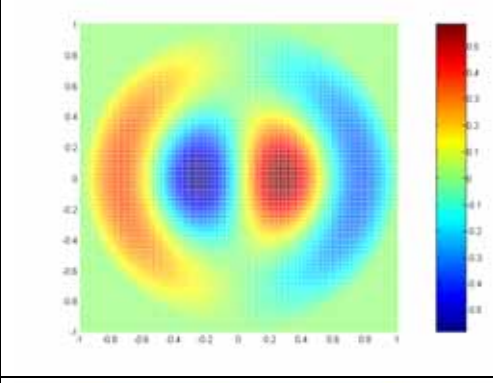

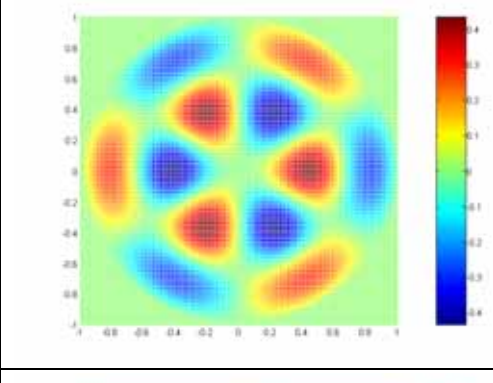

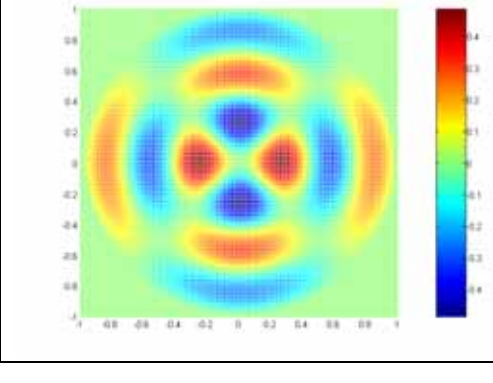
$$\text{則可得 } x^2 J''(x) + xJ'(x) + (x^2 - m^2)J(x) = 0$$

$$\text{因邊界爲零 } R(r) = 0 \Rightarrow J_m(\alpha a) = 0$$

$$\text{故得 } R_{mn}(r) = J_m\left(k_{mn} \frac{r}{a}\right), \text{ 其中 } k_{mn} \text{ 爲 } J_m(x) = 0 \text{ 的解}$$

$$\text{所以解得 } \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} J_m\left(k_{mn} \frac{r}{a}\right) \cdot g \cos(m\phi + \gamma) \cdot \cos(\alpha vt + \delta) \quad (\text{不含時間})$$

b. 實驗結果：

頻率(Hz)	實際圖片	理論圖片	特徵值 k
46			5.123
65			7.016
83			9.761
97			11.378

由實驗數據分析

頻率(Hz)	46	65	83	97
特徵值 k	5.123	7.016	9.761	11.378
頻率(Hz)	8.979	9.265	8.503	8.525
特徵值 k				

由理論可知 $\frac{f}{k} = \frac{f}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{f\lambda}{2\pi} = \frac{v}{2\pi}$ 為一定值，其中 v 為膜上波速

結論： $\frac{f}{k} = \frac{v}{2\pi}$ 為一定值，即對同一皂膜，每一共振模式對應一特定頻率。

(2).厚度測量：

a.共振測量法：

(a)理論：由實驗(1)，解波動方程可知 *bessel* 函數的解 k 即為介質波數 $\frac{2\pi}{\lambda}$ ，

又膜上波速 $v = f\lambda = \sqrt{\frac{T}{\sigma}} = \sqrt{\frac{T}{\rho d}}$ ，其中 σ 為皂膜面密度， T 為表

面張力， f 為聲音頻率， ρ 為皂水體密度，得薄膜厚 $d = \frac{k^2 T}{4\pi^2 f^2 \rho}$ ，

其中 T 、 f 、 ρ 為測量值。

(b)實驗結果：

圓瓶半徑 cm		
頻率	對應之介質波數 k	皂膜厚度 (μm)
46	5.123	66.849
65	7.016	62.790
83	9.761	74.537
97	11.743	78.986

平均厚度為 70.790 (μm)

b. 體積密度-厚度測量法：

(a)理論：由皂水質量 $m = \rho v = \rho A d = \rho r^2 \pi d$ ，其中 ρ 為皂水密度， v 為皂

水體積， A 為皂膜面積，則皂膜厚度 $d = \frac{\Delta m}{\rho r^2 \pi}$

(a)實驗結果：

圓瓶半徑 cm		
	Δm (g)	皂膜厚度 (μm)
第一次	0.034	29.951
第二次	0.058	51.094
第三次	0.057	50.213
第四次	0.049	43.165

平均厚度為 43.606 (μm)

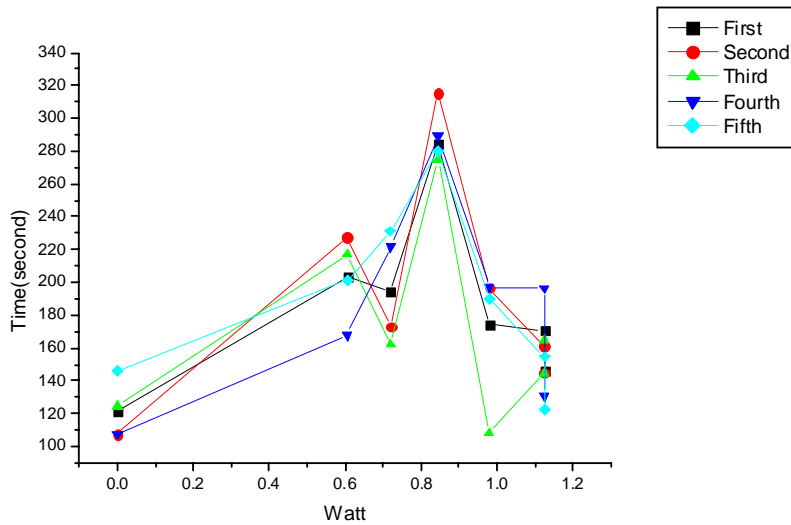
c 比較：

共振測量法厚度為 70.790(μm)，體積密度-厚度測量法厚度為 43.606(μm)，相差 27.184 (μm)。

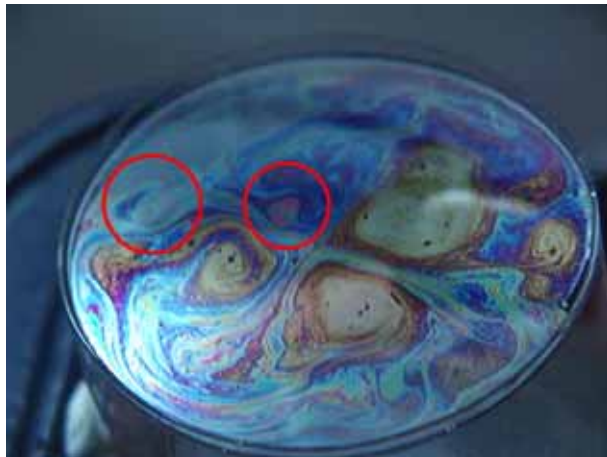
(3).生命期：

a 皂膜在共振時，生命期較平常久。

b 實驗結果：



c 結論：發現在 0.8w 時，皂膜生命期最久，可達 300 秒之多，其原因是：(a)共振時，膜上皂水流動，使皂膜厚度平均；(b)共振時，膜上可以保存較多的皂水。



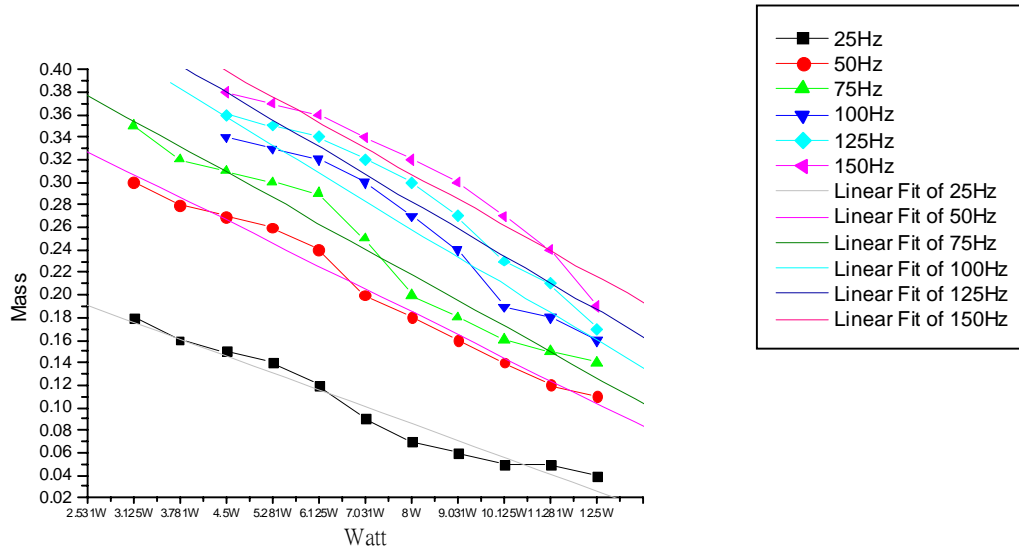
共振時，膜上可以保存較多的皂水(紅色圈中)；
由干涉圖形可知膜上皂水流動

2. 皂水共振：

(4) 臨界質量之測定：

a 在相同頻率、功率下，不停地增加皂水量，最後皂水會被噴出達到臨界質量。

b 實驗結果：

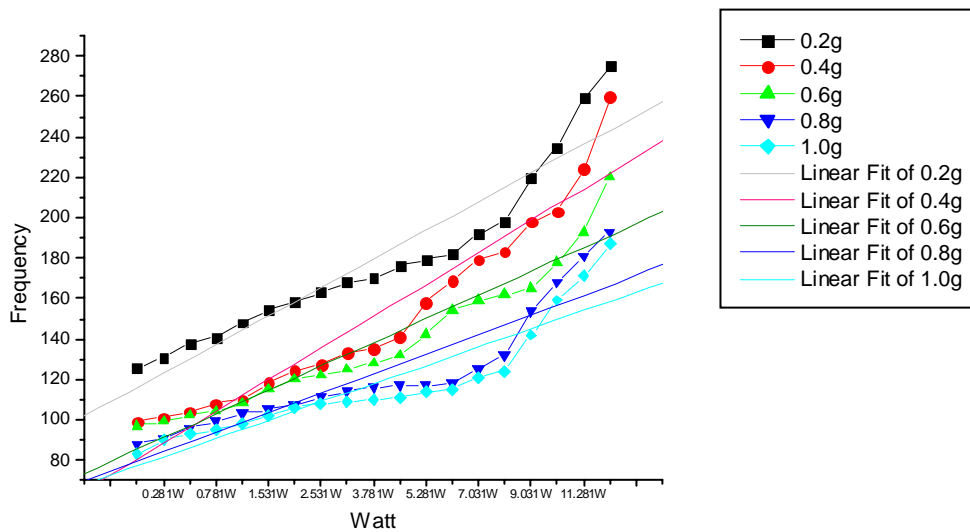


c 結論：在相同功率下，頻率愈高，臨界質量愈小；相同頻率下，功率愈高，臨界質量愈小。因每個頻率之圖形看似直線，故線性逼近，得到”等斜率”的直線，若將臨界質量當作橫軸，斜率為 $\frac{\text{功率}}{\text{臨界質量}} = \frac{\text{能量}}{\text{質量}}$ ，即單位質量所具有的能量相同。

(5).最高頻率之測定：

a 在相同質量、功率下，不停地提高頻率，最後到達某一頻率時，皂水不會產生共振顯像。

b 實驗結果：

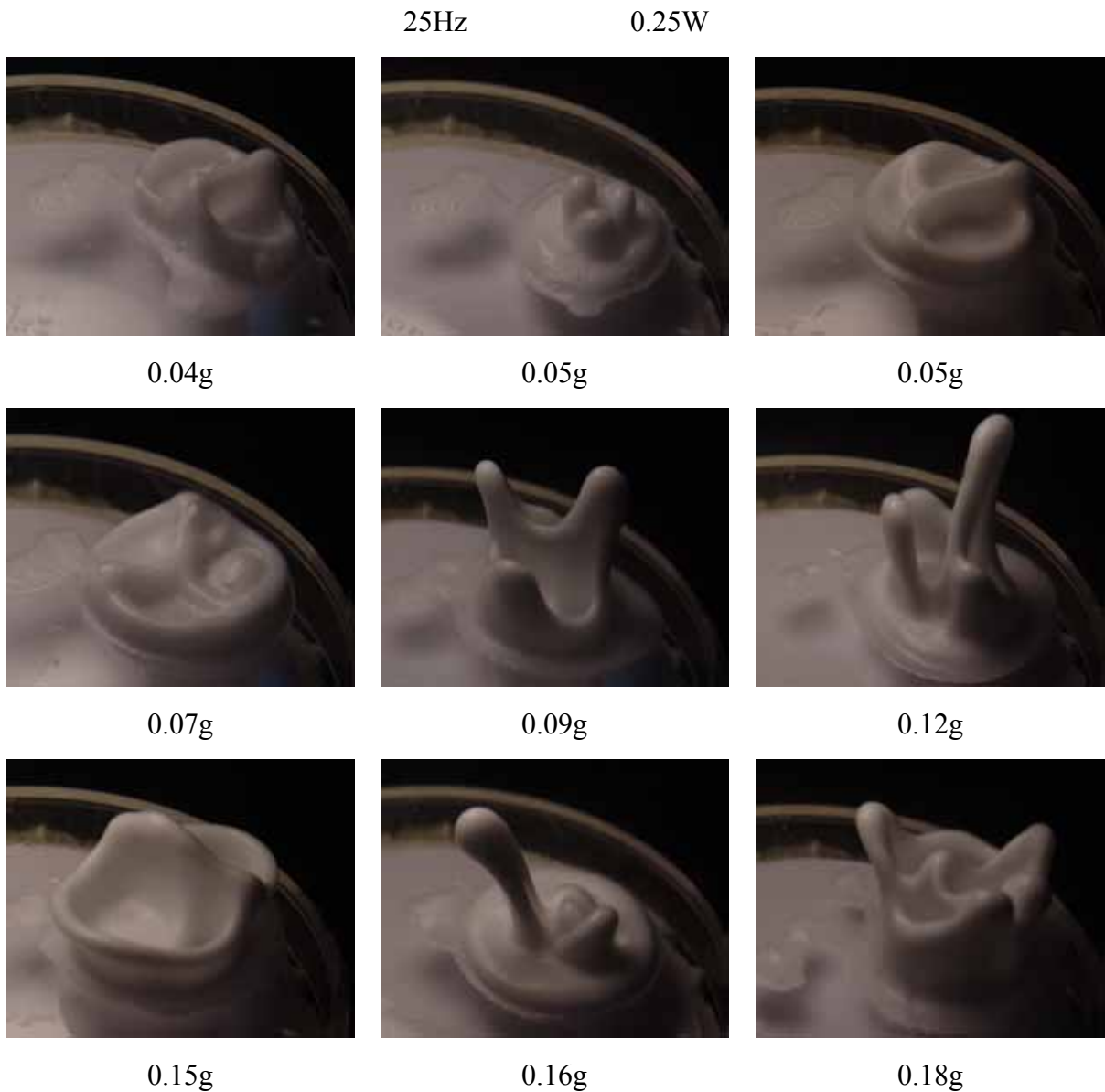


c 結論：在相同功率下，質量愈高，臨界頻率愈低；相同質量下，功率愈高，臨界頻率愈高。

(6).建立模式：

a 敘述：在進行臨界質量、臨界頻率實驗時，拍攝皂水圖形並記錄其頻率功率及皂水量。

b 實驗結果：

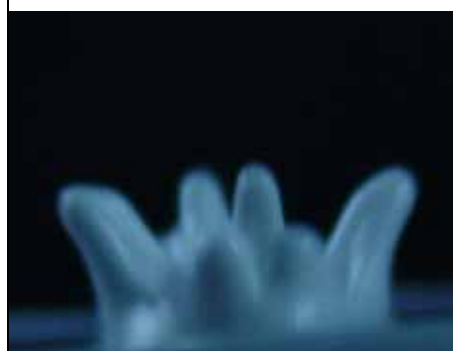


c 共振模式特性初步探討：

- (a).邊界呈週期性變化，且會隨初始條件而改變；而波速 $v = \sqrt{\frac{T}{\sigma}}$ ，其面密度也隨邊界呈週期性變化，故波速非定值，而是時間之函數，因此，為非線性系統，非線性波動方程所能敘述。
- (b).邊界值為零：在皂水和熱縮膜的交界必為節點，故高度為零，此外，因下有熱縮膜，故不會向下振動，所以皂水上每點皆大於等於零。
- (c).圖形具對稱性：觀測到的每張圖，一定可以找到一節面，使得圖形對稱於此面。



↑ 側視圖



↑ 側視圖 ↓ 斜視圖

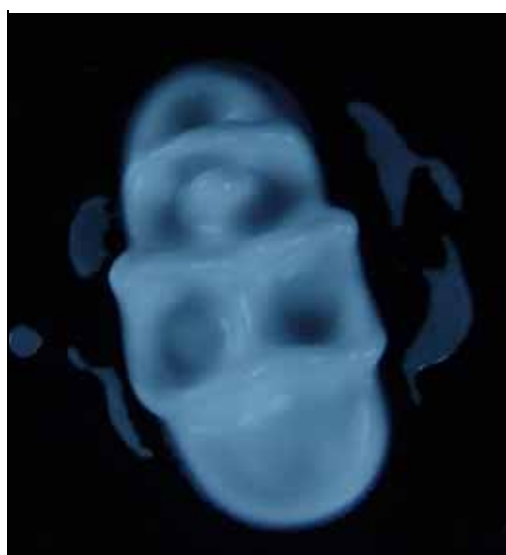


頻率： 125Hz 喇叭功率： 18w 皂水質量： 1g



↑ 側視圖

頻率： 125Hz 喇叭功率： 8w



↑ 俯視圖

皂水質量： 1g

二、討論：

1 實驗方面：

(1) 皂膜共振：

- a 在實驗 2 中，當皂膜在共振時，可增加保存於空氣中的時間，且有特定頻率可使皂膜保存最久，如在 46Hz 時，相對功率在 0.75 附近可使皂膜保存到 5 分鐘之久，為不共振之保存時間的二倍多。故相關實驗均盡量在二分鐘內完成，以減少誤差。
- b 氣溫的高低影響薄膜振動模式，實驗時，會記錄實驗室室溫，作為日後數據參考，基本上，氣溫皆在 20-26°C，變化不大。
- c 外界空氣流動或地面振動導致圓瓶振動，實驗時，必先關緊門窗，避免影響皂膜振動。
- d 製出的薄膜厚度不一，薄膜厚度不易控制，若使用吹製，每次的差異性較大，故使用浸泡拉起法(dip coating)，將調好之起泡劑倒入盒中，再將圓柱口浸入後取出，即可得一皂膜，且每次薄膜干涉色為紅綠絲狀混合，故差異性低。
- e 圓管傾斜時，影響薄膜振動情形—使用了一個 4 號鋼夾固定，並用橡皮筋確定鋼夾和圓管為同一水平面，使影響降低。
- f 波形可能失真，非完整正弦波—故以示波器先觀察波形，並在校正後進行實驗。
- g 為固定薄膜邊界（使薄膜振動時不滑動），所以分別在兩開口製出二層膜，並使薄膜平行地面（厚度平均，不易破），另外，在圓瓶上套一橡皮筋，令夾子不至於使圓瓶變形。額外討論長方形皂膜共振的形式，製做一個可改變長度之薄膜附著器(見圖 7)。



圖 7、長方形的皂膜共振

(2) 皂水共振：

- a 若皂水共振儀傾斜非水平面時，是否影響共振模式結果—因為會有部分能量轉換成位能，故對共振態會有影響，所以必須校正皂水共振器之水平。
- b 在喇叭功率高時，皂水共振時會往高處爬—因為能量均分原理所致。
- c 在實驗 1，在特定頻率、功率及水量之範圍內，皂水會產生多形式之共振態。在此範圍以上的水滴（高頻及強振幅），會將多餘的水量彈走，而回復穩定共振態。
- d 在實驗 1-1，功率較低時，或是洗碗精成分比例低時，皂水量無法測量，因為它的能量不足，或是在熱縮膜上擴散，導致無法產生水滴共振。
- e 在實驗 1-2，若給定頻率 124Hz，喇叭功率 8w，使 1g 皂水共振，再提高頻率，當提高至 200Hz 時，皂水會分離為五個(以上)的共振體。如圖 8：



圖 8、共振皂水，因頻率不斷提高，而分離成數個共振皂水

f 在實驗中，由於實驗的振動速度快，所以拍攝模式皆用 S=1/1000 ~1/1600 sec F=5.6 ISO 400 -2.0EV 800 mega pixels，並另外加二個 21W 的燈光。

2、結果討論：

(1)皂膜共振：

a 在求皂膜厚度時，利用 $v = f\lambda = \sqrt{\frac{T}{\rho d}} = \sqrt{\frac{T}{\rho d}}$ ，若考慮是對一容器中的液體， d 為深度，

則液體之表面張力 $T = \rho d f^2 \lambda^2$ ；若為圓形容器， $T = \frac{4\pi^2 \rho d f^2}{k^2}$ ， k 為 *bessel* 函數之解。

b 表面張力 $T = \frac{4\pi^2 \rho d f^2}{k^2} = \rho d v^2 = \frac{m}{v} d v^2 = \frac{m v^2}{A}$ ，對一厚度無法測量之薄膜，測其表面張力的方法，即膜上波速 v ，膜重 m ，膜面積 A 。

(2)皂水共振：

a 實驗(4)中，可發現水滴在頻率固定下，喇叭功率上升，臨界質量會下降。推測應是振幅到達一定程度時，皂水張力不足而斷裂，導致皂水向外噴散。這和原子核中能容納最大能量類似，若超出這個限制，則原子放出能量，而皂水的共振體則是將過多的皂水排出。

b 實驗(5)中，一定質量水滴要發生共振現象，最高頻率隨喇叭功率上升而增加。推測應是在達到臨界頻率時，若再將頻率提高，皂水駐波數必須增加；但皂水具有一定張力，若振幅不足以使皂水共振，即無法形成共振態；所以提高喇叭功率，以增加振幅。

c 皂水共振時，會因不同的頻率、功率而改率邊界，使其產生共振態，即達至較高的能量使用率。

d 皂水共振時的模式和量子力學中的量子柵欄外觀類似，同為共振之現象；而皂膜共振模式和電磁波現象極為類似(見圖 9)。

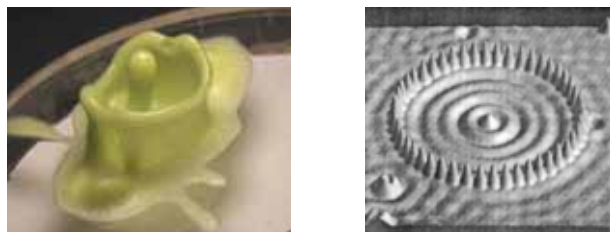


圖 9、皂水共振與量子柵欄外觀類似

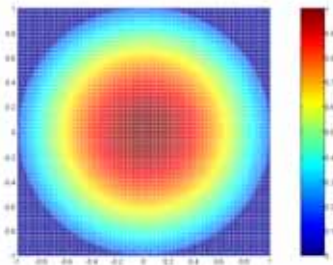
(右)銅—Cu (111) 表面上的 48 個鐵原子，量子柵欄的直徑只有 14.26 nm

e 在實驗一時，測量皂水質量之方法：利用 0.5ml 的針筒(可精確至 0.01ml)量其體積，再乘上皂水密度即為皂水質量。

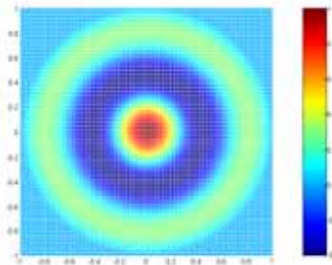
肆、結論與應用：

一、結論：

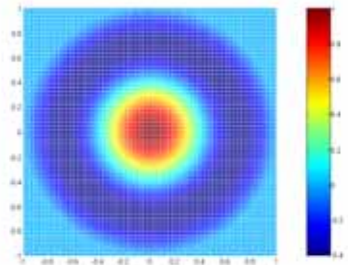
1、不同大小皂膜對特定頻率有特定之共振模式：(以下為 Matlab 模擬圖形)



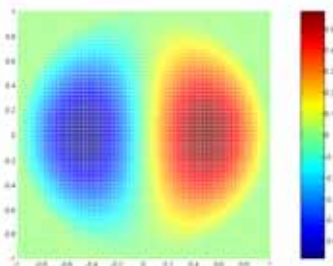
$$f_{01}$$



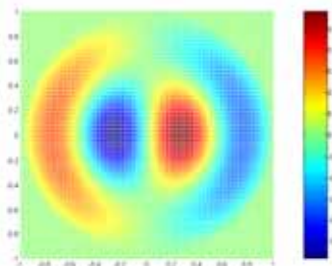
$$f_{02} = 2.2952f_{01}$$



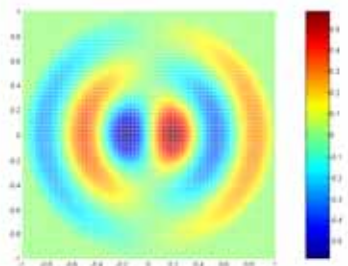
$$f_{03} = 3.5983f_{01}$$



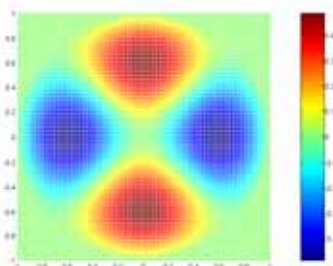
$$f_{11} = 1.5933f_{01}$$



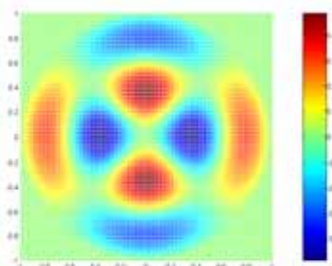
$$f_{12} = 2.9173f_{01}$$



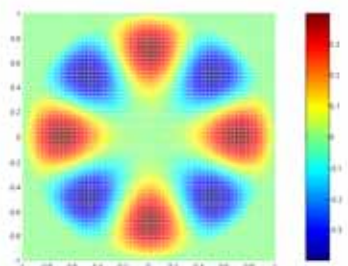
$$f_{13} = 4.2219f_{01}$$



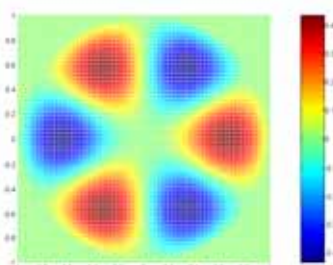
$$f_{21} = 2.1301f_{01}$$



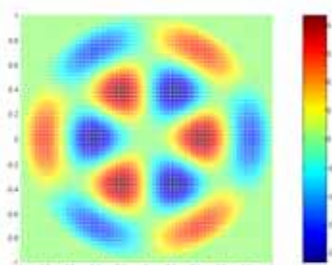
$$f_{22} = 3.4998f_{01}$$



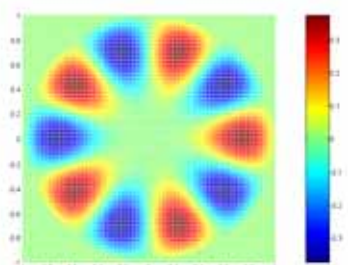
$$f_{41} = 3.1550f_{01}$$



$$f_{31} = 2.6528f_{01}$$



$$f_{32} = 4.0586f_{01}$$



$$f_{51} = 3.6470f_{01}$$

其中 f_{01} 稱為基頻，而 f_{02} 是 $f_{01} \times 2.2952$ ，以此類推；即是只要知道一圓形皂膜在某一頻率下有某積共振模式，則可推得其他共振模式的頻率。而喇叭功率不影響共振模式，只影響振幅大小。

- 2、在皂膜厚度測量中，體積密度、共振測量法所測出的厚度接近，所以共振測量法是可行的。固此若在質量不易測得情況下，可用皂膜共振測量法測量其厚度。
- 3、皂膜共振時可在空氣中保存較久的時間。
- 4、由臨界質量與功率之測定，得知：當水滴在頻率固定時，臨界質量隨喇叭功率上升而下降。
- 5、由臨界頻率與質量之測定，得知：使定質量水滴發生共振現象，最高頻率隨喇叭功率上升而增加。原因應為小滴的底面積和表面張力限制了頻率及振幅。
- 6、水滴在特定頻率、功率及水量之範圍內，皂水可產生多形式之共振態；而在此範圍以上的水滴（高頻及強振幅），會將多餘的水量彈走，回復穩定共振態。

(二)、應用：

- 1、沿牆細語波：在某些高頻率，聲波好像是繞著圓周傳播，有如一個球沿著圓周滾動一樣。因此，你若靠著牆以特定頻率細語，你的朋友在房間的另一頭，耳朵靠著牆可以聽見你講的話，而站在房子中間的人卻聽不見你所說的話(如圖 10)。
- 2、彈球波：在凸域上，有特定頻率的波，沿著凸域上最短徑向的附近，來回反彈運動。
- 3、焦聚波：在某些特定高頻，波在圓心附近形成高峰，其強度是其他地方的數倍，而圓心即是焦點。

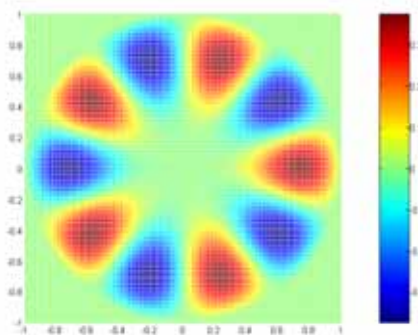


圖 10、沿牆細語波

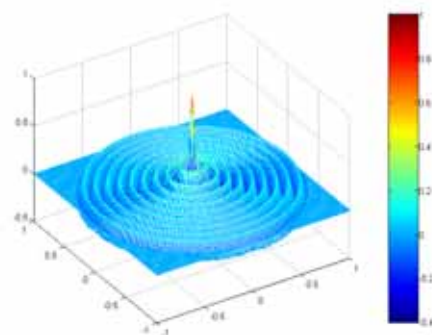


圖 11、焦聚波

中間幾乎沒有振幅，而周圍的振幅高 高頻時，圓心振幅明顯較其他處高出數倍

- 4、共振測量法是可應用於不透光或無法測得質量之分子薄膜之厚度測量。
- 5、由皂水共振之特性可推廣至三維流體共振性質。

三、未來展望：

曾經在科學人雜誌上看到『在太空中濺起水花-液體的搖晃對太空飛行可能造成不小的影響』，是要研究在無重力狀態下，水受到激盪而潑濺的行為，進而建立潑濺模型；不免讓我想到我所做的皂水共振，現在雖然因能力不足，無法建立皂水模型，但一定繼續研究，期待能由一液體的基本性質及環境變因，如表面張力、密度、黏滯力、重力、壓力……等，就能推得其共振模型，進而知道在什麼條件下會有潑濺的現象。

另外，共振時皂膜上液體流動，是造成皂膜生命期較久的主因，應改變功率、頻率研究研究生命期，而其流動(轉動)的原因，也尚未探討清楚，『渦(vortices)』的現象也是未來研究的目標。

伍、參考文獻：

- [1].白明憲 聲學理論與應用 全華資訊股份有限公司 P.1-P.32 2001.9
- [2].西爾、柴曼斯基 大學物理學 臺灣中華書局 P.361- P.381 1971.9
- [3].陳鞏 機械振動的一些現象和數學問題 2001.4 數學傳播
- [4].陳錫桓 熱學、聲學—大學物理學之二 中央出版社 P.237- P.241 1982.12
- [5].薛哲修、楊淳青 2002.12 薄膜振動的模式 物理雙月刊
- [6].G.Chen & J.Zhou Vibration and Damping in Distributed Systems,Vol 1:Analysis Estimation, Attenuation, and Design CRC PRESS 1993
- [7].G.Chen & J.Zhou Vibration and Damping in Distributed Systems,Vol 1:WKB and Wave Methods, Visualization and Experimentation CRC PRESS 1993
- [8].G.Chen & J.Zhou Boundary Element Methods ACADEMIC PRESS 1992
- [9].Merle C.Potter 物理數學 Mathematical Methods In The Physical Science 復漢出版社 P.251- P.257 P.312- P.357
- [10].M.S. Thesis 2002.7 Energy Dissipation in Soap Film Department of Physics National Central University
- [11]. V.O. Afenchenko, A.B. Ezersky, S.V. Kiyashko, M.I. Rabinovich 1998.2 The generation of two-dimensional vortices by transverse oscillation of a soap film Physics Of Fluids

附件：

A. 薄膜共振方程：

假設：

1. 薄膜不對彎曲產生阻力，即無剪應力之存在。
2. 單位長之張力大，故薄膜重量可忽略。
3. 薄膜上每一點皆垂直 xy 平面方向運動。
4. 偏移表面的斜率為小。
5. 薄膜單位面積質量為常數。
6. 摩擦效應可忽略。

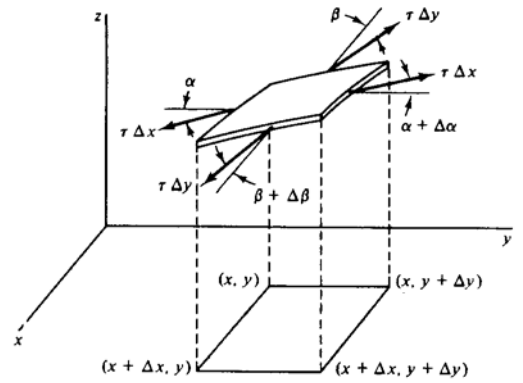
若 u 為膜上一點，則 u 為時間和空間之函數，寫作 $u(x,y,t)$

如圖，由第三項假設使張力 τ 在薄膜中為常數，

而在 z 方向，有 $\Sigma F_z = Ma_z$

$$\text{即 } \tau \Delta x \sin(\alpha + \Delta \alpha) - \tau \sin \alpha + \tau \Delta y \sin(\beta + \Delta \beta) - \tau \sin \beta = \sigma \Delta x \Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

其中 σ 為單位面積質量



對於小角度而言：

$$\sin(\alpha + \Delta \alpha) \cong \tan(\alpha + \Delta \alpha) = \frac{\partial u}{\partial y} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, t \right)$$

$$\sin \alpha \cong \tan \alpha = \frac{\partial u}{\partial y} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t \right)$$

$$\sin(\beta + \Delta \beta) \cong \tan(\beta + \Delta \beta) = \frac{\partial u}{\partial x} \left(x + \Delta x, y + \frac{\Delta y}{2}, t \right)$$

$$\sin \beta \cong \tan \beta = \frac{\partial u}{\partial x} \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, t \right)$$

代入後得到

$$\tau \left[\frac{\frac{\partial u}{\partial y} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y + \Delta y, t \right) - \frac{\partial u}{\partial y} \left(x + \frac{\Delta x}{2}, y, t \right)}{\Delta y} + \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \left(x + \Delta x, y + \frac{\Delta y}{2}, t \right) - \frac{\partial u}{\partial x} \left(x, y + \frac{\Delta y}{2}, t \right)}{\Delta x} \right] = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

取極限 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ ，則

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad \text{其中波速 } c = \sqrt{\frac{\tau}{m}}$$

B. 電腦模擬薄膜共振之程式碼：

```
clear all

m=0;
k=2.405;

p=1;
x=-1:0.01:1;
y=-1:0.01:1;
[xx,yy]=meshgrid(x,y);
for indx=1:201
    for indy=1:201
        r=sqrt(xx(indx,indy)^2+yy(indx,indy)^2);
        thera=atan2(yy(indx,indy),xx(indx,indy));
        if r>1
            zz(indx,indy)=0;
        else
            zz(indx,indy)=besselj(m,k*r)*(p*cos(m*thera));
        end
    end
end
mesh(xx,yy,zz);
colorbar
```

C. 光學厚度測量法：

d 為皂膜厚度， θ 為入射角，n 為皂水折射率，

λ 為光之波長，則建設性干涉 $\frac{2d}{\cos\theta} = (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{n}$

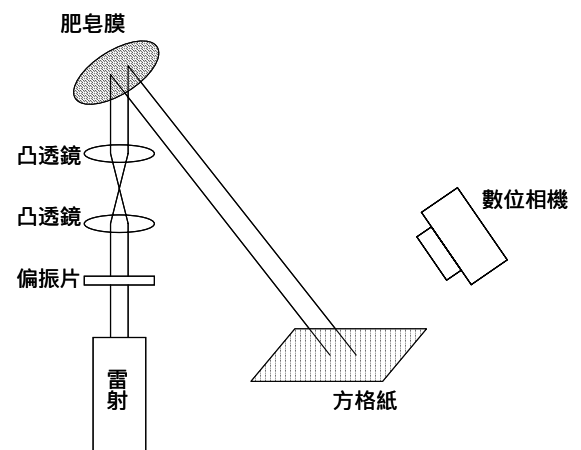
其中 $k=0,1,2,3,4,\dots$ 得 $d = (k + \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2n} \cos\theta$

又因有相位差，故 $d = k \frac{\lambda}{2n} \cos\theta$

D. 實驗數據：

I、水滴共振時，臨界質量之測定 (單位：克)

頻率 喇叭功率	25 Hz	50 Hz	75 Hz	100 Hz	125 Hz	150 Hz
0.125W						
0.281W						



0.5W						
0.781W						
1.125W						
1.531W						
2W						
2.531W						
3.125W	0.18	0.3	0.35			
3.781W	0.16	0.28	0.32			
4.5W	0.15	0.27	0.31	0.34	0.36	0.38
5.281W	0.14	0.26	0.3	0.33	0.35	0.37
6.125W	0.12	0.24	0.29	0.32	0.34	0.36
7.031W	0.09	0.2	0.25	0.3	0.32	0.34
8W	0.07	0.18	0.2	0.27	0.3	0.32
9.031W	0.06	0.16	0.18	0.24	0.27	0.3
10.125W	0.05	0.14	0.16	0.19	0.23	0.27
11.281W	0.05	0.12	0.15	0.18	0.21	0.24
12.5W	0.04	0.11	0.14	0.16	0.17	0.19

II、水滴共振時，臨界頻率之測定 (單位：Hz)

喇叭功率 \ 皂水質量	0.2g	0.4g	0.6g	0.8g	1g
0.125W	126	99	97	88	83
0.281W	131	101	99	91	90
0.5W	138	104	102	96	93
0.781W	141	108	104	99	95
1.125W	148	110	108	103	98
1.531W	154	118	115	105	102
2W	158	124	120	107	106
2.531W	163	127	122	111	108
3.125W	168	133	125	114	109
3.781W	170	135	128	116	110
4.5W	176	141	132	117	111
5.281W	179	158	142	117	114
6.125W	182	169	154	118	115
7.031W	192	179	159	120	121
8W	198	183	162	132	124
9.031W	220	198	165	154	142
10.125W	235	203	178	168	159
11.281W	259	224	193	181	171
12.5W	275	260	220	193	187

VI、薄膜之生命期

喇叭功率	第一次	第二次	第三次	第四次	平均值
0	121.4	107.5	124.5	107.5	146
0.605	203.4	227.5	217	168	201
0.72	194.3	173	162	222	231
0.845	284.1	315	274.5	289	280
0.98	174.1	196.5	108	197	190
1.125	170.3	161	144.5	196.5	154.5
1.125	146.3	145	165	130.5	122

Resonance Pattern of Soap Water Droplets

Po-Chun Kuo

National Hsinchu Senior High School, Taiwan

Fair ID: 680101

Project ID: PH019

Introduction

Resonance is always an interesting nature phenomenon. In principle, it may occur in systems of any dimension. Surface morphologies created by resonance vibrations in accelerated fluids have attracted wild attentions. Resonance excitations, such as Faraday wave [1], solitons [2], and jets [3], have been created under sinusoidal accelerations. In this project, we study the formations of resonant patterns on soap water droplets driven by sinusoidal excitations. Small excitation amplitudes created ring-shape resonance patterns. And the patterns transform into finger-like structures upon increasing the excitation amplitude.



FIG.1. Resonance pattern of soap water droplets

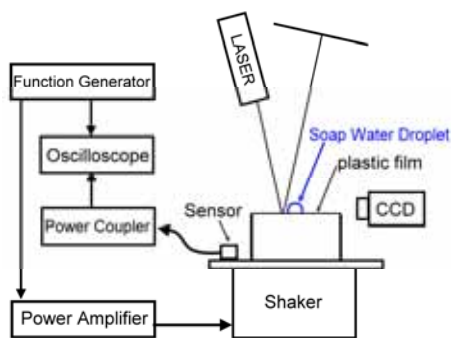


FIG.2. Experimental setup

Materials and Methods

Setup: the experimental setup is shown on fig.1. We use Aquamarine as soap water droplet and measure the physical parameters by photograph, which shutter is 120 μ s.

Experimental parameters: a droplet is put on the plastic film, and we vibrate the plastic by sinusoidal accelerations. The excitation frequency we selected is 128Hz because the frequency resonates with the plastic film. And one frequency avoids the resonant patterns of plastic film are different. The excitation amplitude is up to 2.6mm. Moreover, the volume of soap water droplet is up to 0.6 ml and interval of 0.05 ml.

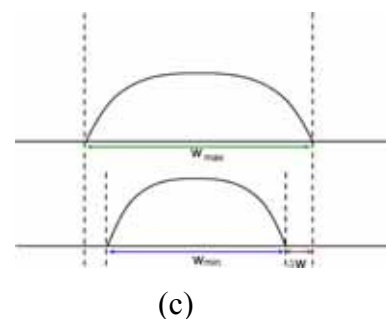
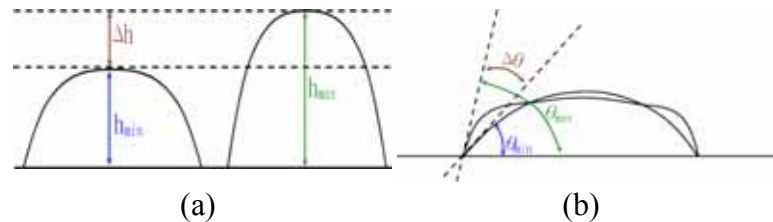


FIG. 3. Three physical parameters use to describe the observed resonance patterns, where (a) Δh , (b) Δw , and (c) $\Delta \theta$ are the maximum variations in the side angle, diameter, and height, respectively.

Results and Discussion

Phase diagram

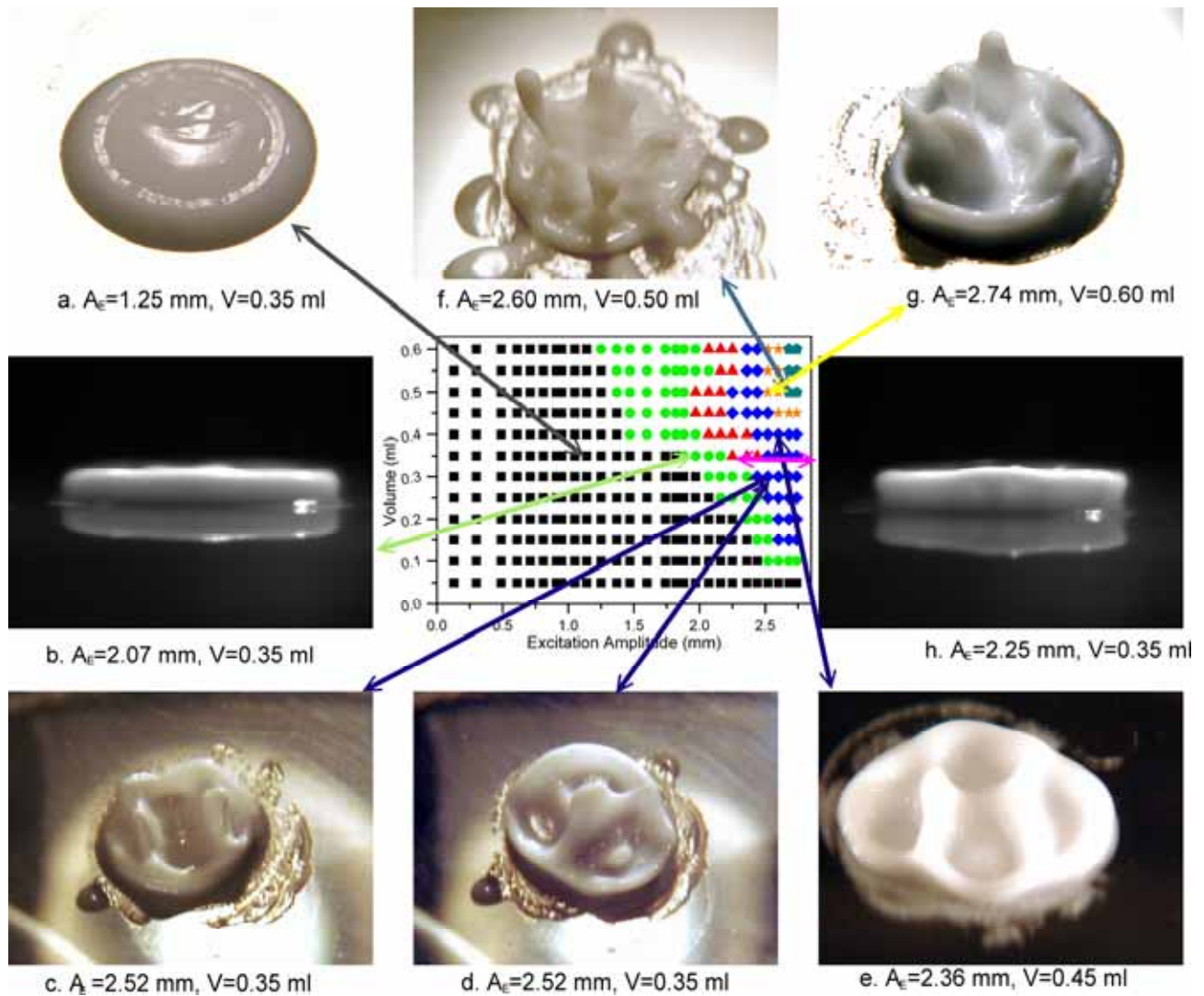


FIG. 4. A_E - V phase diagram and the representative resonance patterns

A ring-like pattern, such as that shown in (A), was observed at a small A_E . When more energy was supplied to the droplet, by increasing A_E , the side angle of the ring became larger, as shown in (B) and (C). The ring eventually breaks into several divisions and forms

finger-like patterns as in (D). Structures with fingers on the side [(E)], and on the center [(F)], were observed as well. The boundary became unstable if the droplet was large enough and shutting jets may even be observed, as shown in (G) and (H).

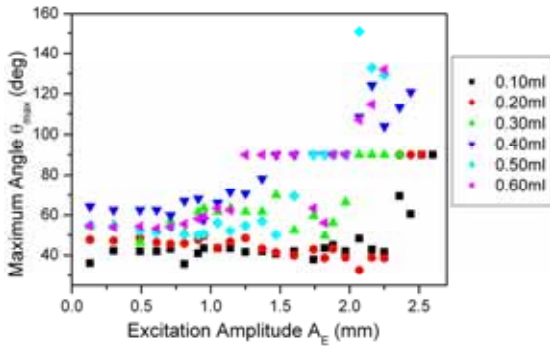


FIG. 6. Effects of excitation amplitude on the maximum side angle of the ring.

No significant changes in θ_{\max} were seen when A_E not large enough to create finger-like patterns, where θ_{\max} remains to be less than 90° . In addition, θ_{\max} is larger for a larger droplet.

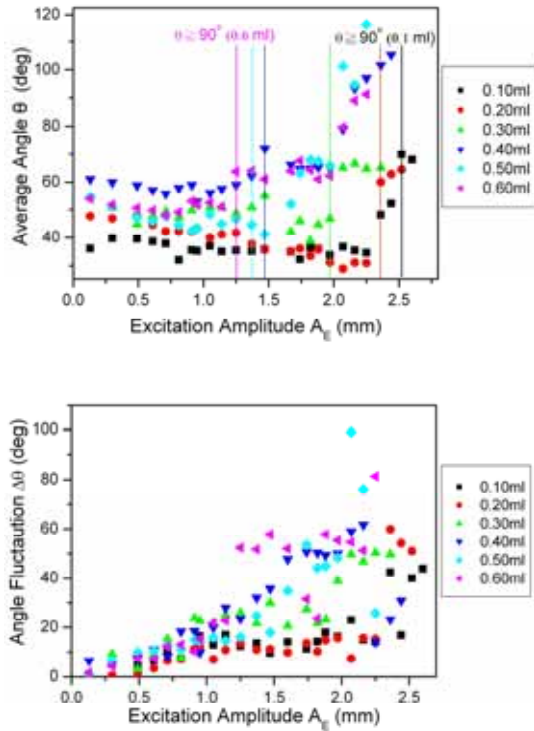


FIG. 7. Effects of excitation amplitude on (a) the mean side angle of the ring and (b) its fluctuating range.

The mean side angle begins to increase when θ_{\max} exceeds 90° , reflecting that the ring-like patterns are relatively stable. Larger angle fluctuations may be seen when larger A_E or bigger droplet were used.

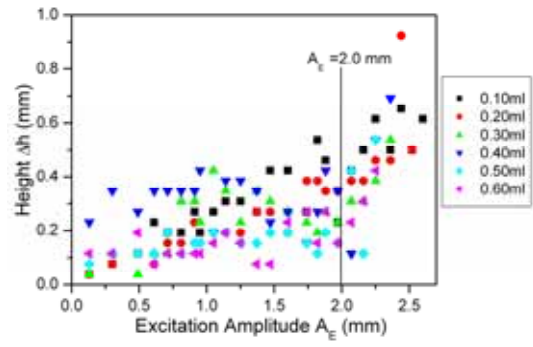


FIG. 8. Effects of excitation amplitude on the fluctuating range of the height.

The vertical vibrations of the patterns were noticeably increase as A_E exceeds 2.0 mm.

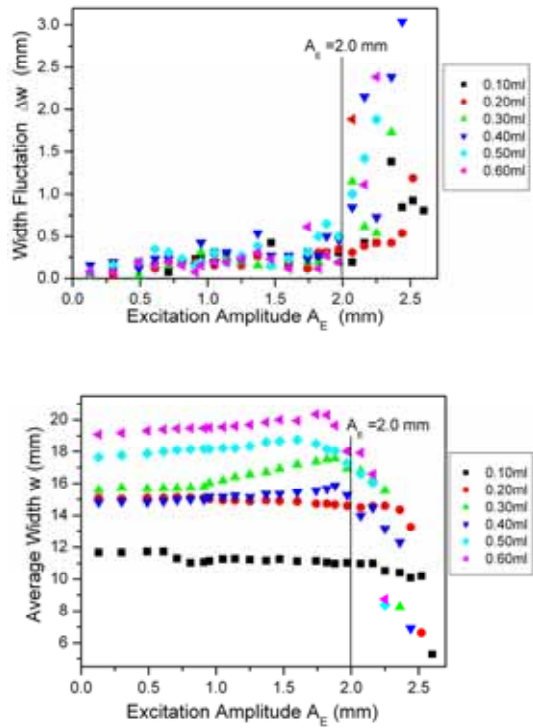


FIG. 9. Effects of excitation amplitude on (a) the mean width and (b) its fluctuating range.

Increasing A_E makes the resonance patterns transform into finger-like structures, which also results in the decreases of the mean width and the significant increases of the angle fluctuation. Apparently, the transitions occur at $A_E \sim 2.0$ mm.

Conclusion

1. Six distinguishable regimes, each with a characteristic resonance pattern, in the A_E - V phase diagram were identified.
2. A stable ring-like pattern was observed at small excitation amplitude. It transforms into stable finger-like, unstable finger-like, and then jets upon supplying higher energy and more materials to the droplet.
3. The formation of finger-like pattern may be characterized by the sudden increase in the variations in the width and height of the pattern.

References

- [1] M. Faraday, Philos. Trans. R. Soc. London 121, 299 (1831).
- [2] O. Lioubashevski, H. Arbell, and J. Fineberg, Phys. Rev. Lett. 76, 3959 (1996).
- [3] O. Lioubashevski, Y. Hamiel, A. Agnon, Z. Reches, and J. Fineberg, Phys. Rev. Lett. 83, 3190 (1999).
- [4] Florian S. Merkt, Robert D. Deegan, Daniel I. Goldman, Erin C. Rericha, and Harry L. Swinney, Phys. Rev. Lett. 92, 184501 (2004).