

台灣二〇〇五年國際科學展覽會

科 別：物理

作品名稱：都是氣泡惹的禍

學 校：臺中縣私立弘文高級中學

作 者：陳冠皓、林天健

「都是氣泡惹的禍」 作者簡介

➤ 陳冠皓



我是陳冠皓，今年就讀弘文高中一年級，自從開始接觸物理後，就對這門科系產生濃厚的興趣，每當解決一個物理問題，就會讓我感到很有成就感，儘管有時會遇到難題的阻礙，我也會盡可能找出正確的答案。但我目前對物理世界的知識有如滄海一粟，我會繼續努力，希望自己能對物理有更進一步的了解，也希望以後能有機會再參加各種物理競賽，擴展物理知識的攝取。

➤ 林天健



我叫林天健，小時候媽媽就常常帶我和妹妹去臺中科博館玩，因此對數理科學特別有興趣。小學曾參加全縣的科學展覽，我喜歡做科展的感覺，因為從過程中可學到許多意想不到的東西，而且用自己的手來完成，十分有成就感。懷恩國中時參加網界博覽會的展覽，花了許多時間，自己做網站，將新奇的構想，表現出來，實在有趣極了。

都是氣泡惹的禍

Abstract:

The Flying Circus of Physics has a question “As you stir instant cream or instant coffee into a cup of water, tap the side with your spoon. The pitch of the tapping changes radically as the powder is added and during the stirring. Why?” The answer is, “The air trapped in the powder is released as the powder dissolves. Since the speed of sound is lower in air than that in water, the speed of sound in the air-water mixture is lower than that in pure water. During that period while the air escapes the container, the resonant frequencies of the water, which depend directly on the speed of sound, will also be lower. Hence, you hear a lower tone until the air escapes. “We then tap the coffee cup and generate an audible tone. The signal picked up by the microphone . The same signal is also studied using Adobe Audition, a waveform processing and analyzing software. We find the assumption is wrong, the speed of sound is higher in sugar solution than that in water, but we hear a lower tone. An effective layer of fluid adjacent to the glass wall is set into motion when we gently rub the rim of the wineglass. The thickness is about the same whether the fluid is inside or outside the glass. This explains why the frequency drops when the liquid is added to the system. When the density of the sugar solution is higher, the mass of the effective layer is higher. But what the presence of the bubbles and the theoretical explanations must NOT rely on are: Use effective density argument: One should not just use a change in the main density to try to explain why the frequency is lower. I would think that the bubbles are compressed a little bit by the vibrational motion of the glass communicated to them through the fluid. But how do the bubbles interact with the fluid under this setting? This is what we need to work out.

摘要：

在物理馬戲團這本書中提到：「當你泡即溶咖啡或攪拌奶精的時候，用湯匙輕敲杯壁看看，添加奶精後攪拌時，敲擊的聲音與添加前明顯不同，為什麼？」這本書的解答是：「當粉末溶解的時候，藏在粉末裡的空氣就會跑出來。因為空氣裡的音速低於水裡的音速，在空氣與水混合的環境裡，音速也比在水裡低。當水裡不斷有空氣混進去時，這個容器的共振頻率和它裡面的音速有關，所以也會降低。因此你會聽到較低的音調，直到空氣全部跑光。」我們利用指向性麥克風以電腦錄音後以Adobe Audition 軟體分析聲波頻率，覺得這個說法有點問題。例鹽水溶液音速較水高，敲擊時的音調卻較水低。由敲擊一黏於裝水水盆中之空杯，與敲擊杯內裝同一水位之水之杯子，頻率非常接近。告訴我們影響頻率的是靠近杯壁一層有效質量。因鹽水溶液密度較高有效質量較大，所以頻率較低。以密度的觀念檢視裝有溶液之杯子被敲後的頻率是對的。但對杯中有懸浮物就不然，例如流體中含有氣泡，則混合體之密度必定變低，有效質量變小頻率應變高。但實驗發現含有氣泡時頻率是變低的。可見氣泡還有其他的影響力高於密度對音調的影響。

流體的振動應是會壓縮到氣泡，氣泡與流體間之力學交互作用為何會使頻率下降，正是我們要找出的。

壹、前言

一、研究動機：

在物理馬戲團這本書中提到「當你泡即溶咖啡或攪拌奶精的時候，用湯匙輕敲杯壁看看，添加奶精後攪拌時，敲擊的聲音與添加前明顯不同，為什麼？」這本書有解答，但我們很懷疑它的說法。這個問題在去年國際科展的作品酒杯發出的音符中也有提及，但他們在出國比賽的時候刪去這個部份，可能是未能確定它真正的原因吧！爲了找出真正的答案，於是我們開始這次的研究。

二、研究目的：

1. 研究敲擊杯子時，杯子是如何製造出聲音。
2. 研究添加物加入杯中液體後，敲杯時杯之頻率變化，找出頻率變化之原因。是否是氣泡使密度降低而影響頻率?是否是氣泡造成對流效應影響頻率?或是氣泡之可壓縮性影響頻率?

貳、研究方法與過程

一、實驗器材及方法：

1. 各式杯子及訂製一直筒高腳杯。
2. 利用指向性麥克風以電腦錄音後以 **Adobe Audition** 軟體分析聲波頻率。

二、原理：

1. 敲擊玻璃杯時，杯壁質點垂直杯壁作簡諧運動，產生沿杯壁繞行之橫波，我們聽見聲音是此杯壁振動造成之波動產生駐波的結果，杯壁的振動的前三個模式如圖 1 所示。每個振動模式皆符合 $2\pi r = n\lambda$ ， r 爲杯之半徑， λ 爲駐波波長。 $n=2$ 是基音。 $n=1$ 質心會移動。

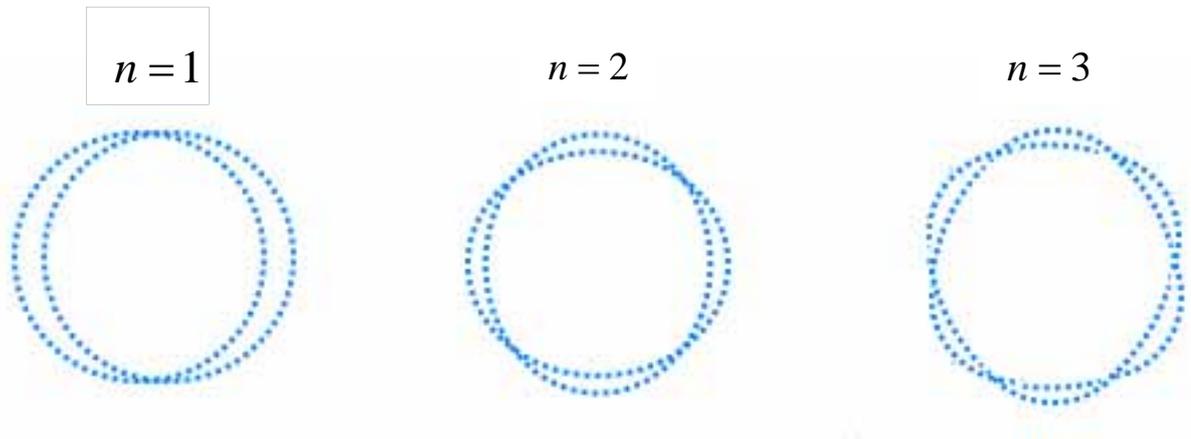


圖 1

2. 杯中裝有液體時，液體是如何影響杯壁的振動？在 2004 年美國intel國際科展得大會三等獎作品酒杯發出的音符中提到：「以溼手指摩擦一黏於裝水水盆中之空酒杯，與摩擦一杯內裝同一水位的水之酒杯，兩者頻率非常接近，所以說杯內液體影響頻率之質量只是靠近杯壁一層有效質量。」杯壁的振動是 S.H.M.，杯面形變之張力即是恢復力，空杯時恢復力帶動之質量為杯壁之質量，杯中有水時要帶動的質量為杯壁之質量與有效層之有效質量之和。當杯壁作S.H.M.變形時水被擠壓也相對杯壁滑動，水運動造成水壓。根據他們的推導水壓 P 與杯壁振動位移 η_g 之

關係為：

$$P = -\frac{\omega^2 \rho_l}{k} \eta_g$$

式中 ω 為杯壁振動的角頻率， ρ_l 為液體密度， k 為波數。“-”號代表杯壁處水壓 P 與杯壁振動位移 η_g 之相位角差為 180° ，也就是杯壁凸出時水壓是最大的，如圖 2 所示。此時杯內單位面積總水壓應是大於杯外之大氣壓力，如此杯壁因水壓所受

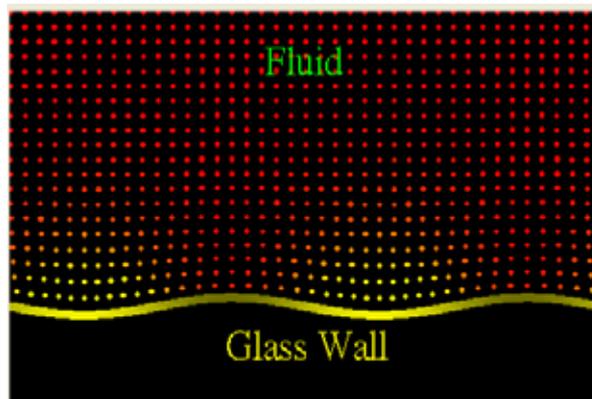


圖 2：壁杯往外時杯內水壓較大(圖中較亮之點)，大於杯外之大氣壓力。

之力是向外的，與恢復力反向，造成恢復力之負擔（杯壁凹入時亦同），導致頻率下降。這也就可以解釋為什麼液體提供一有效質量影響杯壁的振動。

3. 強迫振動

杯壁的振動是週期性的振動，其作用於水使水振動類似強迫振動。若一週期性變化之力作用於一彈簧，無阻尼的強迫振動方程式為：

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \omega t \text{ -----(1)}$$

$F_0 \cos \omega t$ 為驅動力，彈簧之固有角頻率 $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 若 $\omega = \omega_0$ 則激起很大的振幅達共振。但若 k 很大很難壓縮則(1)式中 $m\ddot{x}$ 與 kx 比較結果 $m\ddot{x}$ 可忽略，

得：

$$x \approx \frac{F_0}{k} \cos \omega t$$

此振盪之位移與驅動力同相，振盪角頻率仍為 ω 。若 k 很小，彈簧很軟，很好壓縮，則(1)式中 $m\ddot{x}$ 與 kx 比較結果 kx 可忽略，得：

$$m\ddot{x} = F_0 \cos \omega t$$

因 S.H.M 中加速度與位移之相位角差為 180° ，故此振盪之位移與驅動力反相，振盪角頻率仍為 ω 。若不在此二極端，(1)式之解為：

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \text{ -----(2)}$$

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \text{ -----(3)}$$

這輸出代表二諧和振動之重疊，這些頻率為固有頻率 $\omega_0/2\pi$ 與驅動力（輸入）

頻率 $\omega/2\pi$ 。重疊後之圖形如圖 3 所示，紅色部份之角頻率為 $\frac{\omega_0 + \omega}{2}$ ，藍色部份

之角頻率為 $\frac{\omega_0 - \omega}{2}$ 。

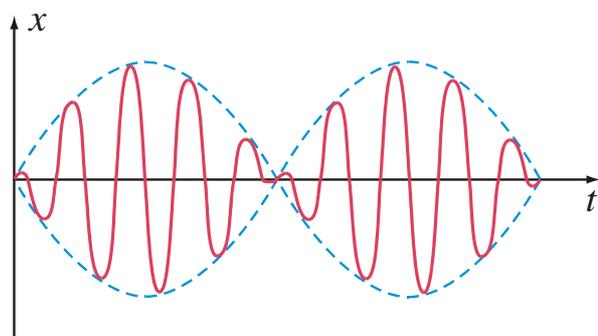


圖 3

參、實驗過程：

- 一、以木槌敲擊裝有不同高度液體之直筒高腳杯，錄音後分析其頻率。再以溼手指摩擦裝有同樣高度液體之直筒高腳杯錄音後分析其頻率。
- 二、將空直筒高腳杯杯底以膠帶黏在直筒狀容器中，注水於容器中在水達到杯壁之處做一記號，敲杯測其頻率。再測杯內裝水至記號處時，杯所發出之頻率。再測同一高度內外皆有水時杯所發出之頻率，比較之。
- 三、杯中裝入同一高度不同密度液體，測量敲杯時杯發出之頻率。
- 四、以不同直徑之玻璃圓柱體及氣球放入直筒高腳杯，如圖 4 所示，分別測量在同一水位直筒高腳杯振動之頻率。
- 五、咖啡杯加入熱開水錄下敲擊時發出之聲音，加入即溶奶精後再敲它錄下聲音，攪拌後再敲它錄下聲音。
- 六、酒杯中裝醋，將小蘇打加入後立即錄下以溼手指摩擦或敲擊時發出之聲音，此後每隔 5 分鐘錄一次音，分析其頻率。
- 七、拿起裝有蓖麻油之瓶子不停地搖晃它，使蓖麻油中充滿氣泡。
- 八、重複步驟六，杯中改裝搖晃過之蓖麻油。且每隔 1 分鐘拍照一次。
- 九、重複步驟六，杯中改裝啤酒。



圖 4

肆、研究結果：

一、摩擦杯緣所得頻率與用木槌敲擊杯壁所得基音頻率相同，但音色不同。我們可以藉頻譜瞭解它。圖 5 所示是摩後之頻譜；圖 6 所示是敲後之頻譜。我們可以看出它們的基音都相同，但用摩的 exciting mode 較激發不出，用敲的有些 exciting mode 的強度甚至超過基音的強度，造成無法知道敲後之基音頻率之困擾(如圖 7)。解決之道就是輕敲或改用摩的。



最大強度為 1231.3 Hz

圖 5



最大強度為 1233.6Hz

圖 6



最大強度為 3814Hz

圖 7

二、設定同一水位之水，直筒高腳杯杯內裝水時頻率為 f_2 ，杯內空的只有杯外有水時頻率為 f_1 ，而內外皆有等高的水時頻率為 f_3 ，空杯時頻率為 f_0 ，其關係如表一所示。(直筒杯外徑 8.47cm，置於 26cm 口徑之直筒容器中)

水位 頻率	7.7cm	6.1cm

$f_0(\text{Hz})$	1033.1 ± 0.2	1033.1 ± 0.2
$f_1(\text{Hz})$	830.7 ± 0.1	917.3 ± 0.2
$f_2(\text{Hz})$	828.9 ± 0.3	914.9 ± 0.2
$f_3(\text{Hz})$	714.5 ± 0.2	814.2 ± 0.1

表一

由表一知 $f_1 \approx f_2$

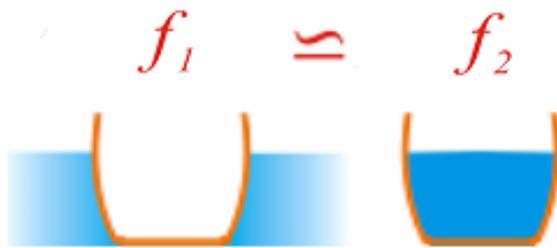


圖 8

由於一空杯置於裝水之水盆中敲擊，與杯內裝同一水位之水敲擊時頻率非常接近如圖 8 所示，故知敲擊裝有液體玻璃杯時，玻璃杯發出聲音，不是受整杯液體之影響只有杯壁附近一層有效層的液體影響它的頻率。

三、敲擊裝有不等量水的玻璃杯可以譜出的美妙樂曲，這個現象大多數人說是利用空氣柱高低的不同而發出不同的音調，但用空氣柱共鳴的原理是不對的。用此原理推導的結果空氣柱愈短頻率愈高，但敲擊結果與此相反如表二所示。

水位高(cm)	頻率(Hz)
0	1033.1 ± 0.2
1.28	1028.3 ± 0.4

2.28	1026.1 ± 0.4
3.28	1018.9 ± 0.6
4.03	1004.6 ± 0.8
5.14	971.0 ± 0.6
6.14	926.6 ± 0.5
7.14	871.5 ± 0.7
8.14	805.5 ± 0.8

表二

四、同一高度不同密度液體，敲杯時杯發出之頻率隨密度之變高而變低，如表三所示：

種類	密度(g/cm^3)	頻率(Hz)
糖水	1.21	886.2 ± 0.5
鹽水	1.18	888.9 ± 0.5
醋酸	1.05	901.7 ± 0.7
水	1.00	904.3 ± 0.6
蓖麻油	0.96	902.3 ± 0.5
酒精	0.80	913.1 ± 0.8

表三

五、以玻璃圓柱體置於杯中央後，敲杯頻率明顯變低，且圓柱體外徑越大，頻率越低，如表四所示：

玻璃圓柱體外徑(cm)	頻率(Hz)
0	1051.1 ± 0.8
3.025	1047.5 ± 0.6
4.560	1041.7 ± 0.7
5.180	994.2 ± 0.8

表四

六、氣球置入杯中央後敲杯頻率明顯變高如表五所示：

狀態	杯中水位(cm)	頻率(Hz)
無氣球	4.80	1062.6±0.3
有氣球	4.80	1069.3±0.2
無氣球	4.40	1107.6±0.1
有氣球	4.40	1114.0±0.2

表五

七、奶精加入熱水前後之頻率如表六所示，加入後頻率變低，攪動後變高，但還是比最初低。

狀態	摩酒杯之頻率(Hz)	敲咖啡杯之頻率(Hz)
加入前	915.0±0.3	2309.2±0.9
加入後	895.2±0.4	2293.3±0.8
攪動後	907.0±0.2	2305.7±0.8

表六

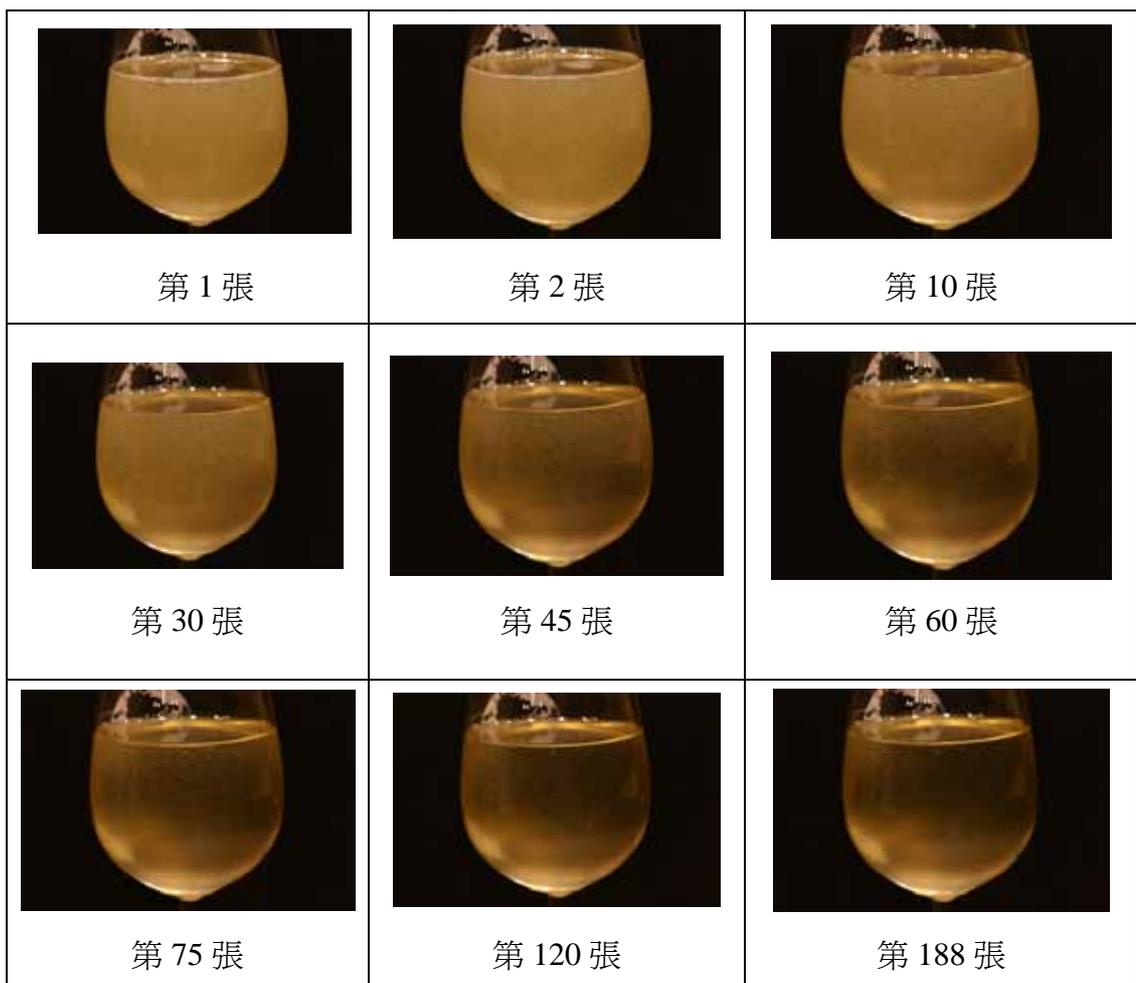
八、小蘇打加入裝有醋之酒杯摩後之情形如表七所示，隨著氣泡之漸漸消失，頻率越來越高。

狀態	頻率(Hz)
氣泡達頂	摩擦杯緣無聲
泡泡漸退 歷 31 秒	749.9
歷 41 秒	755.9
歷 43 秒 液體上方無泡泡	757.6

歷 50 秒	759.7
杯壁有氣泡	924.6±0.2
杯壁氣泡已退	948.0±0.2

表七

九、因觀察裝搖晃過之蓖麻油發現氣泡幾乎停滯不動，所以就拍照比較來確認，每隔 1 分拍 1 張，共拍攝 188 張，歷時 188 分鐘氣泡還未完全消失。今取 9 張列印如表八，每隔 1 分鐘的照片，第 1、2 張照片可說看不出變化，第 10 張是經歷 10 分鐘後之照片，變化仍不大，但由後來之照片可看出白色氣泡漸消失而背景黑色較明顯。可見氣泡上升很緩慢。



表八

十、裝有充滿氣泡之蓖麻油之酒杯被摩後之情形如表九所示，隨著氣泡之漸漸消失，頻率也越來越高。

時刻	02:20	02:21	02:23	02:29	02:33	02:45	02:50	03:00
頻率 (Hz)	762.2 ±0.7	763.3 ±0.6	766.7 ±0.8	777.5 ±0.6	778.5 ±0.8	778.7 ±0.7	777.5 ±0.8	777.8 ±0.6

表九

十一、裝有啤酒之酒杯被摩後之情形如表十所示，隨著氣泡之漸漸消失，頻率也越來越高。

狀態	頻率(Hz)
氣泡高 4.7cm	摩擦杯緣無聲
氣泡高 2.0cm	摩擦杯緣無聲
歷 5 分	969.6±0.2
歷 13 分	971.1±0.4
歷 20 分	972.6±0.2
歷 26 分	974.5±0.8
歷 39 分	975.7±0.6

表十

伍、討論：

- 一、 泡即溶咖啡或攪拌奶精的時候，用湯匙輕敲杯壁，敲擊的聲音音調比添加前低。書中的解答是：「當粉末溶解的時候，藏在粉末裡的空氣就會跑出來。因為空氣裡的音速低於水裡的音速，在空氣與水混合的環境裡，音速也比在水裡低。當水裡不斷有空氣混進去時，這個容器的共振頻率和它裡面的音速有關，所以也會降低。因此你會聽到較低的音調，直到空氣全部跑光。」但我們覺得用音速低共振頻率就低來解釋是不對的。例如鹽水溶液音速較水高(海水中音速為 1519m/s，蒸餾水中音速為 1486m/s)，敲擊時的音調卻較水低(見表三)。由研究結果(二)告訴我們影響頻率的是靠近杯壁一層有效質量。故鹽水溶液因密度較高，有效質量較大，所以頻率較低。
- 二、 現在已知影響杯壁振動的是鄰近杯壁的一層有效層質量，以密度的觀念檢視溶液被敲後的頻率是對的。但對懸浮物就不然，例流體中含有氣泡，則混合體之密度必定變低，有效質量變小則頻率變高。但實驗發現含有氣泡時頻率是變低的。可見氣泡還有其他的影響力高於密度的影響。
- 三、 我們也懷疑氣泡上升造成對流，流體的運動會不會使 $P = -\frac{\omega^2 \rho_l}{k} \eta_g$ 式中之 P 變大而使頻率變低，於是藉著蓖麻油之高黏滯力把氣泡幾乎凍結，但仍可見頻率下降，可見氣泡上升造成對流影響杯壁振動之效應亦很小。
- 四、 將啤酒倒入酒杯，酒杯中裝滿氣泡時以溼手指摩擦酒杯，酒杯無法發出聲音，應該是氣泡太多，個個氣泡都連續爆破造成對杯壁之壓力太亂，杯壁無法抓到駐波的振動模式，以致摩擦杯緣無法發出悅耳之聲音，當氣泡漸漸消失總算可以發出聲音了，但有氣泡時之頻率還是比氣泡完全消失時低。
- 五、 本以為杯中央置入氣球會像含有氣泡時一樣頻率變低，但它卻變高。想想覺得這也合理。杯中央置入玻璃圓柱體時頻率變低，是因玻璃阻擋流體前進。使流體往旁往後回衝，以致加大流體對杯壁的壓力，而降低其振動。僅管當時流體的總量是較少的。但若中央改換氣球回衝力道小，流體的總量又較少，所以頻率高過只裝水者(如表五所示)。這個觀念也可用來解釋同樣的設定水位高度,杯外有水時頻率較杯內有水時高，僅管當時杯外水的總量是較多的，但流體的運動較沒受到限

制(如表一所示)。

陸、結論：

一、 為何有氣泡時頻率會下降呢？我們認為還是回到 $P = -\frac{\omega^2 \rho_\ell}{k} \eta_g$ 之式子，由於杯壁處之水壓 P 與杯壁振動位移 η_g 相位角差為 180° ，當杯子向外凸出時壓力是最大的，流體是最密集的，如圖 2 所示，若此時含有氣泡，則氣泡被擠壓壓力變大，勢必加大流體在杯壁處之壓力，而此壓力更大於杯外之大氣壓力，造成杯壁欲向外運動，而此方向又與恢復力反向，造成恢復力之更大負擔，以致頻率下降。反之當杯子向內凹入時流體的滑動，造成該處流體較稀疏，氣泡壓力也變小，使得流體對杯壁的壓力減小，水壓更低於大氣壓力使杯壁內吸，同理使頻率下降。

二、 也可把杯壁看成是驅動系統，而流體看成彈簧，流體是不可壓縮的，相當於彈簧很強，其共振頻率與驅動頻率同。但若流體很容易壓縮相當於彈簧非常軟，則共振頻率雖與驅動力同，只是振盪之位移與驅動力反相。所以加了氣泡的液體，當其出現輕微的可壓縮性時，是介於此二極端之間，由第(3)式知輸出的角頻率為 $\frac{\omega_0 + \omega}{2}$ ，

由於液體中含有氣泡時較可壓縮，即 k 變小，固有角頻率 ω_0 變低，故輸出的角頻率

$\frac{\omega_0 + \omega}{2}$ 也變低，也就能解釋為何有氣泡時頻率會變低了。

柒、參考文獻：

- 一、 Juan G. Roederer, *The Physics and Psychophysics of music*, Third Edition, p. 149, Springer-Verlag, 1994.
- 二、 Charles A. Culver, *Musical Acoustics*, Fourth Edition, p. 238 and 244, McGraw-Hill Book Company, 1956.
- 三、 N. H. Fletcher and T. D. Rossing, *The Physics of Musical Instruments*, Springer Verlag

New York Inc., p. 577f, 1991.

- 四、 J. Walker, *The Flying Circus of Physics*, John Wiley & Sons, Inc., p.6 and 226, 1977.
- 五、 物理馬戲團 沃克著 葉偉文譯 天下文化書坊
- 六、 大學物理學 第五版 Sears.Zemansky.Young 著 曹培熙譯
- 七、 台灣 2004 年國際科展作品專輯 高中組 物理科 酒杯發出的音符 台灣科學教育館網站
- 八、 Grant R. Fowles and George L. Cassiday, *Analytical Mechanics* , sixth edition p.100
Saunders College Publishing Harcourt College Publishers Copyright renewed 1990 by
Grant R. Fowles.
- 九、 工程數學 吳榮晉 陳文輝著 曉園出版社