

台灣二〇〇五年國際科學展覽會

科 別：物理

作品名稱：利用滾動實驗測量摩擦係數

得獎獎項：大會獎佳作

學 校：國立嘉義高級中學

作 者：沈仁翔

評語與建議事項：

本作品主要探討圓柱體沿斜面和具槽曲面行之軌道向下滾動時，速率隨高度改變之關係，利用運動感應器及光電計時器測出質量中心的速度和滾動時間，實測圓柱體滾動或滾動兼滑動時做加速運動，滾動方向易於控制，具有實用性，可適合學校作為教具使用，值得鼓勵

我是沈仁翔，現在就讀於嘉義高中二年級。深感於造物主之無盡藏也，自是培養出主動追求學問的習慣；書本上的知識，一方面充實我的學理，同時也引發我應用所學來對生活週遭現象更多的探索。曾遠赴加拿大留學，開拓洪廣的視野，研究自然科學成了我情感的出入。感謝李文堂、周黛青老師的指導，讓我有機會參加這次國際科展，使我成長了不少，對研究又多了一番熱忱。



Measuring the Coefficient of Friction

By Means of Rolling Experiments

ABSTRACT

A cylinder rolling on an inclined plane and a sphere on grooved tracks are discussed in details. Using elementary mechanics, the formulas are derived for the time interval (t) and the final speed (v) as a function of release height (h).

(1) A cylinder is rolling down an inclined plane. The speed and time of the center of mass of the cylinder which changed with position (x) are recorded by a motion sensor. We can get the plots of v vs. \sqrt{x} and t vs. \sqrt{x} , and find that the acceleration of the center of mass of the cylinder is constant, whether the cylinder is in rolling or a combination of rolling and slipping.

(2) A sphere is rolling down an inclined grooved track. The final speed at the bottom of the track can be calculated from the physics of projection motion after the sphere leaves the track to the floor. The time t for the sphere starting from rest to the bottom can be recorded by using photogate detectors. From the v - \sqrt{h} and t - $1/\sqrt{h}$ graphs, μ_s between the sphere and track can be obtained.

(3) When a sphere is released from the vertical height h of a cycloidal slide, the time t of pure rolling is the same independent of release position. But, when the sphere moves at a combination of rolling and slipping, the time t' will be different from t . We measure t and t' with photogate detectors and get the plot of t vs. h . The value of μ_s can be calculated from the t - h graph.

實驗測量摩擦係數

摘要

圓柱或鋼珠從斜面或有槽曲面形成的軌道上滾下時，利用基本力學，可推導出時間 (t)、速率 (v) 隨高度改變的函數關係。

(1) 利用運動感應器記錄圓柱由斜面上滾下時，圓柱質量中心的速度及運動時間隨位置 (x) 的變化，可繪出 v 對 \sqrt{x} 及 t 對 \sqrt{x} 關係圖，由 $v-\sqrt{x}$ 及 $t-\sqrt{x}$ 圖可知不論圓柱純滾動或滾動兼滑動，其質心均等加速度運動。

(2) 鋼珠由有槽斜板滾下時，到達底端的速率可由從底端至地面的拋體運動算出，而其時間 t 則可利用光電計時器直接記錄，利用 $v-\sqrt{h}$ 圖及 $t-1/\sqrt{h}$ 圖可求出鋼珠和軌道的靜摩擦係數 μ_s 。

(3) 鋼珠從旋輪線上方純滾動至底端時，所經歷的時間 (t) 和釋放高度無關，但是當鋼珠滾動兼滑動時，所經歷時間 t' 會改變，利用光電計時器量出 t 及 t' 並作圖，利用 $t-h$ 圖可出 μ_s 。

一、研究動機：

近幾年我國物理奧林匹亞國家代表隊初選，都出現鋼珠在斜面上純滾動的題目；為驗證推導出來的公式，利用鋼珠在斜面上做實驗，但因方向不易控制，所以改用圓柱在斜面及鋼珠在有槽板上做實驗。

二、研究目的：

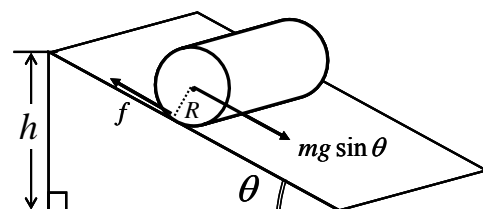
1. 推導圓柱在斜面上滾動時，質心速度 (v) 運動時間 (t) 隨位置 (x) 的變化，並利用 v, t, x 間的關係證明圓柱質心等加速度運動。
2. 推導鋼珠在有槽斜板上滾動時， v, t, h 間的關係，並求出摩擦係數。
3. 推導鋼珠在旋輪線上純滾動的週期公式，並據以求靜摩擦係數。

三、研究器材：

1. 鋁板一塊 (長 150.4cm、寬 10cm、厚 1cm)
2. 壓克力有槽斜板一塊 (長 150.4cm、槽距 1.04cm)
3. 用"電腦割字"割成的旋輪線有槽曲面一具
4. 鋁柱一個 (長 10cm、半徑 22.6cm)
5. 大鋼珠一個 (半徑 1.25cm)
6. 小鋼珠一個 (半徑 1.11cm)
7. 運動感應器 (motion sensor) 一套
8. 光電計時器一套
9. 尺、白紙、複寫紙、游標尺

四、原理：

1. 長 ℓ 、半徑 R 的圓柱以軸心為轉軸，轉動慣量 $I = \frac{1}{2} mR^2$ ，



圖一：圓柱在斜面上純滾動

當其由高度 h ，斜角 θ 之斜面
純滾動時：

(1) 靜摩擦力 f 的力矩 $\tau = fR = I\alpha = I \cdot \frac{a}{R}$ ，

a 為質心加速度， m 受重力沿斜面的分力 =
 $mg \sin \theta$

$$mg \sin \theta - f = ma \cdots a$$

由 $fR = I \cdot \frac{a}{R} \Rightarrow f = \left(\frac{1}{2}mR^2\right) \cdot \frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}ma$ 代入 a

得 $a = \frac{2}{3}g \sin \theta \cdots b$ $f = \frac{2}{3}mg \sin \theta \cdots c$

(2) 由高度 h 純滾動至底端時，質心以 a 等加速度，

由力學能守恆 $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

或由運動學 $v^2 = 0^2 + 2a \cdot \frac{h}{\sin \theta}$ 均可得 $v = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \cdots 1$

(3) 由 $v = 0 + at$ 可得至底端時間 $t = \sqrt{\frac{3h}{g \sin^2 \theta}} \cdots 2$

(4) 增大斜面的斜角至圓柱恰要滑動時，

$$f = f_s = \text{最大靜摩擦力} = \mu_s N$$

$$\frac{1}{3}mg \sin \theta = \mu_s mg \cos \theta \Rightarrow \mu_s = \frac{1}{3} \tan \theta \cdots 3$$

(5) 再加大斜角，圓柱在斜面上滑動兼滾動，動摩擦係數 μ_k ，動摩擦力

$$f_k = \mu_k mg \cos \theta$$

$$mg \sin \theta - f_k = ma \quad , \quad \tau = f_k R = I\alpha \neq I \cdot \frac{a}{R}$$

質心加速度 $a \neq \frac{2}{3}g \sin \theta$, $f_k \neq \frac{1}{3}mg \sin \theta$

但因滑動 $\therefore v \neq R\omega$ ，且非保守力作負功 W_f

$$\therefore mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + W_f \cdots d$$

純滾動的角位移 $\theta_1 = \frac{L}{R}$ (L 為軌道長)

實際角位移 θ_2 ，由 $\omega^2 = 0^2 + 2\alpha\theta_2$ $\therefore \theta_2 = \frac{\omega^2}{2\alpha}$

$$W_f = \tau(\theta_1 - \theta_2) = \tau\left(\frac{L}{R} - \frac{\omega^2}{2\alpha}\right)$$

$$= \mu_k mg \cos \theta \cdot R \cdot \frac{L}{R} - I\alpha \cdot \frac{\omega^2}{2\alpha} = \mu_k mgL \cos \theta - \frac{1}{2}I\omega^2 \quad \text{代入 d}$$

$$\text{得 } mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \mu_k mgL \cos \theta$$

$$\therefore \text{質心速度 } v = \sqrt{2gh - 2\mu_k gL \cos \theta} \dots 4$$

$$(6) \text{ 另解 } mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta = ma \quad a = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

$$\text{質心速度 } v = \sqrt{2g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta) \cdot L} = \sqrt{2gh - 2\mu_k gL \cos \theta} \dots 4$$

$$(7) \sqrt{2gh - 2\mu_k gL \cos \theta} = at$$

$$t = \frac{\sqrt{2gh - 2\mu_k gL \cos \theta}}{g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)} \dots 5$$

2. 半徑 R 、質量 m 、繞直徑轉動的鋼珠 $I = \frac{2}{5}mR^2$

在寬 d 、高 h 的有槽斜板上方，由靜止

(1) 純滾動而下時質心速度 $v = r\omega$

$$(2) r = R \cos \beta, \quad \cos \beta = \frac{\sqrt{R^2 - d^2/4}}{R}$$

$$\text{力矩 } \tau = fr = I\alpha,$$

$$mg \sin \theta - f = ma$$

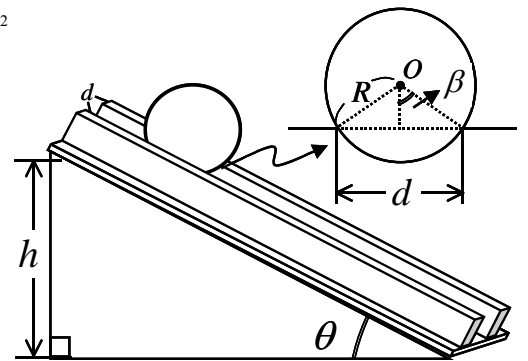
$$\text{可得靜摩擦力 } f = \frac{2ma}{5 \cos^2 \beta} = \frac{2mg \sin \theta}{2 + 5 \cos^2 \beta} \dots 6$$

$$a = \frac{5g \cos^2 \beta \sin \theta}{2 + 5 \cos^2 \beta}$$

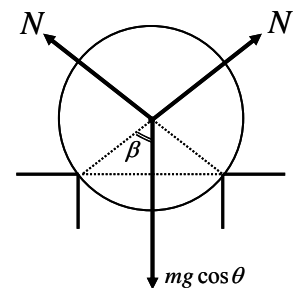
$$\text{由力學能守恆 } mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\text{可得抵底端之質心速度 } v = \sqrt{\frac{10gh \cos^2 \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}} \dots 7$$

$$\text{時間 } t = \sqrt{\frac{2h(2 + 5 \cos^2 \beta)}{5g \cos^2 \beta \sin^2 \theta}} \dots 8$$



圖二：鋼球在有槽斜板上純滾動



圖三：鋼珠槽邊之正向力

鋼珠在有槽斜板上，每一槽邊對珠的正向力 N ，

$$\therefore 2N \cos \beta = mg \cos \theta$$

$$\therefore N = \frac{mg \cos \theta}{2 \cos \beta}, \text{當斜角 } \theta \text{ 大到鋼珠恰要}$$

滑動時，兩邊的摩擦力共

$$f_s = \mu_s \cdot N \times 2$$

$$= 2\mu_s \cdot \frac{mg \cos \theta}{2 \cos \beta} = \frac{2mg \sin \theta}{2 + 5 \cos^2 \beta} \Rightarrow \mu_s = \frac{2 \tan \theta \cos \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta} \dots 9$$

(3) 再加大斜角，滑動兼滾動時，質心速度 $v = \sqrt{2gh - 2\mu_k gL \cos \theta / \cos \beta}$

$$mg \sin \theta - \mu_k N = ma, \quad N = \frac{mg \cos \theta}{\cos \beta} \quad \therefore a = g(\sin \theta - \frac{\mu_k \cos \theta}{\cos \beta})$$

$$v = 0 + at$$

$$t = \frac{\sqrt{2gh - 2\mu_k gL \cos \theta / \cos \beta}}{g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta / \cos \beta)} \dots 0$$

3. 半徑 r 的輪子在水平面上純滾動時，輪緣一點的運動軌跡為旋輪線 (cycloid)。有半徑 R 的鋼珠，在旋輪線製成的曲面上任一點滾至底端的時間均相同，

(1) 圖四所示，鋼珠純滾動時，在距底端 s ，斜角 θ 處， $a = \frac{5}{7} g \sin \theta$ ，

$$\text{當其純滾動且做簡諧運動時 } ma = ks, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

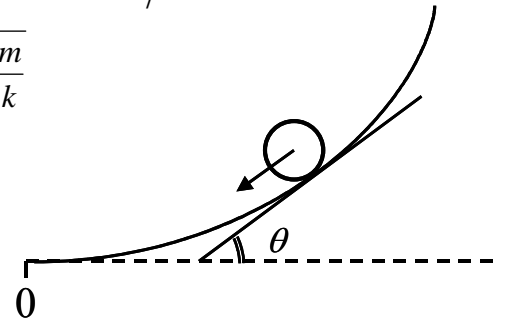
$$\Rightarrow ma = \frac{4\pi^2}{T^2} ms = m \cdot \frac{5}{7} g \sin \theta$$

$$\therefore s = \frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \frac{5}{7} g \sin \theta = \frac{5g}{7\omega^2} \sin \theta$$

$$ds = \frac{5g}{7\omega^2} \cos \theta d\theta \text{ 分成 } dx、dy \text{ 兩分量}$$

$$\begin{cases} dx = ds \cos \theta = \frac{5g}{7\omega^2} \cos^2 \theta d\theta = \frac{5g}{14\omega^2} (1 + \cos 2\theta) d\theta \\ dy = ds \sin \theta = \frac{5g}{7\omega^2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{5g}{14\omega^2} \sin 2\theta d\theta \end{cases}$$

$$\text{積分得 } \begin{cases} x = \frac{5g}{28\omega^2} (2\theta + \sin 2\theta) + C_x \\ y = \frac{5g}{28\omega^2} (1 - \cos 2\theta) + C_y \end{cases}$$



圖四：鋼珠在旋輪線上的運動

取 $C_x=0$ ， $C_y=0$ 且 $2\theta=\phi$

$$\begin{cases} x = \frac{5g}{28\omega^2}(\phi + \sin\phi) = r(\phi + \sin\phi) \cdots q \\ y = \frac{5g}{28\omega^2}(1 - \cos\phi) = r(1 - \cos\phi) \cdots w \end{cases}$$

$$r = \frac{5g}{28\omega^2} \Rightarrow T = 4\pi\sqrt{\frac{7r}{5g}}$$

\therefore 由高 h 處純滾動而下的時間為 $t = \frac{T}{4} = \pi\sqrt{\frac{7r}{5g}}$

(2) 兩旋輪線形成相距 d 的有槽曲面，一鋼珠由高 h 處純滾動而下至底端時間

$$t = \pi\sqrt{\frac{r(2 + 5\cos^2\beta)}{5g\cos^2\beta}} \cdots e$$

我們的製作的曲面 $r=17.6\text{cm}$ ， $d=1.04\text{cm}$ ，用 $R=1.11\text{cm}$ 的鋼珠實驗 $t=0.518\text{s}$

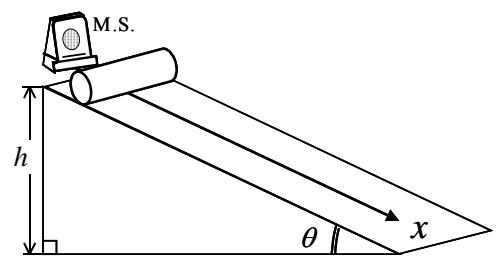
(3) 當鋼珠由滑動時， t 不再是上值，量取其高度 y ，代入 w 量得 ϕ 值， $\phi=2$

θ 得 θ 值再代入 $9 \mu_s = \frac{2 \tan \theta \cos \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}$ 可求出 μ_s 和有槽斜板所得結果做比較。

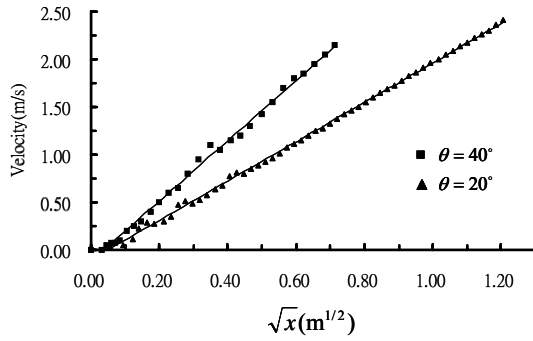
五、實驗步驟及結果：

(一) 鉛柱的實驗：

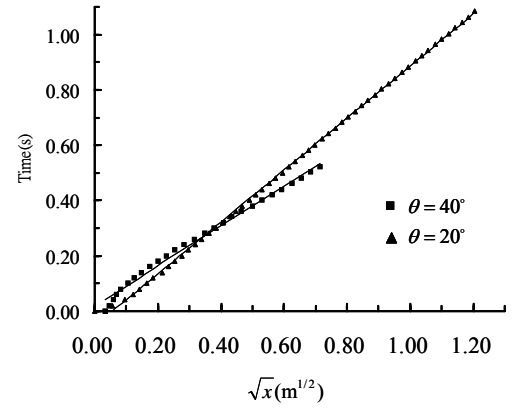
1. 鉛柱放在鉛板上， $\theta=20^\circ$ 由靜止沿 x 軸滾下，利用運動感應器記錄各位置的質心速度 (v) 及時間 (t)。
2. 改 $\theta=40^\circ$ 重作上實驗。
3. 結果如圖六、圖七所示。



圖五：鉛柱的滾動實驗



圖六：鉛柱之 $v - \sqrt{x}$ 關係



圖七：鉛柱之 $t - \sqrt{x}$ 關係

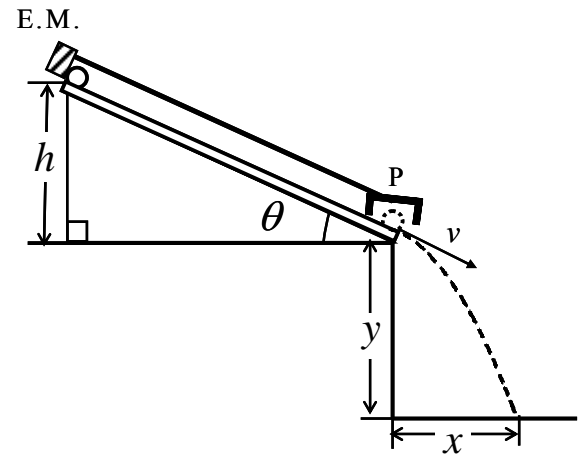
(二) 鋼珠在有槽斜板的滾動：

1. 槽距 $d = 1.04\text{cm}$ 的壓克力有槽斜板長 $L = 150.4\text{cm}$ ，大鋼珠半徑 $R_1 = 1.25\text{cm}$ ，光電計時器的電磁鐵 (E.M.) 吸柱鋼珠，光電閘 P 置於軌道鋼珠出口處，出口處下方 y 、水平距離 x 處，有複寫紙。
2. 按下光電計時器的啓動鈕，可直接由計時器讀出時間 t ；鋼珠在複寫紙下方留下的痕跡 $x = (v \cos \theta)t$ ，
 $-y = (-v \sin \theta)t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$ ，消

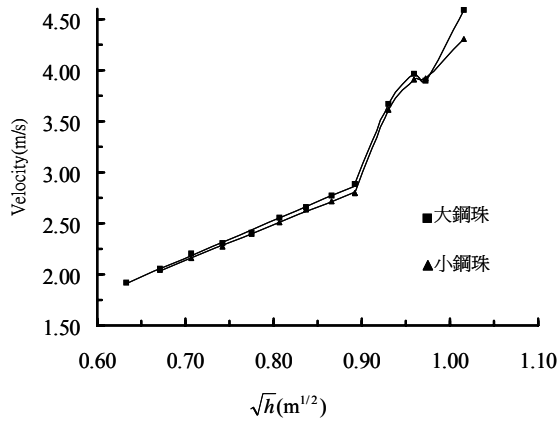
$$\text{去 } t_1 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{gx^2}{2\cos^2 \theta(y - x \tan \theta)}} \quad \text{量 } x、y、$$

$L、h$ 可得 v

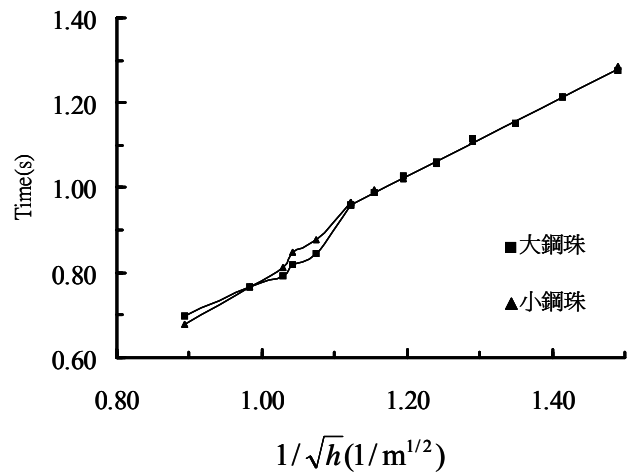
3. 增大 h 做 $v - \sqrt{h}$ 及 $t - 1/\sqrt{h}$ 圖。
4. 改用半徑 $R_2 = 1.11\text{cm}$ 的小鋼珠重做實驗。
5. 圖九、圖十分別為兩鋼珠之 $v - \sqrt{h}$ 及 $t - 1/\sqrt{h}$ 圖。



圖八：鋼珠在有槽斜板的滾動



圖九：鋼珠之 $v - \sqrt{h}$ 關係



圖十：鋼珠之 $t - \sqrt{h}$ 關係

(三) 鋼珠在旋輪線上的運動：

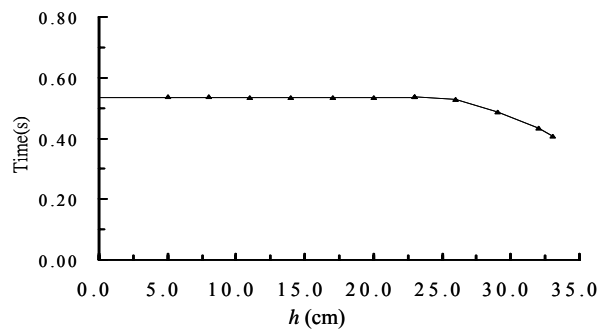
1. 鋼珠由高 h 處滾下，經出口處的光電閘計時器顯示 t 。

2. 加大高度至顯示

$$t' < t \text{。}$$

3. 記錄 t 、 t' 、量 h 。

4. 圖十一為 $t-h$ 關係圖。



圖十一：鋼珠在旋輪線上之 $t-h$ 關係

六、結果及討論：

(一) 鉛柱的實驗結果及討論：

1. 圖六為鉛柱由鉛板上滾下的 $v-\sqrt{x}$ 圖。由參考資料知鉛-鉛之 $\mu_s=0.18$ ，

$\mu_k=0.16$ ，由 $3\mu_s = \frac{1}{3} \tan \theta \Rightarrow \theta = 28.3^\circ$ 以上會有滑動現象

2. $\theta = 20^\circ$ 鉛柱為純滾動， $a = \frac{2}{3}g \sin \theta$ ， $v^2 = 0^2 + 2ax = \frac{4}{3}g \sin \theta x$

$v = \sqrt{\frac{4}{3}g \sin \theta} \cdot \sqrt{x} = 2.114\sqrt{x}$ 圖中 $\theta = 20^\circ$ 斜率 = 2.064 和公認值相吻合

3. $\theta = 40^\circ$ 鉛柱為滑動兼滾動，由圖可看出質仍等加速度運動。

$$a = g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)$$

$$v = \sqrt{2g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)} \cdot \sqrt{x} = 3.19\sqrt{x}$$

圖中 $\theta = 40^\circ$ 之斜率 = 3.160 亦符合公認值。

4. $\theta = 60^\circ$ 時 $v-\sqrt{x}$ 圖不再為直線，因鉛柱已非單純的滾動兼滑動。

5. 圖七為 $t-\sqrt{x}$ 圖

(1) $\theta = 20^\circ$ 純滾動，由 $2t = \sqrt{\frac{3x}{g \sin \theta}} = 0.946\sqrt{x}$ ，實驗結果斜率 = 0.939

(2) $\theta = 40^\circ$ 滑動兼滾動 $t = \sqrt{\frac{2x}{g(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}} = 0.626\sqrt{x}$ ，實驗結果斜率 = 0.722

6. 由 $v-\sqrt{x}$ 、 $t-\sqrt{x}$ 圖均可看出：純滾動或滑動兼滾動的物體，質量中心都等加速度運動。

(二) 圖九、圖十別為鋼珠在有槽壓克力斜面上的 $v-\sqrt{h}$ 及 $t-\sqrt{h}$ 關係圖

1. 大鋼珠的 $\cos \beta = 0.9094$ ，其斜率 3.67 和由 $l_v = \sqrt{\frac{10gh \cos^2 \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}} = 3.67\sqrt{h}$ 亦

甚相同。大鋼珠的 $\cos \beta = 0.8812$ ，其斜率 3.49 和

$l_v = \sqrt{\frac{10gh \cos^2 \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}} = 3.59\sqrt{h}$ 相近。

2. 大鋼珠在 $h = 0.795\text{m}$ 時 $v-\sqrt{h}$ 開始偏離直線， $\theta = 32.3^\circ$ 代入

$$9\mu_s = \frac{2 \tan \theta \cos \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta} = 0.41。$$

$$\text{小鋼珠亦在 } h = 0.795\text{m 處偏離得 } \mu_s = \frac{2 \tan \theta \cos \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta} = 0.40。$$

3. 由兩鋼珠之 $t-\sqrt{h}$ 圖所得結果亦和上述相同。

(三) 圖十一為鋼珠在旋輪線形成的有槽板之 $t-h$ 圖

1. (1) 旋輪線如圖十二所示，半徑

r 的輪上 p 點由 0 點向右純

滾動，線上 $p(x,y)$

$$x = r\phi - r \sin \phi = r(\phi - \sin \phi)$$

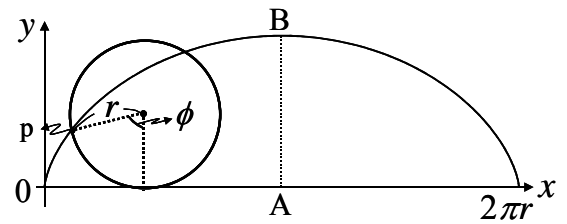
$$y = r(1 - \cos \phi)$$

圖中 p 點恰轉過一周時

$x = 2\pi r$ ，而 B 點為

$x = \pi r$ (p 點轉過半周)

$$\phi = \pi \therefore x = \pi r, y = 2r$$



圖十二：旋輪線

(2) 我們所訂製的旋輪線 $r = 17.6\text{cm}$ ， $2\pi r = 56\text{cm}$ (加上伸出長 2cm 共

60cm 符合科展不超過長度 60cm 的規定)， $\overline{AB} = 35.2\text{cm}$

(3) 將上述旋輪線程式放入電腦控制機器自動在壓克力片切割後，由 \overline{AB} 鋸開，再黏成 $d = 1.04\text{cm}$ 的有槽曲面如圖十三所示。

2. 小鋼珠 $\cos \beta = 0.8812$ 由高 h

處滾至 B 點，圖十一知

$h \leq 25.8\text{cm}$ 時， $t = 0.535$ 秒，

$h > 25.8\text{cm}$ 則 $t' < t$

$$3. \quad t = \pi \sqrt{\frac{r(2 + 5 \cos^2 \beta)}{5g \cos^2 \beta}} = 0.518 \text{ 秒和}$$

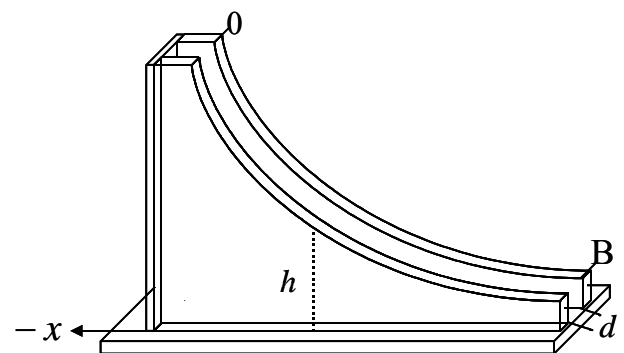
0.535 秒相差 0.017 秒為光電計時器

殘磁的影響。在 $h \leq 25.8\text{cm}$ 時 t 甚為

穩定滿足鋼珠在旋輪線上純滾動有

等時性。

4. $h = 25.8\text{cm}$ ，相當於圖十一中的 $y = 35.2 - 25.8 = 9.4\text{cm} = r(1 - \cos \phi)$ 可得



圖十三：旋輪線曲面

$$\phi = 62.2^\circ = 2\theta \Rightarrow \theta = 31.1^\circ \text{ 代入 } \mu_s = \frac{2 \tan \theta \cos \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta} = 0.39 \text{ 和實驗(二)用壓克}$$

力有槽斜板得到結果相近。

(四) 本實驗所用鋼珠體積很小，運動速度不大，所行距離亦不大，阻力可忽略不計。

七、結論：

1. 本實驗首先用運動感應器偵測圓柱得知再斜面上純滾動或滾動兼滑動時，質量中心均等加速度運動。

2. 鋼珠在有槽斜板上純滾動，質心速度 $v = \sqrt{\frac{10gh \cos^2 \beta}{2 + 5 \cos^2 \beta}}$ ，其中

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{R^2 - d^2/4}}{R}，R, d \text{ 分別為鋼珠的半徑和槽距。滾動兼滑動時}$$

$v = \sqrt{2gh - 2\mu_k gL \cos \theta / \cos \beta}$ ， L 為軌道長度，利用 $v-\sqrt{h}$ 或 $t-\sqrt{h}$ 圖可求得 μ_s 。

3. 鋼珠在有槽旋輪線曲面上純滾動時有等時性，滑動兼滾動時則時間不同，利用 $t-h$ 圖可求得 μ_s 。

八、參考資料：

1. 2004 年國際物理奧林匹亞競賽，國家代表對選訓教材第一冊，物理奧林匹亞國家代表隊選訓工作委員會出版，民國 91 年。
2. R. A. Bachman, "Sphere rolling down a grooved track", Am. J. phys. **53**, 765(1985)
3. Qing-gong Song, "The requirement of a sphere rolling without slipping down a grooved track for the coefficient of static friction", Am. J. phys. **56**, 1145(1988)
4. Myung-hyun Ha, "Development of an apparatus for two-dimensional collision experiment using a cycloidal slide", Am. J. phys. **69**, 1187(2001)