

台灣二〇〇五年國際科學展覽會

科 別：物理

作品名稱：終端速度

學 校：臺北市立南港高級中學

作 者：邱士純、陳昱廷

我的自傳

我叫邱士純，我有一個**哥哥**，我的個性獨立、細心、喜歡嘗試，其中爸媽對我的影響最大；我媽媽經常灌輸我們自己處理自己的事情、自己負責的觀念，讓我從幼稚園開始就學習獨立；做就做到最好的態度也養成我細心的習慣；父母也鼓勵我們多參與不同的活動；嘗試各種學習，因此我接觸到許多新事務，在成長的路途上增添許多色彩。

我喜歡思考，對理解的科目比較感興趣；也喜歡閱讀，因此養成對文字的敏感度。



我的自傳

我叫陳昱廷，出生在台北縣，母親是我最喜歡且影響我最多的人。雖然身為獨生子，但從小母親就特訓練我的獨立性，心裡疼我，但一定**要求**我打理所有個人事務，此外母親的民主和謙和的做人態度更**是**我學習的榜樣。

打球、看電視、閱讀是我除上課以外最喜歡做的事，我很隨和，雖然有時說話很直，還好大家很了解我的個性，所以還是蠻有人緣。

我是一個一但下定決心就一定完成的人，唸書是如此，打球也是。我喜歡思考，所以特別喜歡數學這樣的學科，我可以從中學得多動腦。另外歷史中的典故、史實更豐富我的視野，這兩科是我在學校最喜愛的科目。



作品名稱：終端速度 (Terminal Velocity)

英文摘要 (Abstract)

Terminal Velocity

The motion of a sphere which is falling through a fluid is subject to the fluid viscosity. In this study, we find out the relation between the radius of a sphere and the terminal velocity. We used a digital camera to record the sphere's descent in the oil. The three kinds of sphere we choose are acrylic ($\sim 1.18\text{g/cm}^3$), glass ($\sim 2.47\text{g/cm}^3$) and crystal ($\sim 2.66\text{g/cm}^3$). Frame-by-frame analysis of the video footage yielded rough estimates of the sphere's location within 1/30 seconds accuracy for statistically consistent results. By measuring the location and time and analyzing them, we find out the relation between the radius of a sphere and the terminal velocity.

The expression of the drag force, $F_{\text{drag}} = -k_1 V$, is not consistent with our results. The study indicates the expression of the drag force should be $F_{\text{drag}} = - (k_1 V + k_2 V^2)$. The expression for the terminal velocities of the three kinds of sphere is of the form: $a^3(\rho - \rho') = 0.00003 (a V_t)^2 + 0.00021 (a V_t) + 0.00575$, where a is the radius, ρ is the sphere density and ρ' is the oil density (0.90 g/cm^3).

In addition, if the radius is the same, the terminal velocity of a denser sphere is higher and the time to approach the terminal velocity is longer.

中文摘要

終端速度

液體中之球體運動與液體的黏滯性有關，本實驗找出球體半徑與終端速度之間的關係。利用攝錄機作為紀錄工具，拍攝三種材質（壓克力、玻璃、水晶）的球體在沙拉油中的自由落體過程。使用電腦影像處理軟體將影像分解成幅影像，時間的解析度為 1/30 秒。測量球體的高度與時間，分析高度與時間的變化情形，發現終端速度與球體半徑之間的關係。

流體中之運動方程 $F_{\text{drag}} = -k_1 V$ ，無法符合實驗結果。我們的實驗結果顯示油中的自由落體的運動方程應該是 $F_{\text{drag}} = - (k_1 V + k_2 V^2)$ 。由不同材質的壓克力球 ($\sim 1.18\text{g/cm}^3$)、玻璃珠 ($\sim 2.47\text{g/cm}^3$) 與水晶球 ($\sim 2.66\text{g/cm}^3$) 所獲得的終端速度 (V_t) 與球體半徑 (a) 的關係為 $a^3(\rho - \rho') = 0.00003 (a V_t)^2 + 0.00021 (a V_t) + 0.00575$ ，其中 ρ 與 ρ' 分別為球體密度與沙拉油密度 (0.90 g/cm^3)。

再者，在相同半徑的條件下，密度越大的球體終端速度越大，在靜止下落後，越久達到終端速度。

研究報告

一・研究動機：

一開始我們想要了解不同材質和大小的紙片在空氣中的掉落速度有何不同，但發現用手控碼錶並不能精準測出掉落時間，而且在空氣中丟紙片時，有很多無法控制的變因(如：手丟下時施力很難均勻、風的影響...等)，所以想試試看將比油重的球體靜止放入油中，它的阻力比空氣大，我們應該可以利用數位攝影機拍攝到運動過程，並透過攝影機每 1/30 秒拍攝一張影像的功能，將拍攝結果擷取成靜態影像，希望可以得到較精準的液體中球體運動情形。

二・研究目的：

想了解球體在沙拉油中的運動情形，以及當球體所受淨力平衡時，也就是達到終端速度時，是否會因為物體的材質、大小而有所差別。

球體降落過程中除了重力外，還有受到周圍環境介質(氣體或液體)所造成的阻力，降落速度越快，阻力就越大；不同液體黏滯性不同，那麼阻力的大小也就不同。而我們實驗是放在液體中，所以還需考慮到浮力的影響。

今令向上為正的方向，物體的降落速度以 v 來表示 ($v < 0$ ，因為物體向下降落)，則液體的阻力大小用 $-kmv$ 表示 ($-kmv$ 量值為正，表示向上的力)，則球體運動時的受力情形可以用下面式子(1)表示。(參考自 classical dynamics of particles and systems)

$$\text{淨力 } F = m \frac{dv}{dt} = -mg' - kmv \dots\dots\dots (1)$$

其中 $g' = g(1 - \frac{\rho'}{\rho})$ ，若 $t=0$ 時，物體下降速度 $v=v_0$ ，那麼

$$v = -\frac{g'}{k} + \frac{1}{k}(e^{-kt} * e^{kc}) = \frac{-g'}{k} + \left(\frac{kV_0 + g'}{k}\right)e^{-kt} \dots\dots\dots (2)$$

若令 z 為降落物體在某一時刻之位置，則與 z 時間的關係式如下：

$$\text{位置 } z = h - \frac{g't}{k} + \frac{kV_0 + g'}{k^2}(1 - e^{-kt}) \dots\dots\dots (3)$$

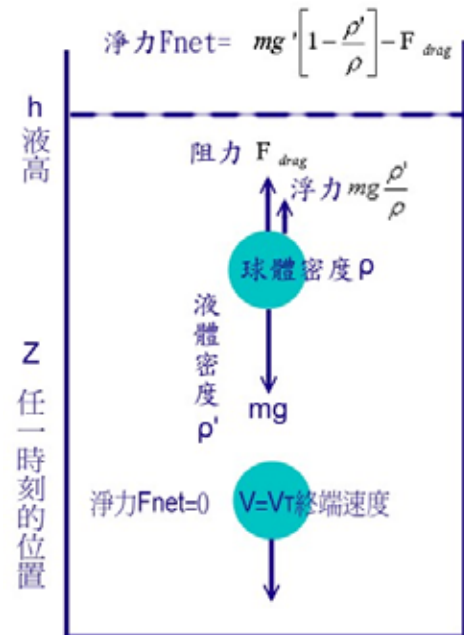
如果初速 $v_0=0$ ，那麼可以將(3)式簡化為

$$z = h - \frac{g't}{k} + \frac{g'}{k^2}(1 - e^{-kt}) \dots\dots\dots (4)$$

其中 z 、 h 、 t 由實驗直接測量可以得到，終端速度 V_T 也可以藉由分析得到，我們期望在實驗後找出液體的阻力係數 k 與實驗地點的重力加速度 g 。

三・研究設備及器材：

(一)、數位攝影機、腳架(共三組)。



- z ：降落後的位置
- h ：該球初始高度
- t ：時間
- V_0 ：初速度
- g ：重力加速度
- g' ：液體中的重力加速度
- k ：阻力係數
- V_T ：終端速度
- ρ ：球體密度
- ρ' ：液體密度




- (二)、長寬高各 15x10x100 公分的壓克力箱（厚度為 0.3 公分）。
- (三)、沙拉油。
- (四)、不同大小的壓克力球、粉水晶球、鋼珠。
- (五)、不同形狀（長方體、似水滴狀、子彈狀、圓錐體）之中碳鋼。
- (六)、尺、方格紙、電腦、量筒、電子秤、游標尺。

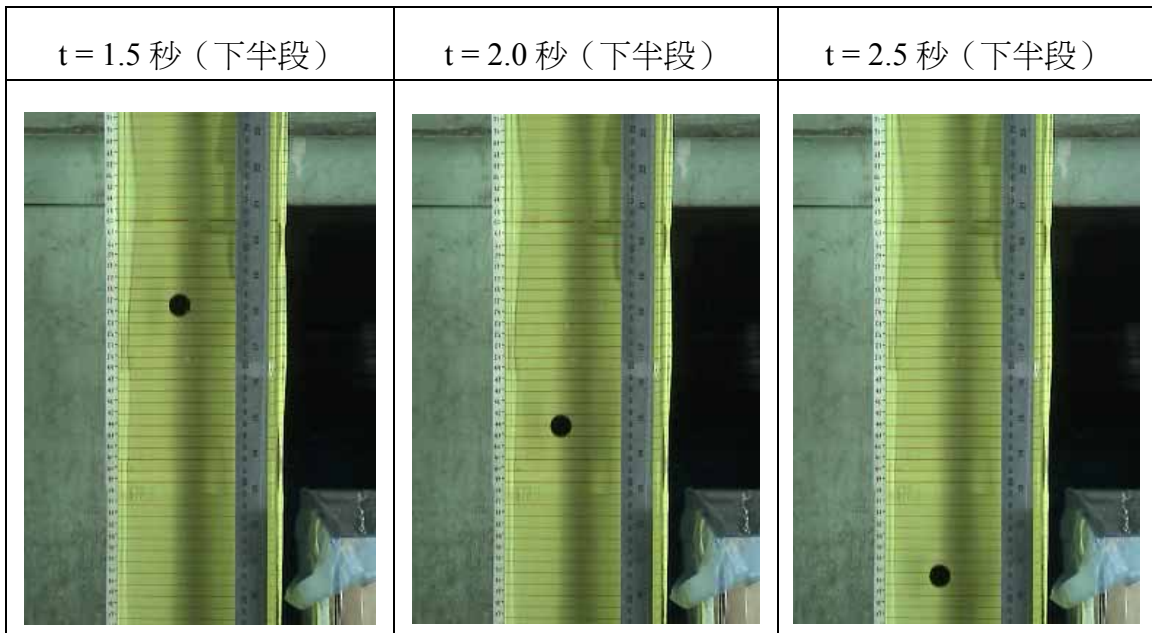
四·研究過程或方法：

- (一)、將油倒入 100 公分高的容器內。（拍攝方容器的刻度比圓柱容易）
- (二)、將不同材質的球體依照大小順序靜止下落到油中，並同時用三架數位攝影機，拍攝油中自由落體的運動過程中，分別針對上段、下段以及全景的動態影像。
- (三)、將數位攝影機錄製的影像用電腦軟體「繪聲繪影」，把動態影像轉換成每 1/30 秒一格的靜態畫面。
- (四)、利用 1/30 秒一格的靜態畫面，測量出球體的位置（Z）與時間。
- (五)、用 Excel 畫出 z 與 t 的關係圖，來了解球體的運動情形。
- (六)、找出不同大小球體在油中的終端速度並且討論終端速度與球體半徑之間的關係。
- (七)、藉由球體的運動情形、終端速度推出油的阻力係數 k 與實驗地點的重力加速度 g。

五·研究結果：

所拍攝的完整影像在附錄中，我們將影像以每 1/30 秒的時間間格拆成一張張單幅影像，量出不同時間的球體在沙拉油中的位置（其結果可見於附錄的資料）。

壓克力球 2（直徑 2.030 公分）的影像結果（隔張間隔 0.5 秒）		
t = 0 秒（上半段）	t = 0.5 秒（上半段）	t = 1 秒（上半段）
		



將測量的結果，繪成位置變化圖：

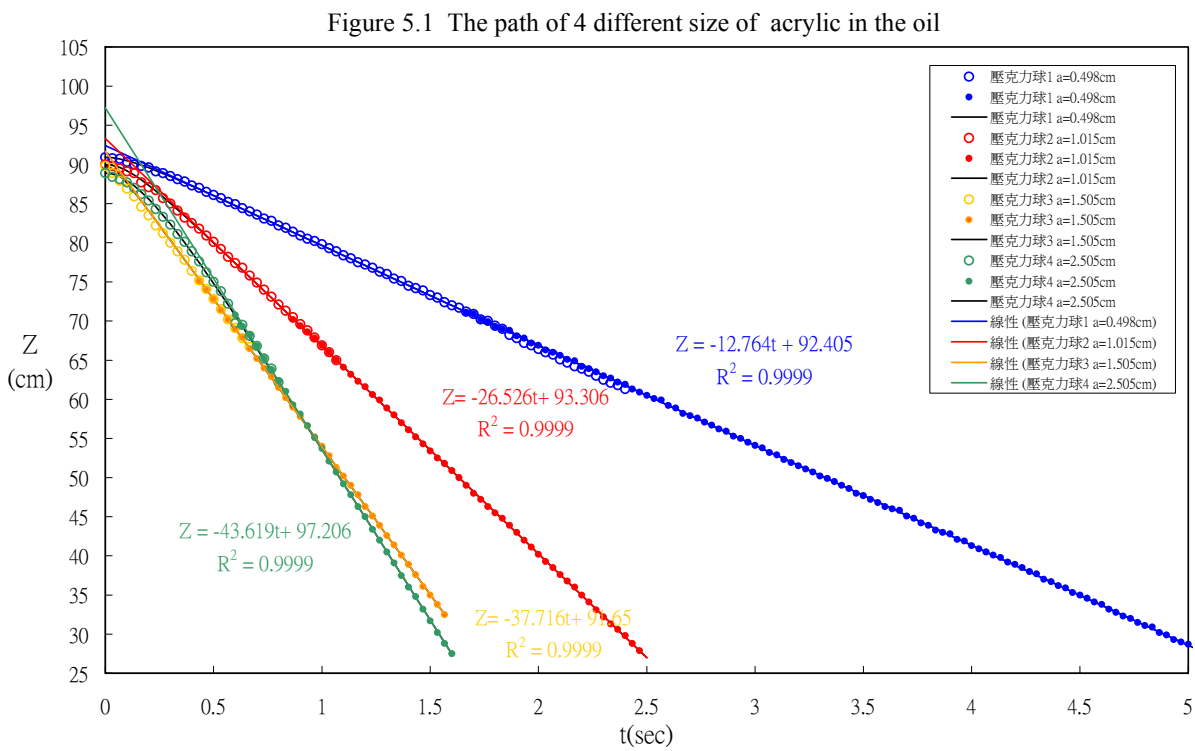


Figure 5.2 The path of 4 different size of glass in the oil

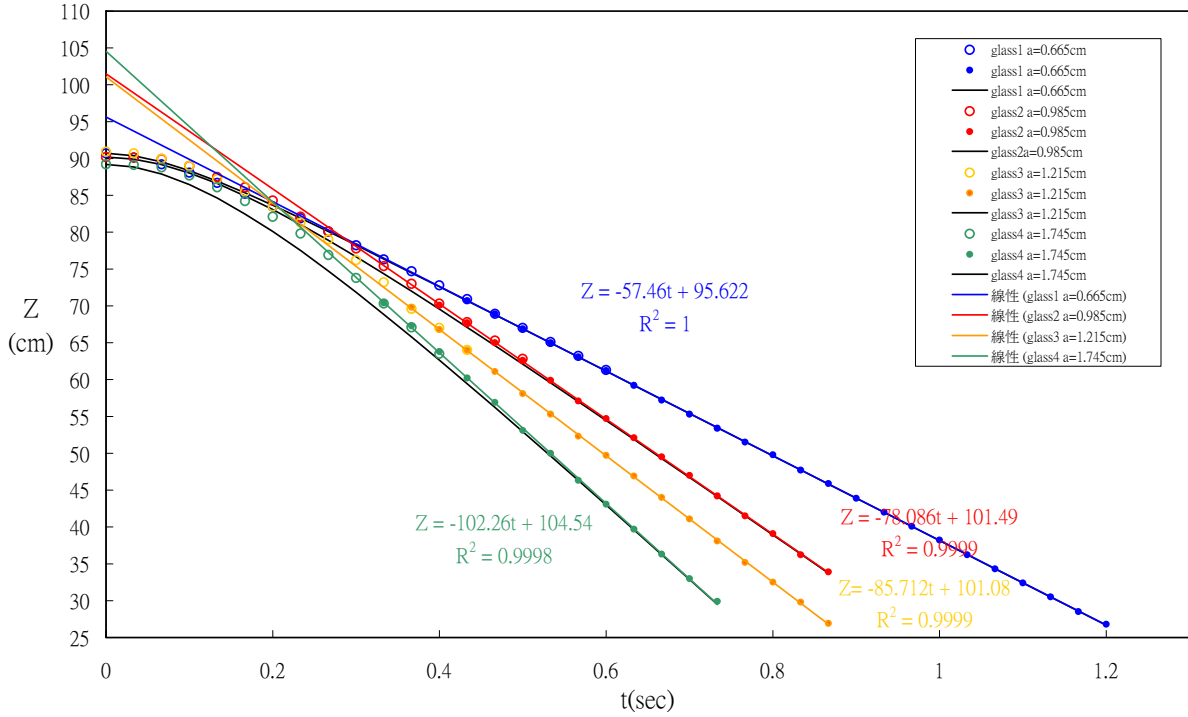
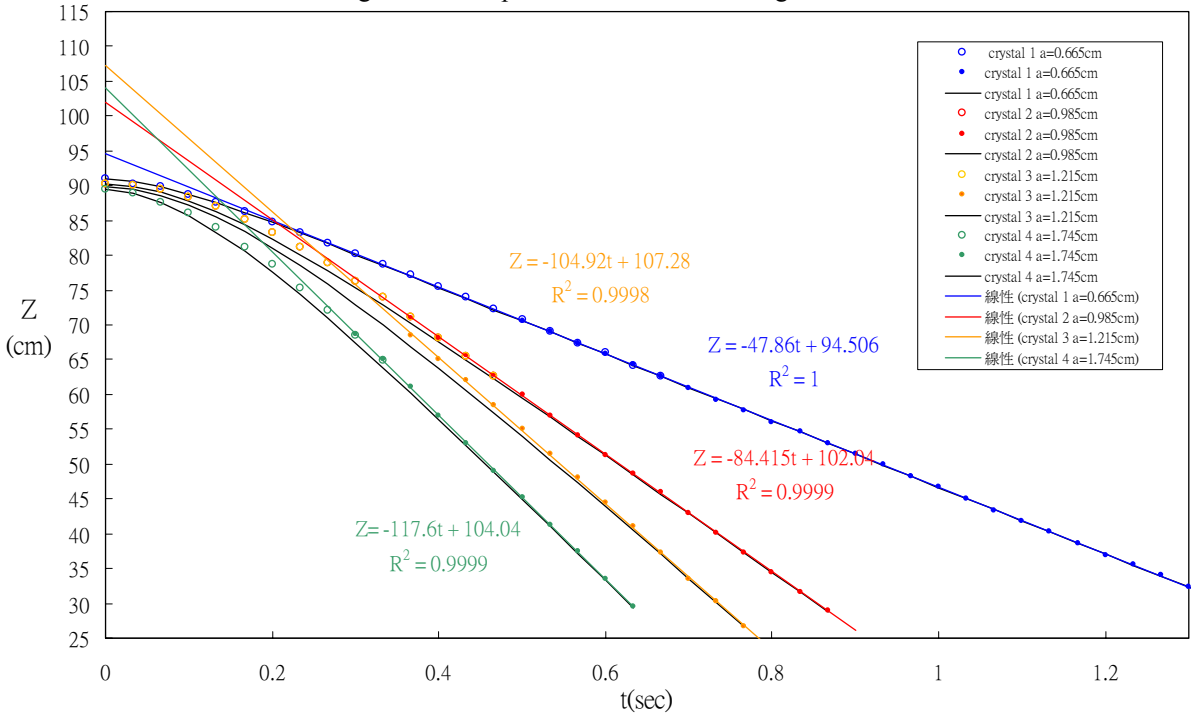


Figure 5.3 The path of 4 different size of glass in the oil



六・討論：

由 z 與 t 作成之關係圖中，已達終端速度的部分，顯然為直線，可推得 $Z=at+b$ ，其中 a 、 b 為常數，其中 a 為斜率； Z 、 t 是變數。

(4)式為 $Z = h - \frac{g't}{k} + \frac{g'}{k^2}(1 - e^{-kt})$ ，如果 $t \rightarrow \infty$ 的時候， $\therefore e^{-kt}$ 趨近於 0

$$\therefore Z = h - \frac{g't}{k} + \frac{g'}{k^2}$$

$$Z = -\frac{g'}{k} * t + (h + \frac{g'}{k^2}) \dots\dots\dots (5)$$

那麼在 Excel 作圖的斜率就是 $a = \frac{g'}{-k}$ ， $b = h + \frac{g'}{k^2} = h - a * \frac{1}{k}$ ，當 b 、 h 、 $a = \frac{g'}{-k}$ 已知，就

可以推得 k ，最後代入 $a = \frac{g'}{-k}$ 再推得 g' 。

接著由 $g' = g \left[1 - \frac{\rho'}{\rho} \right]$ 再推出觀測地點的重力加速度 g 。

以下就是我們在沙拉油中不同半徑大小的球體所做的結果：

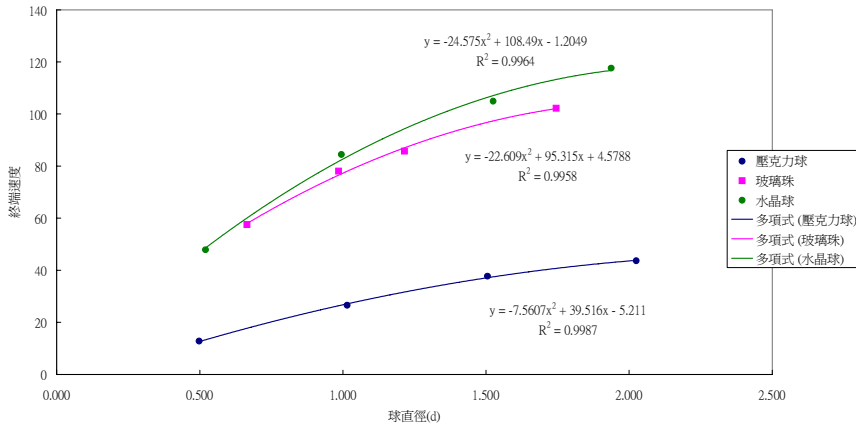
表一 100cm 高度 沙拉油中下落球體的實驗結果 *沙拉油的密度 $\rho' = 0.90 \text{ (g/cm}^3\text{)}$

	a	b	h (cm)	k	Vt (cm/s)	半徑 a(cm)	質量 m (g)	體積 V (cm ³)	ρ (g/cm ³)
壓克力球 1	-12.764	92.405	90.9	8.481063	-12.764	0.498	0.62	0.515784	1.20
壓克力球 2	-26.526	93.306	90	8.023593	-26.526	1.015	5.09	4.380127	1.16
壓克力球 3	-37.716	91.65	89.8	20.38703	-37.716	1.505	16.85	14.27901	1.18
壓克力球 4	-43.619	97.206	88.9	5.251505	-43.619	2.025	40.93	34.78273	1.18
玻璃珠 1	-57.507	95.653	90.7	11.61054	-57.507	0.665	3.04	1.231838	2.47
玻璃珠 2	-78.086	101.49	90.2	6.916386	-78.086	0.985	9.95	4.003108	2.49
玻璃珠 3	-85.712	101.08	90.9	8.419646	-85.712	1.215	18.6	7.51307	2.48
玻璃珠 4	-102.26	104.54	89.2	6.666232	-102.26	1.745	54.35	22.25742	2.44
水晶球 1	-47.86	94.506	90.9	13.27232	-47.86	0.520	1.55	0.588977	2.63
水晶球 2	-84.415	102.04	90.2	7.129645	-84.415	0.995	11.1	4.126272	2.69
水晶球 3	-104.92	107.28	89.8	6.002288	-104.92	1.525	39.34	14.85587	2.65
水晶球 4	-117.6	104.04	89.4	8.032787	-117.6	1.938	81.34	30.46588	2.67

(一) 不同材質 (ρ) 與終端速度的關係

藉由終端速度與球的半徑做圖，綠色是水晶球，它的密度是球體中密度最大的，它的終端速度也相對比較大，由圖 7.1 可以看出來，相同大小的球體密度越大，那它的終端速度就越大。而且由不同材質球體的位置跟時間圖中可以知道，同一種材質的球體，如果半徑越大，它達終端速度的時間就越慢。

Figure 6.1 流體中之自由落體(沙拉油)



(二) 終端速度與球體半徑之間的關係

(1) 假設阻力 $F_{\text{drag}} = -k_1 V$

當球體在沙拉油中達到終端速度時，也就是驅使球體往下的重力與往上的浮力、往上的阻力達平衡，根據流體力學 Stokes' Law，圓球狀的物體在液體中所受阻力大小為 $-6\pi a \eta V$ ，其中 a 為球體半徑， η 為液體的黏滯度。當球體達到終端速度時，可以用以下的方程表示：

$$mg' = 6\pi a \eta Vt \dots\dots\dots(6)$$

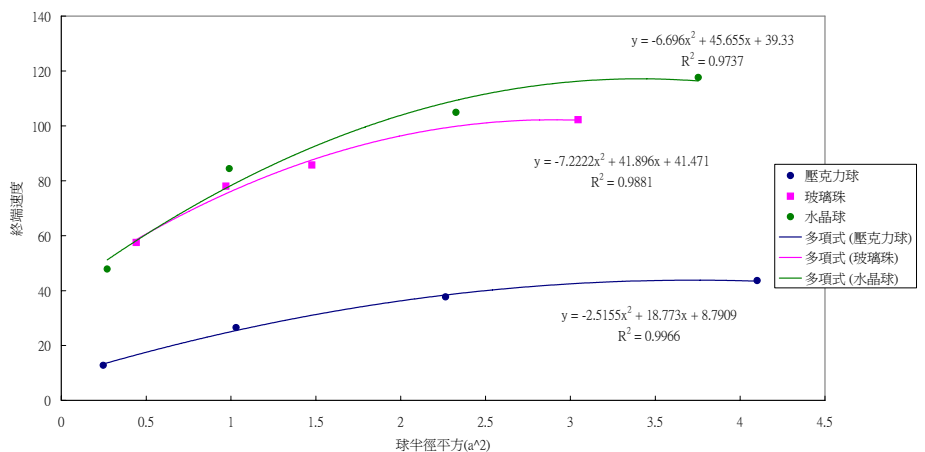
$$\text{所以推得 } V_t = \frac{2 \rho g'}{9\eta} a^2 \dots\dots\dots(7)$$

$$\text{其中在(1)式中的 } k = \frac{6\pi a}{m} \eta = \frac{6\pi a}{\frac{4}{3}\pi a^3} \eta = \frac{9}{2\pi a^2 \rho} \eta。$$

根據(7)式，液體中球體的終端速度應該與球體半徑平方成正比，成一直線的樣子。可是藉由圖 6.2 的結果發現速度與球體半徑的平方不是直線關係，而是二次函數圖形。這也引發我們再深入探討。

理論上， V_t 和 a^2 成正比，而我們後來在網路上發現喬治亞理工大學教育中心的網頁，知道他們也做過類似的實驗，所用的液體是甘油以及鋼珠。他們的結果如下圖，藍色的點是他們的實驗結果，顯示出終端速度與球體半徑平方之間也是二次曲線關係，不過他們仍認為終端速度與半

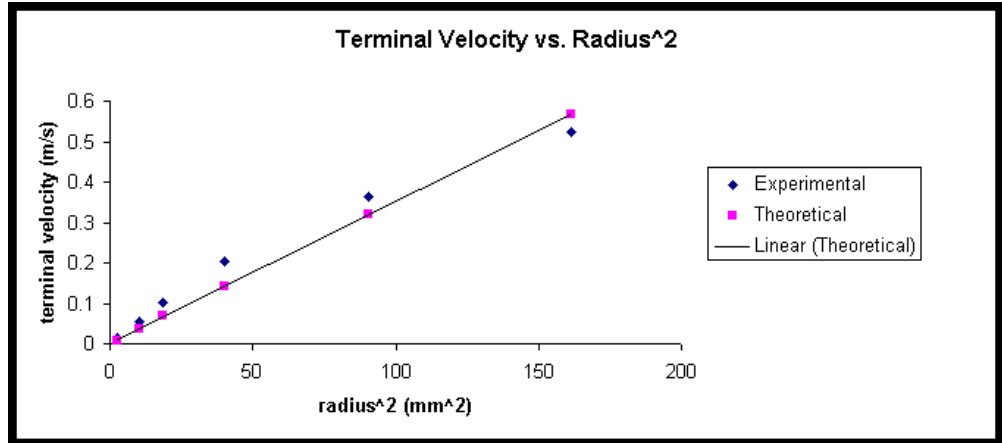
Figure 6.2 流體中之自由落體(沙拉油)



徑平方是成正比的線性關係。同時他們解釋造成此結果的主要理由有二，一是溫度會影響甘油的黏滯度，因此有誤差，所以不是直線關係。可是我們的實驗是在同一天的一小時內做完，我們認為溫度變化不大，不會影響沙拉油的黏滯度，故排除這個因素。第二是他們認為管中的氣泡也是原因之一，但是在我們實驗所拍攝的影片中，沒有任何氣泡，所以我們也不認為這是我們的結果不是直線的原因。

他們也提到當球體的速度太快的時候，就必須考慮運動方程是 F_{drag}

$$= -\frac{1}{2} C \rho' A V^2 \circ$$



經過仔細討論

後，我們一致認為，

最有可能是一開始阻力與速度之間的關係假設錯誤，導致實驗結果無法符合。

(2) 假設阻力 $F_{drag} = -k_2 V^2$

於是考慮阻力與球體速度是二次函數的關係，那麼阻力 $F_{drag} = -\frac{1}{2} C \rho' A V^2$ ，

$$\text{那麼當達終端速度的時候 } mg' = \frac{1}{2} C \rho' A V_t^2 \dots\dots\dots(8)$$

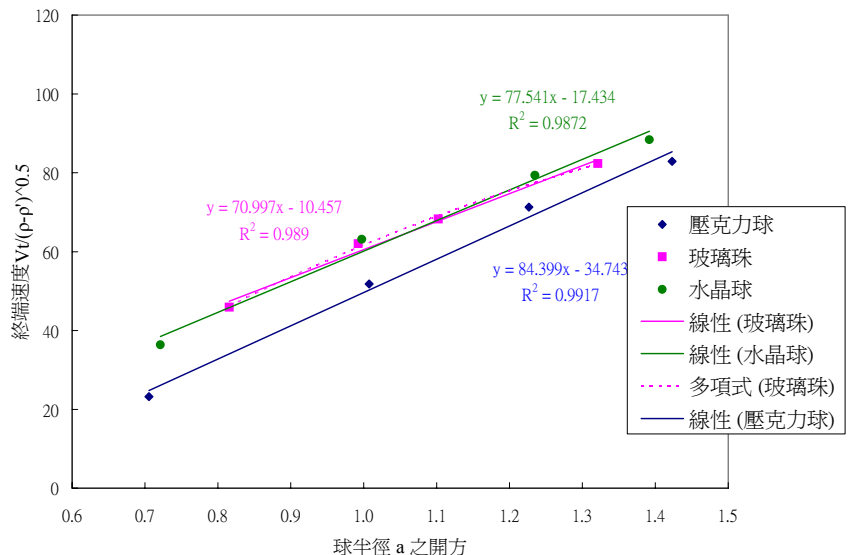
其中 C 是黏滯係數，A 是截面積

$$\text{且 } m = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho, \quad g' = g \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right) \text{ 和 } A = \pi a^2 \text{ 所以推得 } V_t = \sqrt{\frac{8g(\rho - \rho')}{3C\rho'}} \sqrt{a} \dots\dots\dots(9)$$

那麼 V_t 與球體半徑 a 的開方應該為直線關係。

不過我們扣除密度的影響後，所做出的結果如上圖 7.3。可以發現終端速度與半徑的開方結果呈現直線關係。不過無論材質，數據並非勻稱分布在線的兩側，反而是兩數據在直線上方，很明顯的曲線比較符合所有的數據。而且由圖 7.3 發現玻璃珠跟水晶球的結果比較靠近，而壓克力球的結果低於它們。於是我們決定同時考慮阻力 F_{drag} 與球體速度是一次方加上二次方的關係。

Figure 6.3 流體中的自由落體



(3) 假設阻力 $F_{\text{drag}} = - (k_1 V + k_2 V^2)$

那麼 $F_{\text{drag}} = - (k_1 V + k_2 V^2)$ 把第 (1) 式改寫為

$$ma = mg' - (k_1 V + k_2 V^2) \dots\dots\dots(10)$$

$$\text{那麼當達終端速度的時候 } ma = mg' - (k_1 V_t + k_2 V_t^2) \dots\dots\dots(11)$$

其中 k_1 與 k_2 與流體阻力的一次式 $F_{\text{drag}} = -6 \pi a \eta V$ 和二次式 $F_{\text{drag}} = -\frac{1}{2} C \rho' A V^2$ (A 為截面

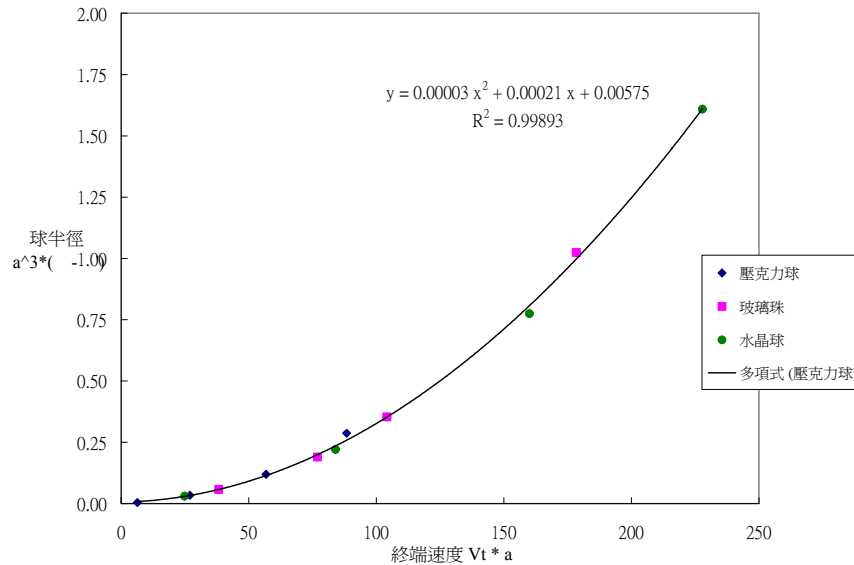
積，對球體言 $A = \pi a^2$) 比較，可以知道 $k_1 = 6 \pi a \eta$ ， $k_2 = \frac{1}{2} C \rho' \pi a^2$ ，

$$mg \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) = 6 \pi \eta a V_t + \frac{1}{2} C \rho' (\pi a^2) V_t^2 \dots\dots\dots(12)$$

$$\frac{4}{3} a^3 g (\rho - \rho') = 6 \eta (a V_t) + \frac{1}{2} C \rho' (a V_t)^2 \dots\dots\dots(13)$$

推得 $a^3 (\rho - \rho')$ 與 $a V_t$ 是二次關係。

圖 6.4 流體中的自由落體



由上圖 6.4 的結果，我們發現考慮一次方加上二次方後的結果，我們的實驗數據顯示 $a V_t$ 與 $a^3 (\rho - \rho')$ 是二次關係，而且刪除了密度影響的結果，這三條線幾乎重疊。

(三) 藉由此實驗找出實驗地點的重力加速度值 g

表二 100cm 高度 沙拉油中下落球體的實驗結果

	k	g' (cm/s^2)	g (cm/s^2)	Vt (cm/s)	黏滯度 η ($\text{g cm}^{-1}\text{s}^{-1}$)
壓克力球 1	8.481063	108.25	471.7	-12.764	0.1401806
壓克力球 2	8.023593	212.83	1048.6	-26.526	0.5336537
壓克力球 3	20.38703	768.92	3574.4	-37.716	3.0273051
壓克力球 4	5.251505	229.07	1075.9	-43.619	1.4077949
玻璃珠 1	11.61054	667.69	1068.8	-57.507	0.7039523
玻璃珠 2	6.916386	540.07	860.9	-78.086	0.926627
玻璃珠 3	8.419646	721.66	1153.0	-85.712	1.7095012
玻璃珠 4	6.666232	681.69	1098.3	-102.26	2.7537432
水晶球 1	13.27232	635.21	980.2	-47.86	0.5247038
水晶球 2	7.129645	601.85	917.9	-84.415	1.0548889
水晶球 3	6.002288	629.76	968.5	-104.92	2.0536208
水晶球 4	8.032787	944.66	1446.4	-117.6	4.4726775

根據表中顯示我們所做的 12 個球體，換算得到的空氣中的重力加速度 g 變化度很大，由 434.3 cm/s^2 到 3574.4 cm/s^2 之間，顯然與理論的 980 cm/s^2 差異太大，所以我們認為這樣的推算有問題，而這樣的問題應該來自於一開始我們是用 $F_{\text{drag}} = -k\mathbf{V}$ ，根據我們以上結果，球體所受阻力 F_{drag} 與球體速度是一次方加上二次方的關係，所以必須將位置與時間的關係考慮 \mathbf{V} 和 \mathbf{V}^2 ，才可能有更好的結果。另一問題是讀取位置時也會造成誤差。

這同時也可以解釋為什麼玻璃珠、壓克力、粉水晶所畫出的 Z 與 t 的關係圖中，當我們把求得的 g' 與 K 代回(4)式，算出它的理論值，與我們的數據比較之後，像壓克力 3 與 4 就不符合，這有造成這樣的主要原因是因為一開始的 Z 是用 $F_{\text{drag}} = -k\mathbf{V}$ 來推導，如果用 $F_{\text{drag}} = -(k_1\mathbf{V} + k_2\mathbf{V}^2)$ 來推導理論值，應該可以解決這個問題。

(四) 當阻力為 $F_{\text{drag}} = -(k_1\mathbf{V} + k_2\mathbf{V}^2)$ 時，油中球體的運動情形

於是我們決定將阻力 $F_{\text{drag}} = -(k_1\mathbf{V} + k_2\mathbf{V}^2)$ 來推導 Z 隨時間變化的理論式，而重力加速度則用鉛球的自由落體運動求出。

這時候的速度 \mathbf{V} 和位置 Z 可以用 (14) 和 (15) 式表示：

$$v = \frac{\left(\frac{k_1 - \alpha}{2k_2} \right) \left(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1 \right)}{\left[1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right]} \dots\dots\dots(14)$$

$$z = -\left(\frac{k_1 - \alpha}{2k_2}\right)t + \frac{m}{k_2} \ln\left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) + \left\{h - \frac{m}{k_2} \ln\left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha}\right)\right\} \dots\dots\dots(15)$$

$$\text{其中 } \alpha = \sqrt{k_1^2 + 4k_2mg'}$$

如果達到終端速度，那麼 $v_t = -\left(\frac{k_1 - \alpha}{2k_2}\right)$ ，用我們找出的終端速度值代入，(15) 成爲：

$$z = V_t t + \frac{m}{k_2} \ln\left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right) + \left\{h - \frac{m}{k_2} \ln\left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha}\right)\right\} \dots\dots\dots(16)$$

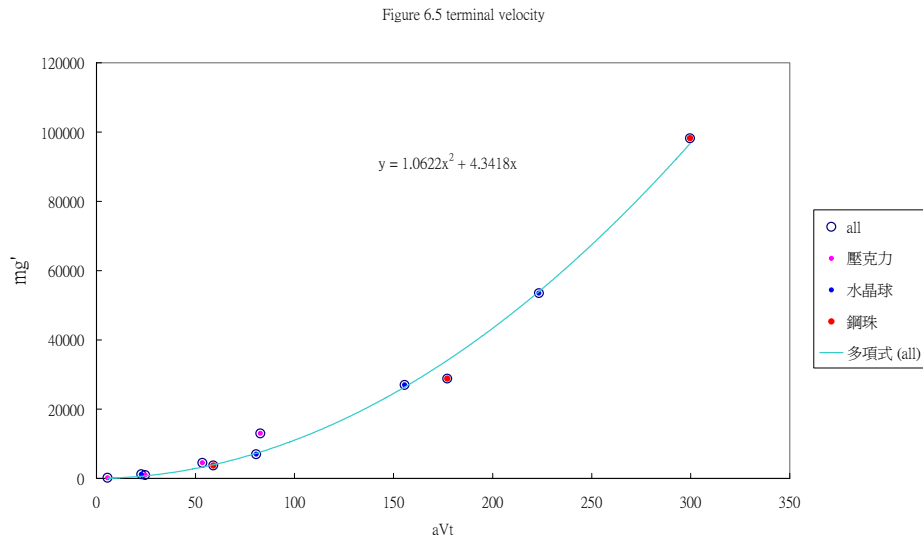
其餘的常數必須求出，才能找出理論Z。我們可以用達到終端速度時，力平衡的式子來找出K₁與K₂。

$$mg' = (k_1 V_t + k_2 V_t^2) \dots\dots\dots(17)$$

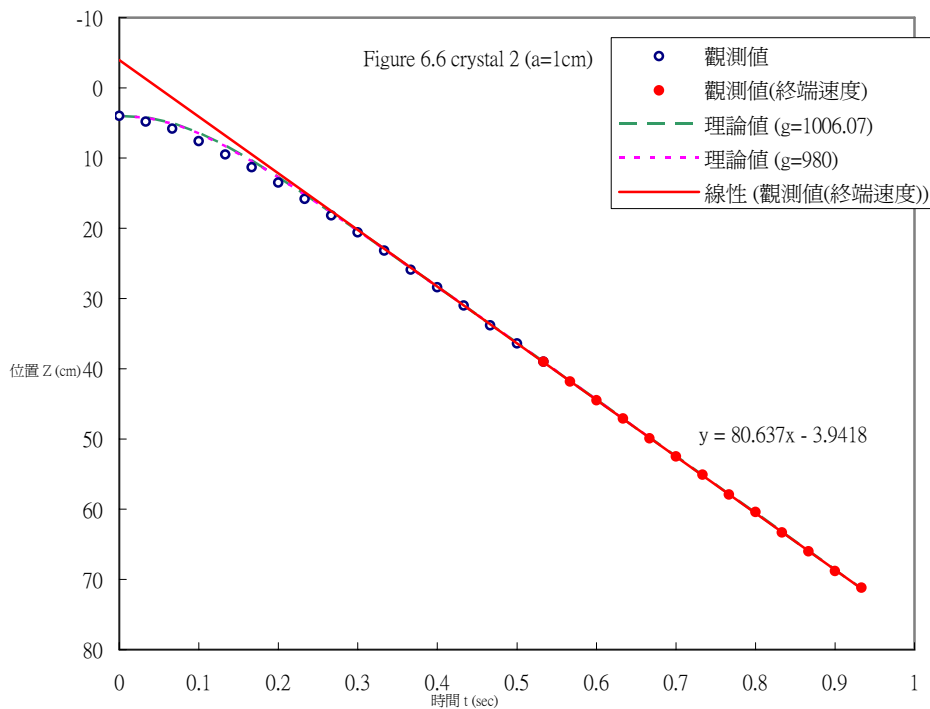
$$mg\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right) = 6\pi\eta a V_t + \frac{1}{2} C\rho' \pi a^2 V_t^2$$

$$k_1 = 6\pi\eta a, \quad k_2 = C\rho' \pi a^2 \dots\dots\dots(18)$$

用 $mg\left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$ 與 (aV_t) 作圖，其中的g是用鉛球量出實驗地點的重力加速度值，約爲 1006.07cm/s²，結果如下圖 6.5。



找出K₁與K₂後，再由K₁與K₂代回 (16)式，倒出理論的Z值。以半徑爲 1 公分的水晶球結果來看（其餘球體的結果見附錄），g以實驗值 1006.07 cm/s²所代入的結果用綠色虛線表示，g=980 cm/s²，則以粉紅色虛線。顯示理論與實驗值可吻合。

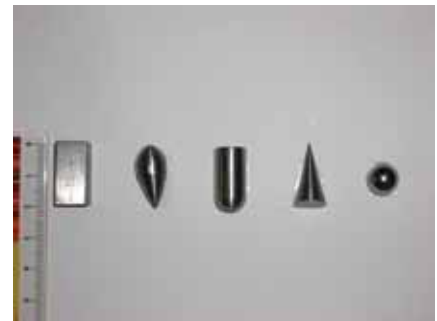


(五) 形狀不同的物體在油中的運動情形

利用中碳鋼製成長方體、近乎水滴狀、子彈狀、圓錐體和球體等形狀，除了長方體外，它們的截面積相同，但形狀不同，在油中的運動情形如下。

表三 100cm 高度 沙拉油中不同形狀物體的實驗結果

shape	Mass (g)	V (cm ³)	ρ (cm/s ³)	a	b	g (cm/s ²)	Vt (cm/s)	c
cuboid	15.39	1.91	8.06	115.31	-15.6	1006	115.31	2.863
airfoil	6.83	0.85	8.04	96.527	-12.2	1006	96.527	1.814
Bullet	11.37	1.39	8.18	108.82	-8.4	1006	108.82	2.380
cone	4.55	0.6	7.59	87.257	-7.2	1006	87.257	1.468
sphere	4.06	0.44	9.23	99.049	-9.76	1006	99.049	1.041



阻力係數 C 與物體的形狀有關，表三中的 C 是直接假設阻力只正比於速度平方所算出。而且球體的阻力係數最小，直方體的阻力係數最大。不過經由先前球體的實驗知道我們所設計的實驗顯示阻力應該是 $mg' = (k_1 V_t + k_2 V_t^2)$ ，或者以下式表示。

$$mg \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) = 6 \pi \eta a V_t + \frac{1}{2} C \rho' \pi a^2 V_t^2$$

其中對不同形狀而言， η 和 C 不是定值。所以不同形狀不能一起比較，必須設計出同一形狀，截面積相同，而且要多個質量，才能求出 η 和 C 。

Figure 6.7 The terminal velocity of a cuboid

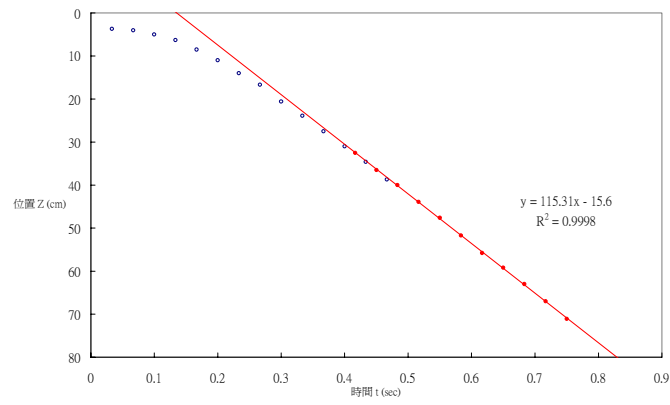


Fig 6.8 The terminal velocity of airfoil

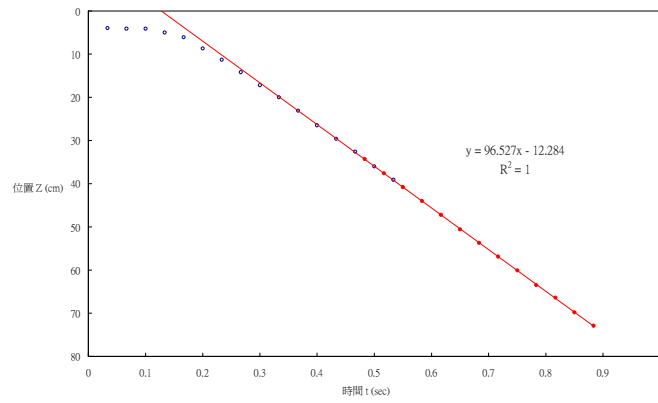


Fig 6.9 The terminal velocity of bullet

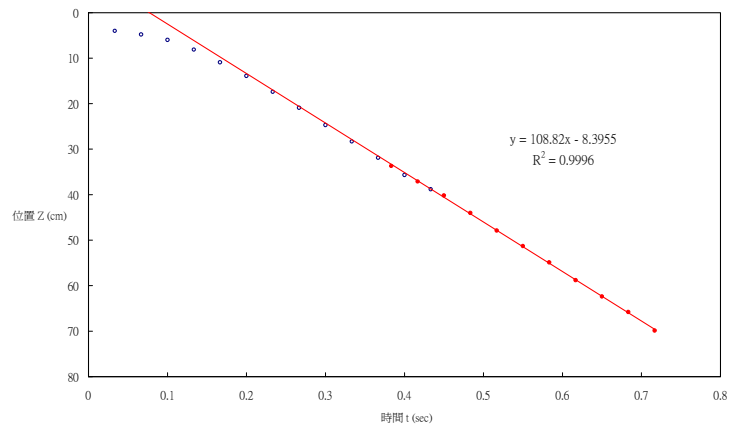


Fig 6.10 The terminal velocity of cone

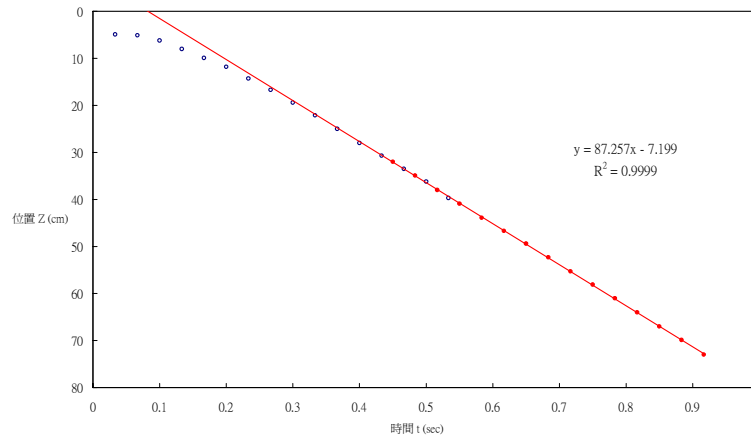
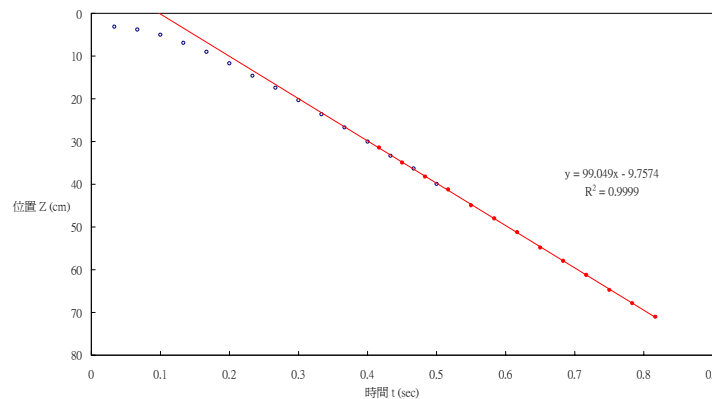


Fig 6.11 The terminal velocity of sphere



七・結論：

先前我們用了口徑 5 公分高 100 公分之圓筒，可是拍攝後刻度有變形且無法在螢幕上看清楚，接下來的實驗都改用方形筒，刻度比較容易看清楚。同時我們發現筒子開口要比球體大許多，這樣可以減少管壁效應。而且用 100 公分高的方形筒，可以拍到球體達終端速度的情形。之前因為很多球體都是透明的，在油中無法找出正確位置，因此這次將所有的球噴上黑色的漆，以便觀察。

我們的實驗結果顯示油中自由落體的運動方程式應該是 $F_{\text{drag}} = - (k_1 V + k_2 V^2)$ 。所獲得的終端速度 (V_t) 與球體半徑 (a) 的關係為 $a^3(\rho - \rho') = 0.00003 (a V_t)^2 + 0.00021 (a V_t) + 0.00575$ ，其中 ρ 與 ρ' 分別為球體密度與沙拉油密度 (0.90 g/cm^3)。

如果還有機會，我們將會用水和不同黏滯性的液體，以及更多不同材質不同大小的球體來加以分析球體在不同的介質間的終端速度。

當然拍攝運動過程如果可以達到時間精確度更高，以及位置拍攝更清楚的問題，我們可以考慮未來使用閃頻器達到更小的拍攝時間間格。

八·參考資料及其他：

(一)、參考網站：

- 1、師大物理系<http://www.phy.ntnu.edu.tw/java/terminalVelocity/>
- 2、美國印第安娜大學物理系網站<http://carini.physics.indiana.edu/E105/drag-force.html>
- 3、美國維京大學物理系網站<http://www.phys.virginia.edu/classes/581/AirRes.html>
- 4、http://www.has.vcu.edu/new-phy/chapter_6.htm
- 5、<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/airfri2.html>
- 6、<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/airfri.html>
- 7、<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/lindrg.html>
- 8、喬治亞理工學院（Georgia Institute of Technology）的分析、計算與實驗教育中心（Analysis, Computation, and Experiment）
<http://www.ace.gatech.edu/experiments2/6514/flowaround/fall02/ma6514/ma6514.html>

(二)、參考書籍：

作者：Marion Thornton

書名：classical dynamics of particles and systems

版次：第四版

出版地：美國

出版社：Thomson Learning Academic Resource Cent

頁數：P.62

出版年：1995 年

附錄一 推導 $F_{drag} = (k_1V + k_2V^2)$ 之 Z 和 t 的關係圖

圖 7.7 壓克力球1 (半徑0.498cm)

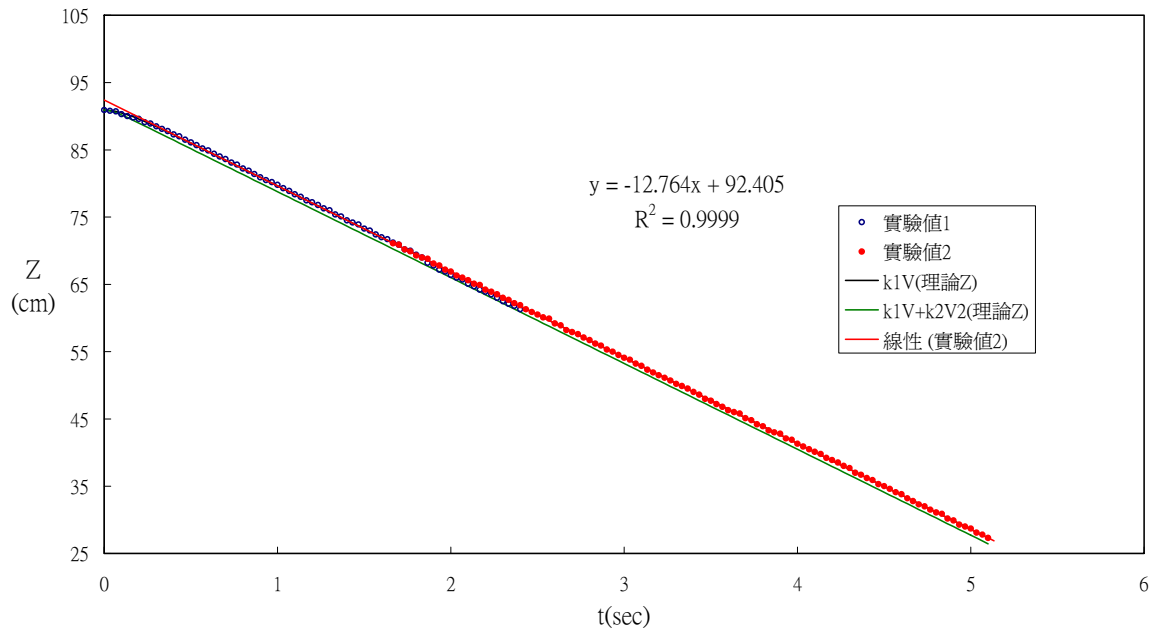


圖 7.6 壓克力球2 (半徑1.015cm)

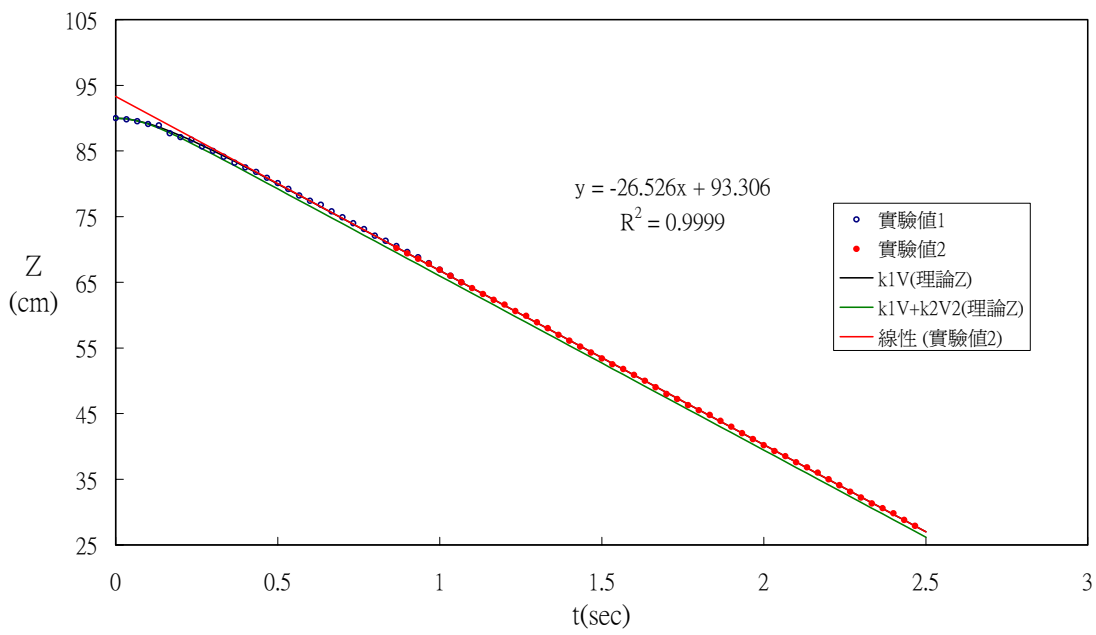


圖 7.8 壓克力球3 (半徑1.505cm)

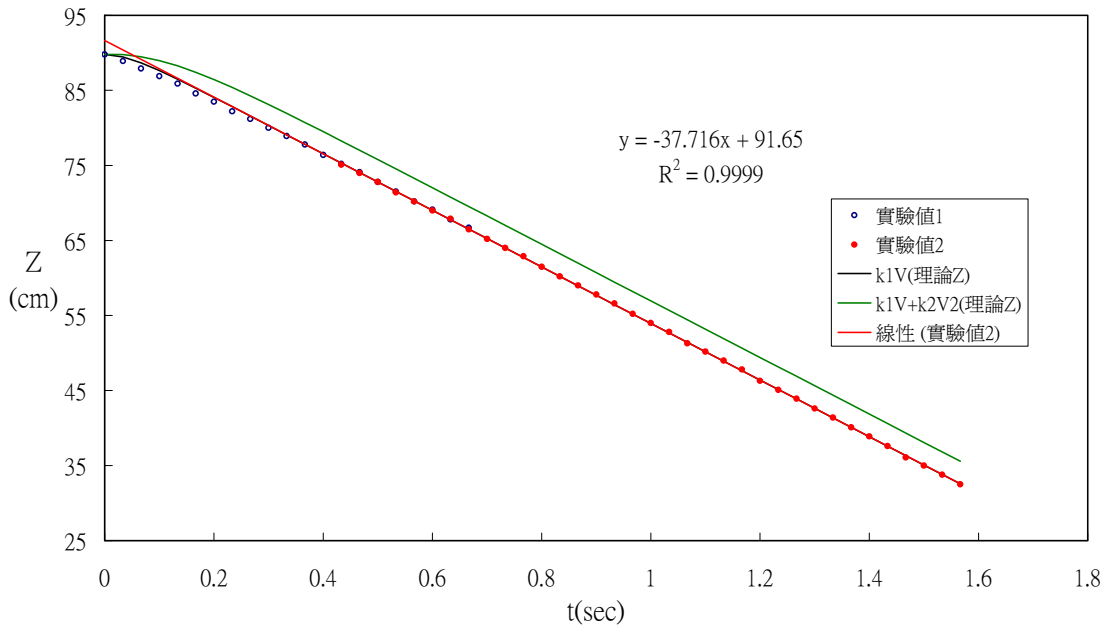


圖 7.9 壓克力球4 (半徑2.025cm)

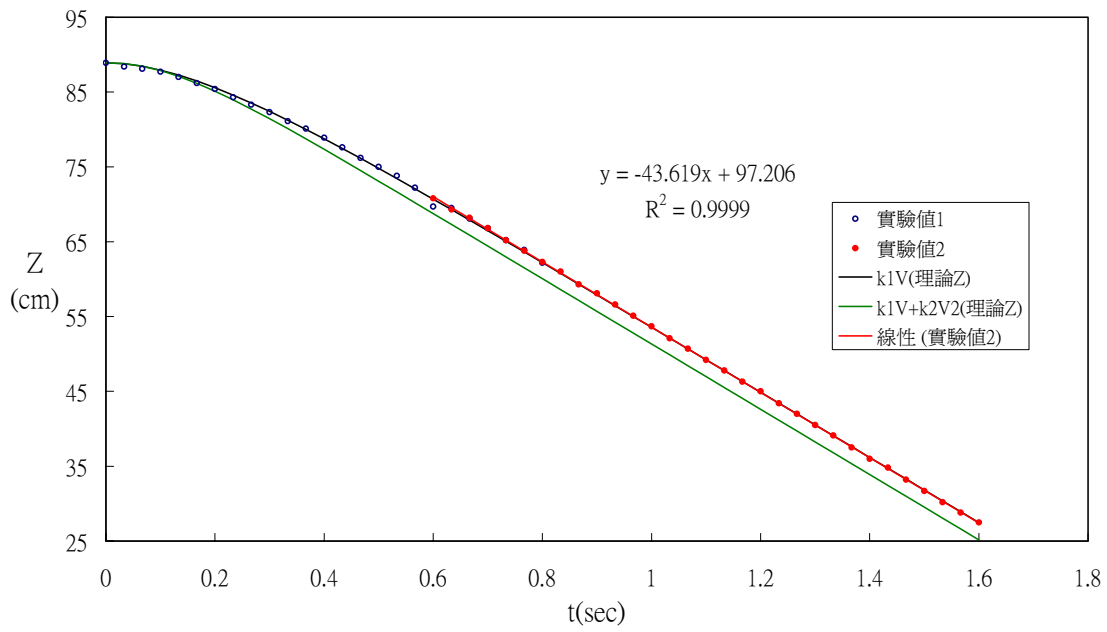


圖 7.10 玻璃珠1 (半徑0.665cm)

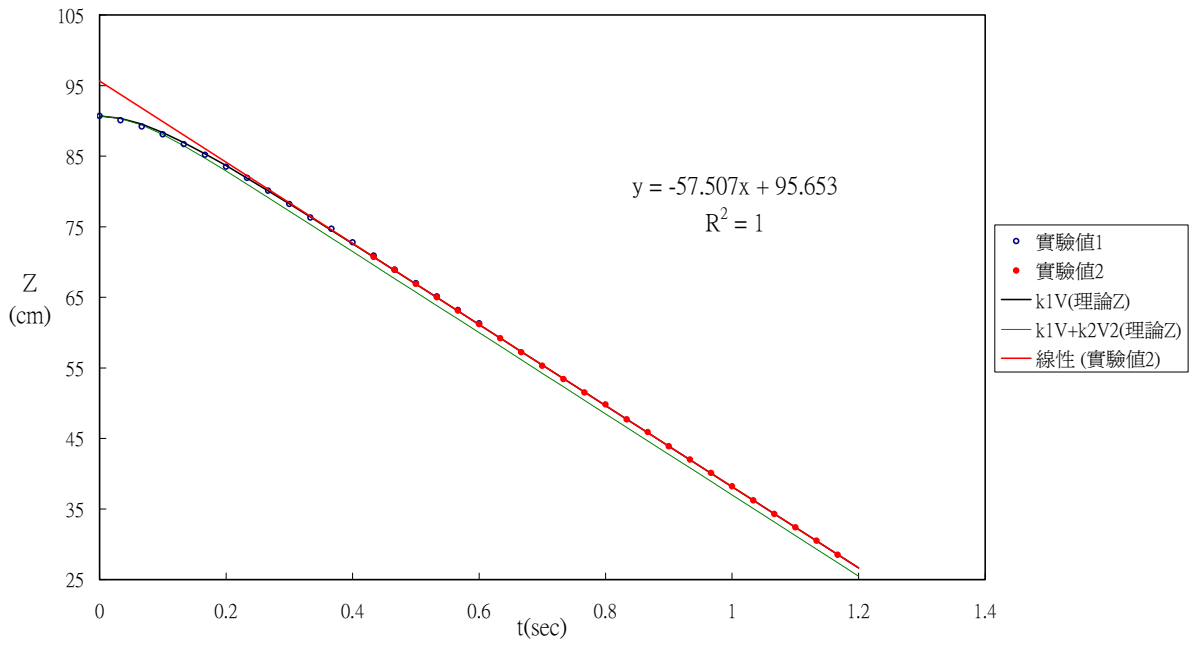


圖 7.11 玻璃珠2(半徑0.985cm)

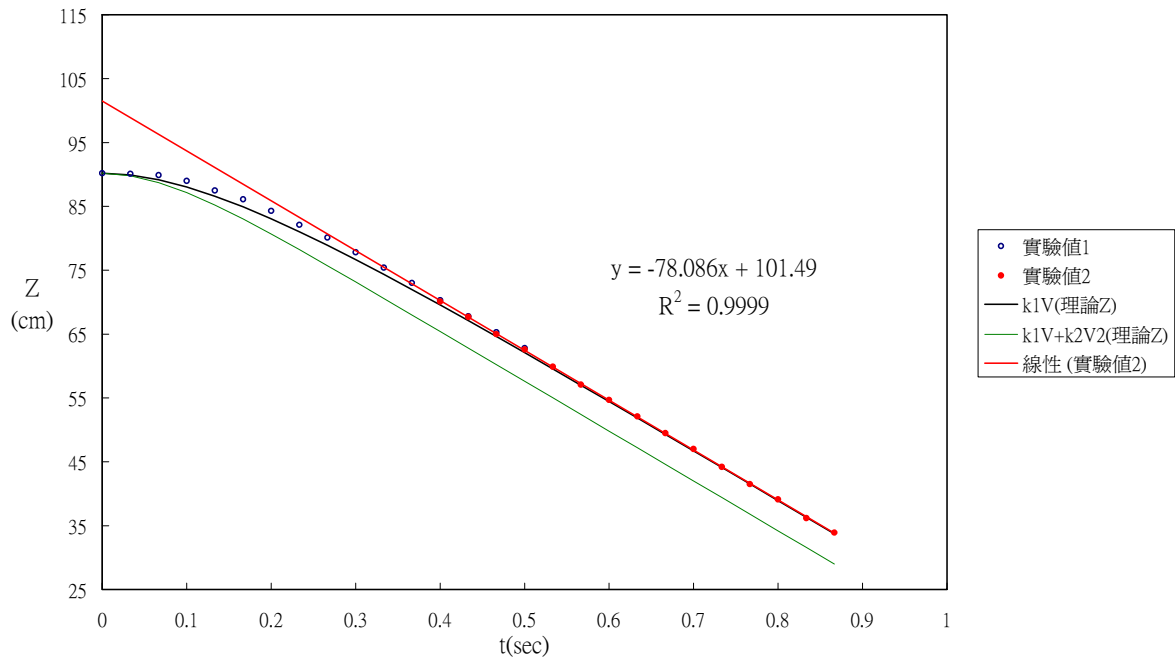


圖 7.12 玻璃珠3 (半徑 1.215cm)

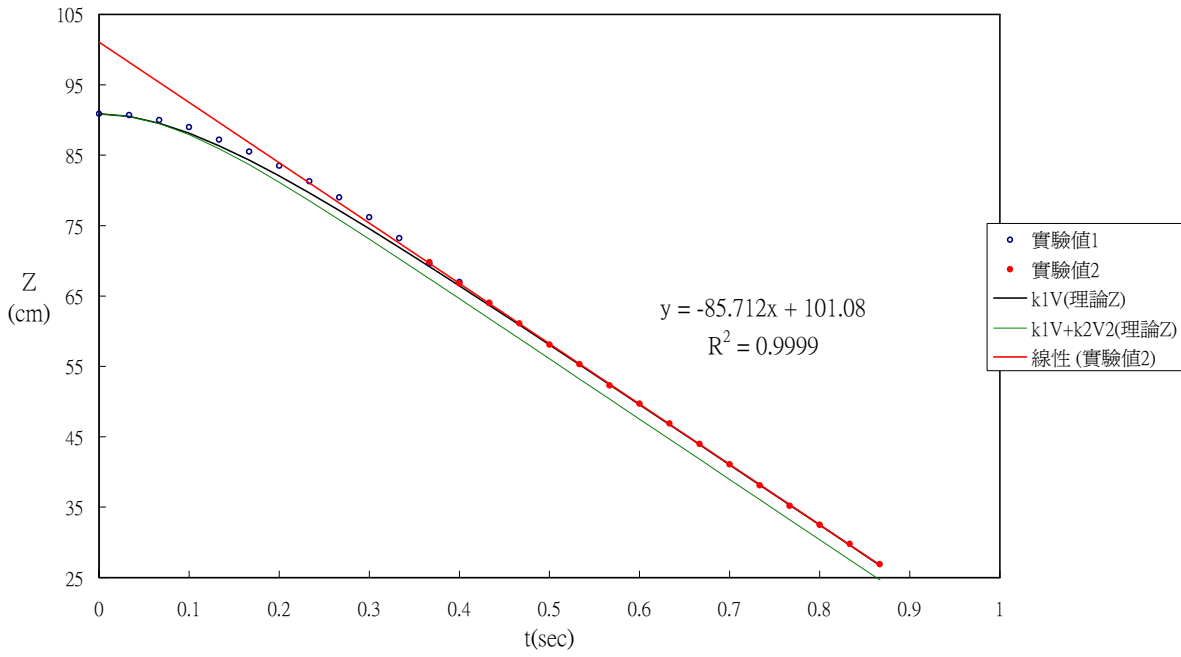


圖 7.13 玻璃珠4(半徑 1.745cm)

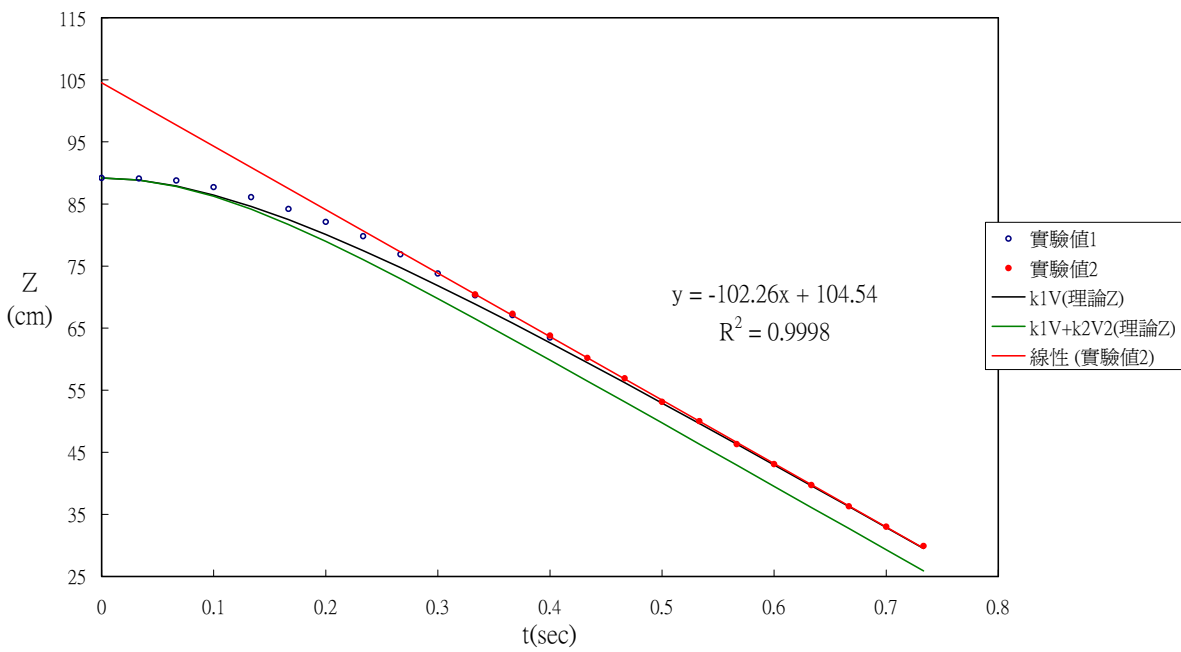


圖 7.14 水晶球1 (半徑0.520cm)

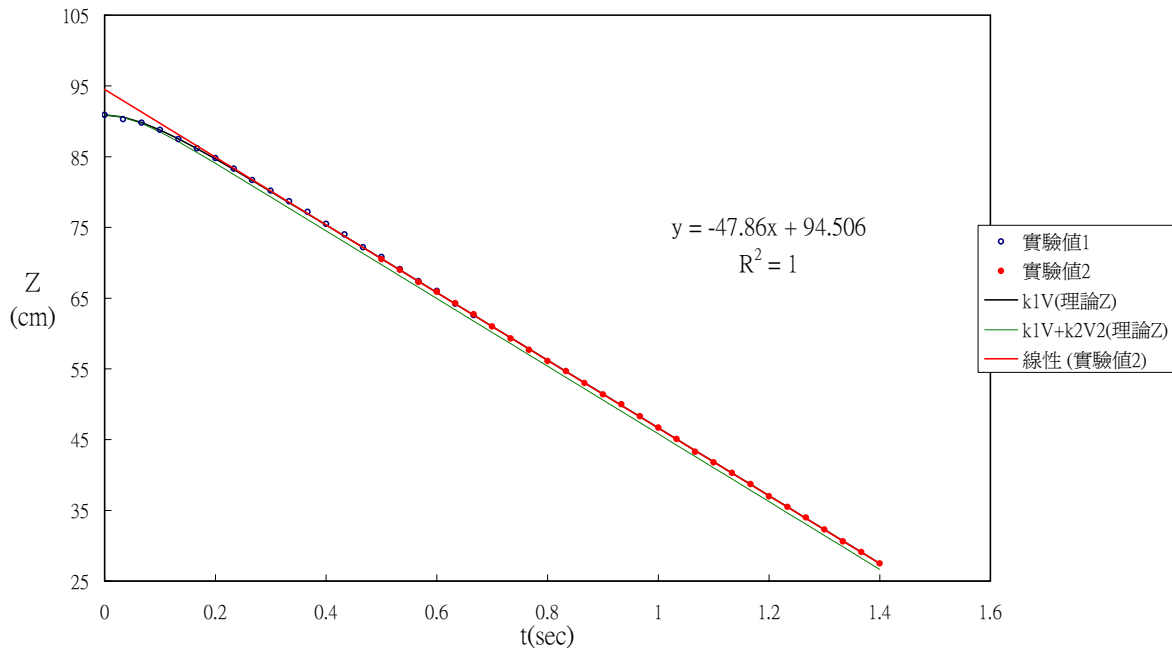


圖 7.15 水晶球2 (半徑 0.995 cm)

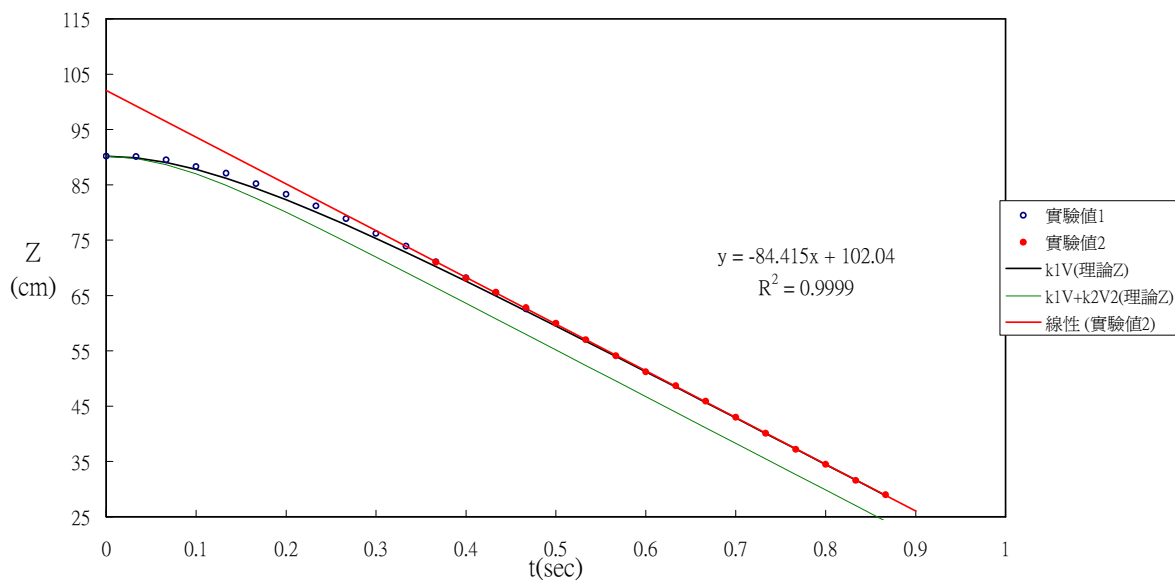


圖 7.16 水晶球3 (半徑 1.525cm)

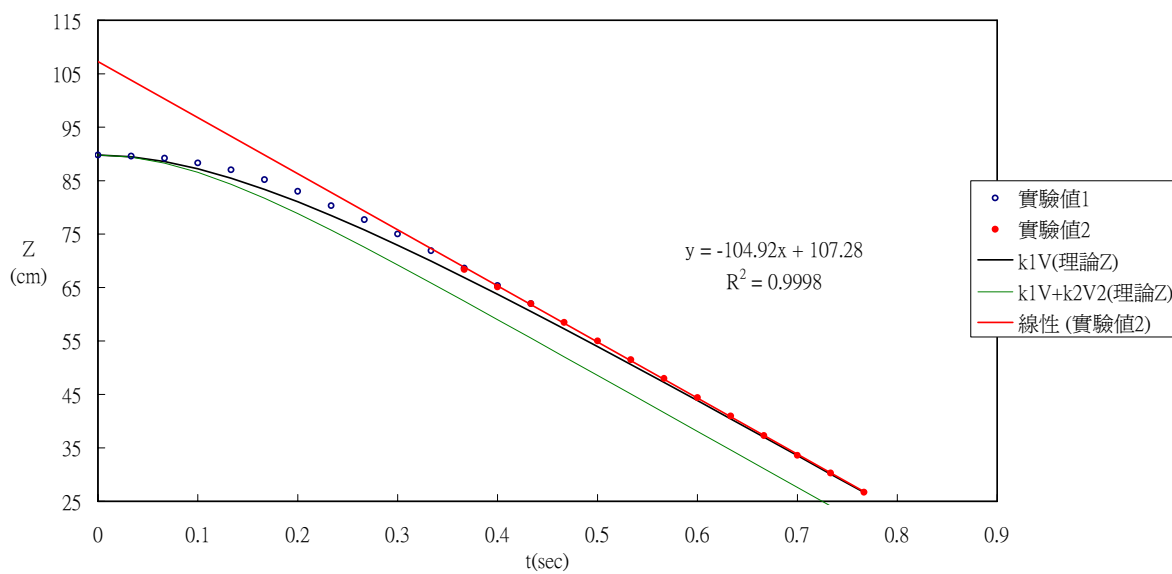
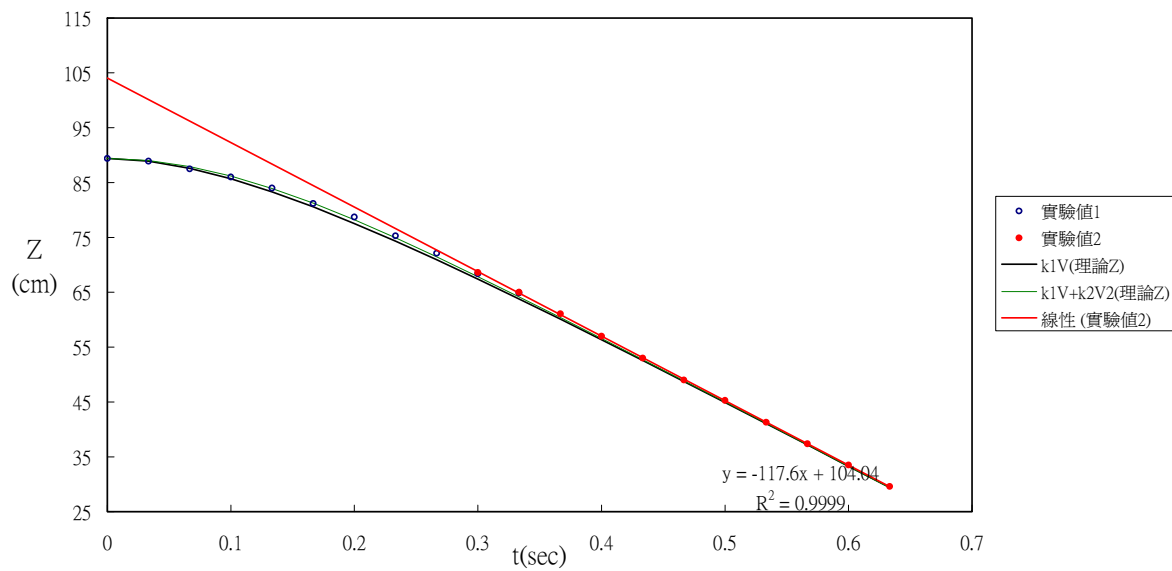


圖 7.17 水晶球4 (半徑 1.938cm)



附錄二 公式詳解 $F_{drag} = -kmv$

球體降落時除了重力外，還所受到周圍環境介質(氣體或液體)所造成的阻力，而且降落速度越快，阻力就越大，不同液體黏滯性不同，那麼阻力的大小也就不同。今令向上為正的方向，物體的降落速度以 v 來表示($v < 0$ ，因為物體向下降落)，則液體的阻力大小用 $-kmv$ 表示($-kmv$ 量值為正，表示向上的力)，則球體運動時的受力情形可以用下面式子(1)表示。

$$F = m \frac{dv}{dt} = -mg' - kmv \dots\dots\dots (1)$$

$$g' = g \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right) \dots\dots\dots (2)$$

ρ' : 液體密度

ρ : 降落物體密度

將(1)式整理後可以得到 $\frac{dv}{kv + g'} = -dt \dots\dots\dots (3)$

將(3)式取積分後

$$\frac{1}{k} \ln(kv + g') = -t + c \dots\dots\dots (4)$$

其中 c 為積分常數，再將(4)式整理後可得

$$kv + g' = e^{-kt+kc} \dots\dots\dots (5)$$

$$v = -\frac{g'}{k} + \frac{1}{k} e^{-kt+kc} \dots\dots\dots (6)$$

若令 $t=0$ 時，物體下降速度 $v=v_0$ ，所以

$$V_0 = -\frac{g'}{k} + \frac{1}{k} e^{kc} \Rightarrow e^{kc} = kV_0 + g' \text{ 代入(6) 可得}$$

$$v = -\frac{g'}{k} + \frac{1}{k} (e^{-kt} * e^{kc}) = -\frac{g'}{k} + \left(\frac{kV_0 + g'}{k}\right) e^{-kt} \dots\dots\dots (7)$$

若令 z 為降落物體在某一時刻之位置，則與 z 時間的關係式如下：

$$\text{又 } \frac{dz}{dt} = v \dots\dots\dots (8)$$

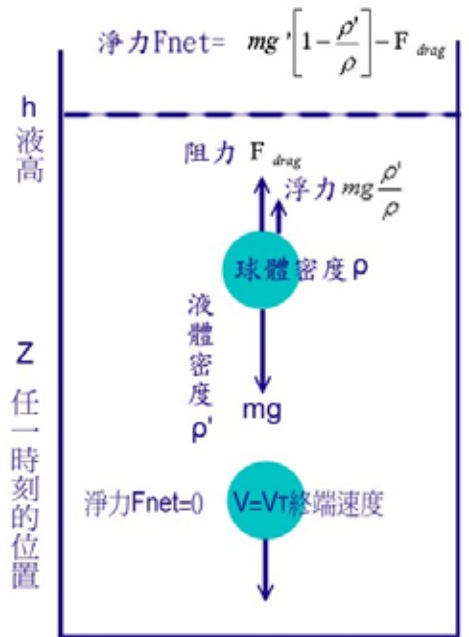
且 $z(t=0) \equiv h$

則將(8)積分後，可得

$$z = h - \frac{g't}{k} + \frac{kV_0 + g'}{k^2} (1 - e^{-kt}) \dots\dots\dots (9)$$

如果初速為零，那麼可以將(9)式簡化為

$$z = h - \frac{g't}{k} + \frac{g'}{k^2} (1 - e^{-kt}) \dots\dots\dots (10)$$



- z : 降落後的位置
- h : 該球初始高度
- t : 時間
- V_0 : 初速度
- g : 重力加速度
- g' : 液體中的重力加速度
- k : 阻力係數
- V_T : 終端速度
- ρ : 球體密度
- ρ' : 液體密度

其中 z 、 h 、 t 由實驗直接測量可以得到，終端速度 V_T 也可以藉由分析得到，我們期望在實驗後找出液體的阻力係數 k 與實驗地點的重力加速度 g 。

附錄三 公式：推導 $F_{\text{drag}} = (k_1V + k_2V^2)$ 之 V 和 Z 的公式

$$m \frac{dv}{dt} = mg' - k_1v - k_2v^2$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k_2}{m} \left(v^2 + \frac{k_1}{k_2}v - \frac{m}{k_2}g' \right)$$

$$\frac{dv}{v^2 + \frac{k_1}{k_2}v - \frac{m}{k_2}g'} = -\frac{k_2}{m} dt$$

其中的 $v^2 + \frac{k_1}{k_2}v - \frac{m}{k_2}g' = \left(v + \frac{k_1}{2k_2} \right)^2 - \left(\frac{k_1}{2k_2} \right)^2 - \frac{m}{k_2}g'$

$$= \left(v + \frac{k_1}{2k_2} \right)^2 - \left(\sqrt{\frac{k_1^2 + 4k_2mg'}{4k_2^2}} \right)^2$$

$$= \left[\left(v + \frac{k_1}{2k_2} \right) + \left(\frac{\sqrt{k_1^2 + 4k_2mg'}}{2k_2} \right) \right] \left[\left(v + \frac{k_1}{2k_2} \right) - \left(\frac{\sqrt{k_1^2 + 4k_2mg'}}{2k_2} \right) \right] =$$

$$\left(v + \frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2} \right) \left(v + \frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2} \right) \quad \text{令 } \alpha = \sqrt{k_1^2 + 4k_2mg'}$$

$$\therefore \frac{1}{v^2 + \frac{k_1}{k_2}v - \frac{m}{k_2}g'} = \frac{1}{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2} \right) \left(v + \frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2} \right)} = \frac{k_2}{\alpha} \left[\frac{1}{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2} \right)} - \frac{1}{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2} \right)} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{\left(v^2 + \frac{k_1}{k_2}v - \frac{m}{k_2}g' \right)} = \frac{k_2}{\alpha} \left[\frac{dv}{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2} \right)} - \frac{dv}{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2} \right)} \right] = -\frac{k_2}{m} dt$$

$$\int \left[\frac{dv}{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2} \right)} - \frac{dv}{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2} \right)} \right] = -\frac{\alpha}{m} \int dt$$

$$\ln \left(\frac{v + \frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2}}{v + \frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2}} \right) = -\frac{\alpha}{m}t + c'' \quad (c'' = 2\alpha c')$$

$$\frac{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2} \right)}{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2} \right)} = c_1 e^{-\frac{\alpha}{m}t} \quad (c_1 = e^{c''})$$

當 $t=0$ 時, $v=0 \Rightarrow c_1 = \frac{\left(\frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2} \right)}{\left(\frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2} \right)} = \left(\frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} \right)$

$$\frac{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2} \right)}{\left(v + \frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2} \right)} = \left(\frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} \right) e^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

$$\begin{aligned} \left(v + \frac{k_1}{2k_2} - \frac{\alpha}{2k_2} \right) &= \left(v + \frac{k_1}{2k_2} + \frac{\alpha}{2k_2} \right) \left(\frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} \right) e^{-\frac{\alpha}{m}t} \\ &= v \left(\frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} \right) e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \left(\frac{k_1 - \alpha}{2k_2} \right) e^{-\frac{\alpha}{m}t} \end{aligned}$$

$$v \left[1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right] = \left(\frac{k_1 - \alpha}{2k_2} \right) \left(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1 \right)$$

$$v = \frac{\left(\frac{k_1 - \alpha}{2k_2} \right) \left(e^{-\frac{\alpha}{m}t} - 1 \right)}{\left[1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right]} \dots \dots \dots (1)$$

當 $t \rightarrow \infty$ 時, $V = Vt$

$$v_t = - \left(\frac{k_1 - \alpha}{2k_2} \right) \dots \dots \dots (2)$$

Fdrag = (k₁V+k₂V²) 之推導Z的公式

$$\frac{dz}{dt} = v$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2k_2} \left\{ \frac{(k_1 - \alpha) e^{-\frac{\alpha}{m}t}}{1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t}} - \frac{(k_1 - \alpha)}{1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t}} \right\}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2k_2} \left\{ \frac{(k_1 + \alpha) \frac{(k_1 - \alpha)}{(k_1 + \alpha)} e^{-\frac{\alpha}{m}t}}{1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t}} - \frac{(k_1 - \alpha) e^{\frac{\alpha}{m}t}}{e^{\frac{\alpha}{m}t} - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha}} \right\}$$

$$z = \frac{1}{2k_2} \left\{ \frac{(k_1 + \alpha)m}{\alpha} \ln \left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) - \frac{(k_1 - \alpha)m}{\alpha} \ln \left(e^{\frac{\alpha}{m}t} - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} \right) \right\} + c$$

$$z = \frac{1}{2k_2} \left\{ \frac{k_1 m}{\alpha} \ln \left(\frac{1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t}}{e^{\frac{\alpha}{m}t} - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha}} \right) + m \ln \left[\left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) \left(e^{\frac{\alpha}{m}t} - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} \right) \right] \right\} + c$$

$$z = \frac{1}{2k_2} \left\{ \frac{k_1 m}{\alpha} \ln \left(e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) + m \ln \left[e^{\frac{\alpha}{m}t} \left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right)^2 \right] \right\} + c$$

$$z = - \left(\frac{k_1 - \alpha}{2k_2} \right) t + \frac{m}{k_2} \ln \left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) + c$$

當 $t = 0$ 時, $Z = h$

$$h = \frac{m}{k_2} \ln \left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} \right) + c$$

$$z = - \left(\frac{k_1 - \alpha}{2k_2} \right) t + \frac{m}{k_2} \ln \left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) + \left\{ h - \frac{m}{k_2} \ln \left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} \right) \right\}$$

$$z = V_t t + \frac{m}{k_2} \ln \left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} e^{-\frac{\alpha}{m}t} \right) + \left\{ h - \frac{m}{k_2} \ln \left(1 - \frac{k_1 - \alpha}{k_1 + \alpha} \right) \right\}$$

$$mg' = (k_1 V_t + k_2 V_t^2)$$

$$mg \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) = 6 \pi \eta a V_t + \frac{1}{2} C \rho' \pi a^2 V_t^2$$

$$\frac{mg\left(1-\frac{\rho'}{\rho}\right)}{aV_t} = 6\pi\eta + \frac{1}{2}C\rho'\pi(aV)^2$$

$$k_1 = 6\pi\eta a \quad , \quad k_2 = \frac{1}{2}C\rho'\pi a^2$$

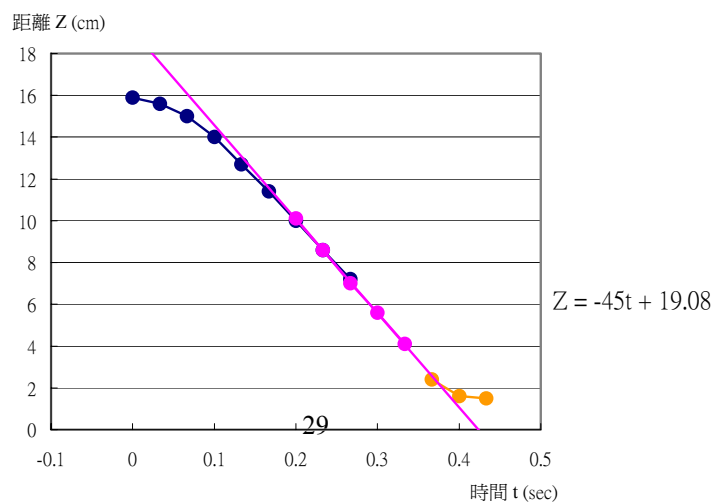
附錄 20 公分油的結果

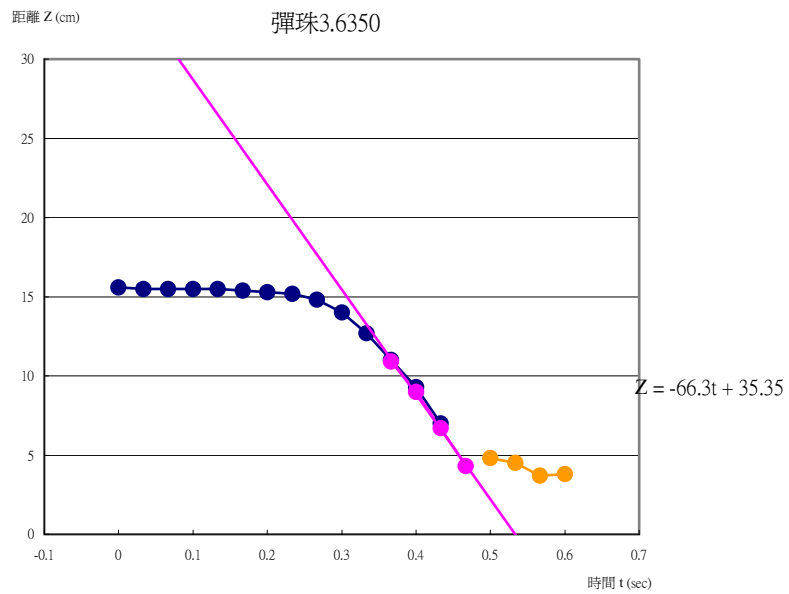
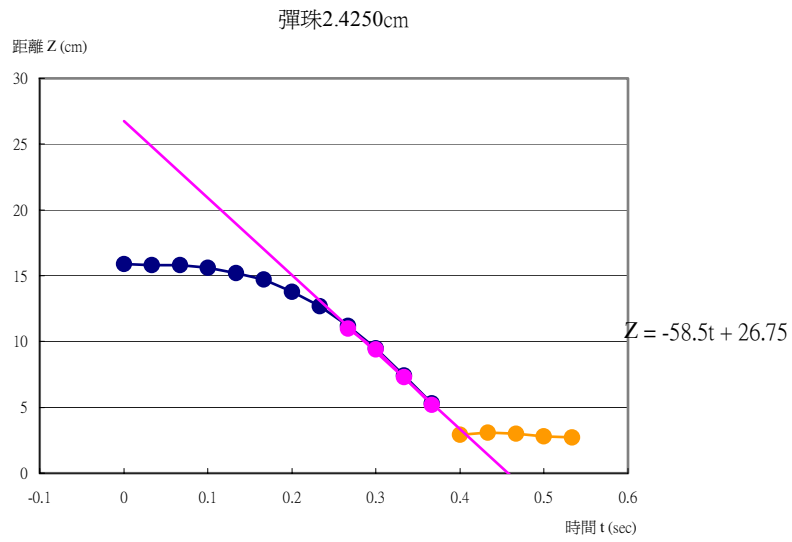
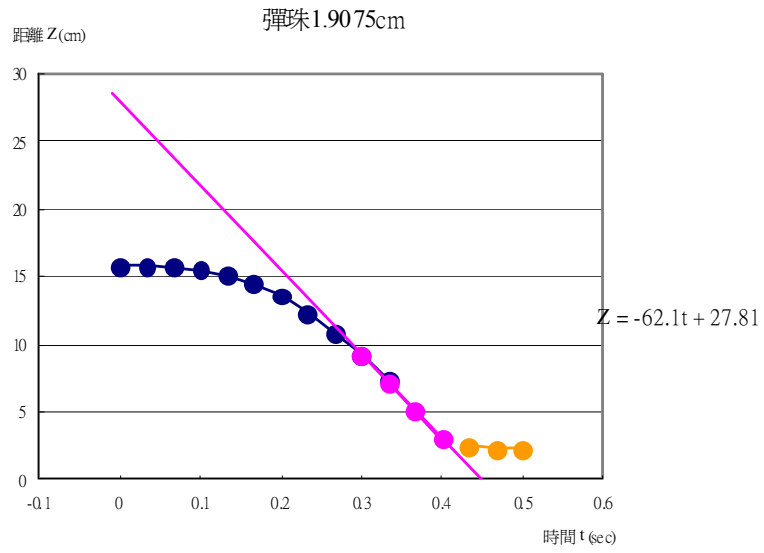
表一 20m 高之油管中玻璃珠之實驗結果

玻璃珠(直徑 1.1020cm)			玻璃珠(直徑 1.9075cm)			玻璃珠(直徑 2.4250cm)			玻璃珠(直徑 3.4450cm)		
t(sec)	z(cm)	down	t(sec)	z(cm)	down	t(sec)	z(cm)	down	t(sec)	z(cm)	down
0	15.9		0	15.8		0	15.9		0	15.6	
0.033333	15.6		0.033333	15.8		0.033333	15.8		0.033333	15.5	
0.066667	15		0.066667	15.7		0.066667	15.8		0.066667	15.5	
0.1	14		0.1	15.5		0.1	15.6		0.1	15.5	
0.133333	12.7		0.133333	15.1		0.133333	15.2		0.133333	15.5	
0.166667	11.4		0.166667	14.5		0.166667	14.7		0.166667	15.4	
0.2	10	10.1	0.2	13.6		0.2	13.8		0.2	15.3	
0.233333	8.6	8.6	0.233333	12.3		0.233333	12.7		0.233333	15.2	
0.266667	7.2	7	0.266667	10.8	10.8	0.266667	11.2	11	0.266667	14.8	
0.3		5.6	0.3	9.2	9.2	0.3	9.5	9.4	0.3	14	
0.333333		4.1	0.333333	7.3	7.1	0.333333	7.4	7.3	0.333333	12.7	
0.366667		2.4	0.366667		5	0.366667	5.3	5.2	0.366667	11	10.9
0.4		1.6	0.4		3	0.4		2.9	0.4	9.3	9
0.433333		1.5	0.433333		2.5	0.433333		3.1	0.433333	7	6.7
			0.466667		2.3	0.466667		3	0.466667		4.3
			0.5		2.3	0.5		2.8	0.5		4.8
						0.533333		2.7	0.533333		4.5
									0.566667		3.7
									0.6		3.8

將上表的結果，繪成下列四張圖：

彈珠1.1020cm





表二 20cm 高沙拉油中降落之玻璃珠之實驗結果

	a	b	終端速度 cm/s	原始高度 h	阻力係數 k (1/s)	液體中的重力加速度
玻璃珠 1	-45	19.08	-45	15.9	14.15094	636.7925
玻璃珠 2	-62.1	27.81	-62.1	15.8	5.170691	321.0999
玻璃珠 3	-58.5	26.75	-58.5	15.8	5.342466	312.5342
玻璃珠 4	-66.3	35.35	-66.3	15.4	3.323308	220.3353

表三 20cm 高沙拉油中降落之玻璃珠之實驗結果

	直徑(cm)	體積(cm ³)	質量(g)	密度(g/ cm ³)	液體中的重力加速度 (cm/s ²)	重力加速度 (cm/s ²)
玻璃珠 1	1.32	1.20426	3.03	2.516067	636.79	992.8977
玻璃珠 2	1.958	3.930399	9.95	2.531549	321.01	498.8202
玻璃珠 3	2.45	7.700109	18.6	2.41555	312.5342	498.9208
玻璃珠 4	3.465	21.78253	54.21	2.488692	220.3353	345.6783