台灣二００五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：最小積包絡現象

得獎獎項：大會獎佳作

學　　校：高雄市立高雄高級中學

作　　者：季康揚、蔣宗廷

評語與建議事項：

本研究極小條件直線之包絡線，並且也探討相對應的立體。

作者簡介

季康揚目前就讀高雄中學三年級.我從小對物理和數學較有興趣.在校也以這兩科表現較爲優異.曾參加教育部基礎科學人才培育計畫,第 43,44 屆高雄市科展,獲得物理科佳作及數學科第二名.2004 年參加在北京舉行得第三屆 APEC 青年科學節獲得優秀獎.平時生活常以聽音樂,看小說,報紙調劑身心.

蔣宗廷,就讀於高雄中學三年級,小時後就對數學充滿著熱誠,在高中數學成績也名列前矛,並參加中小學科展,校內數學科競賽獲得佳績,平常喜歡打打球,彈彈鋼琴來消遣,娛樂身心,也常常閱讀科學,報章雜誌以增進課外知識.

ABSTRACT:

MOTIVE FOR THE RESEARCH:

The research is done out of the curiosity we had when we pondered over the area and the shape a bus door sweeps on the floor when it opens or closes, and thus to discover the graph of the varying line which forms the smallest area so that we attempt to do research on such envelopment phenomena.

OBJECTIVES OF THE RESEARCH:

1. To research the graph of the envelope formed by Line L passing through any point(f(t),g(t)) on a given curve and producing the smallest triangular area with the axises X and Y.
2. To study relations of the tangent points of envelope and its original graph.
3. To study the characteristics of the graph of envelopes.
4. To further explore the curving space and its smallest volume of the envelopment surface.

FINDINGS:

1. The points of envelope determined by the line family f(t)x + g(t)y = sf(t)g(t) ("t" is the parameter).

   $$x=\frac{2(f(t))^2 g'(t)}{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)},\ y=\frac{2(g(t))^2 f'(t)}{g(t)f'(t)-g'(t)f(t)}。$$

2. The point (x, y, z) on the envelopment surface, determined by the plane family F(t,s)：(g(s,t)h(s,t))x+ (f(s,t)h(s,t))y+ (f(s,t)g(s,t))z=3 f(s,t)g(s,t)h(s,t) is

   $$\begin{cases} x=F(s,t)=\dfrac{3f^2(g_s h_t-g_t h_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ y=G(s,t)=\dfrac{3g^2(f_t h_s-f_s h_t)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ z=H(s,t)=\dfrac{3h^2(f_s g_t-f_t g_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \end{cases}$$

3. The envelope produced by the line <f(t), g(t)> = (t, at+b) which forms the smallest area is a parabola.
4. Suppose that the existent parameter t enables (f(t), g(t)) =(F(t),G(t)). So, there is a common tagent line at the point (f(t), g(t)) =(F(t),G(t)) on the curve and the envelope. Then, there exist the maximum and the minimum of the samllest area

   $2\left|f(t)g(t)\right|$ … (Remark: In three dimension, there exist the maximum and the minimum of the tetrachedron volume.)

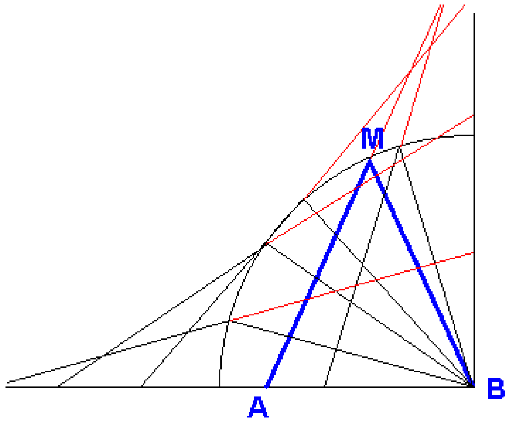
5. Iteration: If there is a common tagent line(plane) of the original curve (surface) Γ and the smallest envelop (surface) Γ' it produced at P, then the Γ、Γ'、Γ'' it produced by Γ will also have the same tagent line (plane) at P. And the smallest envelops continually generated by Γ will continue to have the same tagent line(plane) at P. That is, the envilopment phenomenon of the smallest envelop in two or three dimentions all have the characteristics of iteration.

摘要

研究動機： 思考公車車門開關時在地面上掃過的區域形狀與面積時，發現其中變動的直線爲過定點與座標軸圍成三角形面積最小的直線，我們很好奇，這類圍成最小面積的直線更進一步的包絡現象，所以就動手去嘗試做研究。
研究目的： 一、探討直線 L 過曲線上任意點 P(f(t) , g(t))，當 P 點所在象限與座標軸圍成三角形面積 最小時的包絡線圖形。 二、探討包絡線與其原圖形的切點關係。 三、研究包絡線圖形的特性。 四、進一步探討空間曲面與其最小體積包絡面。
研究過程與方法： 一、以參數式表直線做包絡圖形。 二、做極座標曲線探討其包絡圖形。 三、做各式圓錐曲線探討包絡現象。 四、算出與探討各曲線與包絡線的切點。 五、進一步討論空間中最小積的包絡現象。
研究結果： 一、直線族 f(t)x+g(t)y=2f(t)g(t)（t 爲變數）所決定的包絡線的點 x= $\dfrac{2(f(t))^2 g'(t)}{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)}$,y= $\dfrac{2(g(t))^2 f'(t)}{g(t)f'(t)-g'(t)f(t)}$ 。 二、平面族 F(t,s)：(g(s,t)h(s,t))x+ (f(s,t)h(s,t))y+ (f(s,t)g(s,t))z=3 f(s,t)g(s,t)h(s,t)（s,t 爲變數）所決定的包絡面Ω上的點(x,y,z) $\begin{cases} x=F(s,t)=\dfrac{3f^2(g_s h_t-g_t h_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ y=G(s,t)=\dfrac{3g^2(f_t h_s-f_s h_t)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ z=H(s,t)=\dfrac{3h^2(f_s g_t-f_t g_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \end{cases}$ 三、直線〈f(t), g(t)〉= (t , at+b)其最小積包絡線爲拋物線。 四、若存在參數 t 使曲線函數（f(t),g(t)）=包絡線函數（F(t),G(t)），則曲線與包絡線在（f(t),g(t)）=（F(t),G(t)）處有共同的切線，即兩曲線在此相切，且此時最小面積 $2\lvert f(t)g(t)\rvert$ 有極大值或極小值。(註：若爲三度空間則四面體最小體積有極大或極小值) 五、迭代性：原始曲線(面)Γ與其所產生的最小積包絡曲線(面)Γ’ 若切於 P 點，則再由包絡曲線Γ’ 所產生的最小積包絡曲線(面)Γ” ，Γ、Γ’ 、Γ” 會切於同一點 P，且不斷迭代所產生的最小積包絡線(面)會層層相切於同一點。即在二度空間與三度空間的最小積包絡包絡現象都有迭代性。
參考書目： 1.洪維恩 Mathematica 入門指引 松崗電腦圖書資料股份有限公司。 2.南一版 基礎數學第一冊、第四冊。

壹、　研究動機

搭公車時很好奇想了解公車車門開關時在地面上掃過的區域形狀與面積。一般公車車門開關的模式如右：



B 是樞紐，M 是兩片等寬門板 $\overline{AM},\overline{BM}$ 的接點，A 點固定在直線上移動，門的開闔就是等腰三角形 AMB 的頂點 M 來回在 $\frac{1}{4}$ 圓弧上移動。在開闔的過程中門板 $\overline{AM}$ 所圍出的邊界即 $\overline{AM}$ **所決定的包絡線**就是公車車門開關時在地面上掃過的區域形狀。M點繞圓一周所成的包絡線竟然是擺線 $(\frac{x}{2})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{2})^{\frac{2}{3}}=1$。當我們檢視 $\overleftrightarrow{AM}$ 時發現：若M座標爲(a,b)則 $\overleftrightarrow{AM}$ 方程式爲bx+ay=2ab即爲 $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$，恰是高一時曾教過的過一定點M(a,b)之直線在M點所在象限與座標軸圍成的三角形有最小面積時的直線。我們很好奇，這類圍成最小面積的直線更進一步的包絡現象，所以就動手去嘗試做研究。

貳、　預備研究

一、何謂最小積包絡線（面）

1. 過一定點 P(a,b)之直線在 P 點所在象限與座標軸圍成的三角形有最小面積時，此直線方程式爲 $\frac{x}{2a}+\frac{y}{2b}=1$，即 bx+ay=2ab。我們稱它爲最小面積直線，對任一連續曲線 Γ，由 Γ 上任一點的最小面積直線所形成的包絡線定義爲 Γ 的**最小面積包絡線**。
2. 過空間中一定點 P(a,b,c)之平面在 P 點所在卦限與座標平面圍成的四面體有最小體積時，此平面方程式爲 $\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}+\frac{z}{3c}=1$，即 bcx+acy+abz=3abc。我們稱它爲最小體積平面，對任一連續曲面 Γ，由 Γ 上任一點的最小體積平面所形成的包絡曲面定義爲 Γ 的**最小體積包絡面**。

二、包絡線求法的原理

以一組直線 $(a\cos\theta)x+(b\sin\theta)y=ab \quad 0\le\theta\le 2\pi$ 爲例子，我們現在要求這組直線所圍出來的包絡線。那麼，包絡線上的點可以表示爲以下聯立方程式的解：

$$\begin{cases}(a\cos\theta)x+(b\sin\theta)y=ab\text{.............................(1)}\\ a\cos(\theta+\Delta)x+b\sin(\theta+\Delta)y=ab\text{....................(2)}\end{cases}$$ 其中 $\Delta\to 0$

我們設(3)式爲 $\frac{1}{\Delta}\times((2)-(1))$ 則將(1)(3)兩式解聯立，其解與(1)(2)兩式聯立相同。

我們算出(3)式爲 $a(\frac{\cos(\theta+\Delta)-\cos\theta}{\Delta})x+b(\frac{\sin(\theta+\Delta)-\sin\theta}{\Delta})x=0$

但是這裡$\Delta \to 0$，所以(3)式就是 $a(\cos\theta)'x+b(\sin\theta)'y=0$

即$(-a\sin\theta)x+(b\cos\theta)y=0$ .... (3)

我們解(1)(3)兩式得到$x=b\cos\theta \quad y=a\sin\theta$ 是一個橢圓形的圖形

由此觀之，若是要求一組直線 $A(\theta)x+B(\theta)y=C(\theta) \quad 0\le\theta\le 2\pi$ 所圍成的包絡線（其中$A(\theta),B(\theta)$和$C(\theta)$是θ的函數）

那麼，使用同樣的原理來求解，也可以得到下列的一組聯立方程式：

$$\begin{cases} A(\theta)x+B(\theta)y=C(\theta) \text{..}(1) \\ (\dfrac{A(\theta+\Delta)-A(\theta)}{\Delta})x+(\dfrac{B(\theta-\Delta)-B(\theta)}{\Delta})y=(\dfrac{C(\theta+\Delta)-C(\theta)}{\Delta}) \text{.......................}(2) \end{cases}$$

當然$\theta\to 0$，所以(2)式就相當於$A'(\theta)+B'(\theta)=C'(\theta)$ .... (2)

也就是原來方程式的各項係數對θ微分的結果。

參、 研究目的

一、 探討曲線$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$的最小面積包絡線圖形。

二、 探討包絡線與其原圖形的切點關係。

三、 研究包絡線圖形的特性。

四、 進一步探討空間曲面與其包絡面

肆、 研究器材

紙、筆、電腦、軟體 Mathematica

伍、 研究過程與方法

一、曲線Γ參數式(g(t) , f(t))的最小積包絡線:

直線 L 過曲線$\Gamma:\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$上任意點 P(f(t) , g(t))在 P 點所在象限與座標軸圍成三角形面積最小，則取 L：g(t) x+ f(t)y=2f(t)g(t)。（L:$\dfrac{x}{2f(t)}+\dfrac{y}{2g(t)}=1$）此時**最小面積爲**$2\left|f(t)g(t)\right|$

由直線族 g(t) x+ f(t)y=2f(t)g(t)（t 爲變數）所決定的包絡線的點(x , y)

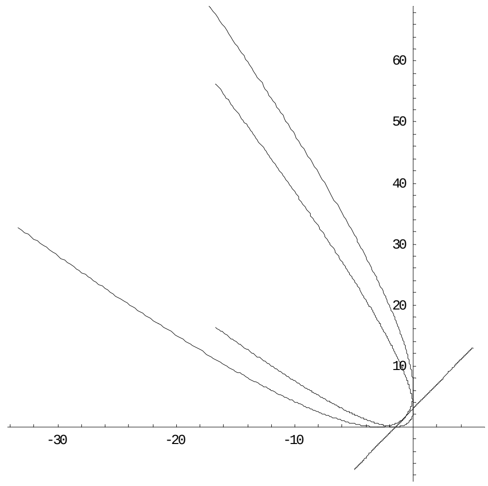
滿足：$\begin{cases} g(t)x+f(t)y=2f(t)g(t) \\ g'(t)x+f'(t)y=2(f'(t)g(t)+f(t)g'(t)) \end{cases}$ 解得$\begin{cases} x=\dfrac{2(f(t))^2g'(t)}{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)}(=\dfrac{2g'(t)}{(\dfrac{g(t)}{f(t)})'}) \\ y=\dfrac{2(g(t))^2f'(t)}{g(t)f'(t)-g'(t)f(t)}(=\dfrac{2f'(t)}{(\dfrac{f(t)}{g(t)})'}) \end{cases}$ （*）

性質一：參數曲線Γ： $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ **的最小積包絡線為** $\begin{cases} x = \dfrac{2(f(t))^2 g'(t)}{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)} (= \dfrac{2g'(t)}{(\dfrac{g(t)}{f(t)})'}) \\ y = \dfrac{2(g(t))^2 f'(t)}{g(t)f'(t) - g'(t)f(t)} (= \dfrac{2f'(t)}{(\dfrac{f(t)}{g(t)})'}) \end{cases}$

1. 直線y=ax+b的最小積包絡線：取直線(t , at+b)即f(t)=t，g(t)=at+b（ab≠0）代入*式的解

得：$\begin{cases} x = -2\dfrac{a}{b}t^2 \\ y = \dfrac{2(at+b)^2}{b} \end{cases}$ 消去參數t得$a^2x^2+2axy+y^2+4abx-4by+4b^2=0$（ab≠0 時表一拋物線）

與原直線y=ax+b相切於$(\dfrac{-b}{2a},\dfrac{b}{2})$爲兩截距的中點。原式爲拋物線



$$\frac{|x-ay|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{(x+\frac{2ab}{a^2+1})^2 + (y-\frac{2b}{a^2+1})^2}$$

$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{b}t^2 \\ y = \dfrac{(at+b)^2}{b} \end{cases}$ 表一拋物線對稱軸爲

y=–ax+$(\dfrac{1-a^2}{1+a^2})$ b，準線 x–ay=0（過原點），焦點$(\dfrac{-ab}{1+a^2},\dfrac{b}{1+a^2})$在原直線 y=ax+b 上。

原式即$\dfrac{|x-ay|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{(x+\dfrac{ab}{a^2+1})^2 + (y-\dfrac{b}{a^2+1})^2}$ 化簡得 $a^2x^2+2axy+y^2+2abx-2by+b^2=0$

其頂點$(\dfrac{-a^3b}{(1+a^2)^2},\dfrac{b}{(1+a^2)^2})$，正焦弦長$\dfrac{4|ab|}{\sqrt{(a^2+1)^3}}$，且與 x 軸切於$(-\dfrac{b}{a},0)$，與 y 軸切於(0,b)。（即直線 y=ax+b 與座標軸的交點）（如右圖）

結論 1：一直線（不過原點）的最小積包絡線為一拋物線。

再取曲線(f(t) , g(t))其中 $f(t) = -\dfrac{a}{b}t^2$, $g(t) = \dfrac{(at+b)^2}{b}$ 代入*式的解得：

(A)$\begin{cases} x = 2(-\dfrac{a}{b})^2 t^3 \\ y = 2(\dfrac{1}{b})^2 (at+b)^3 \end{cases}$ 曲線(A)與原曲線交於 t=0 或$t = -\dfrac{b}{a}$，即點(0 , b)、$(-\dfrac{b}{a},0)$

取曲線(f(t) , g(t))其中 $f(t) = (-\dfrac{a}{b})^2 t^3$, $g(t) = (\dfrac{1}{b})^2 (at+b)^3$ 代入*式的解得：

(B) $\begin{cases} x = 2(-\dfrac{a}{b})^3 t^4 \\ y = 2(\dfrac{1}{b})^3 (at+b)^4 \end{cases}$ 曲線(B)與曲線(A)交於 t=0 或 $t=-\dfrac{b}{a}$ ，即點(0 , b)、 $(-\dfrac{b}{a},0)$

似乎有迭代的規則性。(**有層層包絡的現象**)

2. 取曲線(t , t^r)即f(t) =t，g(t) =t^r（r≠1）代入上式的解得：

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2r}{1-r}t \\ y = \dfrac{2}{1-r}t^r \end{cases}$$

(當 r=–1 所取曲線(t , $\dfrac{k}{t}$)為**等軸雙曲線** xy=k，**其包絡線為本身**。)

3. 極座標曲線的包絡線：

r=P(θ)上任意點 (P(θ)cos θ , P(θ)sin θ)

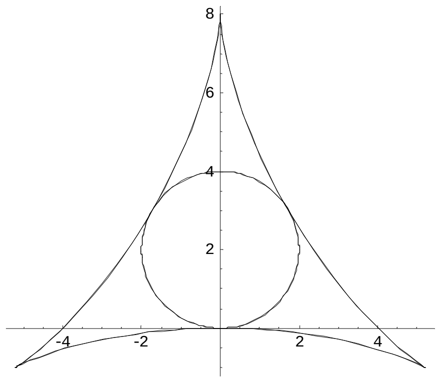
即 f(θ)= P(θ)cos θ ，g(θ)= P(θ)sin θ

代入*式的解得：$\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(P(\theta)\sin\theta)' \\ y = -2\sin^2\theta(P(\theta)\cos\theta)' \end{cases}$(＊＊)

結論 2：極座標曲線 r=P(θ)的包絡線為 $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(P(\theta)\sin\theta)' \\ y = -2\sin^2\theta(P(\theta)\cos\theta)' \end{cases}$

(1).曲線 r= P(θ)=4sin θ （圓），代入(＊＊)式得：

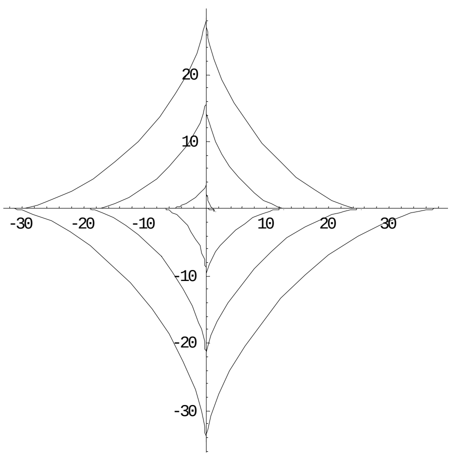
$\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(4\sin 2\theta) \\ y = -2\sin^2\theta(4\cos 2\theta) \end{cases}$ 其圖形與曲線 r=4sin θ 並列為圖右

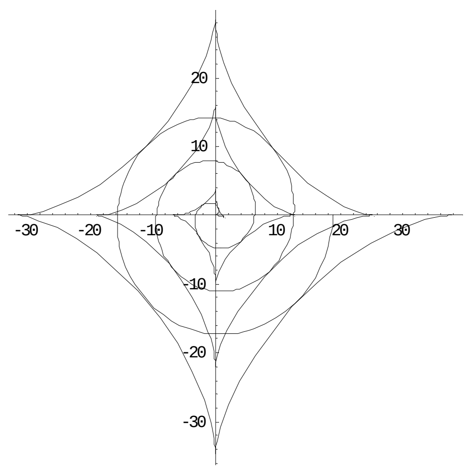


(2).曲線 r= P(θ)= θ （螺線），代入(＊＊)式得：

$\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(\sin\theta+\theta\cos\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(\theta\sin\theta-\cos\theta) \end{cases}$ 其圖形與曲線 r= θ 並列為圖右：

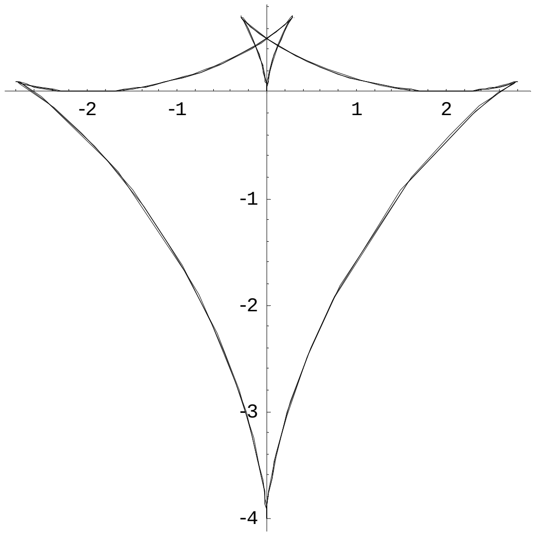
包絡線如圖下：

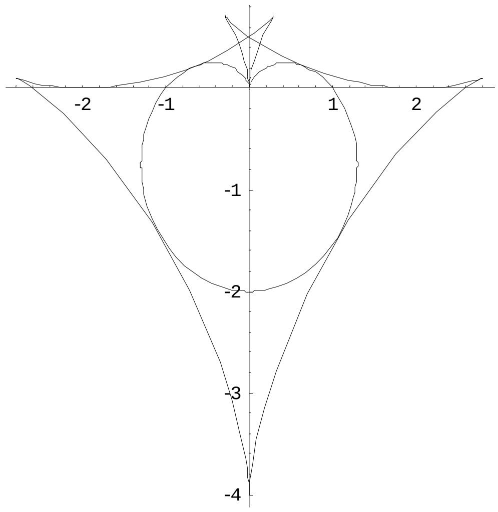




(3).①曲線 r= P(θ)=1-sin θ （心臟線一），代入(＊＊)式得：$\begin{cases} x=2\cos^2\theta(\cos\theta-\sin 2\theta) \\ y=2\sin^2\theta(\sin\theta+\cos 2\theta) \end{cases}$ 其圖形

與曲線 r=1-sin θ 並列為右下圖，包絡線如圖下：

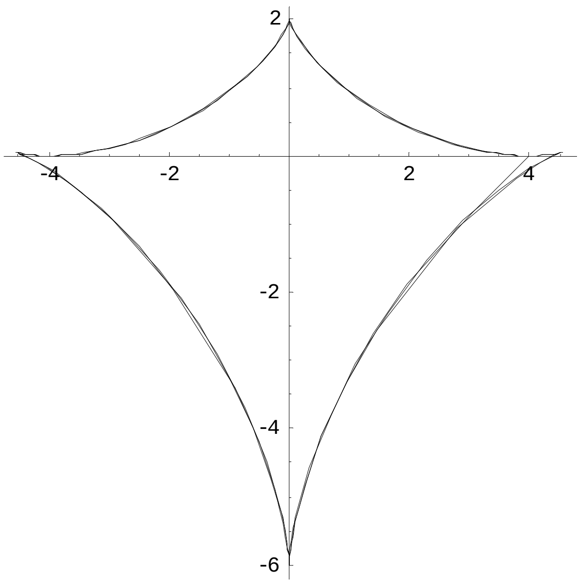


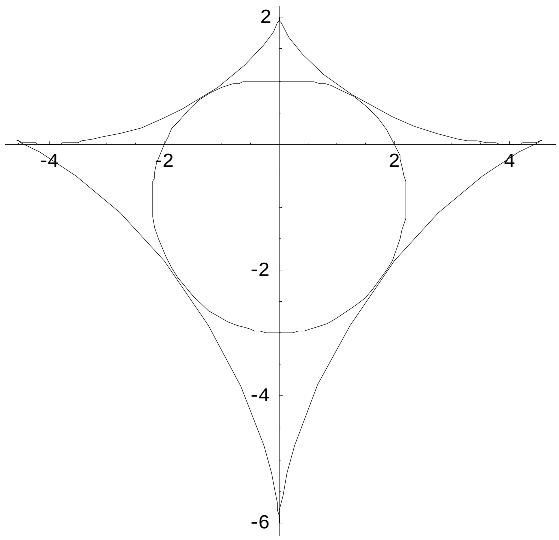


② 曲線 r= P(θ)=2-sin θ （心臟線二），代入(＊＊)式得：

$\begin{cases} x=2\cos^2\theta(2\cos\theta-\sin 2\theta) \\ y=2\sin^2\theta(2\sin\theta+\cos 2\theta) \end{cases}$ 其圖形與曲線 r=2-sin θ 並列為圖右下

包絡線如圖下：

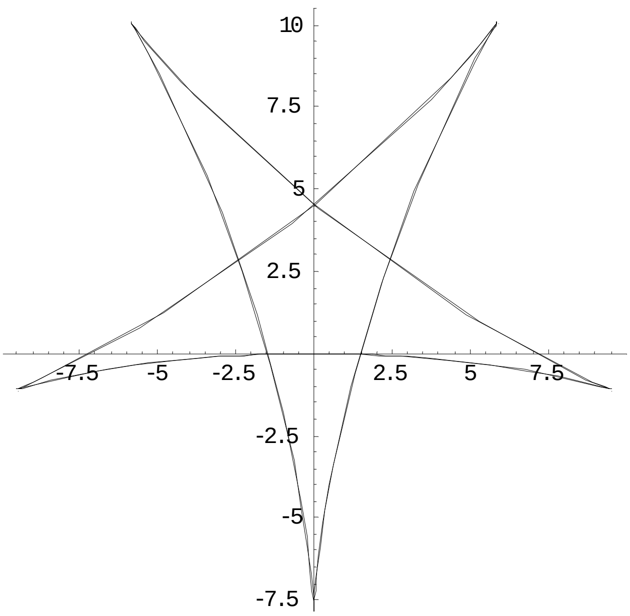


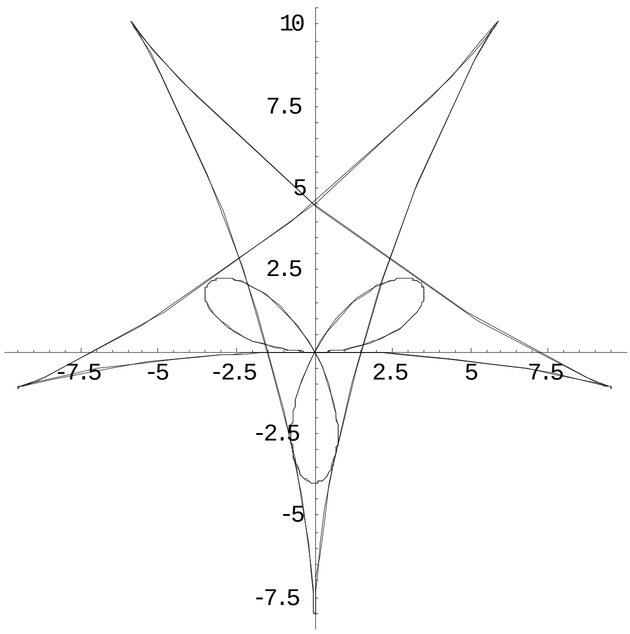


(4). 曲線 r= P(θ)=4sin3 θ （三瓣玫瑰線），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = 4\cos^2\theta(4\sin 4\theta - 2\sin 2\theta) \\ y = -4\sin^2\theta(4\cos 4\theta + 2\cos 2\theta) \end{cases}$$

其圖形與曲線 r=4sin3 θ 並列為右下圖，包絡線如下圖：

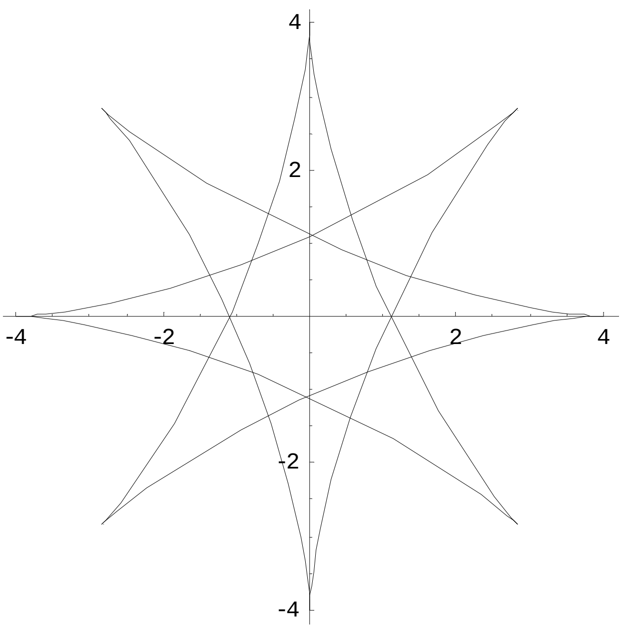


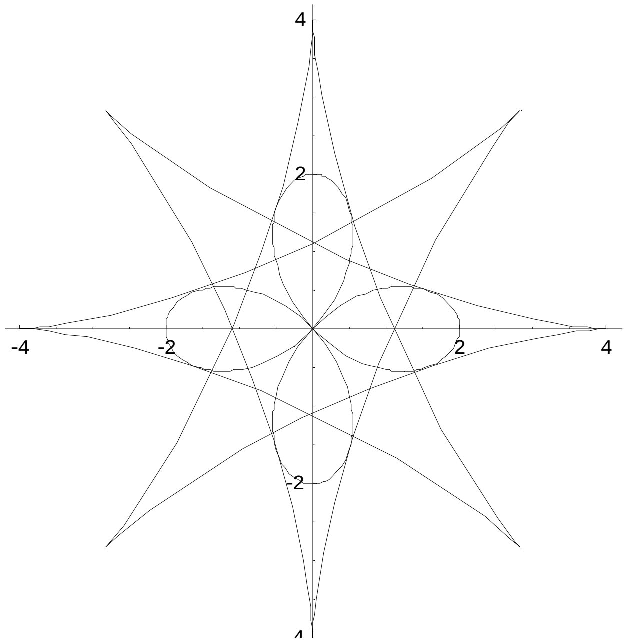


(5). 曲線 r= P(θ)=2cos2 θ （四瓣玫瑰線），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(3\cos 3\theta - \cos\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(3\sin 3\theta + \sin\theta) \end{cases}$$

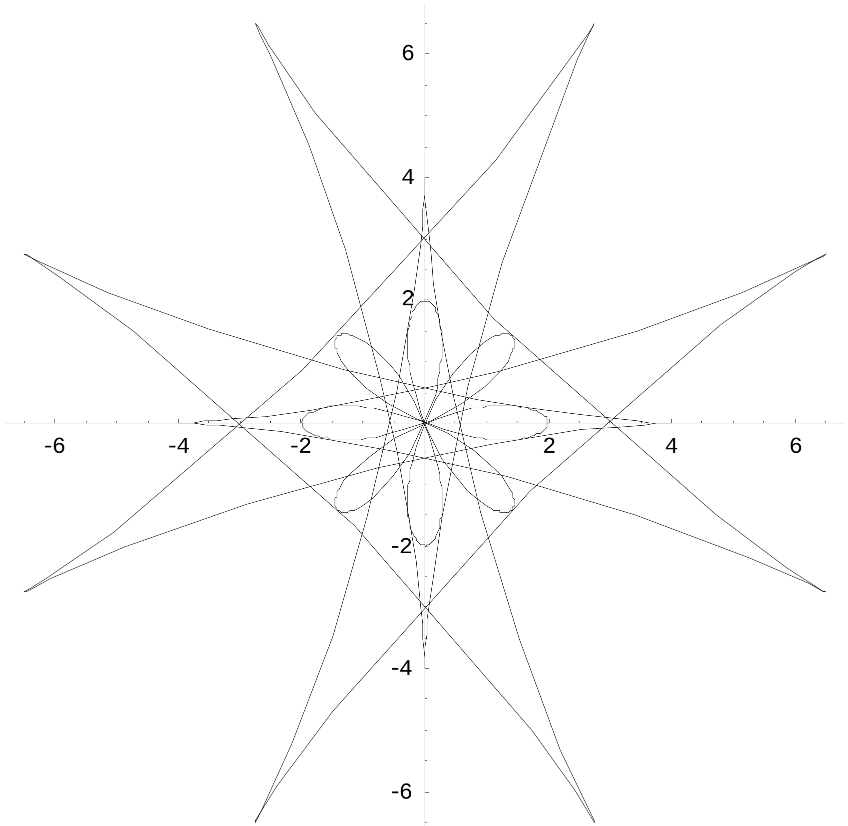
其圖形與曲線 r=2cos2 θ 並列為右下圖，包絡線如下圖：

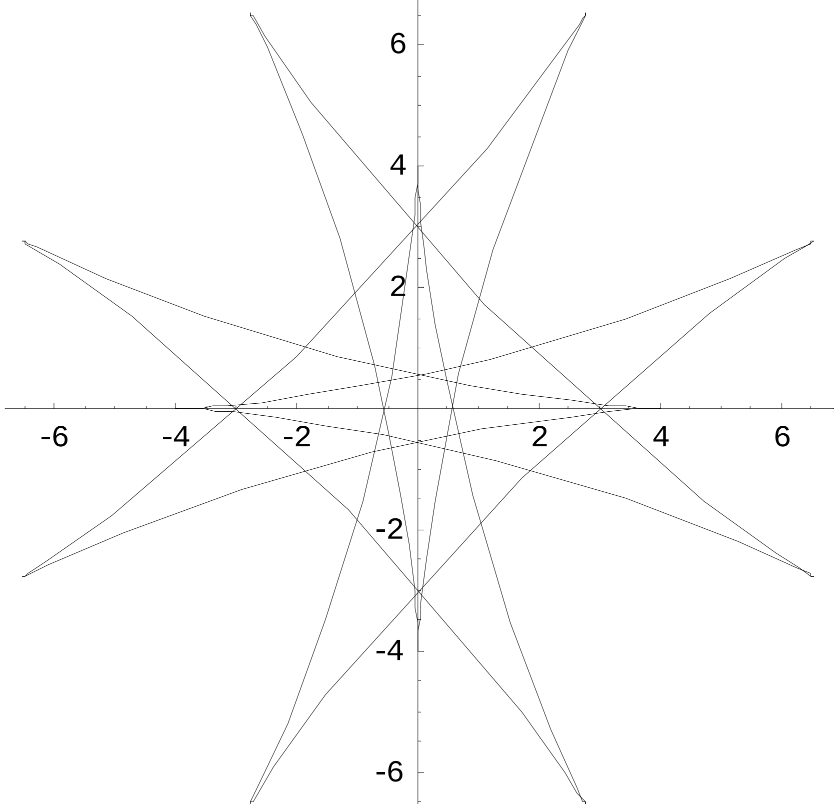




(6). 曲線 r= P(θ)=2cos4 θ （八瓣玫瑰線），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(5\cos 5\theta - 3\cos 3\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(3\sin 3\theta + 5\sin 5\theta) \end{cases}$$ 其圖形與曲線 r=2cos4 θ 並列爲圖下圖：

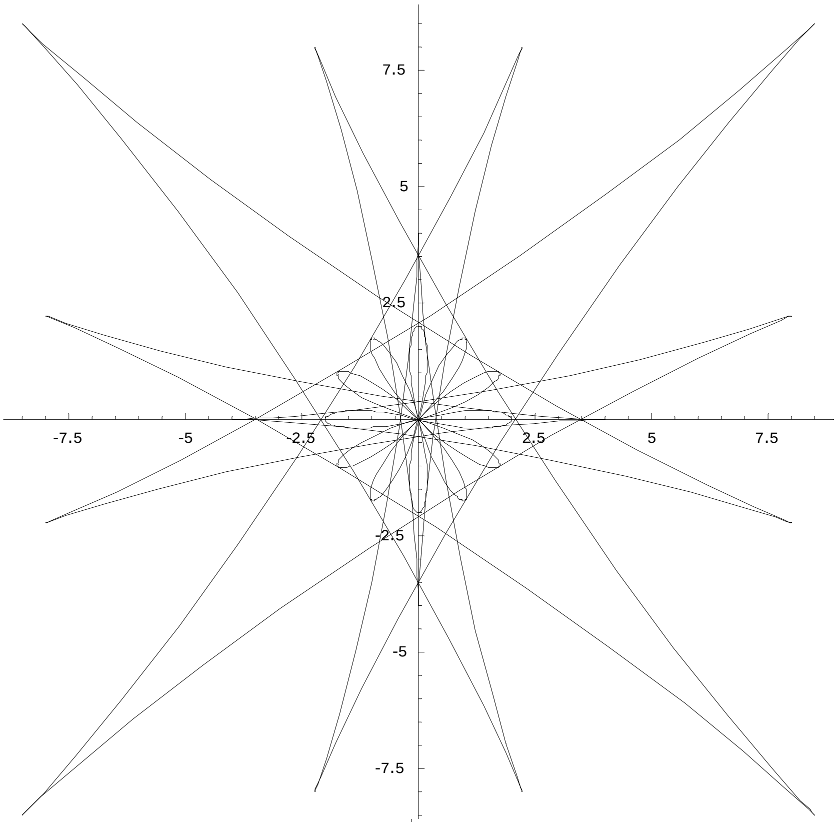


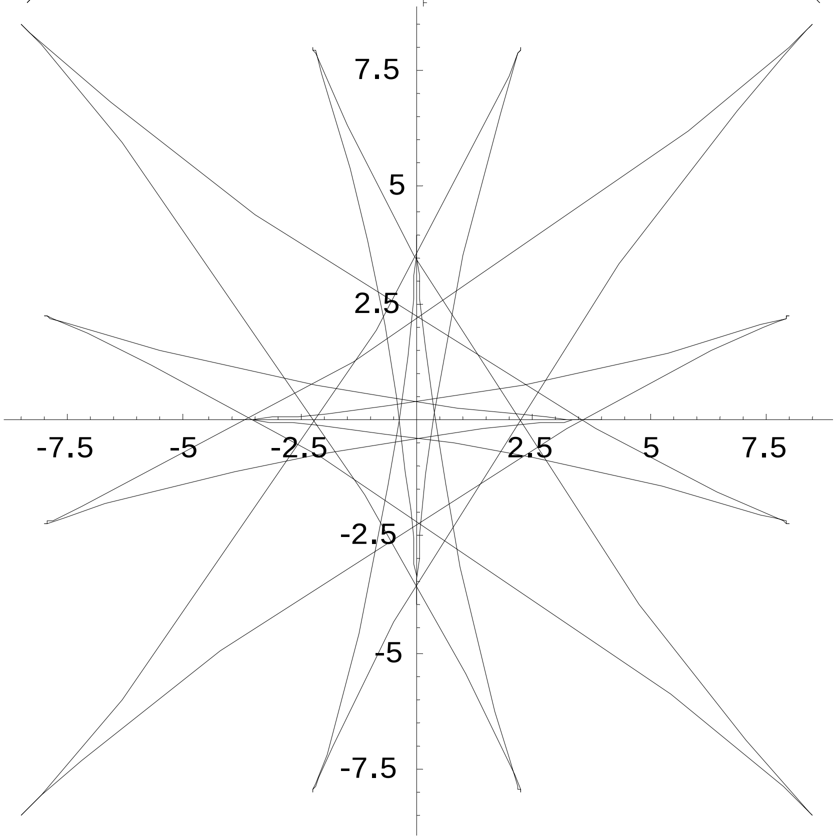


包絡線

(7). 曲線 r= P(θ)=2cos6 θ （十二瓣玫瑰線），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(7\cos 7\theta - 5\cos 5\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(7\sin 7\theta + 5\sin 5\theta) \end{cases}$$ 其圖形與曲線 r=2cos6 θ 並列為下圖：

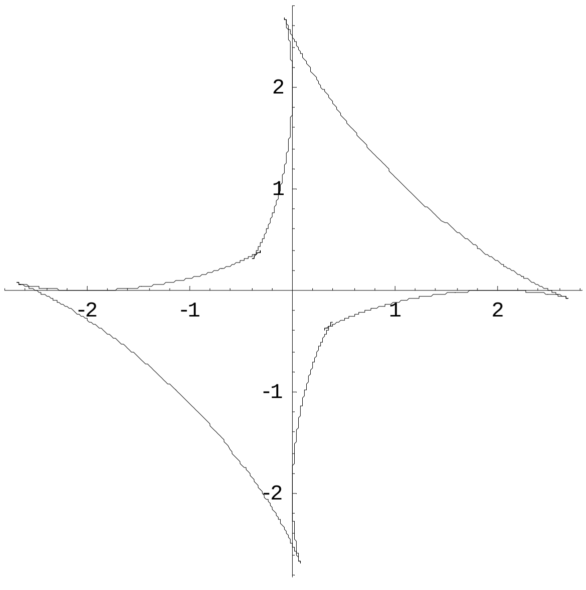


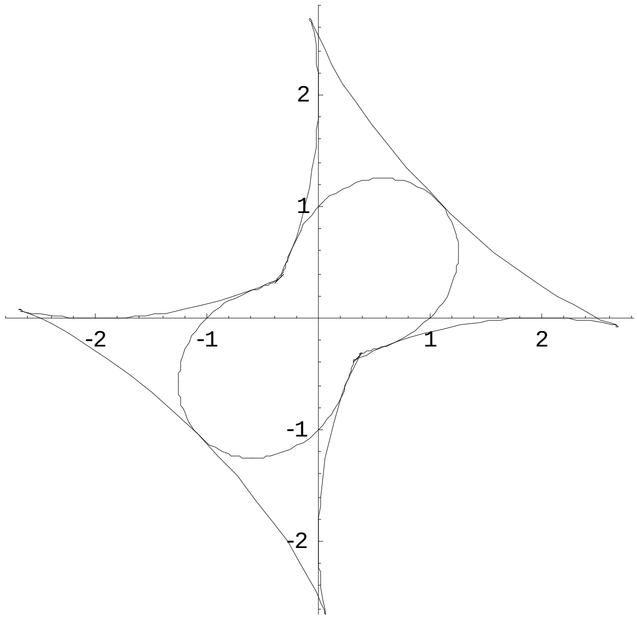


包絡線

(8). 曲線 r= P(θ)=sin θ cos θ +1（形狀如花生殼），代入(＊＊)式得：

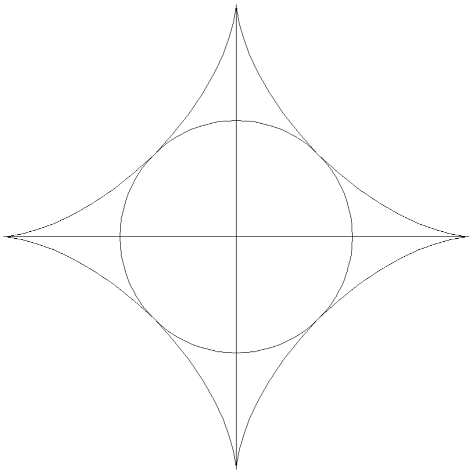
$\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(3\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta + \cos\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(3\sin^2\theta\cos\theta + \sin\theta - \cos\theta) \end{cases}$ 其圖形與曲線 r= sin θ cos θ +1 並列爲爲右下圖，包絡線如下圖：





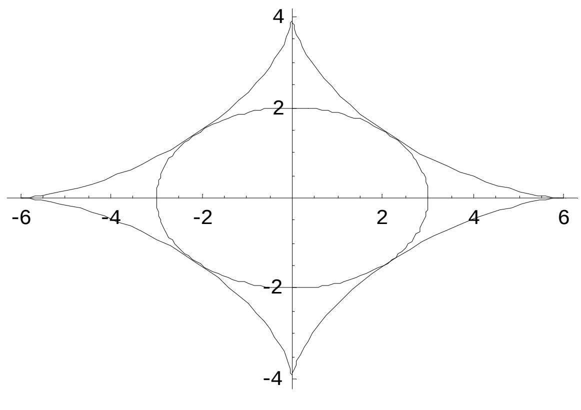
(9)單位圓：$\mathbf{x^2 + y^2 = 1}$；

包絡線：$\begin{cases} x = 2\cos^3\theta \\ y = 2\sin^3\theta \end{cases}$ $\therefore (\frac{x}{2})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{2})^{\frac{2}{3}} = 1$ 如右圖

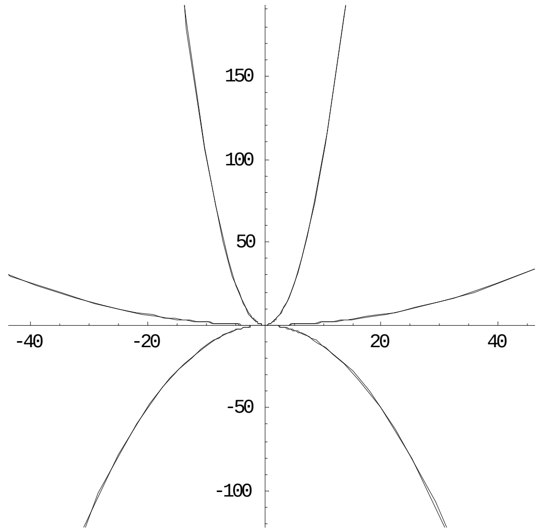


(10).橢圓：(1) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

包絡線：$\begin{cases} x = 6\cos^3\theta \\ y = 4\sin^3\theta \end{cases}$ $\therefore$ $(\frac{x}{6})^{\frac{2}{3}} + (\frac{y}{4})^{\frac{2}{3}} = 1$



(11).拋物線：$\mathbf{y = x^2}$



包絡線：$y=-\dfrac{x^2}{8}$　如右圖

以 $y=-\dfrac{x^2}{8}$ 迭帶

得包絡線：$y=\dfrac{x^2}{64}$ 並列如右圖：

（以 $y=\dfrac{x^2}{64}$ 繼續迭帶得包絡線：$y=-\dfrac{x^2}{512}\cdots$）

二、包絡線與其原曲線的切點關係

1. 極坐標上任意點（x(θ) , y(θ)）的切線斜率爲 $\dfrac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$

2. 參數曲線上任意點（f(t), g(t)）的切線斜率爲 $\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

3. 參數曲線（f(t) , g(t)）所對應的包絡線爲

（F(t) , G(t)）$=\left(\dfrac{2(f(t))^2 g'(t)}{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)}\right.$ ， $\left.\dfrac{2(g(t))^2 f'(t)}{g(t)f'(t)-g'(t)f(t)}\right)$。

包絡線上任意點（F(t) , G(t)）的切線斜率爲 $\dfrac{G'(t)}{F'(t)}=-\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

（∵包絡線上以（G(t) , F(t)）爲切點的切線爲 g(t) x+ f(t)y=2f(t)g(t)）

4. 若存在參數 t_0 使（$f(t_0)$, $g(t_0)$）=（$F(t_0)$, $G(t_0)$）即

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(f(t))^2 g'(t)}{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)}=f(t)\cdots\cdots(1) \\ y=\dfrac{2(g(t))^2 f'(t)}{g(t)f'(t)-g'(t)f(t)}=g(t)\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

有解 t_0。由(1)、(2)分別消去f(t)；g(t)（f(t)=0 或g(t)=0 時直線g(t) x+ f(t)y=2f(t)g(t)與座標軸圍不成三角形）得

$$\begin{cases} x=2f(t)g'(t)=f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\cdots\cdots(1) \\ y=2g(t)f'(t)=g(t)f'(t)-g'(t)f(t)\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

⇒f(t)g’(t)+f’(t)g(t)=0 即 t_0 滿足 $-\dfrac{g(t)}{f(t)}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}\Rightarrow f(t)g'(t)+f'(t)g(t)=0$ 即 [f(t)g(t)]’=0，表示曲線與包絡線在（$f(t_0)$, $g(t_0)$）=（$F(t_0)$, $G(t_0)$）處有共同的切線（∵切線斜率相等 $\dfrac{G'(t_0)}{F'(t_0)}=-\dfrac{g(t_0)}{f(t_0)}=\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$），即兩曲線在此相切，且此時最小面積 $2|f(t)g(t)|$ 有極大值或極小值（∵[f(t)g(t)]’=0）。由上述可得

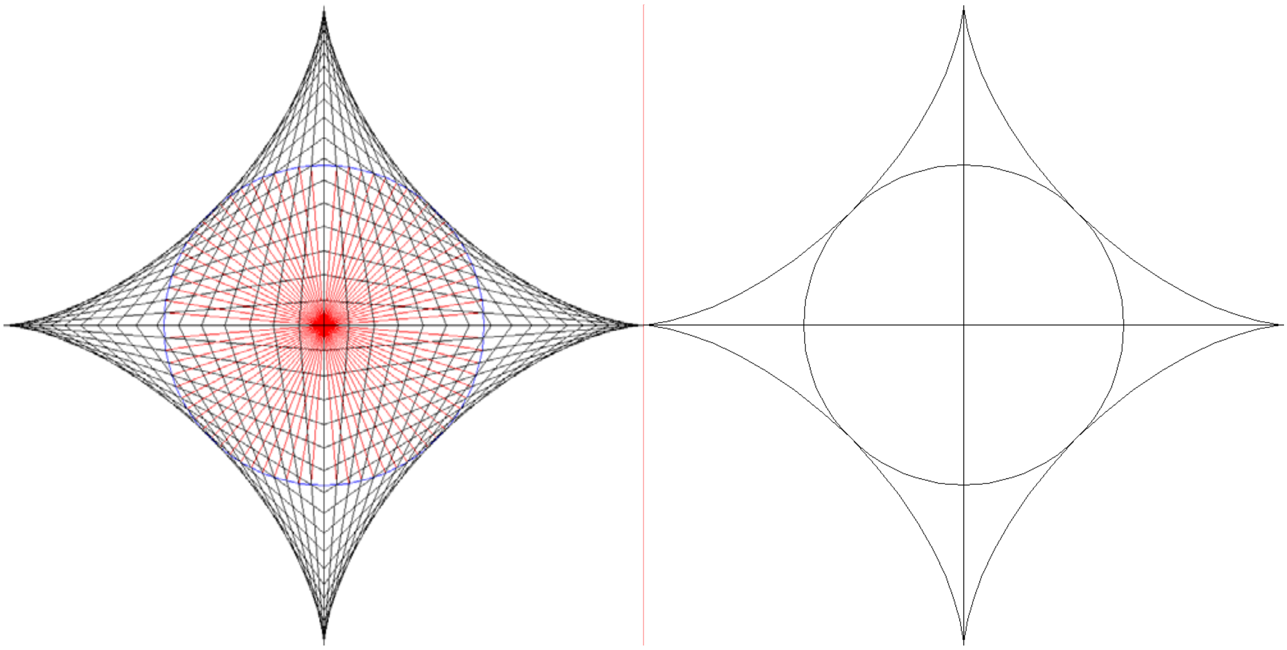
性質二：曲線與包絡線在（$f(t_0)$，$g(t_0)$）=（$F(t_0)$，$G(t_0)$）處有共同的切線，即兩曲線在此相切，且此時最小面積 $2|f(t)g(t)|$ 有極大值或極小值

5. 故極坐標曲線(P(θ)cos θ ，P(θ)sin θ ）與所對應的包絡線 $(2\cos^2\theta(P(\theta)\sin\theta)',-2\sin^2\theta(P(\theta)\cos\theta)')$ 的切點滿足：

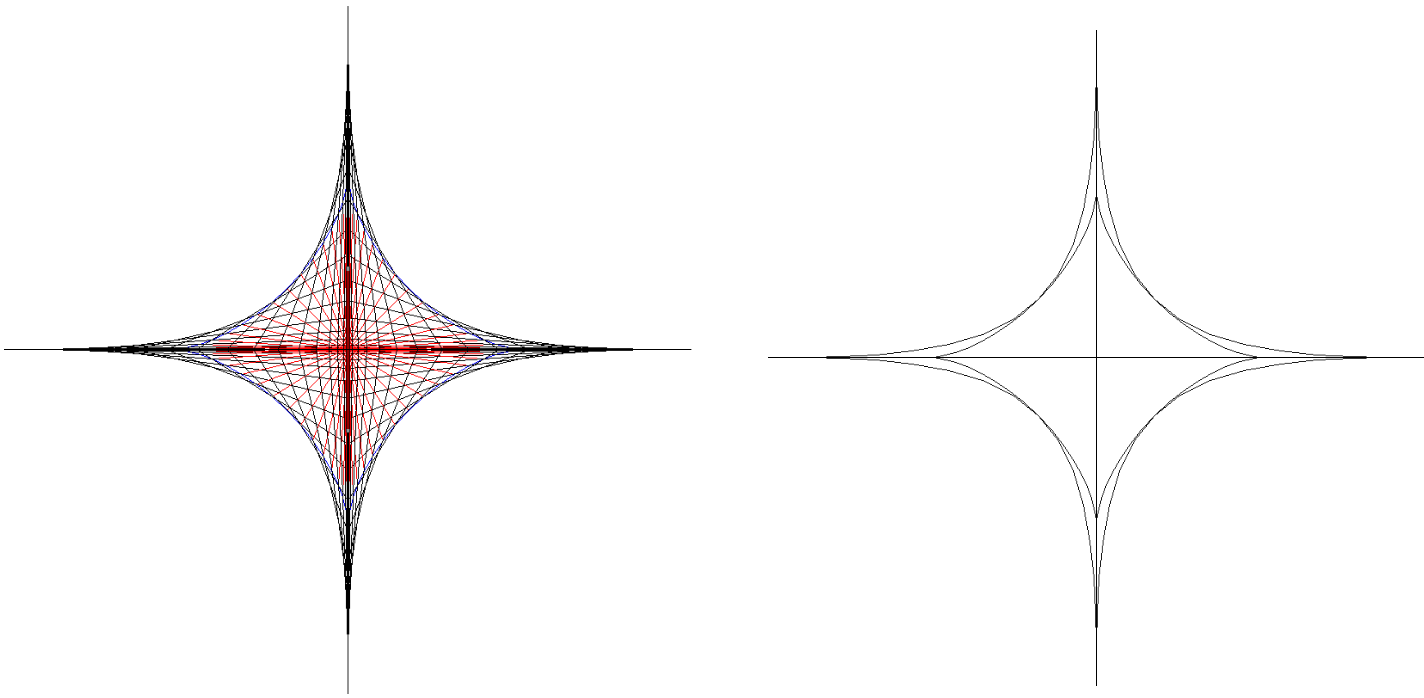
$$\begin{cases} 2\cos^2\theta(P(\theta)\sin\theta)'=P(\theta)\cos\theta \\ -2\sin^2\theta(P(\theta)\cos\theta)'=P(\theta)\sin\theta \end{cases}$$ 解得 $\dfrac{P(\theta)}{P'(\theta)}=-\tan 2\theta$ 。

三、最小積包絡線的迭代現象：

1.參數曲線 $(\cos\theta,\sin\theta)$（圓）⇒ 最小積包絡線 $(2\cos^3\theta,2\sin^3\theta)$



參數曲線 $(\cos^3\theta,\sin^3\theta)\Rightarrow$ 最小積包絡線 $(2\cos^5\theta,2\sin^5\theta)$



結論 3. 參數曲線 $(\cos^n\theta, \sin^n\theta)$ 之最小積包絡線為 $(2\cos^{n+2}\theta, 2\sin^{n+2}\theta)$

例：

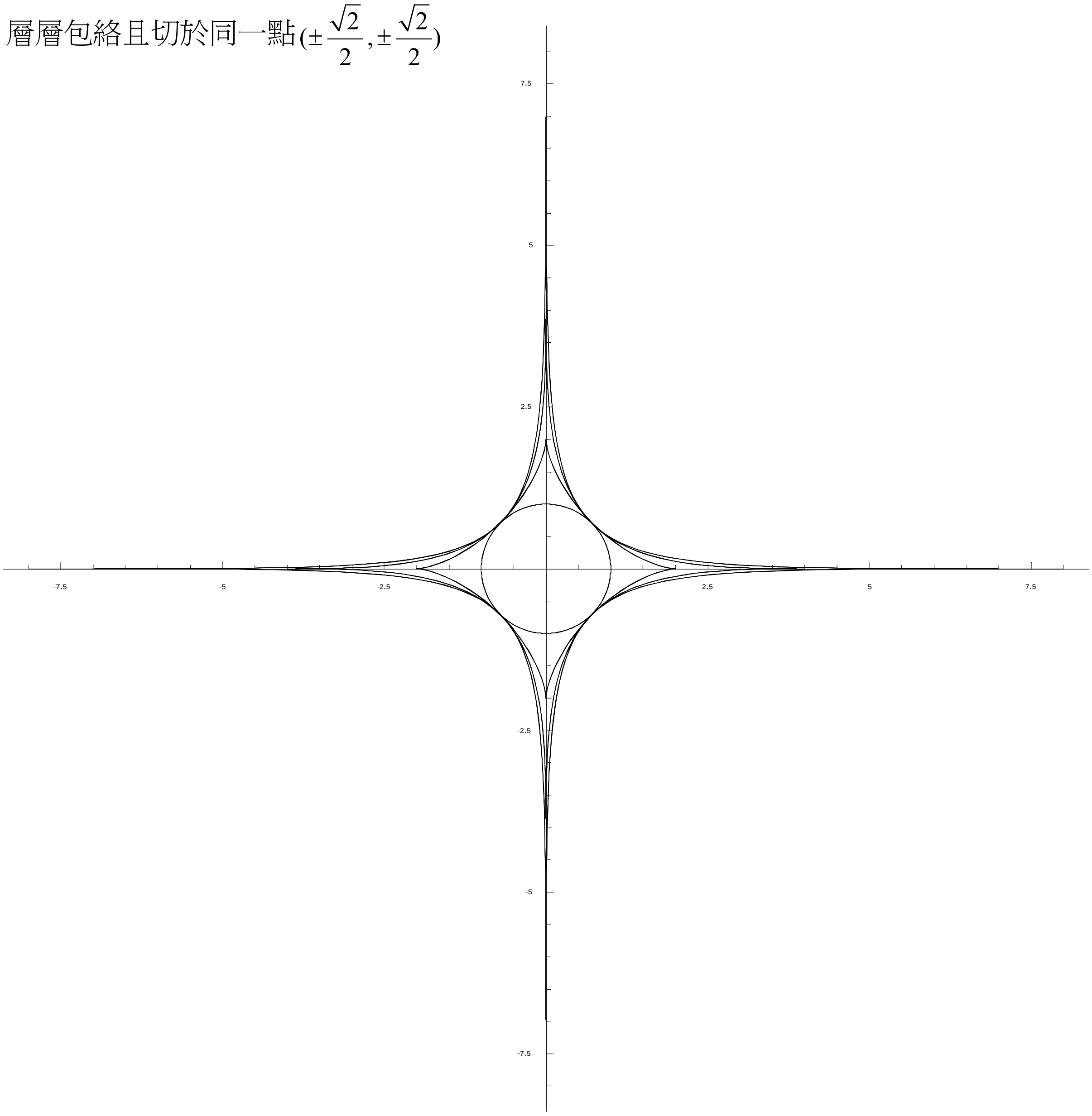
$(\cos\theta, \sin\theta) \Rightarrow (2\cos^3\theta, 2\sin^3\theta)$

$\Rightarrow (4\cos^5\theta, 4\sin^5\theta) \Rightarrow (8\cos^7\theta, 8\sin^7\theta)$

下圖由內而外(圓)$x^2+y^2=1 \Rightarrow (\frac{x}{2})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{2})^{\frac{2}{3}}=1$

$\Rightarrow (\frac{x}{4})^{\frac{2}{5}}+(\frac{y}{4})^{\frac{2}{5}}=1$ $\Rightarrow (\frac{x}{8})^{\frac{2}{7}}+(\frac{y}{8})^{\frac{2}{7}}=1$

層層包絡且切於同一點 $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$



2.參數曲線(t,at+b)（ab≠0 的直線）$\Rightarrow$ 最小積包絡線$(-2\frac{a}{b}t^2,\frac{2(at+b)^2}{b})$

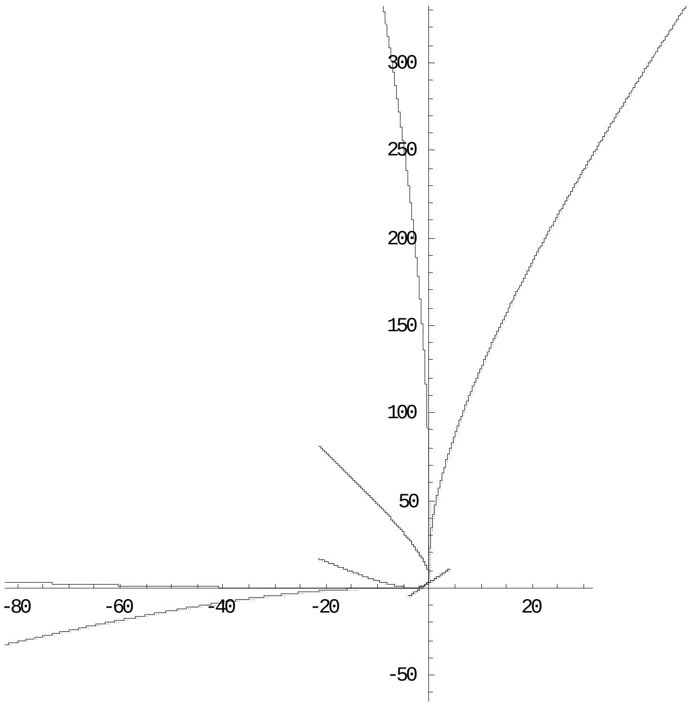
參數曲線$(-\frac{a}{b}t^2,\frac{(at+b)^2}{b})\Rightarrow$ 最小積包絡線$(2(-\frac{a}{b})^2t^3,2\frac{1}{b^2}(at+b)^3)$

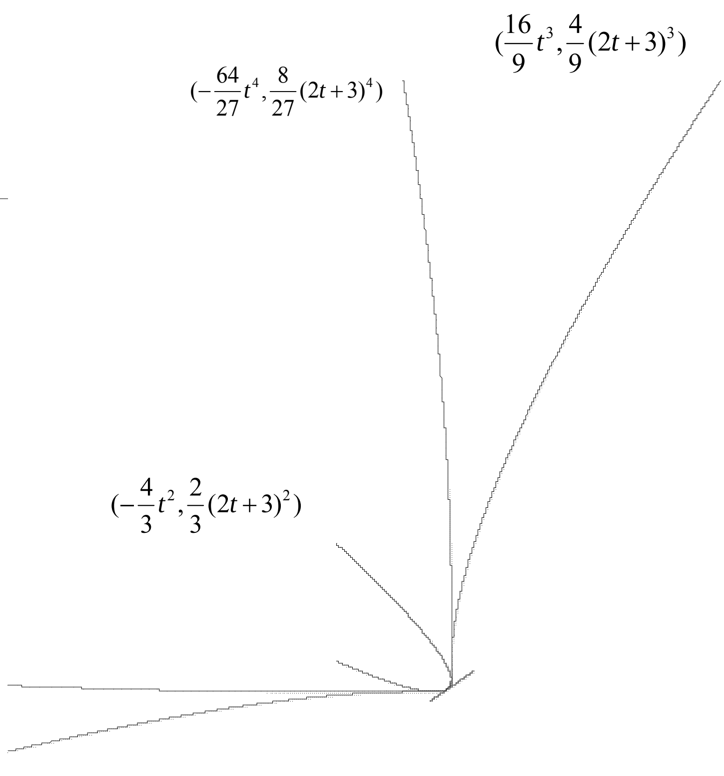
參數曲線$((-\frac{a}{b})^2t^3,\frac{1}{b^2}(at+b)^3)\Rightarrow$ 最小積包絡線$(2(-\frac{a}{b})^3t^4,2\frac{1}{b^3}(at+b)^4)$

如：取 a=2,b=3：(t,2t+3)$\Rightarrow$ 最小積包絡線$(-\frac{4}{3}t^2,\frac{2}{3}(2t+3)^2)$

$(-\frac{4}{3}t^2,\frac{2}{3}(2t+3)^2)\Rightarrow$ 最小積包絡線$(\frac{16}{9}t^3,\frac{4}{9}(2t+3)^3)$

$(\frac{16}{9}t^3,\frac{4}{9}(2t+3)^3)\Rightarrow$ 最小積包絡線$(-\frac{64}{27}t^4,\frac{8}{27}(2t+3)^4)$圖形如下：





層層包絡且切於同一點$(-\frac{3}{4},\frac{3}{2})$,

直線 y=2x+3 與兩軸交點(0,3)、

$(-\frac{3}{2},0)$的中點

3. 是否最小積包絡線都會有層層包絡（迭代後）且有相同的切點？我們嘗試證明如下：
若存在參數t_0使（$f(t_0)$, $g(t_0)$）=（$F(t_0)$, $G(t_0)$）即

$$\begin{cases} x=\dfrac{2(f(t))^2g'(t)}{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)}=f(t)\cdots\cdots(1) \\ y=\dfrac{2(g(t))^2f'(t)}{g(t)f'(t)-g'(t)f(t)}=g(t)\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

有解 t_0。由(1)、(2)分別消去f(t)；g(t)（f(t)=0 或g(t)=0時直線g(t) x+ f(t)y=2f(t)g(t)與座標軸圍不成三角形）得

$$\begin{cases} x=2f(t)g'(t)=f(t)g'(t)-f'(t)g(t)\cdots\cdots(1) \\ y=2g(t)f'(t)=g(t)f'(t)-g'(t)f(t)\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

⇒f(t)g’(t)+f’(t)g(t)=0 即t_0 滿足$-\dfrac{g(t)}{f(t)}=\dfrac{g'(t)}{f'(t)}$

表示曲線與包絡線在（$f(t_0)$, $g(t_0)$）=（$F(t_0)$, $G(t_0)$）處有共同的切線（∵切線斜率相等
$\dfrac{G'(t_0)}{F'(t_0)}=-\dfrac{g(t_0)}{f(t_0)}=\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$），即兩曲線在此相切。

再令(**F***(t),**G***(t))= $\left(\dfrac{2(F(t))^2G'(t)}{F(t)G'(t)-F'(t)G(t)},\dfrac{2(G(t))^2F'(t)}{G(t)F'(t)-G'(t)F(t)}\right)$為迭代所得包絡線，當$t_0$滿足

（$f(t_0)$, $g(t_0)$）=（$F(t_0)$, $G(t_0)$）（則$\dfrac{G'(t_0)}{F'(t_0)}=-\dfrac{g(t_0)}{f(t_0)}=\dfrac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$）

⇒(**F***(t_0),**G***(t_0))= $\left(\dfrac{2(F(t_0))^2G'(t_0)}{F(t_0)G'(t_0)-F'(t_0)G(t_0)},\dfrac{2(G(t_0))^2F'(t_0)}{G(t_0)F'(t_0)-G'(t_0)F(t_0)}\right)$

$$=\left(\dfrac{2(F(t_0))^2}{F(t_0)-\dfrac{F'(t_0)}{G'(t_0)}G(t_0)},\dfrac{2(G(t_0))^2}{G(t_0)-\dfrac{G'(t_0)}{F'(t_0)}F(t_0)}\right)=\left(\dfrac{2(f(t_0))^2}{f(t_0)-(-\dfrac{f(t_0)}{g(t_0)})g(t_0)},\dfrac{2(g(t_0))^2}{g(t_0)-(-\dfrac{g(t_0)}{f(t_0)})f(t_0)}\right)$$

$=\left(\dfrac{2(f(t_0))^2}{2f(t_0)},\dfrac{2(g(t_0))^2}{2g(t_0)}\right)=(f(t_0),g(t_0))$=（$F(t_0)$, $G(t_0)$）⇒原始曲線、包絡線、迭代所得包絡線均相切於同一點。由上述可得

性質三：原始曲線、包絡線、迭代所得包絡線均相切於同一點。

四、我們再嘗試研究曲線Γ參數式(f(t), g(t))的最小積直線之法線包絡線:

直線L為過曲線Γ:$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}$上任意點P(f(t) , g(t))在P點所在象限與座標軸圍成三角形面積最小，則L：g(t) x+ f(t)y=2f(t)g(t)。而過P點與L垂直的直線L’： f(t) x- g(t)y=$(f(t))^2$- $(g(t))^2$
由直線族L’： f(t)x- g(t)y=$(f(t))^2$- $(g(t))^2$（t為變數）所決定的包絡線（以下稱法線包絡線）上的點(x , y)

滿足：$\begin{cases} f(t)\,x - g(t)y = (f(t))^2 - (g(t))^2 \\ f'(t)\,x - g'(t)y = 2f(t)f'(t) - 2g(t)g'(t) \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x = f(t) + \dfrac{g(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)} \\ y = g(t) + \dfrac{f(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)} \end{cases}$ (*)

性質四：曲線Γ：$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$**的法線包絡線為**$\begin{cases} x = f(t) + \dfrac{g(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)} \\ y = g(t) + \dfrac{f(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)} \end{cases}$

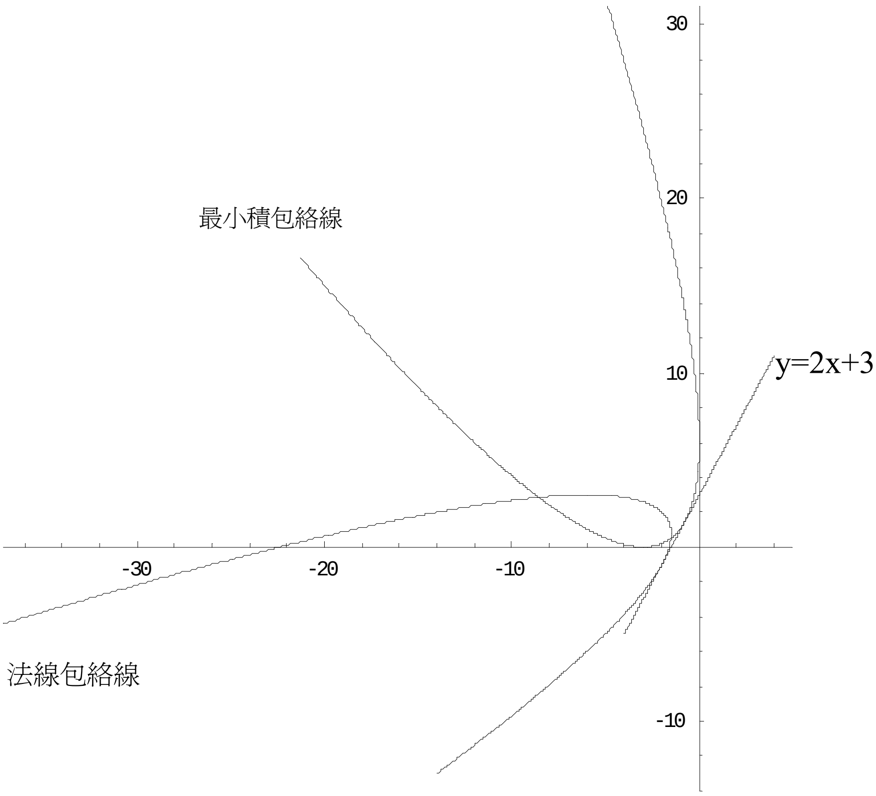
1. 直線 y=ax+b 的法線包絡線：取直線(t , at+b)即 f(t)=t，g(t)=at+b（ab≠0）代入(*)式的解得：

$$\begin{cases} x = a\dfrac{(1-a^2)t^2+b^2}{b} + 2[(1-a^2)t - ab] \\ y = \dfrac{(1-a^2)t^2+b^2}{b} \end{cases}$$ 消去參數 t 得

最小積直線之法線包絡線爲$x^2-2axy+a^2y^2+4abx-4by+4b^2=0$（ab≠0 時表一拋物線）

與直線(t , at+b)最小積包絡線$a^2x^2+2axy+y^2+4abx-4by+4b^2=0$（ab≠0 時表一拋物線）比較，

兩者方程式非常接近，與直線y=ax+b也相切，切於點$(\dfrac{ab}{1-a^2},\dfrac{b}{1-a^2})$。



法線包絡線$x^2-2axy+a^2y^2+4abx-4by+4b^2=0$ 所表的拋物線爲

$$\frac{|x-ay|}{\sqrt{a^2+1}} = \sqrt{(x+\frac{2ab}{a^2+1})^2+(y-\frac{2b}{a^2+1})^2}$$

與最小積包絡線$a^2x^2+2axy+y^2+4abx-4by+4b^2=0$ 所表的拋物線比較

$$\frac{|ax+y|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{(x+\frac{2ab}{a^2+1})^2+(y-\frac{2b}{a^2+1})^2}$$

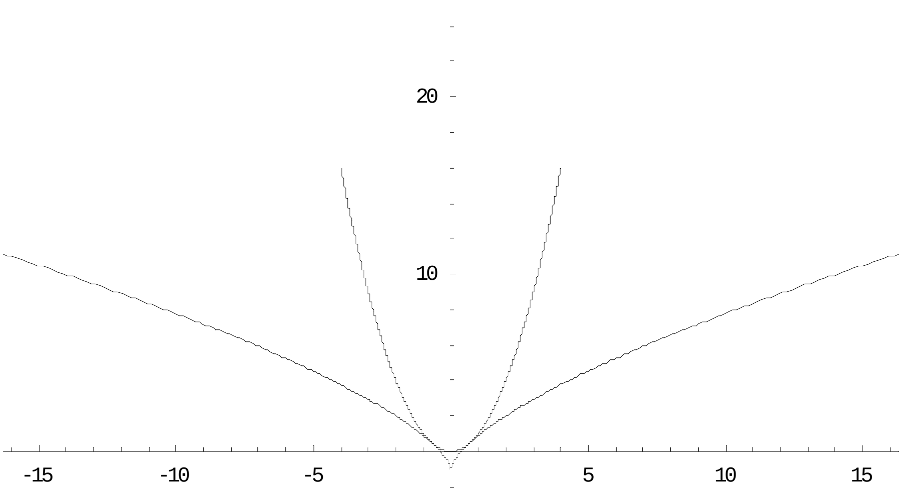
兩者有共同的**焦點，準線互相垂直於原點**，但形狀不相同（a≠1 則正焦弦長不相等）。
且得知兩拋物線$x^2-2axy+a^2y^2+4abx-4by+4b^2=0$與$a^2x^2+2axy+y^2+4abx-4by+4b^2=0$ **必有公切線y=ax+b**

2.取曲線(t, t^r)即$f(t)=t$，$g(t)=t^r$（$r\neq1$）代入（*）式的解得：

$$\begin{cases} x=t+\dfrac{t-rt^{2r-1}}{1-r} \\ y=t^r+\dfrac{t(t-rt^{2r-1})}{(1-r)t^r} \end{cases}$$

，取r=2，即$f(t)=t$，$g(t)=t^2$，拋物線$y=x^2$的法線包絡線爲$\begin{cases} x=2t^3 \\ y=3t^2-1 \end{cases}$，

圖形並列如下：



3.幾個特殊的極座標曲線的法線包絡線：

r=P(θ)上任意點 (P(θ)cosθ ,P(θ)sinθ)

即 f(θ)= P(θ)cosθ，g(θ)= P(θ)sinθ代入（*）式的解

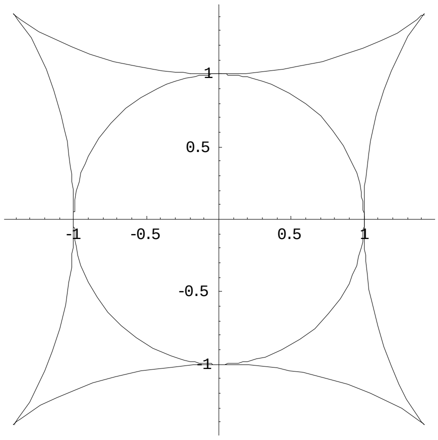
得：$\begin{cases} x=p(\theta)\cos\theta-\sin\theta[p'(\theta)\cos2\theta-p(\theta)\sin2\theta] \\ y=p(\theta)\sin\theta-\cos\theta[p'(\theta)\cos2\theta-p(\theta)\sin2\theta] \end{cases}$(＊＊)

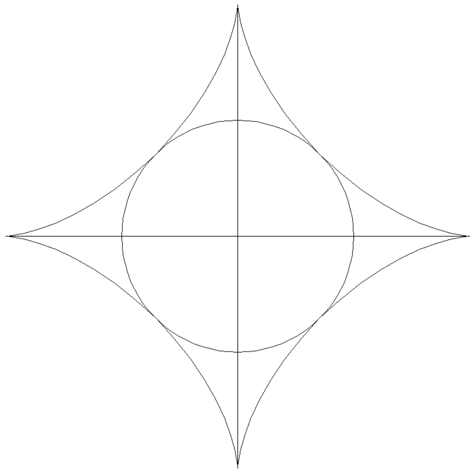
結論 4. 極座標曲線 r=P(θ)的法線包絡線為$\begin{cases} x=p(\theta)\cos\theta-\sin\theta[p'(\theta)\cos2\theta-p(\theta)\sin2\theta] \\ y=p(\theta)\sin\theta-\cos\theta[p'(\theta)\cos2\theta-p(\theta)\sin2\theta] \end{cases}$

(1) 單位圓 r= P(θ)=1，代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x=\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta \\ y=\sin\theta+\cos\theta\sin 2\theta \end{cases}$$

下圖右爲法線包絡線，圖左爲最小積包絡線：

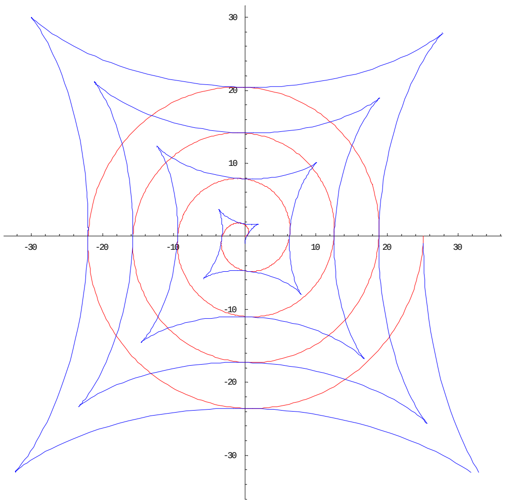


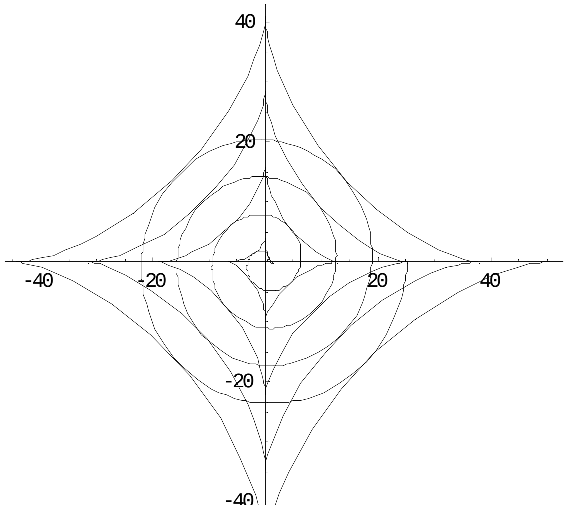


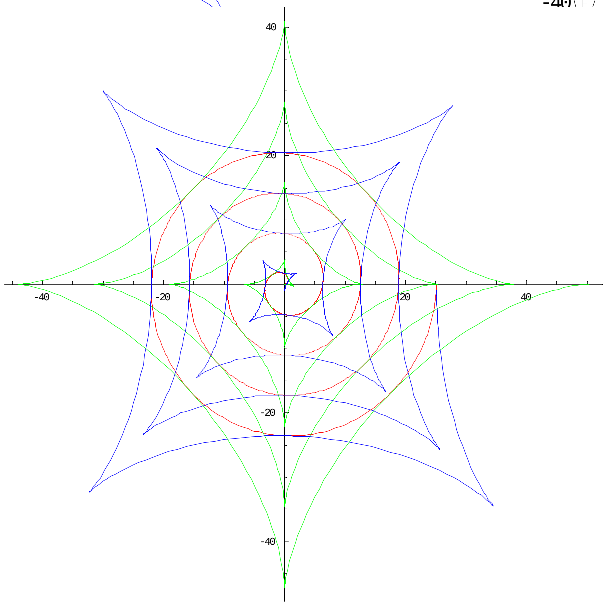
(2) 螺線 P(θ)= θ ，代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(3\theta\cos\theta-\theta\cos 3\theta+\sin\theta-\sin 3\theta) \\ y=\dfrac{1}{2}[-\cos\theta-\cos 3\theta+\theta(3\sin\theta+\sin 3\theta)] \end{cases}$$

下圖右爲法線包絡線，圖左爲最小積包絡線：



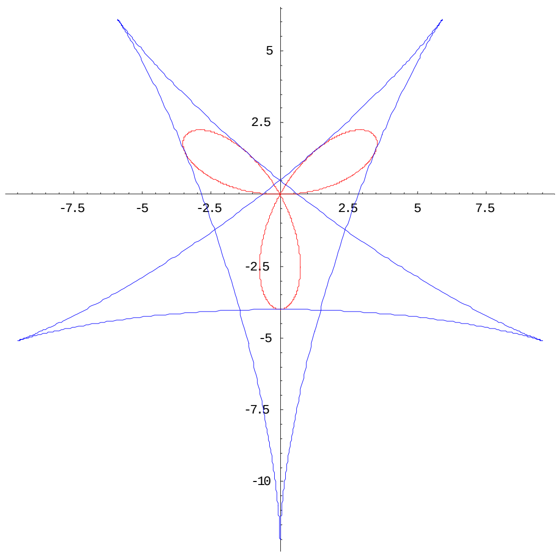


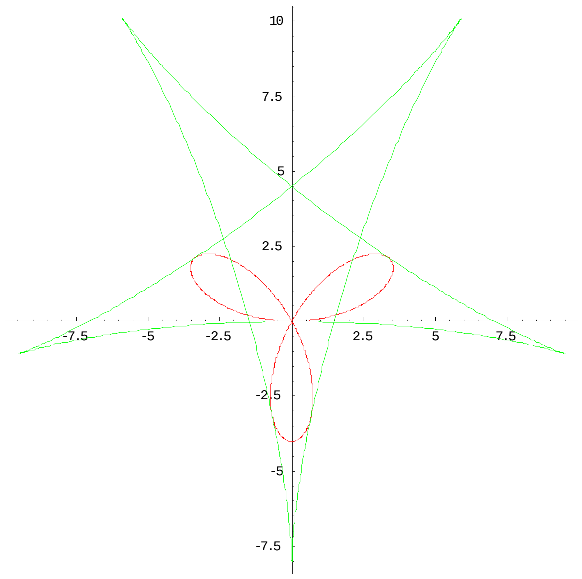


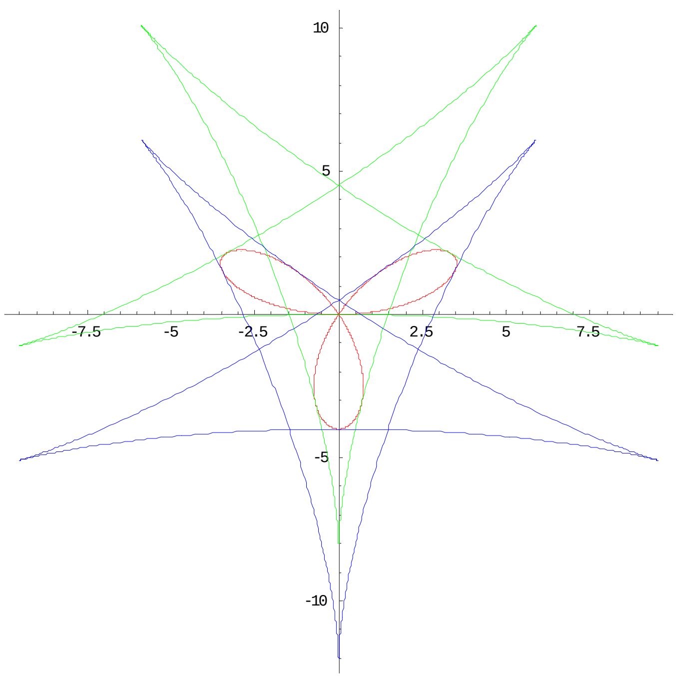
(兩者並列)

(3) 曲線 r= P(θ)=4sin3 θ （三瓣玫瑰線），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = 6\sin 4\theta - 4\sin 6\theta \\ y = -2(1 + 3\cos 4\theta + 2\cos 6\theta) \end{cases}$$ 下圖右為法線包絡線，圖左為最小積包絡線：



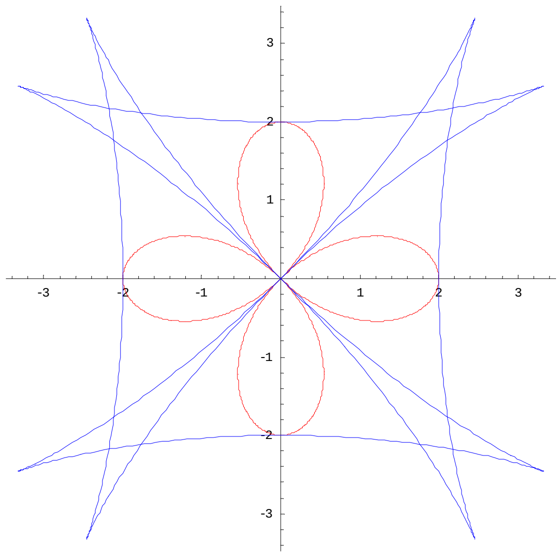


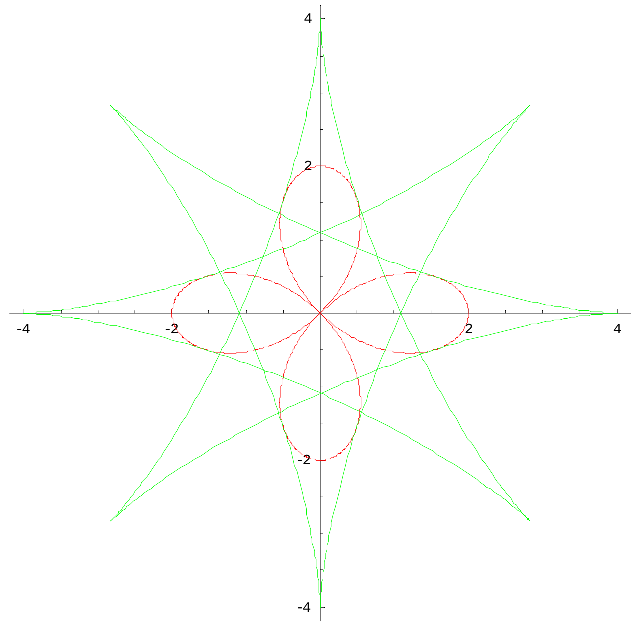


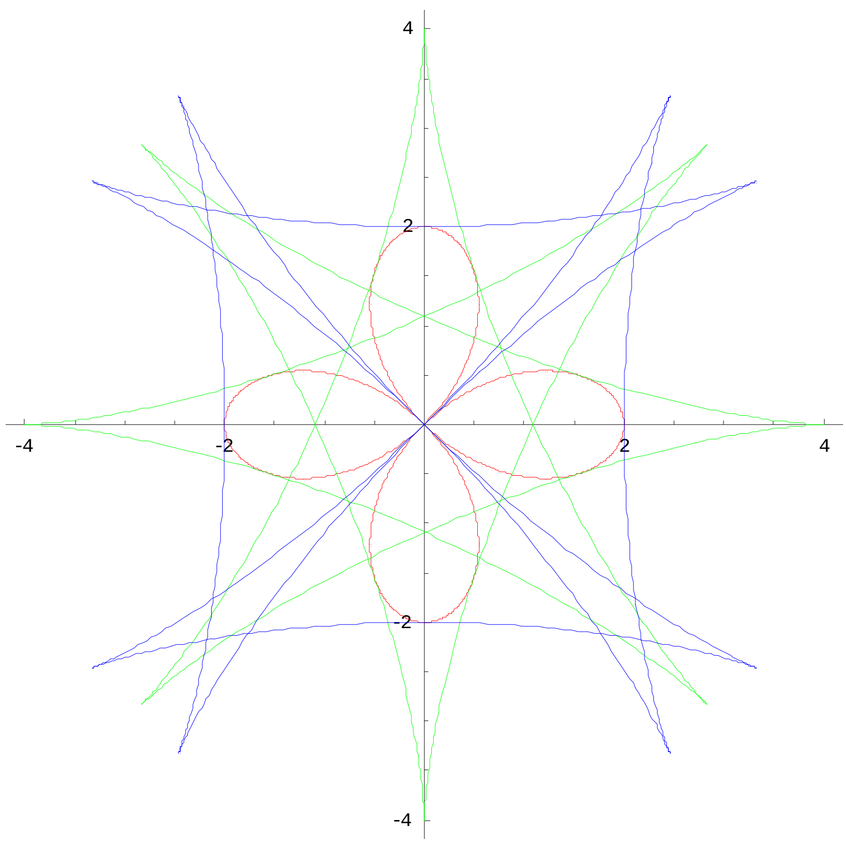
（兩者並列）

(4) 曲線 r= P(θ)=2cos2 θ （四瓣玫瑰線一），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(2\cos\theta + 5\cos 3\theta - 3\cos 5\theta) \\ y = \dfrac{1}{2}(-2\sin\theta + 5\sin 3\theta + 3\sin 5\theta) \end{cases}$$
下圖右為法線包絡線，圖左為最小積包絡線：



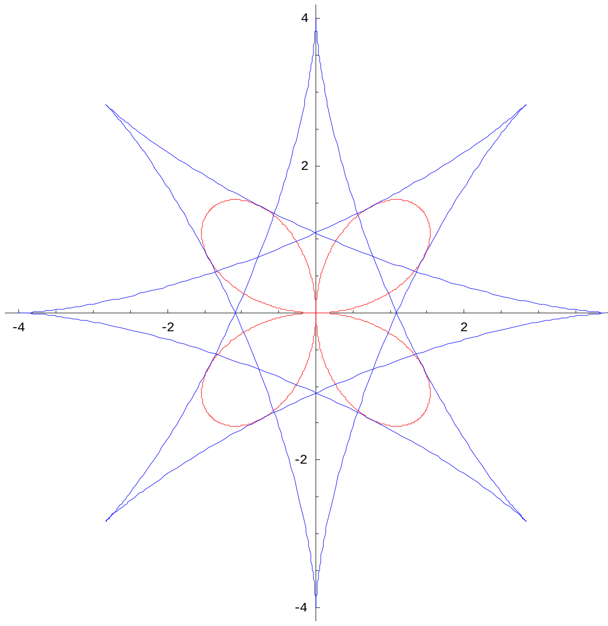


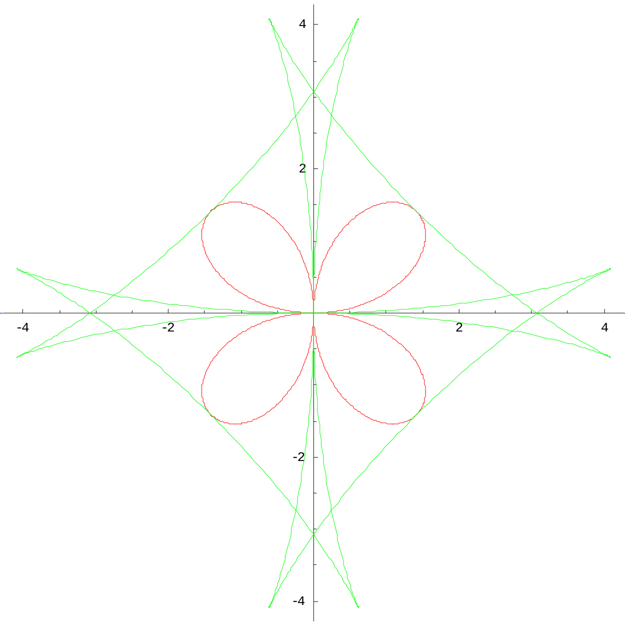


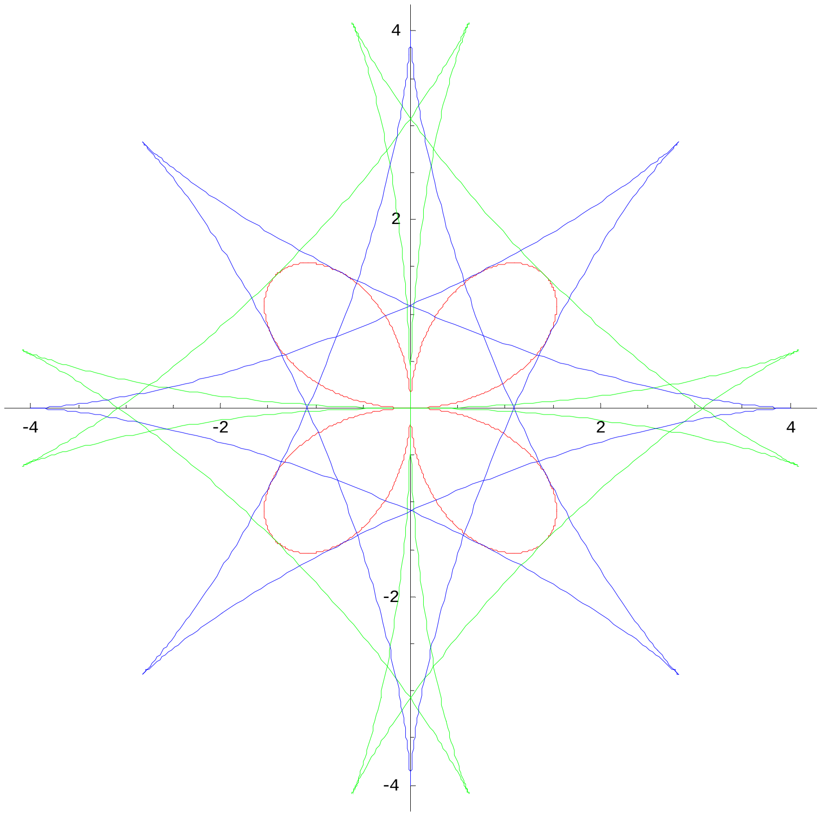
（兩者並列）

(5)曲線 r= P(θ)=2sin2 θ （四瓣玫瑰線二），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = 4\sin^3\theta(2+3\cos 2\theta) \\ y = -4\cos^3\theta(-2+3\cos 2\theta) \end{cases}$$ 下圖右為法線包絡線，圖左為最小積包絡線：







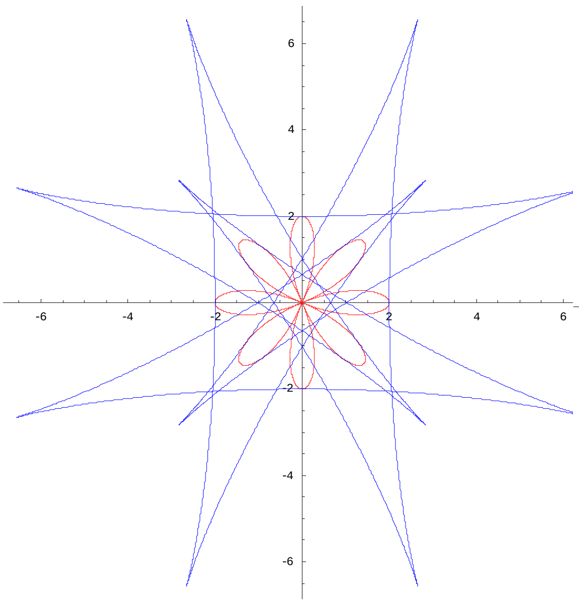
（兩者並列）

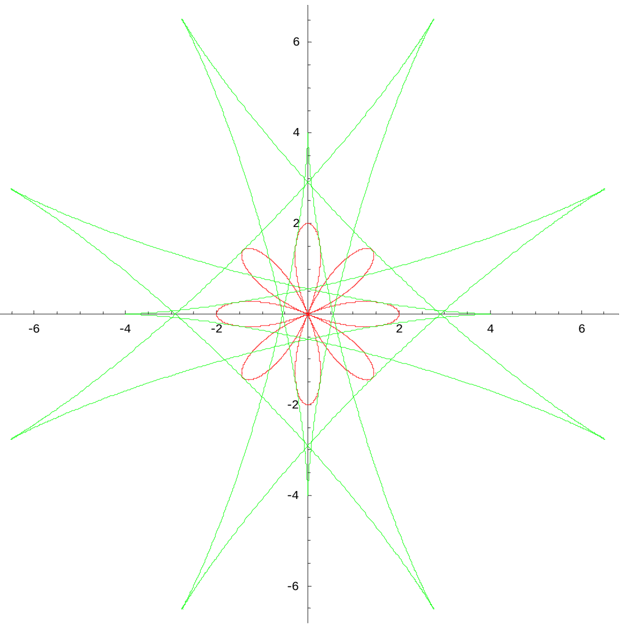
（值得注意的是這兩個四瓣玫瑰線的法線包絡線與最小積包絡線恰好相反）

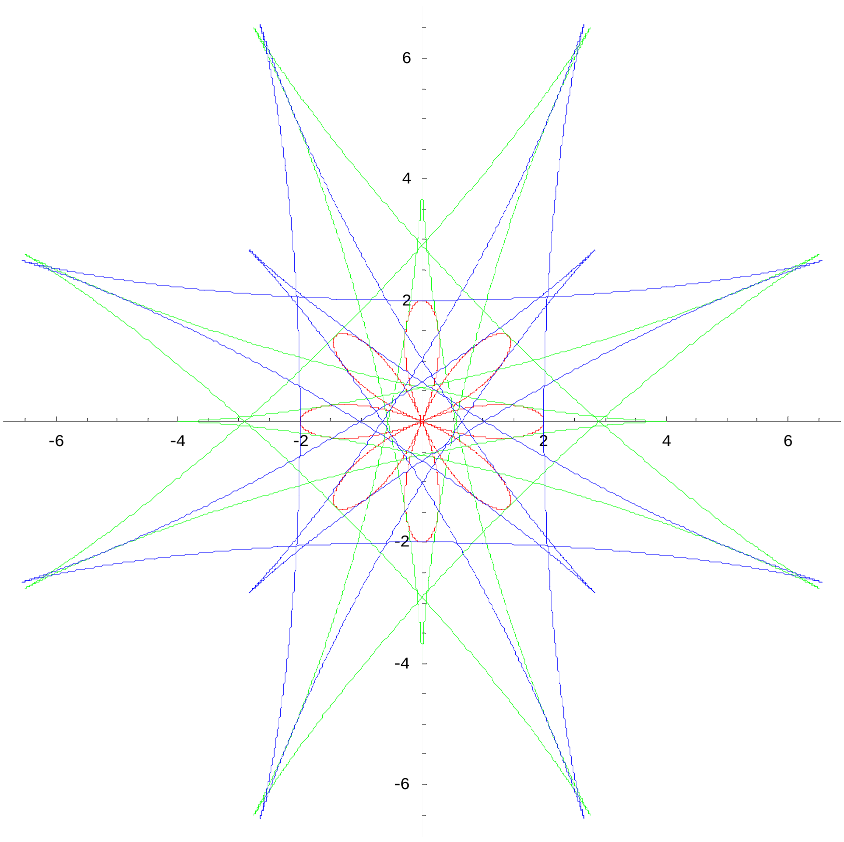
(6) 曲線 r= P(θ)=2cos4 θ （八瓣玫瑰線一），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(3\cos\theta - \cos 3\theta + 7\cos 5\theta - 5\cos 7\theta) \\ y = \dfrac{1}{2}(3\sin\theta + \sin 3\theta + 7\sin 5\theta + 5\sin 7\theta) \end{cases}$$

下圖右爲法線包絡線，圖左爲最小積包絡線：





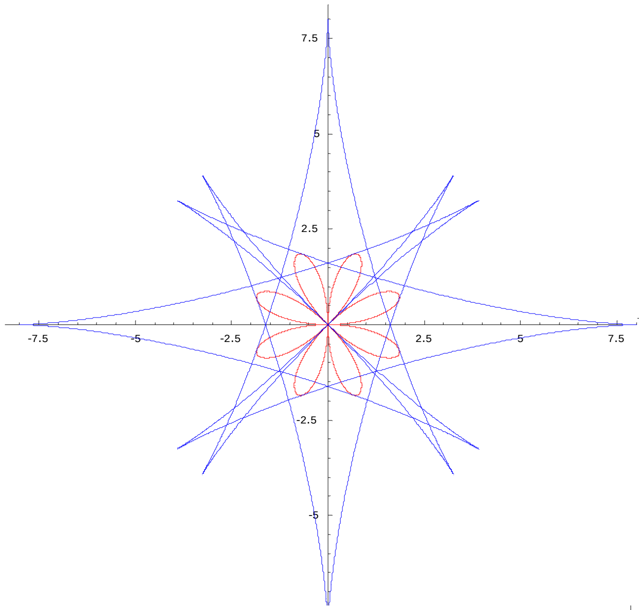


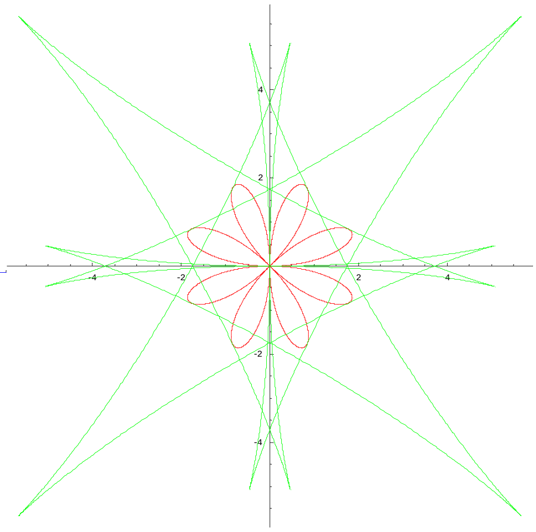
（兩者並列）

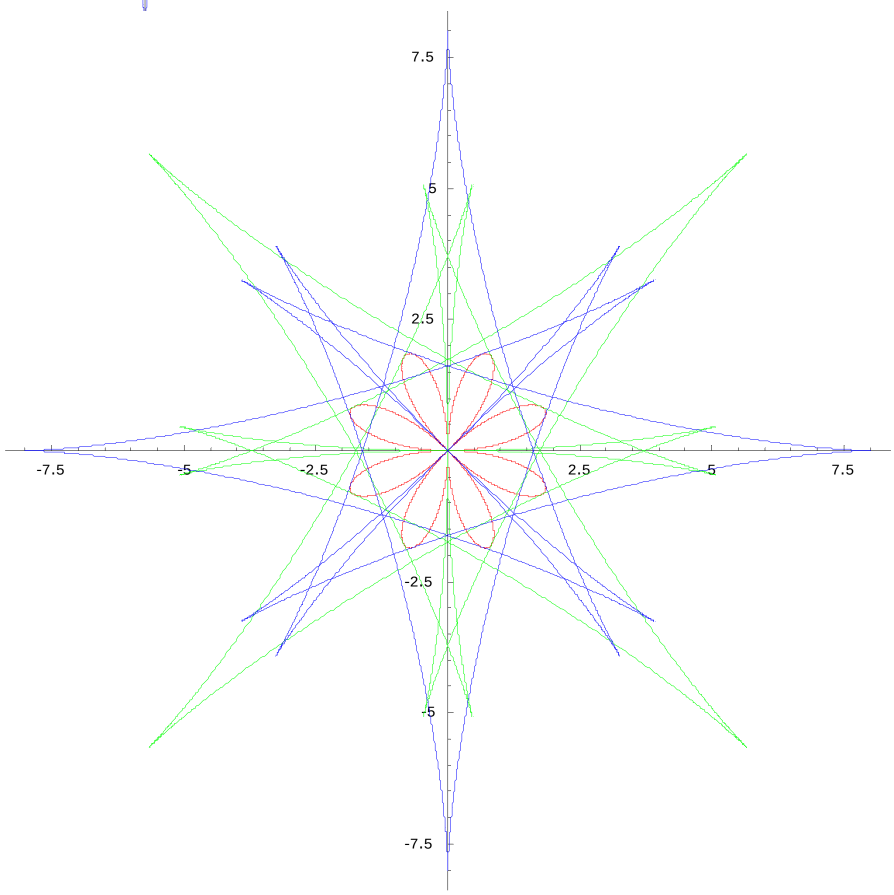
(7) 曲線 r= P(θ)=2cos4 θ （八瓣玫瑰線二），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = 4\sin^3\theta(5+8\cos 2\theta+5\cos 4\theta) \\ y = -4\cos^3\theta(5-8\cos 2\theta+5\cos 4\theta) \end{cases}$$

下圖右為法線包絡線，圖左為最小積包絡線：





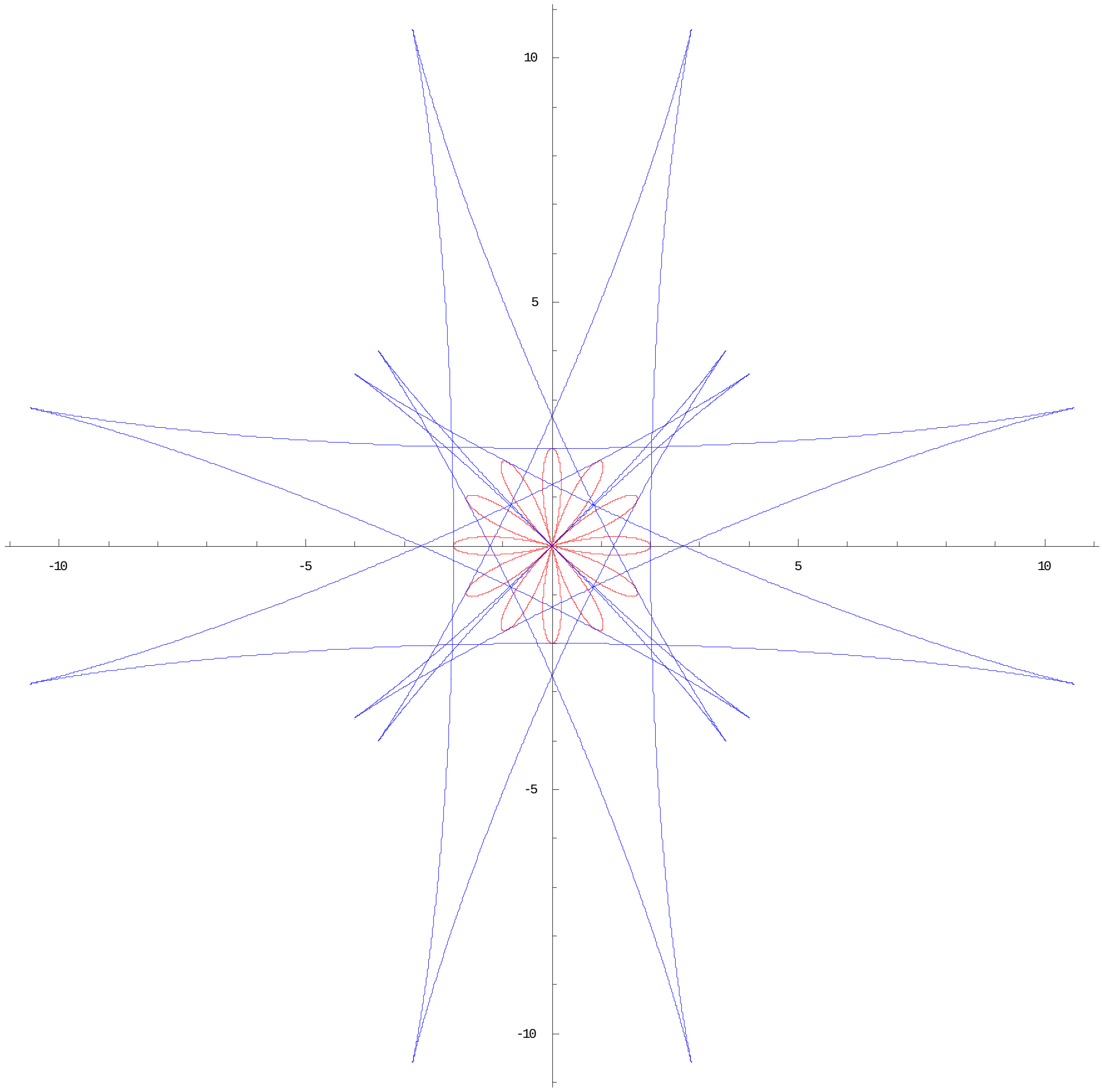


（兩者並列）

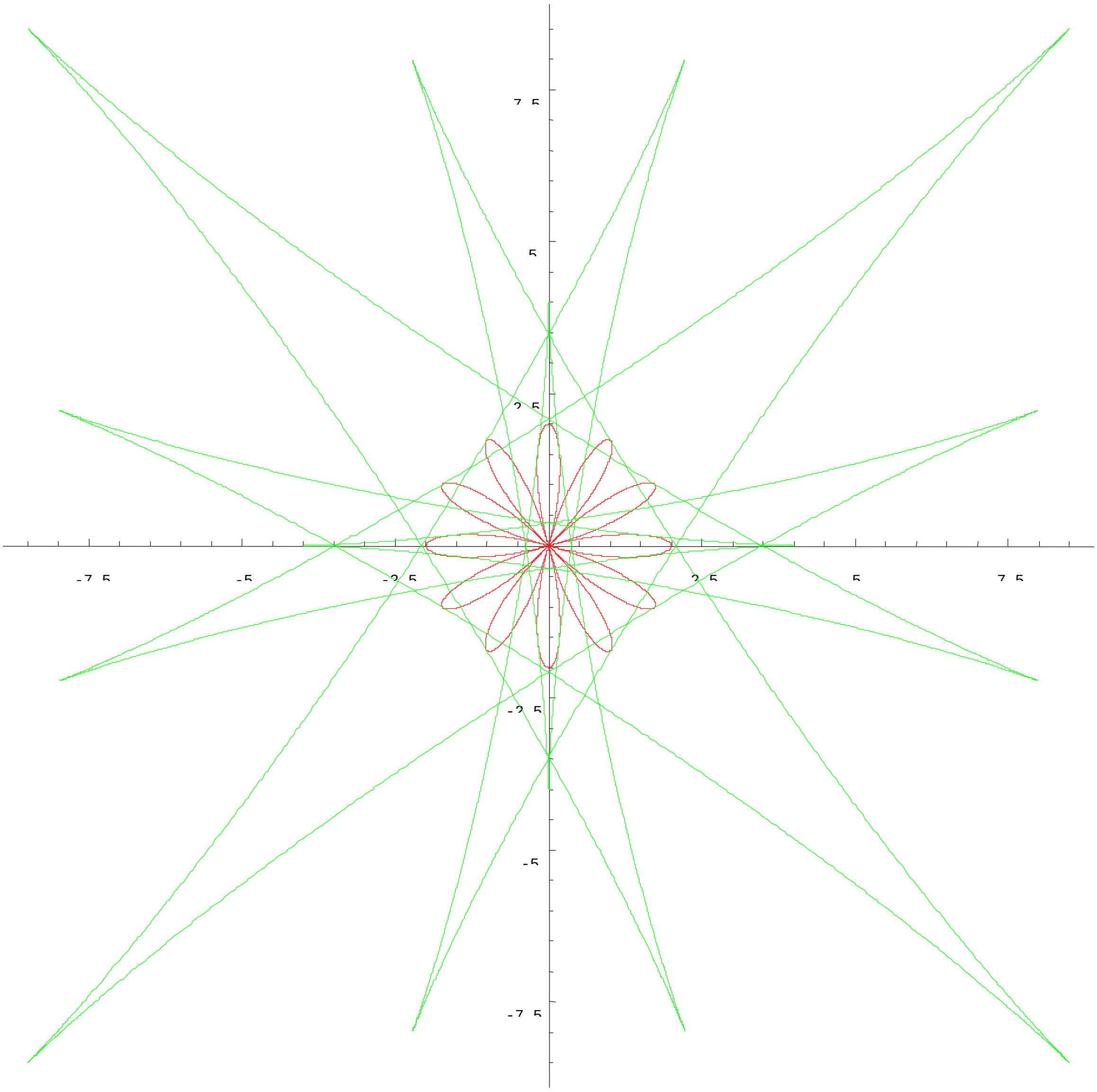
(8) 曲線 r= P(θ)=2cos6 θ （十二瓣玫瑰線一），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(5\cos 3\theta - 3\cos 5\theta + 9\cos 7\theta - 7\cos 9\theta) \\ y = \dfrac{1}{2}(5\sin 3\theta + 3\sin 5\theta + 9\sin 7\theta + 7\sin 9\theta) \end{cases}$$ 下圖（一）為法線包絡線，

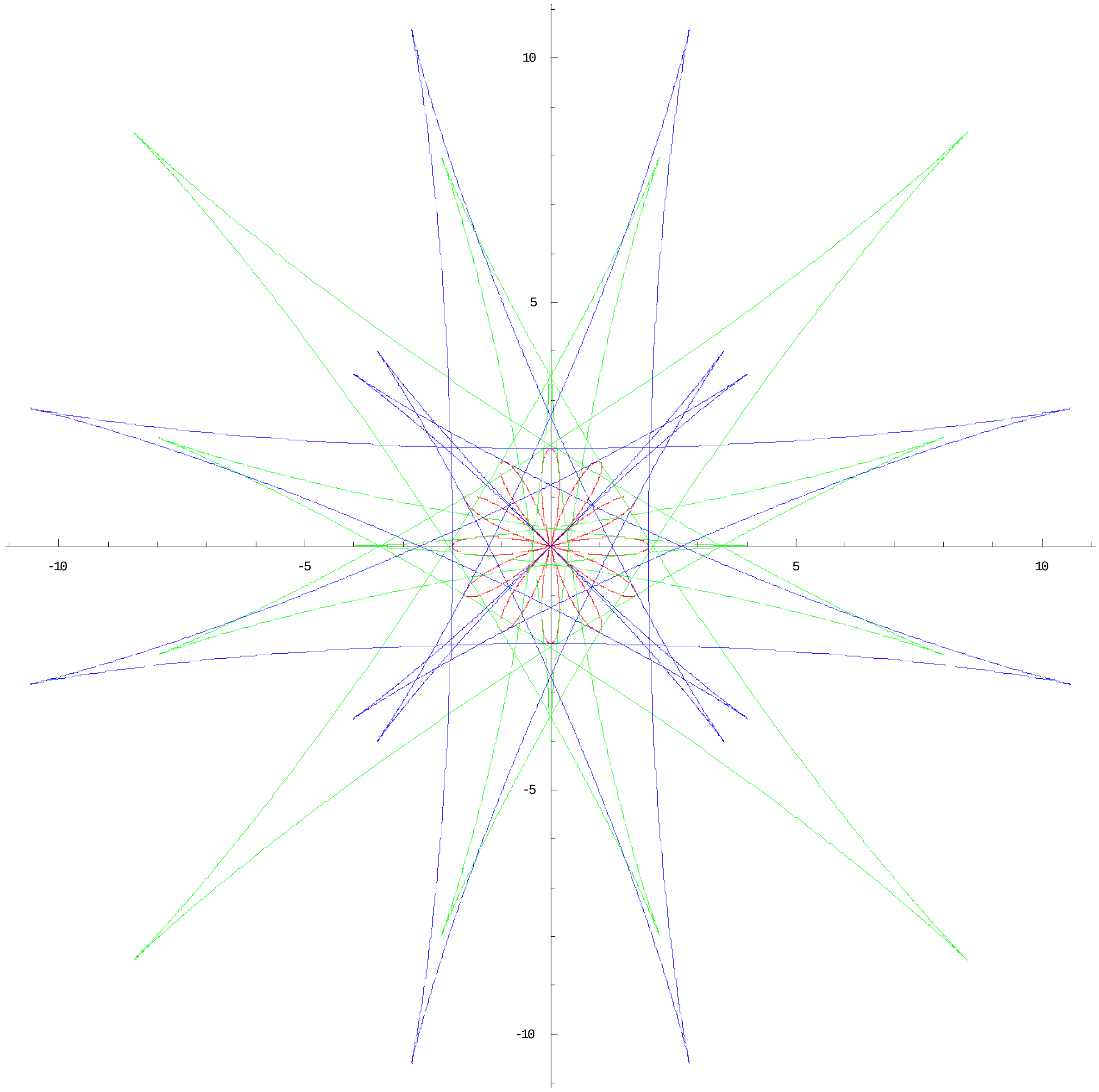
圖（二）為最小積包絡線：



（一）



（二）

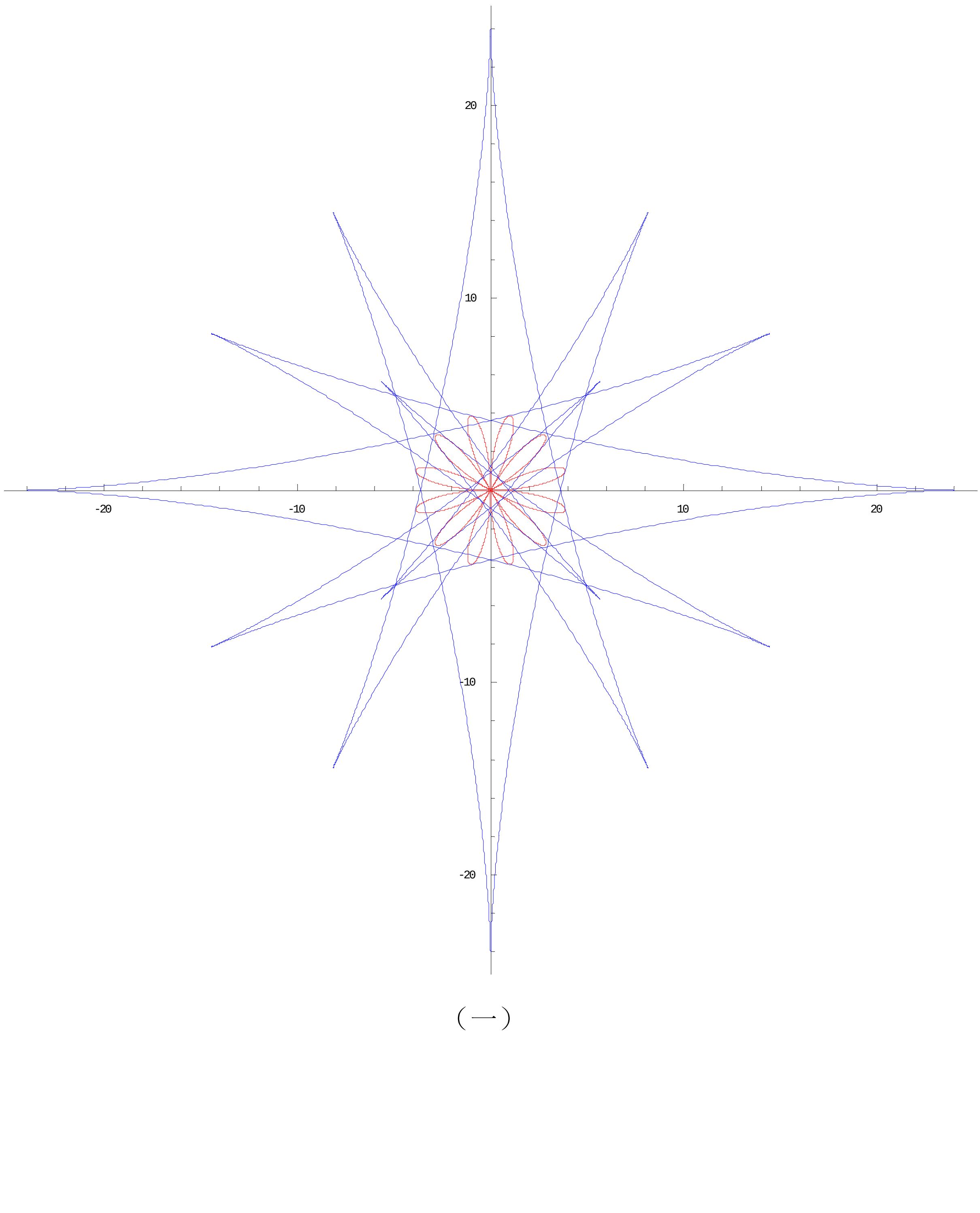


（兩者並列）

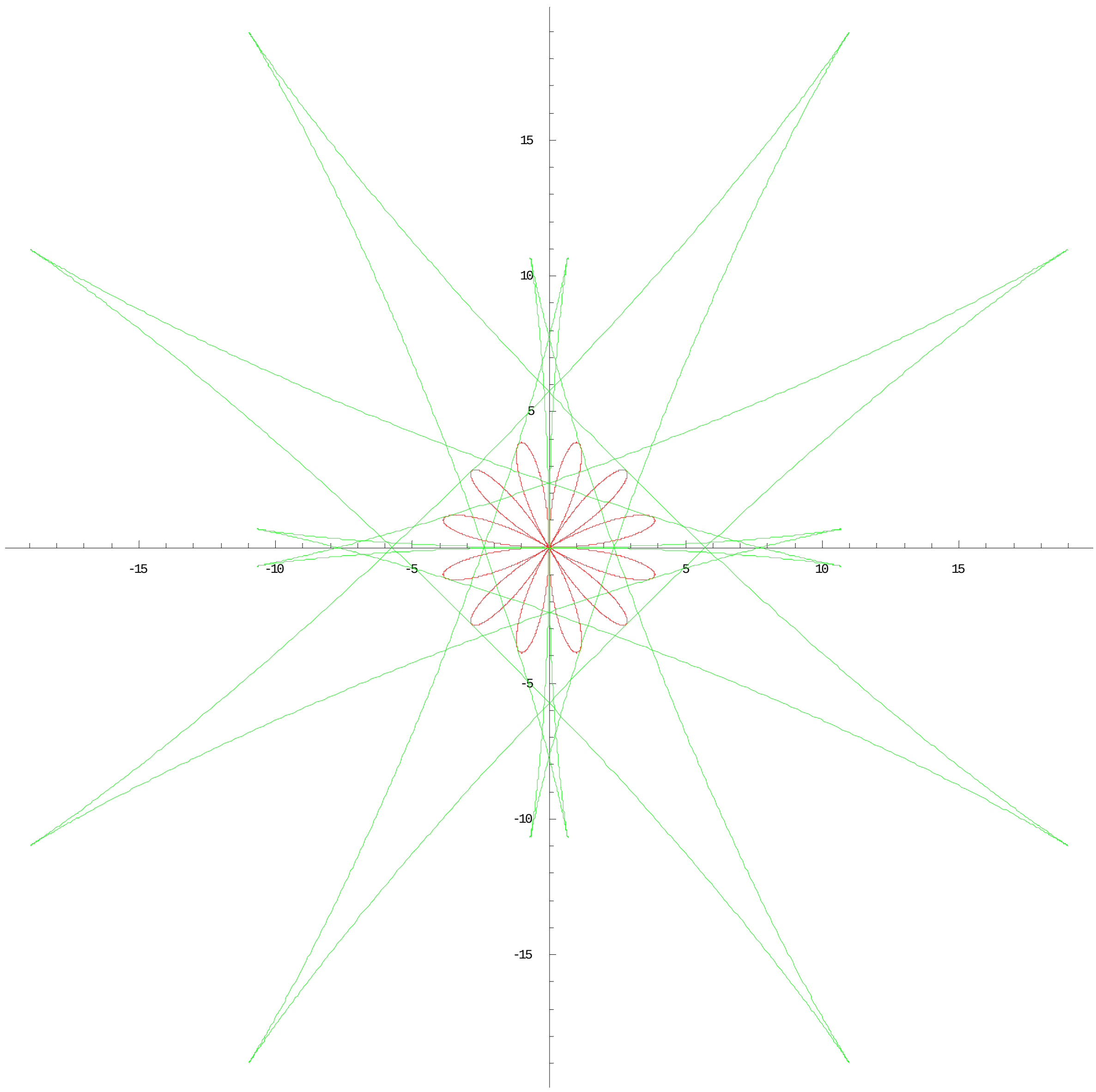
(9) 曲線 r= P(θ)=2cos6 θ （十二瓣玫瑰線二），代入(＊＊)式得：

$$\begin{cases} x=5\sin3\theta-3\sin5\theta+9\sin7\theta-7\sin9\theta \\ y=-(5\cos3\theta+3\cos5\theta+9\cos7\theta+7\cos9\theta) \end{cases}$$

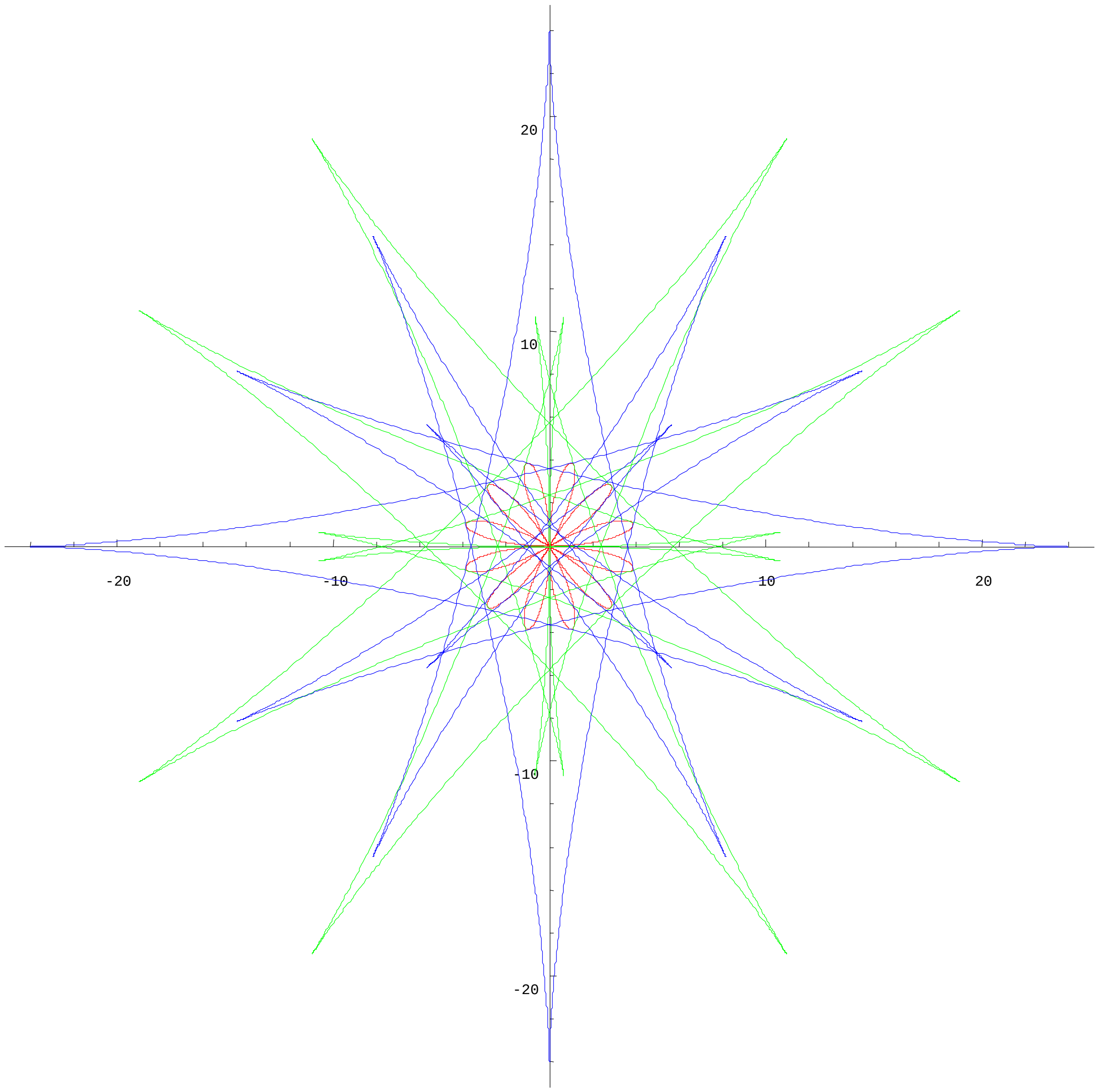
下圖（一）爲法線包絡線，圖（二）爲最小積包絡線：



（一）



（二）



（兩者並列）

五、法線包絡線與其原曲線的切點關係：

1.極坐標上任意點（x(θ) , y(θ)）的切線斜率為 $\frac{y'(\theta)}{x'(\theta)}$

2.參數曲線上任意點（f(t), g(t)）的切線斜率為 $\frac{g'(t)}{f'(t)}$

3.參數曲線（f(t) , g(t)）所對應的法線包絡線為

$$(\mathbf{F}(t), \mathbf{G}(t)) = \left(f(t)+\frac{g(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}, g(t)+\frac{f(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}\right)$$ 。

法線包絡線上任意點（**F**(t) , **G**(t)）的切線斜率為 $\frac{G'(t)}{F'(t)}=\frac{f(t)}{g(t)}$

（∵包絡線上以（**G**(t) , **F**(t)）為切點的切線為f(t) x- g(t)y=(f(t))^2- (g(t))^2）

4.若存在參數t_0使（f(t_0) , g(t_0)）=（**F**(t_0) , **G**(t_0)）即

$$\begin{cases} x = f(t)+\frac{g(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)} = f(t) \\ y=g(t)+\frac{f(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)} = g(t) \end{cases}$$

有解 t_0。由(1)、(2)分別消去f(t)；g(t)得

$$\begin{cases} \frac{g(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)} = 0 \\ \frac{f(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)} = 0 \end{cases}$$

⇒f(t) f'(t) - g(t) g'(t)=0 即t_0 滿足 $\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$

⇒ $\frac{G'(t)}{F'(t)}=\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$，表示曲線與法線包絡線在（f($t_0$) , g($t_0$)）=（F($t_0$) , G($t_0$)）處有共同的切線，即原曲線與法線包絡線必相切於此處。由上述可得

性質五：曲線與法線包絡線在（f(t_0)， g(t_0)）=（F(t_0)， G(t_0)）處有共同的切線，即原曲線與法線包絡線必相切於此處。

5.是否法線包絡線也會有層層包絡（迭代後）且有相同的切點？我們嘗試證明如下：

若存在參數t_0使（f(t_0) , g(t_0)）=（**F**(t_0) , **G**(t_0)）即

表示曲線與包絡線在（f(t_0) , g(t_0)）=（F(t_0) , G(t_0)）處有共同的切線（∵切線斜率相等 $\frac{G'(t)}{F'(t)}=\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{g'(t)}{f'(t)}$），即兩曲線在此相切。

再令($\mathbf{F^*}$(t),$\mathbf{G^*}$(t))= $\left(F(t)+\frac{G(t)[F(t)F'(t)-G(t)G'(t)]}{F'(t)G(t)-F(t)G'(t)}, G(t)+\frac{F(t)[F(t)F'(t)-G(t)G'(t)]}{F'(t)G(t)-F(t)G'(t)}\right)$ 為迭代所得法線包絡線，當t_0滿足

（f(t_0) , g(t_0)）=（F(t_0) , G(t_0)）（則 $\frac{G'(t_0)}{F'(t_0)}=\frac{f(t_0)}{g(t_0)}=\frac{g'(t_0)}{f'(t_0)}$）

⇒($\mathbf{F^*}$(t_0),$\mathbf{G^*}$(t_0))=

$$(F(t_0)+\frac{G(t_0)[F(t_0)F'(t_0)-G(t_0)G'(t_0)]}{F'(t_0)G(t_0)-F(t_0)G'(t_0)},G(t_0)+\frac{F(t_0)[F(t_0)F'(t_0)-G(t_0)G'(t_0)]}{F'(t_0)G(t_0)-F(t_0)G'(t_0)})$$

$$=(F(t_0)+\frac{G(t_0)[F(t_0)-G(t_0)\frac{G'(t_0)}{F'(t_0)}]}{G(t_0)-F(t_0)\frac{G'(t_0)}{F'(t_0)}},G(t_0)+\frac{F(t_0)[F(t_0)-G(t_0)\frac{G'(t_0)}{F'(t_0)}]}{G(t_0)-F(t_0)\frac{G'(t_0)}{F'(t_0)}}$$

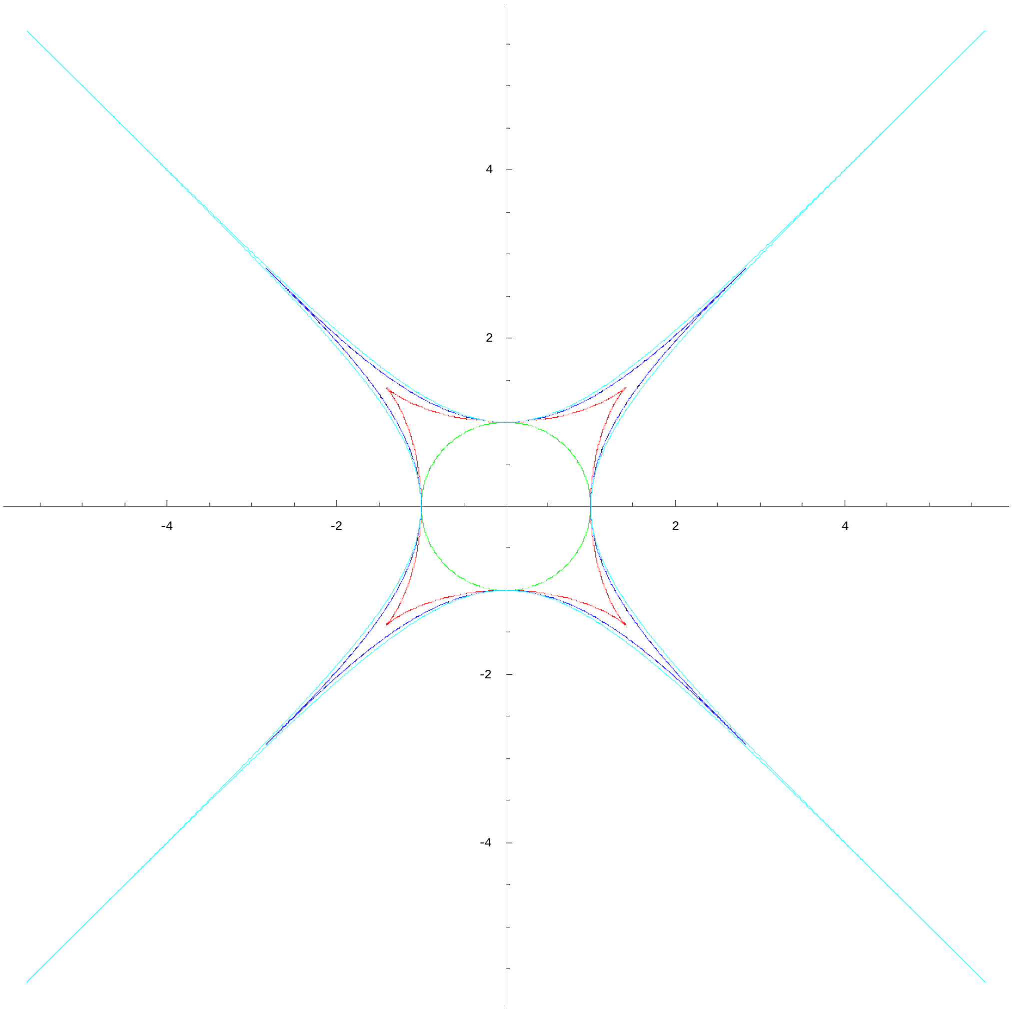
$$=(f(t_0)+\frac{g(t_0)[f(t_0)-g(t_0)\frac{f(t_0)}{g(t_0)}]}{g(t_0)-f(t_0)\frac{f(t_0)}{g(t_0)}},g(t_0)+\frac{f(t_0)[f(t_0)-g(t_0)\frac{f(t_0)}{g(t_0)}]}{g(t_0)-f(t_0)\frac{f(t_0)}{g(t_0)}}\quad(\because\frac{G'(t_0)}{F'(t_0)}=\frac{f(t_0)}{g(t_0)})$$

$=(f(t_0),g(t_0))=$（$F(t_0)$, $G(t_0)$）⇒原始曲線、法線包絡線、迭代所得法線包絡線均相切於同一點。由上述可得

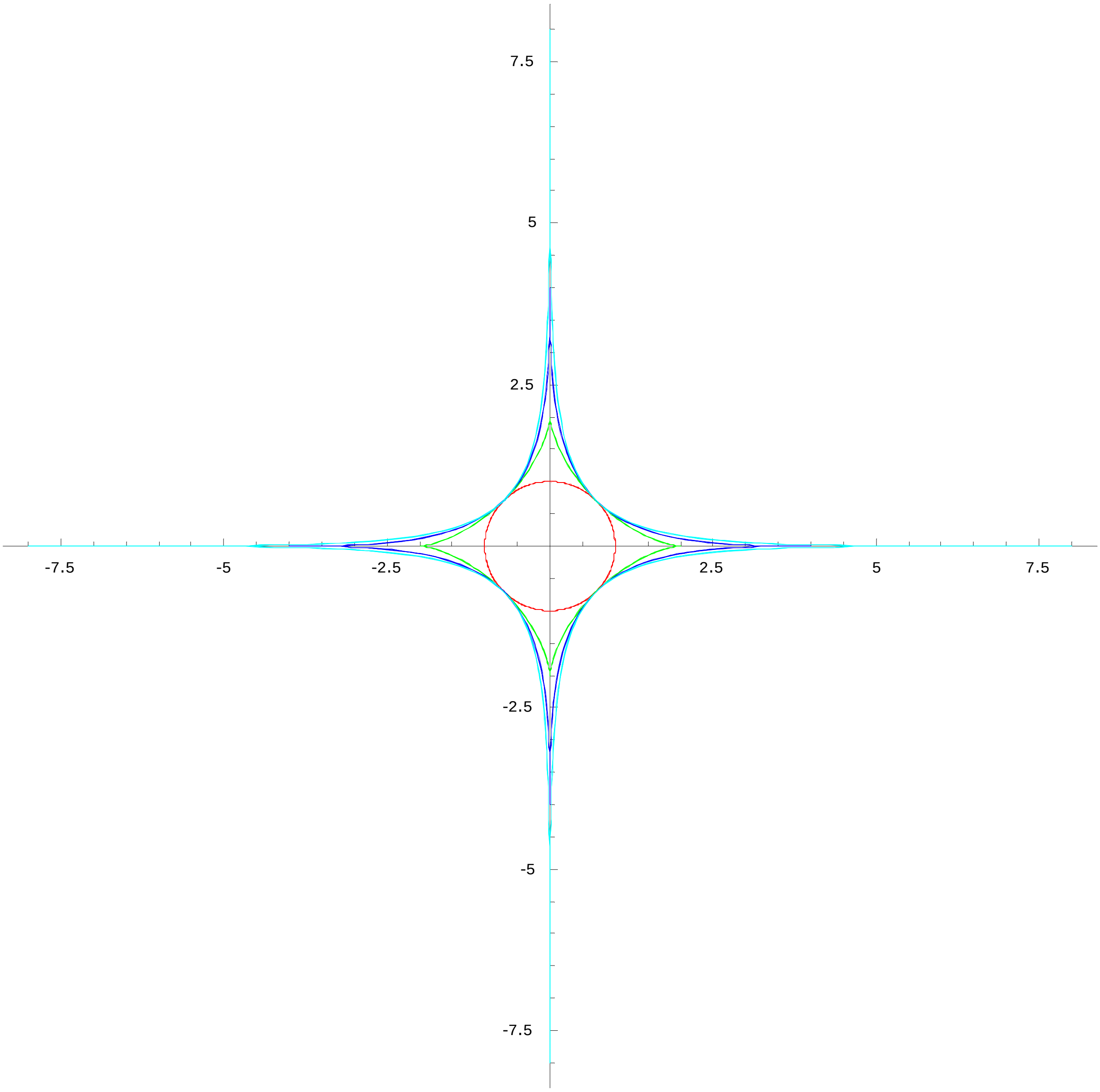
性質六：原始曲線、法線包絡線、迭代所得法線包絡線均相切於同一點。

例：單位圓的法線包絡線及其迭代圖形：(如下)

$(\cos\theta+\sin\theta\sin2\theta,\sin\theta+\cos\theta\sin2\theta)\Rightarrow(\frac{1}{4}(10\cos\theta-5\cos3\theta-\cos5\theta),\frac{1}{4}(10\sin\theta+5\sin3\theta-\sin5\theta)\Rightarrow(\frac{1}{8}(35\cos\theta-7\cos5\theta-21\cos3\theta+\cos7\theta),\frac{1}{8}(35\sin\theta-7\sin5\theta+21\sin3\theta-\sin7\theta))$



單位圓的最小積包絡線及其迭代圖形：（如下）



（都對應旋轉 **45^{o}**）

六、空間中曲面與其最小積包絡面：

空間中過曲面Γ上任一點 P（f(s,t), g(s,t) , h(s,t)）(s,t 爲曲面Γ的參數)的平面與三座標平面在點所在卦限圍成四面體體積最小時，平面方程式爲 E：$\frac{x}{3f(s,t)}+\frac{y}{3g(s,t)}+\frac{z}{3h(s,t)}=1$

即 (gh) x + (fh) y + (fg) z = 3fgh 此時最小體積爲 $\frac{9}{2}|fgh|$

由平面族 E(s,t)：(g(s,t)h(s,t))x+ (f(s,t)h(s,t))y+ (f(s,t)g(s,t))z=3 f(s,t)g(s,t)h(s,t)（s,t 爲變數）所決定的最小積包絡面Ω上的點(x,y,z)滿足：

$$\begin{cases} ghx+fhy+fgz=3fgh \\ (g_s h+gh_s)x+(f_s h+fh_s)y+(fg_s+gf_s)z=3(f_s gh+fg_s h+fgh_s) \\ (g_t h+gh_t)x+(f_t h+fh_t)y+(fg_t+gf_t)z=3(f_t gh+fg_t h+fgh_t) \end{cases}$$

其中 $f_s=\frac{\partial f}{\partial s}, g_s=\frac{\partial g}{\partial s}, h_s=\frac{\partial h}{\partial s}$（分別表 f,g,h 對 s 偏微分）…其餘依此類推。

$$\text{解得}\begin{cases} x=F(s,t)=\dfrac{3f^2(g_s h_t-g_t h_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ y=G(s,t)=\dfrac{3g^2(f_t h_s-f_s h_t)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ z=H(s,t)=\dfrac{3h^2(f_s g_t-f_t g_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \end{cases}$$

由上述可得

性質六：空間中曲面ΓP（f(s, t), g(s, t), h(s, t)）的最小積包絡面為

$$\begin{cases} x=F(s,t)=\dfrac{3f^2(g_s h_t-g_t h_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ y=G(s,t)=\dfrac{3g^2(f_t h_s-f_s h_t)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ z=H(s,t)=\dfrac{3h^2(f_s g_t-f_t g_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \end{cases}$$

1.平面與其包絡面的切點：討論曲面Γ與其最小積包絡面Ω的切點

$$\text{(1).當 } s_0,t_0 \text{滿足}\begin{cases} f=\dfrac{3f^2(g_s h_t-g_t h_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ g=\dfrac{3g^2(f_t h_s-f_s h_t)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ h=\dfrac{3h^2(f_s g_t-f_t g_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \end{cases}\text{時}$$

即$\begin{cases} ghx+fhy+fgz=3fgh\cdots(1) \\ (g_s h+gh_s)x+(f_s h+fh_s)y+(fg_s+gf_s)z=3(f_s gh+fg_s h+fgh_s)\cdots(2) \\ (g_t h+gh_t)x+(f_t h+fh_t)y+(fg_t+gf_t)z=3(f_t gh+fg_t h+fgh_t)\cdots(3) \end{cases}$的解爲

(x , y , z)= （f(s_0,t_0), g(s_0,t_0) , h(s_0,t_0)）

代回(2)、(3)得 s_0,t_0 滿足 $\begin{cases} f_s gh+fg_s h+fgh_s=0\cdots(1) \\ f_t gh+fg_t h+fgh_t=0\cdots(2) \end{cases}$

若令V(s,t)=$\frac{9}{2}$fgh即s_0,t_0 滿足 $\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial t}=0$

此時曲面Γ在（f(s_0,t_0), g(s_0,t_0) , h(s_0,t_0)）最小四面體體積V(s,t)=$\frac{9}{2}$fgh可有極大值或極小值。

(2).V(s,t)=$\frac{9}{2}$fgh，若V(s_0,t_0)有極值

$$\Rightarrow\frac{\partial V}{\partial s}=\frac{\partial V}{\partial t}=0\Rightarrow\begin{cases} f_s gh+fg_s h+fgh_s=0 \\ f_t gh+fg_t h+fgh_t=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} f_s gh+fg_s h=-fgh_s \\ f_t gh+fg_t h=-fgh_t \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} (f_s g+fg_s)h=-fgh_s \\ (f_t g+fg_t)h=-fgh_t \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} (f_s g+fg_s)h\cdot h_t=-fgh_s\cdot h_t \\ (f_t g+fg_t)h\cdot h_s=-fgh_t\cdot h_s \end{cases}$$

$$\Rightarrow(f_s g+fg_s)h\cdot h_t=(f_t g+fg_t)h\cdot h_s$$

消去 h$\Rightarrow(f_s g+fg_s)h_t=(f_t g+fg_t)h_s\Rightarrow f(g_s h_t'-g_t h_s)=g(f_t h_s-f_s h_t)$

(f=0 或 g=0 或 h= 0 時平面(gh) x + (fh) y + (fg) z = 3fgh 與座標平面圍不成四面體)

同理，$f(g_s h_t'-g_t h_s)=h(f_s g_t-f_t g_s)$即

s_0,t_0滿足$f(g_s h_t'-g_t h_s)=g(f_t h_s-f_s h_t)=h(f_s g_t-f_t g_s)$

$$\Rightarrow s_0,t_0\text{滿足}\begin{cases} f=\dfrac{3f^2(g_s h_t-g_t h_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ g=\dfrac{3g^2(f_t h_s-f_s h_t)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \\ h=\dfrac{3h^2(f_s g_t-f_t g_s)}{f(g_s h_t-g_t h_s)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_s)} \end{cases}$$

(3).當 s_0, t_0 滿足 $\begin{cases} f=\dfrac{3f^2(g_s h_t - g_t h_s)}{f(g_s h_t - g_t h_s)+g(f_t h_s - f_s h_t)+h(f_s g_t - f_t g_s)} \\ g=\dfrac{3g^2(f_t h_s - f_s h_t)}{f(g_s h_t - g_t h_s)+g(f_t h_s - f_s h_t)+h(f_s g_t - f_t g_s)} \\ h=\dfrac{3h^2(f_s g_t - f_t g_s)}{f(g_s h_t - g_t h_s)+g(f_t h_s - f_s h_t)+h(f_s g_t - f_t g_s)} \end{cases}$

$\Rightarrow s_0, t_0$ 滿足 $f(g_s h_t' - g_t h_s) = g(f_t h_s - f_s h_t) = h(f_s g_t - f_t g_s)$=k（＊）

∵平面(gh) x + (fh) y + (fg) z = 3fgh 所決定的包絡面Ω上點 P（F(s,t),G(s,t),H(s,t)）的切平面恰爲 (gh) x + (fh) y + (fg) z = 3fgh。包絡面Ω上以 P（F(s,t),G(s,t),H(s,t)）切點的切平面的法向量爲

$(F_s, G_s, H_s)\times(F_t, G_t, H_t) = (G_s H_t - G_t H_s, F_t H_s - F_s H_t, F_s G_t - F_t G_s)$=(gh , fh , fg)

而曲面Γ上以(f,g,h)爲切點的切平面的法向量爲

$(f_s, g_s, h_s)\times(f_t, g_t, h_t) = (g_s h_t - g_t h_s, f_t h_s - f_s h_t, f_s g_t - f_t g_s) = (\dfrac{k}{f}, \dfrac{k}{g}, \dfrac{k}{h}) = \dfrac{\mathrm{k}}{\mathrm{fgh}}$(gh , fh , fg)（由＊式）

$\therefore (G_s H_t - G_t H_s):(F_t H_s - F_s H_t):(F_s G_t - F_t G_s) = (g_s h_t - g_t h_s):(f_t h_s - f_s h_t):(f_s g_t - f_t g_s)$

故曲面Γ上以(f,g,h)爲切點的切平面的法向量會平行Ω上過點P（F,G,H）的切平面之法向量，即包絡面Ω與曲面Γ於（$f(s_0,t_0)$, $g(s_0,t_0)$, $h(s_0,t_0)$）=（$F(s_0,t_0)$,$G(s_0,t_0)$,$H(s_0,t_0)$）處有共同的切平面。所以包絡面Ω與曲面Γ相切於此點。由上述可得

性質七：包絡面Ω與曲面Γ於（$f(s_0,t_0)$, $g(s_0,t_0)$, $h(s_0,t_0)$）=（$F(s_0,t_0)$,$G(s_0,t_0)$,$H(s_0,t_0)$）處有共同的切平面。所以包絡面Ω與曲面Γ相切於此點，此時曲面Γ在（$f(s_0,t_0)$, $g(s_0,t_0)$, $h(s_0,t_0)$）處最小四面體體積 $V(s,t)=\dfrac{9}{2}fgh$ 可有極大值或極小值。

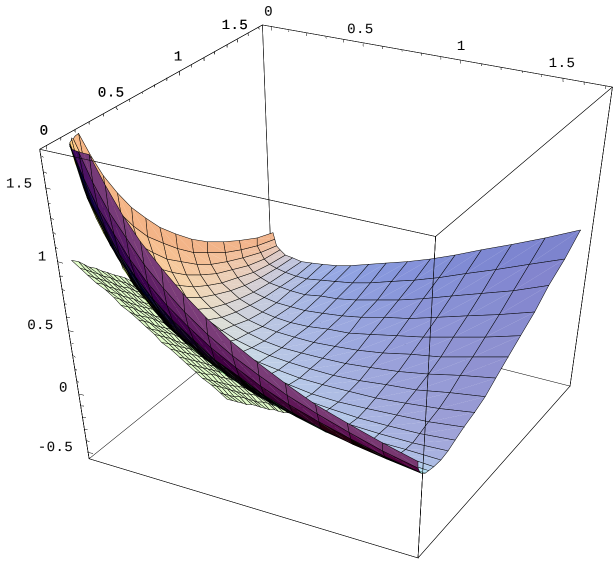
2. 在空間中由平面 E：x+y+z=1 上任意點(s,t,1–t–s)所決定的平面系：F(s,t)：t(1–t–s)x+s(1–t–s)y+stz=3ts(1–t–s)，平面系 F(s,t)形成的最小積包絡面Ω上任意點（x,y,z）滿足：

$$\begin{cases} \text{s(1-t-s)x+t(1-t-s)y+tsz=3ts(1-t-s)} \quad \text{L (1)} \\ \text{-sx+(-2t-s+1)y+sz=3s(-2t-s+1)L (將1式各項係數對t偏微分)} \\ \text{(-2s-t+1)x-ty+tz=3t(-2s-t+1)L (將1式各項係數對s偏微分)} \end{cases}$$

解得：$x=3t^2$, $y=3s^2$, $z=3(1-t-s)^2$

即最小積包絡面Ω：$(\dfrac{x}{3})^{\frac{1}{2}} + (\dfrac{y}{3})^{\frac{1}{2}} + (\dfrac{z}{3})^{\frac{1}{2}} = 1$

當$\begin{cases} 3s^2 = s \\ 3t^2 = t \\ 3(1-s-t)^2 = (1-s-t) \end{cases}$ 解得(s,t,1-s-t)=$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$



在此點平面 E：x+y+z=1 與包絡面Ω相切

而過平面 E：x+y+z=1 上第一掛限中的點(a,b,c)

與座標平面圍成四面體的最小體積為$\frac{9abc}{2}$，

當(a,b,c)=$(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})$ 時$\frac{9abc}{2}$有最大值。

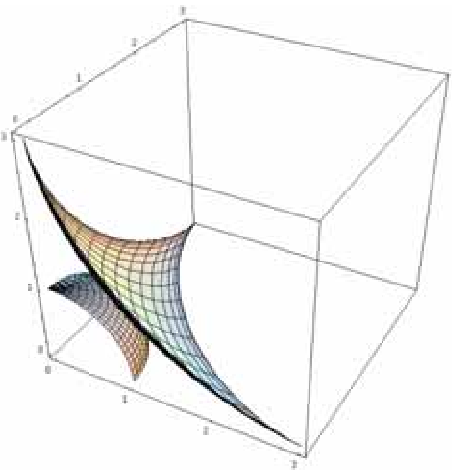
（平面 E 與其包絡面Ω如右圖）

3. 球面：$\Gamma: x^2+y^2+z^2=1$ 上任一點為

$(\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha)$其包絡曲面為

Γ’$(3\cos^3\alpha\cos^3\beta, 3\cos^3\alpha\sin^3\beta, 3\sin^3\alpha)$

$\Gamma': (\frac{x}{3})^{\frac{2}{3}}+(\frac{y}{3})^{\frac{2}{3}}+(\frac{z}{3})^{\frac{2}{3}}=1$ 當



$$\begin{cases} 3\cos^3\alpha\cos^3\beta = \cos\alpha\cos\beta \\ 3\cos^3\alpha\sin^3\beta = \cos\alpha\sin\beta \\ 3\sin^3\alpha = \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha\cos\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\alpha\sin\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

球面Γ與包絡曲面Γ’相切於$(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$、 $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})\cdots$等八點。

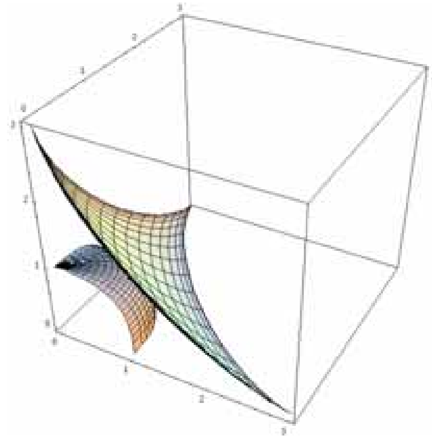
（球面Γ與包絡曲面Γ’於第一卦限的圖形如上頁）

結論 5. 一般而言若$\Gamma: (\frac{x}{a})^k+(\frac{y}{b})^k+(\frac{z}{c})^k=1, k=\frac{2m}{2n+1} (m,n\in N)$，則可得到包絡面

$\Gamma': (\frac{x}{3a})^{\frac{k}{k+1}}+(\frac{y}{3b})^{\frac{k}{k+1}}+(\frac{z}{3c})^{\frac{k}{k+1}}=1$且Γ、Γ’ 切點為P(x, y, z)滿足$\left|\frac{x}{a}\right|=\left|\frac{y}{b}\right|=\left|\frac{z}{c}\right|=(\frac{1}{3})^{\frac{1}{k}}$

如：$\Gamma: x^{\frac{14}{5}}+y^{\frac{14}{5}}+z^{\frac{14}{5}}=1 \Rightarrow \Gamma': (\frac{x}{3})^{\frac{14}{19}}+(\frac{y}{3})^{\frac{14}{19}}+(\frac{z}{3})^{\frac{14}{19}}=1$

（曲面Γ與包絡曲面Γ’於第一卦限的圖形如右）

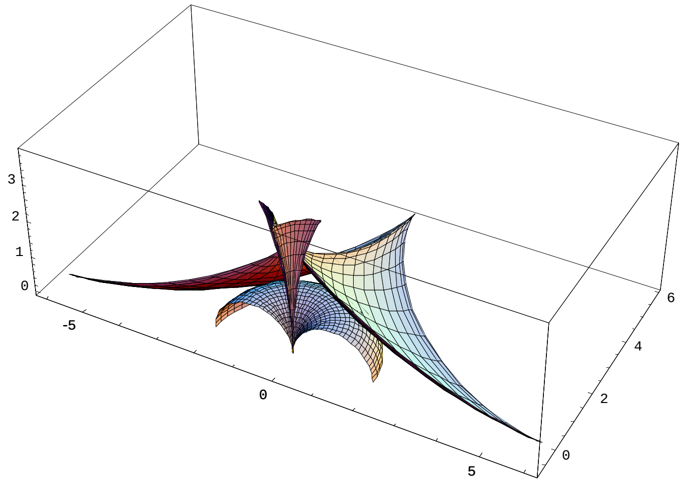


4. 甜甜圈體曲面Γ：((1+Cosα)Cosβ,(1+Cosα)Sinβ,Sinα) 其包絡曲面為

Γ'(3 (1+Cosα)cosα$\cos^3\beta$, 3(1+Cosα)cosα$\sin^3\beta$,3 (1-Cosα)sinα)

第一卦限的切點為$(\frac{5}{3\sqrt{2}},\frac{5}{3\sqrt{2}},\frac{\sqrt{3}}{3})$

（曲面Γ與包絡曲面Γ'的部分圖形如下）



5..三度空間曲面的最小積包絡面也有迭代現象：

原始曲面Γ（f(s,t), g(s,t) , h(s,t)）的最小積包絡面Ω（F(s,t),G(s,t),H(s,t)）若s_0,t_0 滿足（$f(s_0,t_0)$, $g(s_0,t_0)$, $h(s_0,t_0)$）=（$F(s_0,t_0)$,$G(s_0,t_0)$,$H(s_0,t_0)$）則曲面Γ與包絡面Ω在此處相切故

$$(G_sH_t-G_tH_s):(F_tH_s-F_sH_t):(F_sG_t-F_tG_s)=(g_sh_t-g_th_s):(f_th_s-f_sh_t):(f_sg_t-f_tg_s)$$

（設比值為 k，即$(G_sH_t-G_tH_s)=k(g_sh_t-g_th_s)\cdots$）

再以Ω：（F(s,t),G(s,t),H(s,t)）迭代產生包絡面Ω' (**F***(s,t),**G***(s,t),**H***(s,t))，其中

$$\begin{cases} F^*(s,t)=\dfrac{3F^2(G_sH_t-G_tH_S)}{F(G_sH_t-G_tH_S)+G(F_tH_s-F_sH_t)+H(F_sG_t-F_tG_S)} \\ G^*(s,t)=\dfrac{3G^2(F_tH_s-F_sH_t)}{F(G_sH_t-G_tH_S)+G(F_tH_s-F_sH_t)+H(F_sG_t-F_tG_S)} \\ H^*(s,t)=\dfrac{3H^2(F_sG_t-F_tG_S)}{F(G_sH_t-G_tH_S)+G(F_tH_s-F_sH_t)+H(F_sG_t-F_tG_S)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} F^*(s_0,t_0)=\dfrac{3f^2\cdot k(g_sh_t-g_th_S)}{f\cdot k(g_sh_t-g_th_S)+g\cdot k(f_th_s-f_sh_t)+h\cdot k(f_sg_t-f_tg_S)}=f(s_0,t_0) \\ G^*(s_0,t_0)=\dfrac{3g^2\cdot k(f_th_s-f_sh_t)}{f\cdot k(g_sh_t-g_th_S)+g\cdot k(f_th_s-f_sh_t)+h\cdot k(f_sg_t-f_tg_S)}=g(s_0,t_0) \\ H^*(s_0,t_0)=\dfrac{3h^2\cdot k(f_sg_t-f_tg_S)}{f\cdot k(g_sh_t-g_th_S)+g\cdot k(f_th_s-f_sh_t)+h\cdot k(f_sg_t-f_tg_S)}=h(s_0,t_0) \end{cases}$$

⇒(**F***(s_0,t_0),**G***(s_0,t_0),**H***(s_0,t_0))=（$f(s_0,t_0)$, $g(s_0,t_0)$, $h(s_0,t_0)$）=（$F(s_0,t_0)$,$G(s_0,t_0)$,$H(s_0,t_0)$）

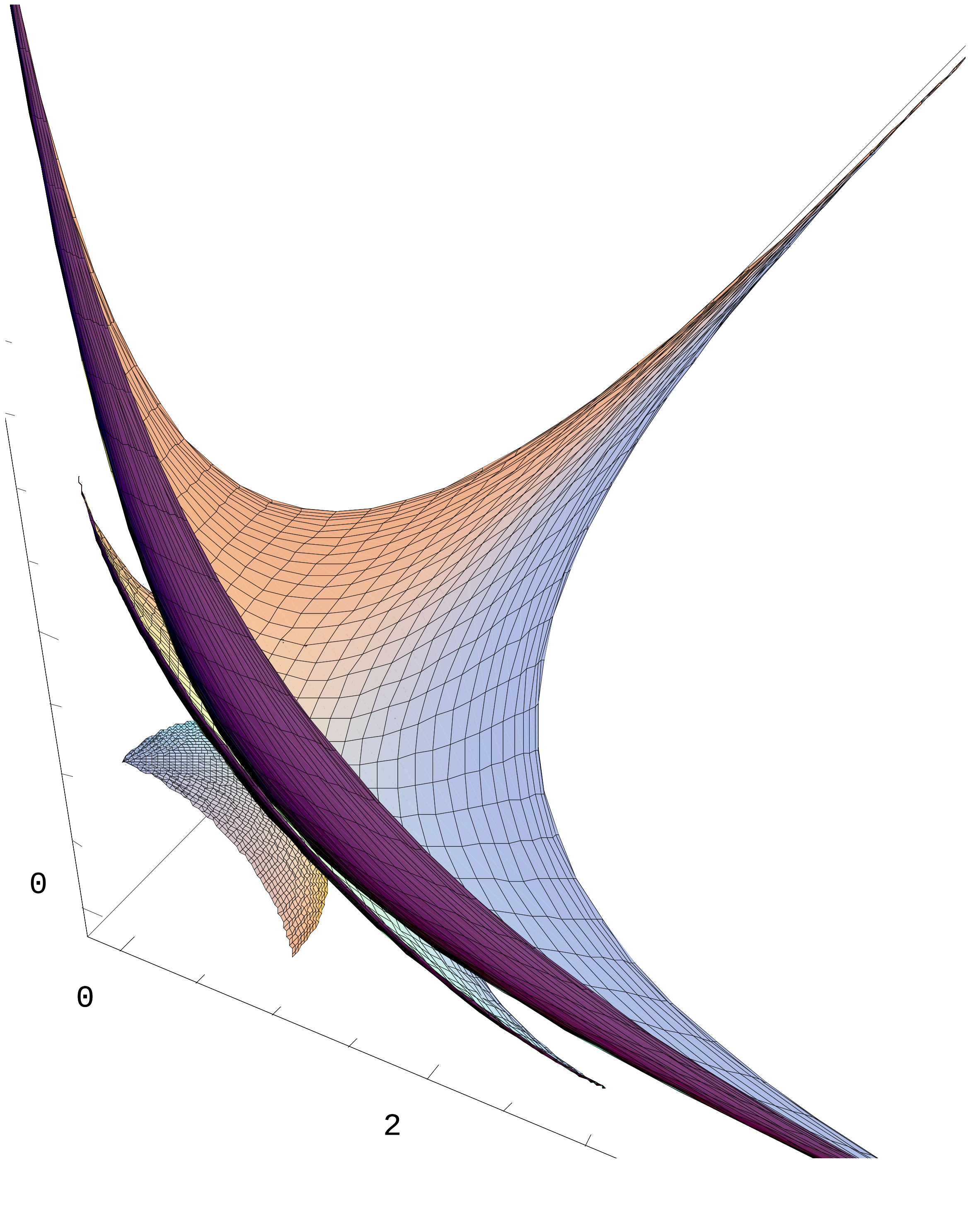
⇒ 原始曲面Γ、包絡面Ω、迭代所得包絡面Ω'均相切於同一點。如此不斷迭代所所產生的最小積包絡面會層層相切於同一點。由上述可得

性質八：原始曲面Γ、包絡面Ω、迭代所得包絡面Ω' 均相切於同一點。如此不斷迭代所所產生的最小積包絡面會層層相切於同一點。

例：如圖爲始曲面Γ

(球面): $(\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha)$⇒包絡面Ω: $(3\cos^3\alpha\cos^3\beta, 3\cos^3\alpha\sin^3\beta, 3\sin^3\alpha)$

⇒迭代所得包絡面Ω’: $(9\cos^5\alpha\cos^5\beta, 9\cos^5\alpha\sin^5\beta, 9\sin^5\alpha)$（由內而外Γ→Ω→Ω’）



陸、 結論與討論

一、1 曲線Γ(f(t) , g(t))的最小積包絡線Γ’上的點(F(t) , G(t))則

$$\begin{cases} F(t)=\dfrac{2(f(t))^2 g'(t)}{f(t)g'(t)-f'(t)g(t)} \\ G(t)=\dfrac{2(g(t))^2 f'(t)}{g(t)f'(t)-g'(t)f(t)} \end{cases}$$

2.曲線Γ(f(t) , g(t))與最小積直線g(t) x+ f(t)y=2f(t)g(t)垂直的法線直線族L’： f(t)x-g(t)y=$(f(t))^2$- $(g(t))^2$所決定的法線包絡線點(**F**(t) , **G**(t))則

$$\begin{cases} \mathrm{F(t)=f(t)+\dfrac{g(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}} \\ \mathrm{G(t)=g(t)+\dfrac{f(t)[f(t)f'(t)-g(t)g'(t)]}{f'(t)g(t)-f(t)g'(t)}} \end{cases}$$

3. 空間中曲面Γ（f(s,t), g(s,t) , h(s,t)）的最小積包絡面Ω上的點(F(s,t),G(s,t),H(s,t))則

$$\begin{cases} F(s,t)=\dfrac{3f^2(g_s h_t-g_t h_S)}{f(g_s h_t-g_t h_S)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_S)} \\ G(s,t)=\dfrac{3g^2(f_t h_s-f_s h_t)}{f(g_s h_t-g_t h_S)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_S)} \\ H(s,t)=\dfrac{3h^2(f_s g_t-f_t g_S)}{f(g_s h_t-g_t h_S)+g(f_t h_s-f_s h_t)+h(f_s g_t-f_t g_S)} \end{cases}$$

二、較爲特殊的參數曲線所成的最小積包絡線：

1. 直線(t , at+b)即 f(t) =t，g(t) =at+b（ab≠0）所產生的最小積包絡線爲
   $a^2x^2+2axy+y^2+4abx-4by+4b^2=0$（ab≠0 時表一拋物線）

   此最小積包絡線爲一拋物線$\dfrac{|x-ay|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{(x+\dfrac{2ab}{a^2+1})^2+(y-\dfrac{2b}{a^2+1})^2}$ ，非常特別。

2 .曲線(t , t^r)即f(t) =t， g(t)=t^r（r≠1）的最小積包絡線爲 $\begin{cases} x=-\dfrac{2r}{1-r}t \\ y=\dfrac{2}{1-r}t^r \end{cases}$

   當 r=–1 所取曲線$(t\,,\dfrac{k}{t})$爲等軸雙曲線 xy=k，**其包絡線爲本身**。

3.直線(t , at+b)即 f(t) =t，g(t) =at+b（ab≠0）所產生的法線包絡線爲
   $x^2-2axy+a^2y^2+4abx-4by+4b^2=0$ 非常特別的也爲拋物線且與最小積包絡線形成的拋物線有共同的**焦點**，**準線**互相**垂直於原點** $\dfrac{|x-ay|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{(x+\dfrac{2ab}{a^2+1})^2+(y-\dfrac{2b}{a^2+1})^2}$

三、包絡圖形與其原圖形的切點關係：

1.原曲線Γ（f(t) , g(t)）與最小積包絡線Γ’ (F(t) , G(t))，若存在參數t_0使（$f(t_0)$, $g(t_0)$）=（$F(t_0)$, $G(t_0)$）曲線Γ與包絡線Γ’ 在（$f(t_0)$, $g(t_0)$）=（$F(t_0)$, $G(t_0)$）處有共同的切線，即兩曲線在此相切，且此時最小面積$2\left|f(t)g(t)\right|$有極大值或極小值。

2.極坐標曲線(P(θ)cos θ , P(θ)sin θ) 與所對應的包絡線$(2\cos^2\theta(P(\theta)\sin\theta)',-2\sin^2\theta(P(\theta)\cos\theta)')$的切點滿足：

$$\begin{cases} 2\cos^2\theta(P(\theta)\sin\theta)'=P(\theta)\cos\theta \\ -2\sin^2\theta(P(\theta)\cos\theta)'=P(\theta)\sin\theta \end{cases} \text{解得}\ \frac{P(\theta)}{P'(\theta)}=-\tan 2\theta \text{ 。}$$

3. 原曲線Γ（f(t) , g(t)）與法線包絡線Γ’ (**F**(t) , **G**(t))，若存在參數t_0使（$f(t_0)$, $g(t_0)$）=（**F**(t_0) , **G**(t_0)）曲線Γ與法線包絡線Γ’ 在（$f(t_0)$, $g(t_0)$）=（$F(t_0)$, $G(t_0)$）處有共同的切線，即兩曲線在此相切。

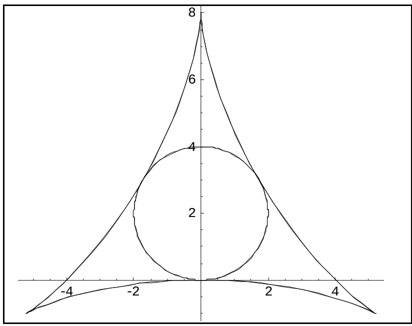
4.空間中原曲面Γ（f(s,t), g(s,t) , h(s,t)）與最小積包絡曲面Γ’ (F(s,t),G(s,t),H(s,t))若存在參數s_0,t_0使（$f(s_0,t_0)$, $g(s_0,t_0)$, $h(s_0,t_0)$）=（$F(s_0,t_0)$, $G(s_0,t_0)$, $H(s_0,t_0)$），則原曲面Γ與最小積包絡曲面Γ’ 也會相切於此點（$f(s_0,t_0)$, $g(s_0,t_0)$, $h(s_0,t_0)$）且此處的最小四面體體積$V(s,t)=\frac{9}{2}\left|fgh\right|$有極大值或極小值。

四、包絡線(面)的迭代現象：

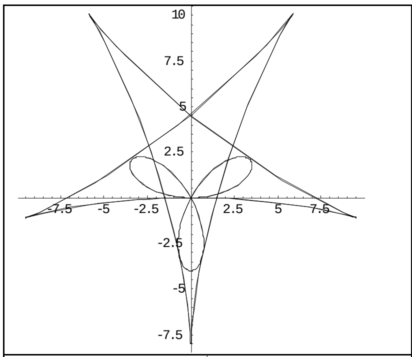
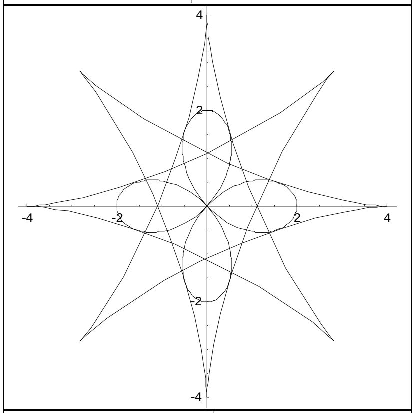
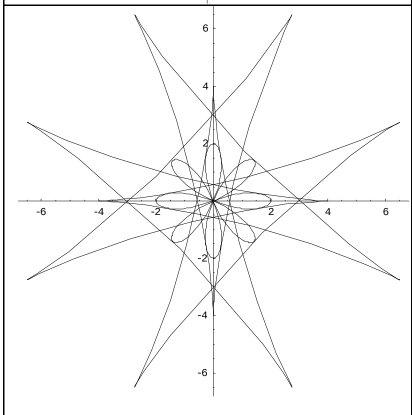
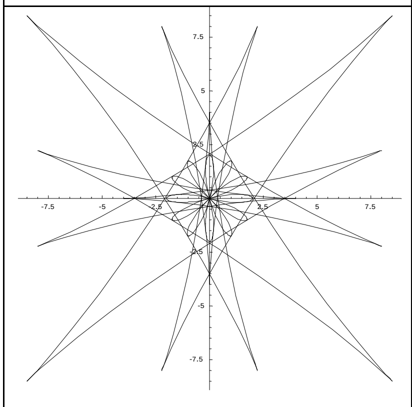
1. 原始曲線(面)Γ與其所產生的最小積包絡曲線(面)Γ’ 若切於 P 點，則再由包絡曲線(面)Γ’ 所產生的最小積包絡曲線(面)Γ” ，這三個曲線(面)Γ、Γ’ 、Γ”會切於同一點 P，如此一來，不斷迭代所產生的最小積包絡線(面)會層層相切於同一點。
2. 原始曲線Γ與其所產生的法線包絡曲線Γ’ 若切於 P 點，則再由法線包絡曲線Γ’ 所產生的法線包絡曲線Γ” ，這三個曲線 Γ、Γ’ 、Γ”會切於同一點 P，如此一來，不斷迭代所產生的法線包絡線也會層層相切於同一點。

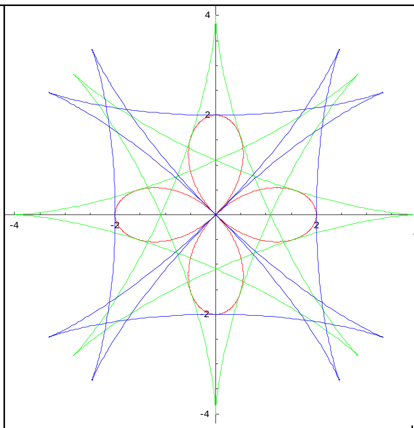
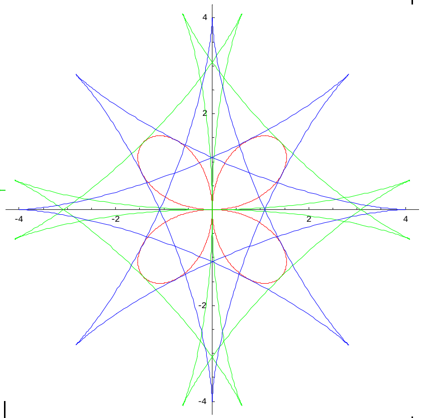
柒、　未來展望

包絡現象是很有趣且很有研究性的，例如



左圖為圓形 r= P(θ)=asin θ (a>0)之圖形與其包絡線並立，而其中相當有趣的是，此包絡線的轉折點連線竟是正三角形，且此正三角形的邊長為 $3a\sin\frac{\pi}{3}$，而且仔細看看那三個切點，發現了嗎？其實那也是正三角形喔，如此看來似乎包絡有其規律性，讓我們再看看其他的圖形吧。

<table>
<tr><td>
</td><td>左圖爲三瓣玫瑰線 r= P(θ)=asin3 θ (a>0)之圖形與其包絡線並立，神奇的是，此包絡線的轉折點連起來爲正五邊形，且其邊長爲 $5a\sin\dfrac{\pi}{5}$ ，更好玩的是，仔細瞧瞧圖形內部，其實也暗藏了一個正五邊形喔。</td></tr>
<tr><td>
</td><td>左圖爲四辦玫瑰線 r= P(θ)=acos2 θ (a>0)之圖形與其包絡線並立，好玩的是，此包絡線的轉折點連線爲一個正八邊形，且其邊長爲 $4a\sin\dfrac{\pi}{8}$ ，仔細一瞧，裡面也蘊含著正四邊形和正八邊形呢！</td></tr>
<tr><td>
</td><td>左圖爲 8 瓣玫瑰線 r=P(θ)=cos4 θ 之圖形與其包絡線並立，雖然此圖並非正八邊形，但非常的對稱，其包絡線的轉折點其中四個點連線爲一個正方形，仔細看看內部也可以發現許多正四邊形喔！</td></tr>
<tr><td>
</td><td>左圖爲 12 瓣玫瑰線 r= P(θ)=2cos6 θ 之圖形與其包絡線並立，此圖非常的對稱，其包絡線的轉折點中四個較突出的點連線爲一個正方形，另外八個轉折點可連成兩個正方形。內部也可以發現許多正多邊形喔！</td></tr>
</table>

法線包絡線與最小積包絡線之間有著奇妙的關係，有些是平移（三瓣玫瑰線）、有些是繞中心旋轉 45^{o}（如單位圓、螺線、八瓣玫瑰線）、有些有奇妙的對偶關係（如四瓣玫瑰線），但他們的一般性規則或原理還有待進一步研究。		

大體說來，包絡線圖形皆有其特性，我們可以探索了部分從來沒有看過的圖形及特性，而其中的更多奧妙希望以後能有機會再繼續研究探討。

關於三度空間的迭代性，由於篇幅及能力的有限未能做進一步探討，也希望以後還能有機會作延伸。

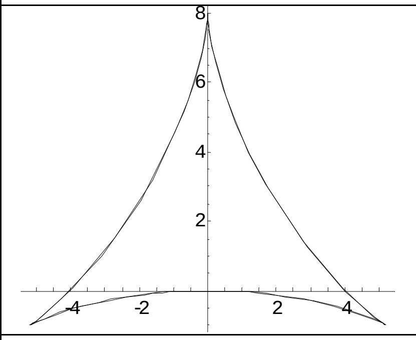
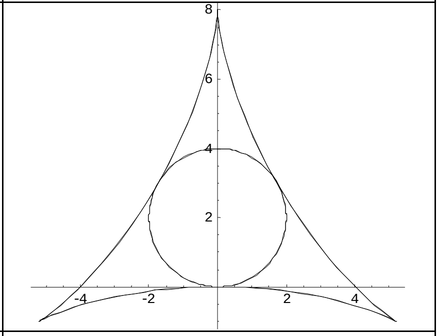
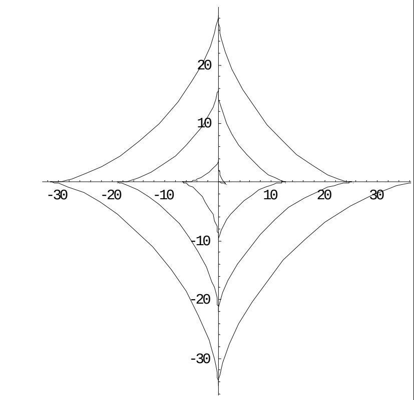
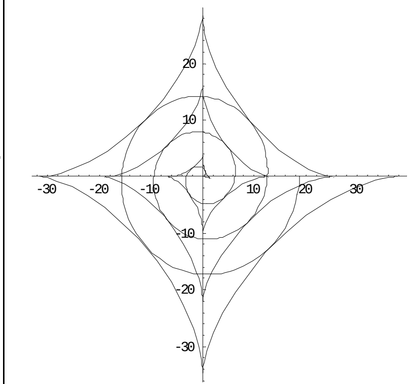
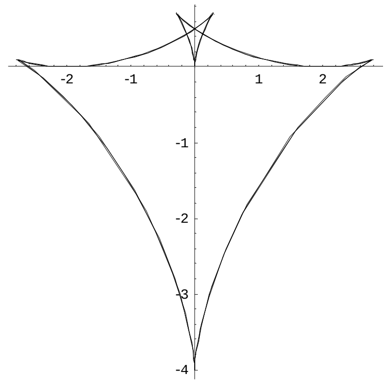
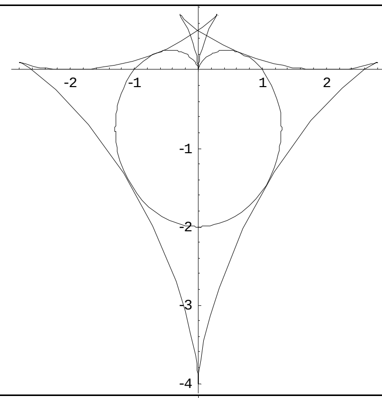
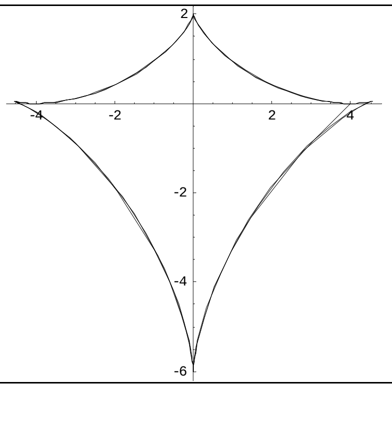
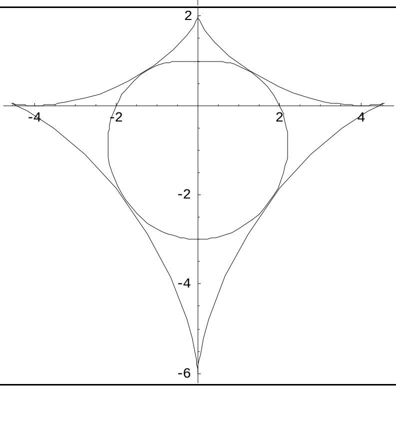
捌、　參考資料

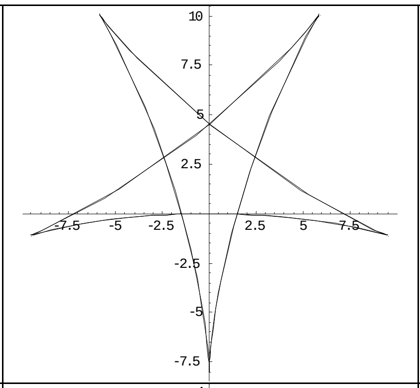
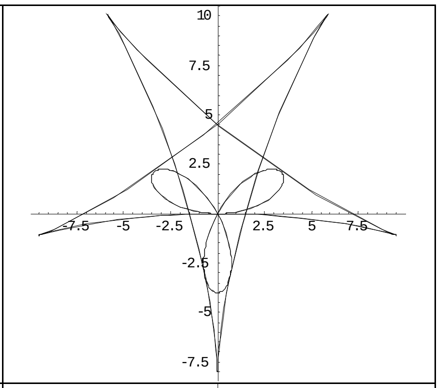
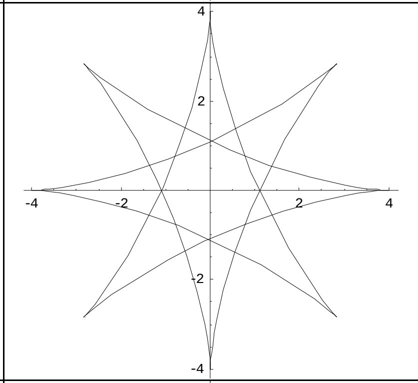
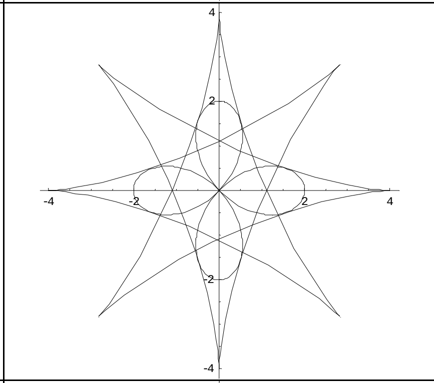
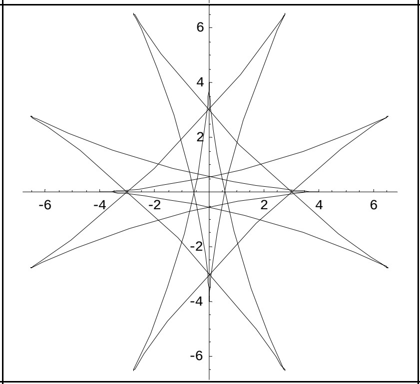
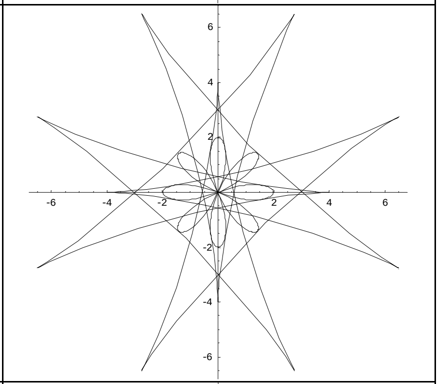
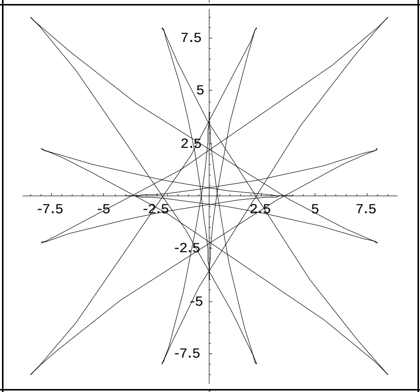
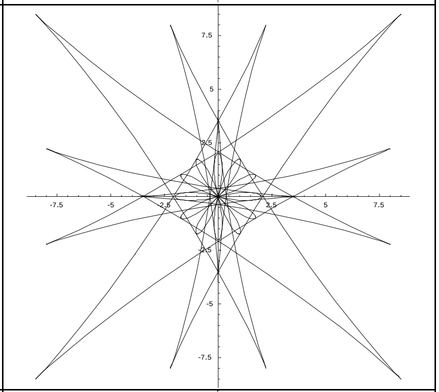
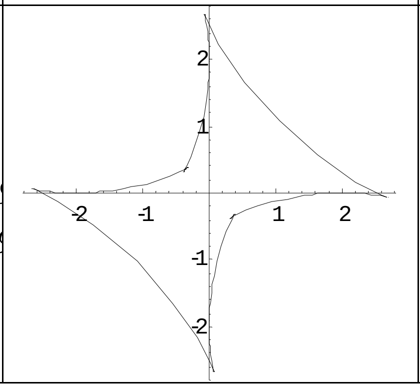
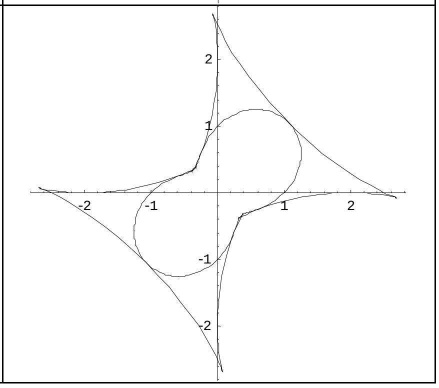
1.洪維恩　Mathematica 4.0。

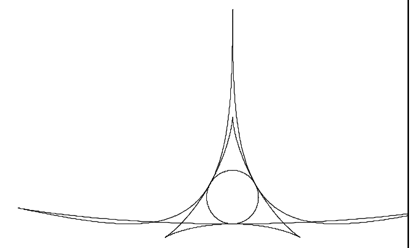
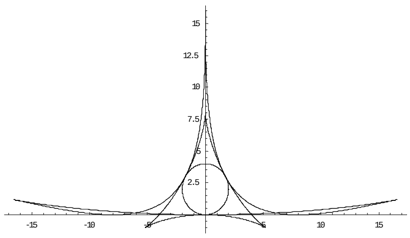
2.南一版 基礎數學第一冊、第四冊。

附錄：我們所做過的圖形整理：

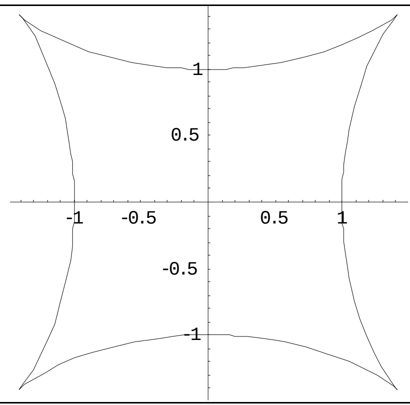
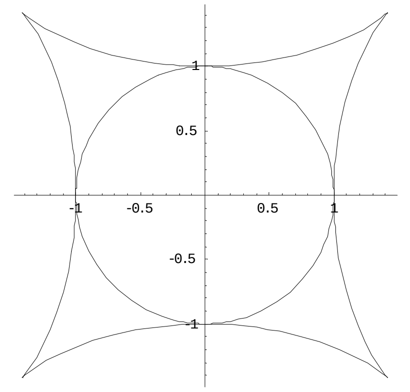
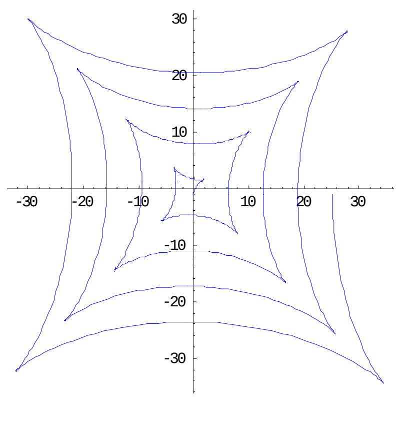
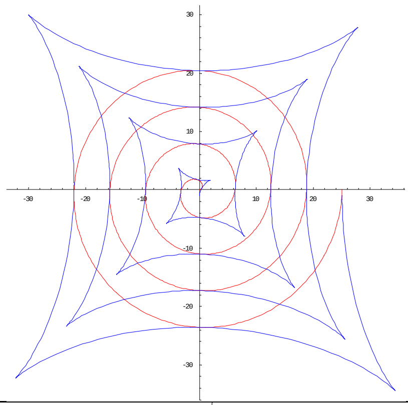
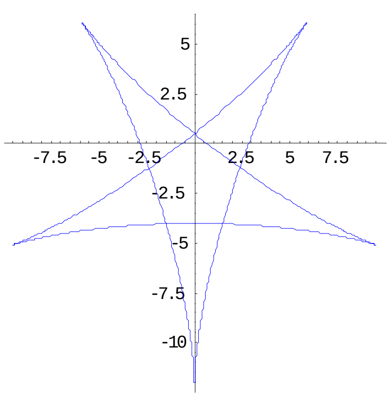
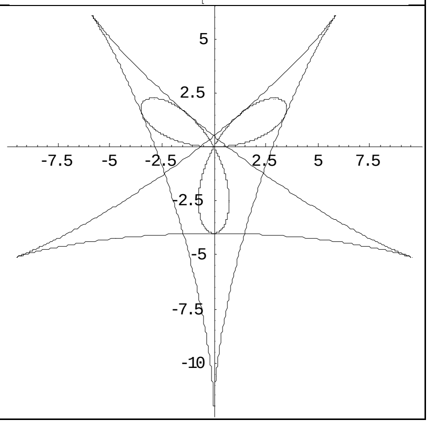
（一：最小積包絡線）

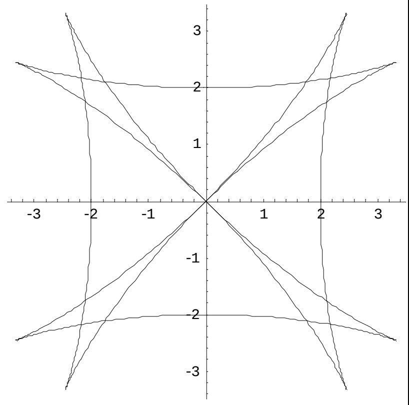
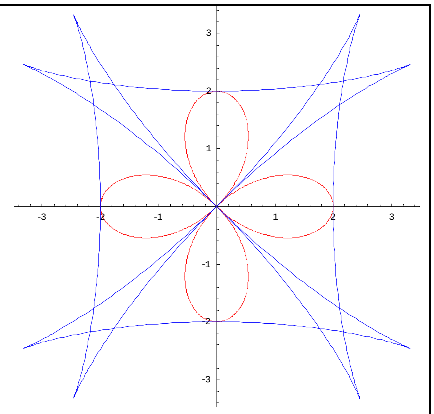
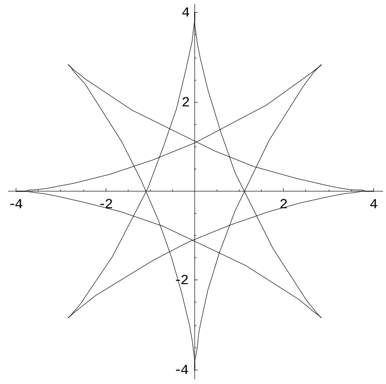
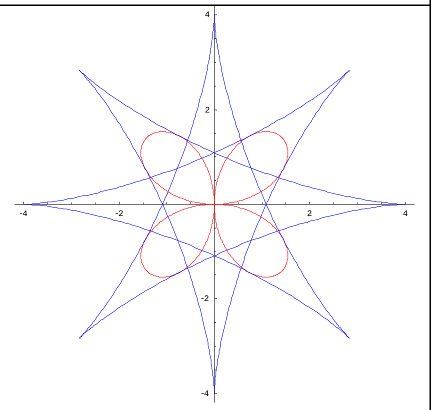
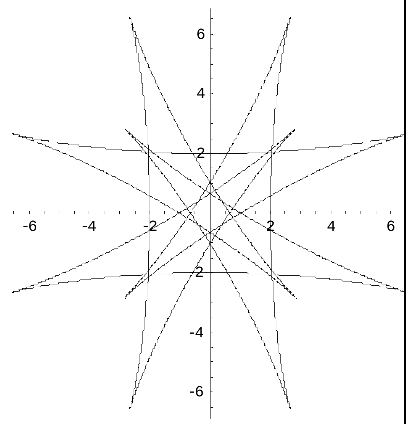
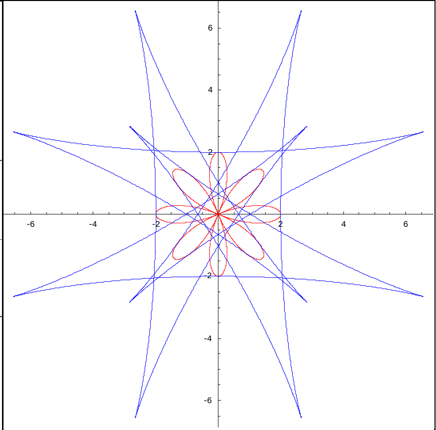
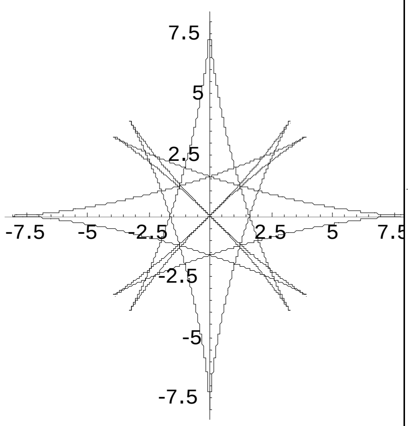
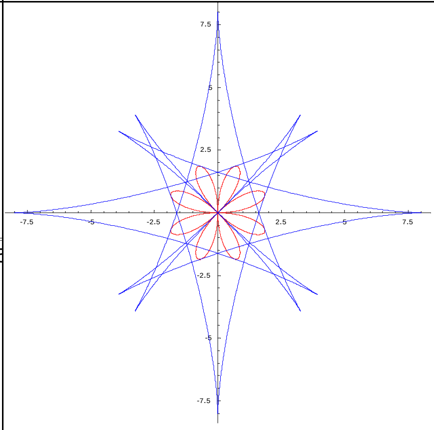
說明	最小積包絡線	原曲線與最小積包絡線並立
曲線：圓 r= P(θ)=4sin θ ， 最小積包絡線： $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(4\sin 2\theta) \\ y = -2\sin^2\theta(4\cos 2\theta) \end{cases}$		
曲線：螺線 r= P(θ)= θ ， 最小積包絡線： $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(\sin\theta + \theta\cos\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(\theta\sin\theta - \cos\theta) \end{cases}$		
曲線：心臟線(一) r= P(θ)=1-sin θ ， 最小積包絡線： $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(\cos\theta - \sin 2\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(\sin\theta + \cos 2\theta) \end{cases}$		
曲線：心臟線(二) r= P(θ)=2-sin θ ， 最小積包絡線： $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(2\cos\theta - \sin 2\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(2\sin\theta + \cos 2\theta) \end{cases}$		

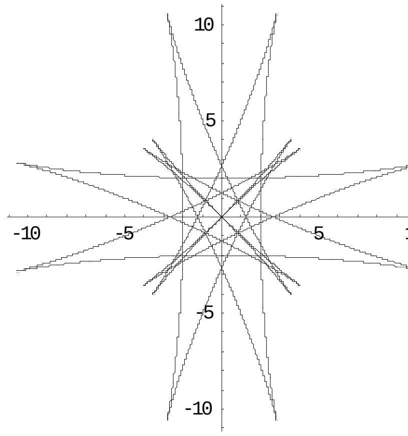
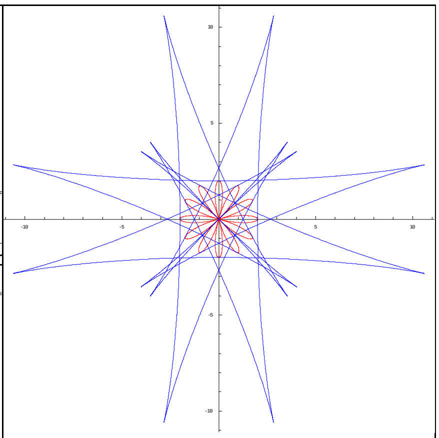
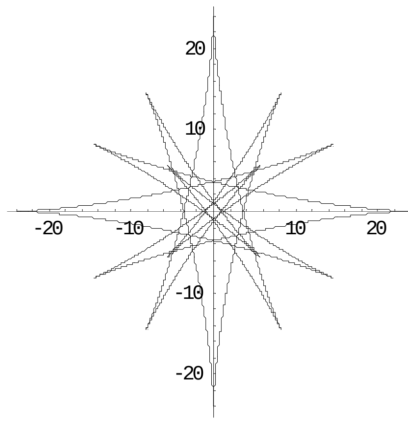
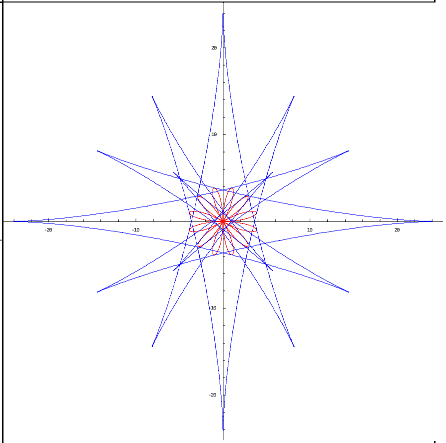
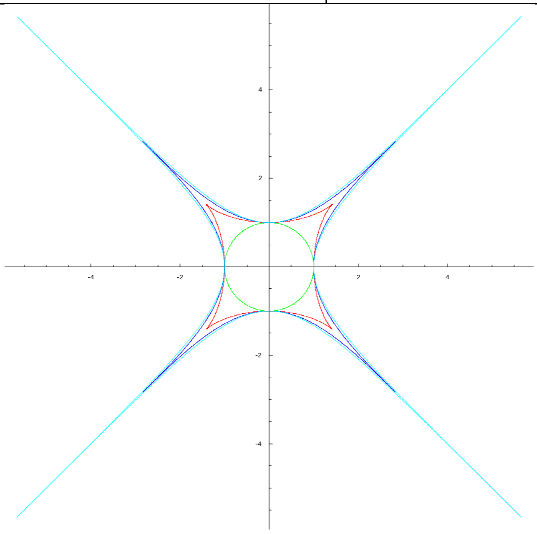
曲線：三瓣玫瑰線 r= P(θ)=4sin3 θ ， 最小積包絡線： $\begin{cases} x = 4\cos^2\theta(4\sin 4\theta - 2\sin 2\theta) \\ y = -4\sin^2\theta(4\cos 4\theta + 2\cos 2\theta) \end{cases}$		
曲線：四瓣玫瑰線 r= P(θ)=2cos2 θ ， 最小積包絡線： $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(3\cos 3\theta - \cos\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(3\sin 3\theta + \sin\theta) \end{cases}$		
曲線：八瓣玫瑰線 r= P(θ)=2cos4 θ ， 最小積包絡線： $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(5\cos 5\theta - 3\cos 3\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(3\sin 3\theta + 5\sin 5\theta) \end{cases}$		
曲線 r= P(θ)=2cos6 θ（十二瓣玫瑰線），最小積包絡線： $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(7\cos 7\theta - 5\cos 5\theta) \\ y = 2\sin^2\theta(7\sin 7\theta + 5\sin 5\theta) \end{cases}$		
曲線 r= P(θ)=sin θ cos θ +1（形狀如花生殼），代入＊＊式得： $\begin{cases} x = 2\cos^2\theta(3\sin\theta\cos^2\theta - \sin\theta + \cos \\ y = 2\sin^2\theta(3\sin^2\theta\cos\theta + \sin\theta - \cos \end{cases}$		

圓：$x^2+(y-2)^2=4$⇒最小積包絡線 $(2\cos^2\theta(4\sin 2\theta),-2\sin^2\theta(4\cos 2\theta))$ $(2\cos^2\theta(4\sin 2\theta),-2\sin^2\theta(4\cos 2\theta))$ ⇒最小積包絡線 $(-64\cos^5\theta\sin\theta,16\sin^2\theta\cos^2 2\theta)$ 層層包絡且有相同切點$(\pm\sqrt{3},3)$、 (0,0)		

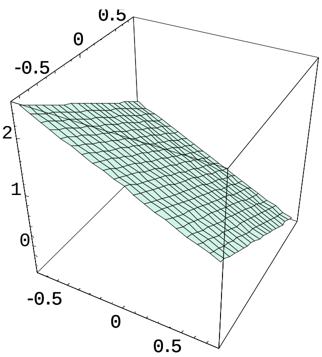
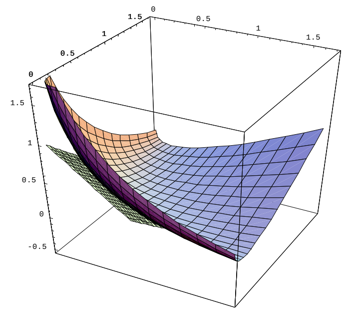
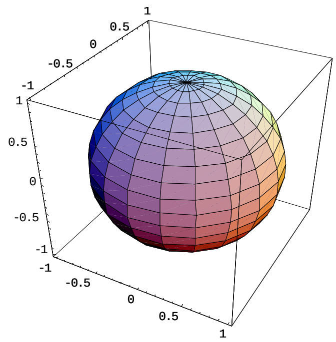
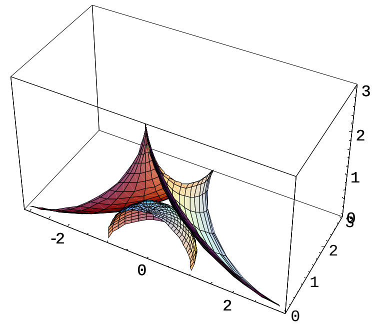
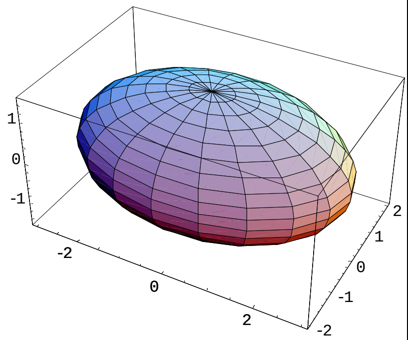
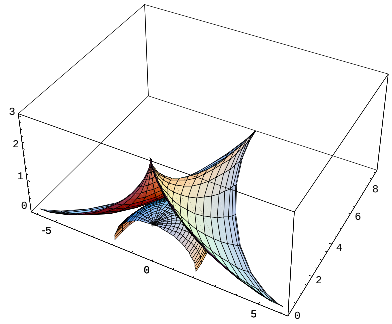
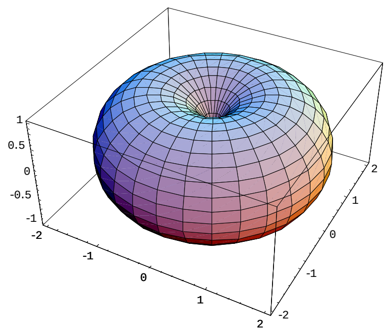
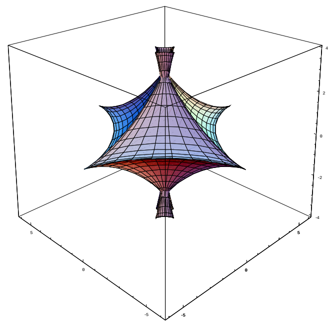
（法線包絡線）

說明	法線包絡線	原曲線與法線包絡線並立
曲線：圓$x^2+y^2=1$， 法線包絡線： $\begin{cases} x=\cos\theta+\sin\theta\sin 2\theta \\ y=\sin\theta+\cos\theta\sin 2\theta \end{cases}$		
曲線：螺線 r= P(θ)= θ ， 法線包絡線： $\begin{cases} x=2\cos^2\theta(\sin\theta+\theta\cos\theta) \\ y=2\sin^2\theta(\theta\sin\theta-\cos\theta) \end{cases}$		
曲線：三瓣玫瑰線 r= P(θ)=4sin3 θ ， 法線包絡線： $\begin{cases} x=6\sin 4\theta-4\sin 6\theta \\ y=-2(1+3\cos 4\theta+2\cos 6\theta) \end{cases}$		

曲線：四瓣玫瑰線(一) r= P(θ)=2cos2 θ ， 法線包絡線： $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(2\cos\theta+5\cos 3\theta-3\cos 5\theta) \\ y=\frac{1}{2}(-2\sin\theta+5\sin 3\theta+3\sin 5\theta) \end{cases}$		
曲線：四瓣玫瑰線(二) r= P(θ)=2cos2 θ ， 法線包絡線： $\begin{cases} x=4\sin^3\theta(2+3\cos 2\theta) \\ y=-4\cos^3\theta(-2+3\cos 2\theta) \end{cases}$		
曲線：八瓣玫瑰線(一) r= P(θ)=2cos4 θ ， 法線包絡線： $\begin{cases} x=\frac{1}{2}(3\cos\theta-\cos 3\theta+7\cos 5\theta-5\cos 7\theta) \\ y=\frac{1}{2}(3\sin\theta+\sin 3\theta+7\sin 5\theta+5\sin 7\theta) \end{cases}$		
曲線：八瓣玫瑰線(二) r= P(θ)=2cos4 θ ， 法線包絡線： $\begin{cases} x=4\sin^3\theta(5+8\cos 2\theta+5\cos 4\theta) \\ y=-4\cos^3\theta(5-8\cos 2\theta+5\cos 4\theta) \end{cases}$		

<table>
<tr>
<td>曲線：十二瓣玫瑰線(一)
r= P(θ)=2cos6 θ ，
法線包絡線：
$\begin{cases} x=\frac{1}{2}(5\cos3\theta-3\cos5\theta+9\cos7\theta-7\cos9\theta) \\ y=\frac{1}{2}(5\sin3\theta+3\sin5\theta+9\sin7\theta+7\sin9\theta) \end{cases}$</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>曲線：十二瓣玫瑰線(二)
r= P(θ)=2cos6 θ ，
法線包絡線：
$\begin{cases} x=5\sin3\theta-3\sin5\theta+9\sin7\theta-7\sin9\theta \\ y=-(5\cos3\theta+3\cos5\theta+9\cos7\theta+7\cos9\theta) \end{cases}$</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>圓：x^2+y^2 =14⇒法線包絡線(cos θ +sin θ sin2 θ ,sin θ +cos θ sin2 θ)⇒迭代法線包絡線($\frac{1}{4}$(10cos θ -5cos3 θ -cos5 θ),$\frac{1}{4}$(10sin θ +5sin3 θ -sin5 θ)) ⇒($\frac{1}{8}$(35cos θ -7cos5 θ -21cos3 θ +cos7 θ),$\frac{1}{8}$ (35sin θ -7sin5 θ +21sin3 θ -sin7 θ))層層包絡且有相同切點(±1,0)、(0,±1)</td>
<td colspan="2"></td>
</tr>
</table>

（空間中曲面的包絡面）

說明	曲面	曲面與包絡面並立
平面		
球面		
橢圓體		
甜甜圈曲面		

空間中的迭代現象：
如圖爲始曲面Γ(球面):
$(\cos\alpha\cos\beta, \cos\alpha\sin\beta, \sin\alpha) \Rightarrow$
包絡面Ω:
$(3\cos^3\alpha\cos^3\beta, 3\cos^3\alpha\sin^3\beta, 3\sin^3\alpha)$
$\Rightarrow$迭代所得包絡面Ω’**:**
$(9\cos^5\alpha\cos^5\beta, 9\cos^5\alpha\sin^5\beta, 9\sin^5\alpha)$
（由內而外$\Gamma\rightarrow\Omega\rightarrow\Omega'$）