台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：死亡巧克力－切切割割好計謀

得獎獎項：大會獎佳作

學　　校：國立彰化高級中學

作　　者：游鎧蔚、蔡鴻偉

評語與建議事項：

作者自創「死亡巧克力遊戲」，企圖找尋其必勝策略。

作者簡介

我的名字叫做蔡鴻偉，現就讀於彰化高中二年級。因爲從小對數學有興趣，覺得數學很有趣，又很深奧。上了高中後，在一個機會下，可以對數學做更進一步的研究及探討。

這次參加國際科展令我又緊張又興奮。雖然過程很辛苦，但經過長久努力之後，終於作品出爐了，相信這次參加科展的經驗會讓我畢生難忘。

死亡巧克力

-----切切割割好計謀

摘要

三角形的邊上取任意多個點，我們可以把這塊大三角形沿著切割線切割成較小塊的三角形，但切割線必須是點（或頂點）和點的連線，而且必須切割三角形，同時可以切任意大小的三角形，如圖（1）與圖（2)。但不可以一開始就取走整個三角形。定義拿到最後一塊三角形的人獲勝，而在多邊型中的玩法與在三角形中相同。

我們分 A、B、C 三種規則來討論，其中 A 規則即是上面提到的玩法，B 規則大部分的玩法和 A 規則都相同，唯一不同的地方在於：A 規則中，只要有一方取到剩下的圖形為三角形，另一方就可以直接取走剩下的三角形，而 B 規則規定即使剩下的圖形已經是三角形，也必須取到剩下的圖形邊上都沒有分點為止。C 規則是限制玩家一次所能取的三角形數來進行遊戲。

我們完成了 A、B、C 規則中三角形與多邊形的必勝策略，並找出必勝策略之間的關聯。

Abstract

Given any numbers of points on the sides of a triangle, the players can cut this triangle into pieces. Each cutting line has to be one, linked between two points given from two different sides. And the player can't have to cut smaller triangles out of the original triangle. The out-cut triangles can be chosen randomly without any restriction in size, just like what's shown in picture（1）and（2）. Meanwhile the first player can't cut the original triangle exactly all out in the very beginning process. We define the player as the winner, who gets the last triangle. And the above way we play can be applies to any multi-side shapes.

We discussed the question respectively in three rules, A, B, and C. Rule A is what we mention above. Rule B is generally the same as rule A, except for the only difference：The rule A , if there is any triangle left , the next player can get it directly, but while in rule B, the every next player has to cut out smaller triangles until no point is left on sides. Rule C proceeds on conditions that there is a limitation to a certain number of triangles cut out at a time.

We has finished the winning tactic respectively in rule A, B, and C in the games with a triangle and multi-side shapes. Furthermore, we find the connection between the winning tactives.

一.前言

（一）研究動機

國中時曾經看過下面這兩道數學思考題，上高中以後，有一天突發奇想，和同學一起討論這個題目，經過幾天討論之後發現，這個題目的發展潛力很大，就決定要好好研究它。


皇后的心機

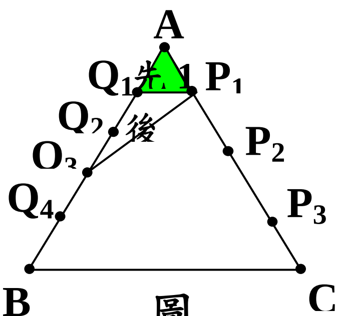

善妒的皇后想除掉皇上的寵妃，她安排了一場宴會替寵妃慶生，並在三角形蛋糕的一角下了毒。宴會最後，皇后假意和寵妃玩切蛋糕遊戲，規定如果寵妃拿到最後一塊蛋糕，那他一定要吃掉這塊皇后賞賜的三角形蛋糕。雖然寵妃事前得到密報得知蛋糕被下了毒，她要怎麼切才能逃過此劫呢？


孤兒的機智

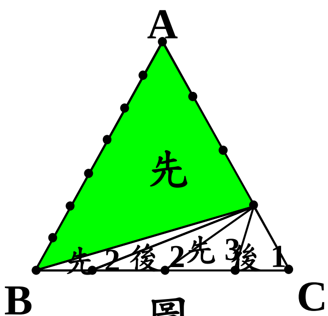

有個孤兒很懷念媽媽烤的蛋糕，天天在蛋糕店前徘徊。蛋糕師父很同情他，說明只要切成三角形即可，並且孤兒與店員輪流切，剩下最後的那塊蛋糕就是輪到的人的獎賞，孤兒該怎麼切才能吃到蛋糕？

將此問題數學化以後，遊戲規則如下：

A：三角形的邊上取任意多個點，我們可以把這塊大三角形沿著切割線切割成較小塊的三角形，但切割線必須是點（或頂點）和點的連線，而且必須切割三角形，同時可以切任意大小的三角形，如圖（1）與圖（2）。



圖



圖

B：如 A，但若某邊上還有分割點的話，就必須再切割。
C：若限制一次所能取的三角形大小，先後手的取法如下例

例：

限定每一次所能取的三角形只能一邊有分點，而分點數不超過 2，其他二邊皆無點。且如果邊上還有分點，就必須再切割。則可以取的三角形如圖（3-1）、（3-2）、（3-3）：

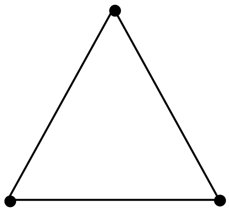


圖 3-1

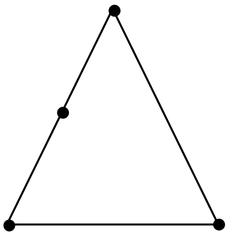


圖 3-2

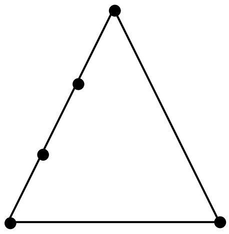


圖 3-3

雙方玩家的取法如圖（4），綠色為先手，紅色為後手。

圖 4 過程解說：在先手取綠 1 三角形後，後手可接著取紅 1 三角形，然後先手就可以取綠 2 三角形。

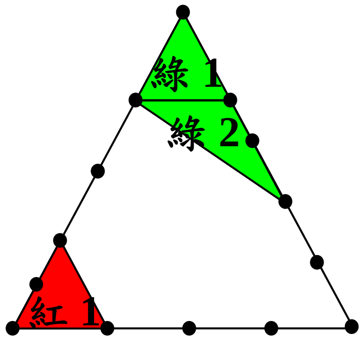


圖 4

（二）研究目的

試著在 A、B、C 三種玩法中，找出
1.當圖形為任意三角形時，先、後手之必勝策略。
2.當圖形為 n 邊形，並將邊長以任意多個點予以分割，那麼情形又會如何？
3.證明這些必勝策略，並嘗試找出這些必勝策略是否關聯性

（三）預備知識：

由於在點數增加之後，雙方玩家所能取的可能情況將以可怕的程度快速增長，手工找出必勝法則的困難度就越來越高，於是我們一邊尋找必勝策略，一邊藉由歸納法找出一些幫助我們快速判斷甚至是提供必勝法則的輔助工具，以下就是幾個研究過程中常用的輔助定理：

1.輔助定理

A 規則：

定理 1：我方只要取後，剩下邊上無分點的偶數邊形，則我方必獲勝。

Proof：

若我方切完後留下一塊邊上無分點的偶數邊形，則對方必須切下一塊邊上無分點的三角形，而剩下另一塊邊上無分點的三角形，故我方必勝。

定理 2：我方只要取後，剩下如圖（5）的情形，則我方必獲勝。

Proof：

若對手取△AP_kB，則我方取△AP_kQ_k，其中 k =1，2，、、、、，n。此時圖形變成有一組對邊含一樣多個分點，而另一組對邊無分點的四邊形。我方只要不斷使用此方法，最後圖形會變成無分點的四邊形。因此最後一塊三角形必被我方取得，我方必獲勝。

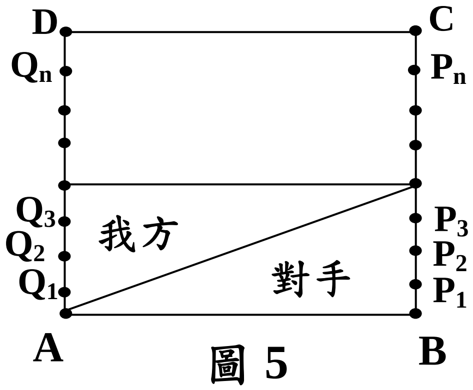


圖 5

定理 3：我方只要取後，剩下如圖（6）的情形，則我方必獲勝。

Proof：

不論對手如何取，我方只要將剩餘圖（6）切成：

（1）定理 1 或

（2）定理 2 且 n =1 的圖形，則必獲勝。

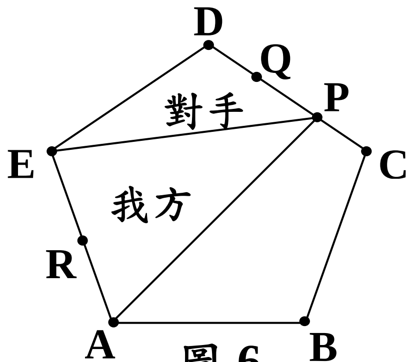


圖 6

定理 4：我方只要取後，剩下如圖（7）的情形，則我方必獲勝。

Proof：

（1）若先手取△ABC，則後手取△EDQ_1，圖形變成無分點的四邊形，由定理 1 得證，後手獲勝。

（2）若先手取△ADE，則後手取△ADQ_1，圖形變成四邊形其中一組對邊各有n個分點，而另一組對邊無分點，由定理 3 得證，後手獲勝。

（3）當先手取△BCQ_i（i＝2，3，、、、，n），若i是偶數，則後手取△Q_iCP_{n-i}，圖形就

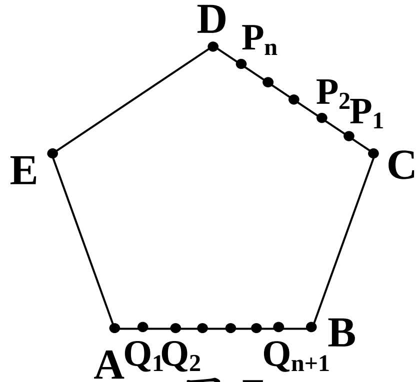


圖 7

變成（0，t，0，0，t+1）五邊形，其中t是奇數；若i是奇數，則後手取$\triangle F_iCQ_{n-i+2}$，圖形就變成（0，t，0，0，t+1）五邊形，其中t是奇數。

（4）當先手取$\triangle BCQ_1$，則後手取$\triangle CDQ_1$，圖形變成無分點的四邊形，由定理 1 得證，後手獲勝。

當先手取$\triangle BCQ_{n+1}$，則後手取$\triangle ADE$，圖形變成四邊形其中一組對邊各有n個分點，而另一組對邊無分點，由定理 3 得證，後手獲勝。

（4）當先手取$\triangle BCP_i$（i＝1，2，3，、、、，n），若i是奇數，則後手取$\triangle BP_iQ_{n-i}$，圖形就變成（0，t，0，0，t+1）五邊形，其中t是奇數；若i是偶數，則後手取$\triangle BP_iQ_{n-i+2}$，圖形就變成（0，t，0，0，t+1）五邊形，其中t是奇數。

（5）若先手取$\triangle CDE$，則後手取$\triangle Q_1BC$，圖形變成無分點的四邊形，所以後手獲勝。

上面（1），（2），（5）的例子，後手皆會獲勝。而（3），（4）的例子，後手切完後，圖形就變成，（0，t，0，0，t+1）五邊形，其中 t 是奇數，且 t＜n，接下來後手只要照上面方法繼續取三角形，最後圖形會變成（0，k，0，0，k+1）五邊形，其中 k 是奇數，且 k 的值會愈來愈小，最後圖形就變成（0，1，0，0，2）五邊形，所以後手就會獲勝。也就是任一方切到此圖形必獲勝。

定理 5：我方只要取後，剩下如圖（8）的情形，則我方必獲勝。

Proof：

不論對手如何取，我方只要將剩餘圖（8）切成：

（1）定理 1 的圖形，或

（2）定理 3 的圖形就獲勝了。

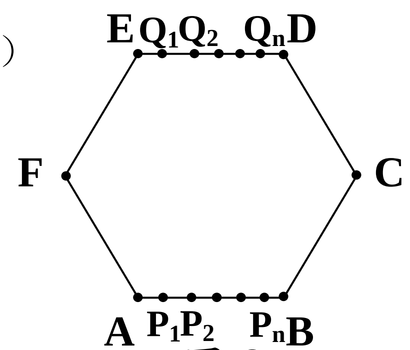


圖 8

定理 6：我方只要取後，剩下偶數邊形其中有兩條不相鄰的邊上有一樣多個分點，則必獲勝。如圖（9）、（10）

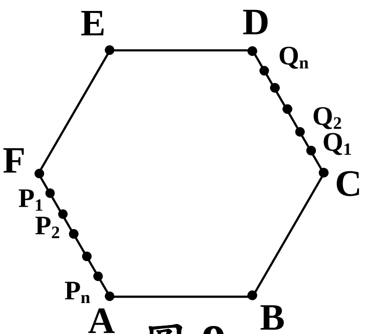


圖 9

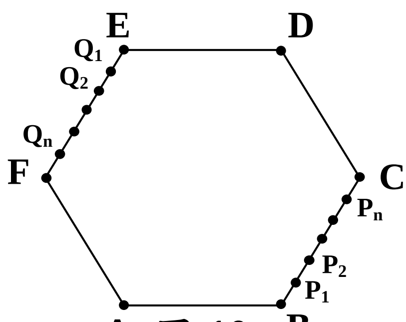


圖 10

Proof：

我方只要取成如（0，……，0， n，0，0，……，0，n）的圖形，且圖形為偶數邊，也就是括號中共有 2k 個數字。

（1）若對手改變分點數為 0 的兩邊，使得有一邊上的分點數變為 0，那麼原本為(0，0)的兩邊就會變成(0)，也就是說(0，……，0， n，0，0，……，0，n）的表示方法中，有兩個 0 將變為一個 0。此時我方只要也跟著對手的方式切割，使邊的總和一直維持在偶數，那麼圖形最後就會變成（0，n，0，n）的圖形。由定理 2 得我方必勝。

（2）若對手改變分點數分別為 0 和 n 的兩邊，將產生兩種情形：

①原本為（0、n）的兩邊，變為（0，m)。此時我方只要也跟著對手的方式切割，那麼圖形最後就會變成無分點的偶數邊形。由定理 1 得我方必勝。

②原本分點數為 0、n 的兩邊，分點數變為（0)。此時我方只要也跟著對手的方式切割，那麼圖形最後就會變成無分點的偶數邊形。由定理 1 得我方必勝。

綜合 1、2 得我方只需跟著對手的方式取三角形，就必勝。

定理 7：我方只要取後，剩下如圖（11）的情況，則必獲勝。

Proof：

不論對手如何取，我方只要將剩餘圖（11）切成：

（1）定理 1 的圖形，或

（2）定理 6 的圖形就獲勝了。

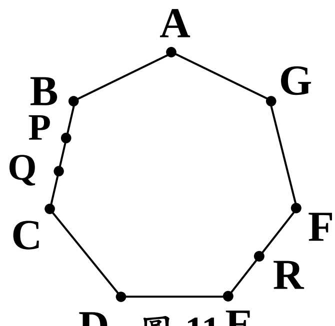


圖 11

定理 8：我方只要取後，剩下如圖（12）的情況，則必獲勝。

Proof：

（1） 如圖（12）中有兩邊各有 n 個和 n +1 個分點，其中 **n 是奇數。**

（2）若對手取△CDE，則我方取△ABG，圖形變成五邊形（0，n，0，n+1，0），符合定理 4 的必勝策略，故我方獲勝。

（3）若對手取△BCD，則我方取△GFQ$_1$，由定理 1 得我方獲勝。

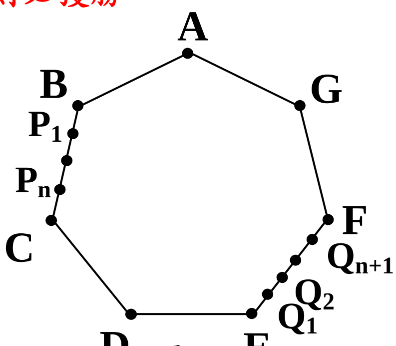


圖 12

（4）當對手取△ABP$_i$（i＝1，2，3、、、，n +1），，則我方取△DEQ$_{i+1}$，圖

形就變成如定理 6 的圖形，故我方必勝。

綜合上述（1）、（2）、（3）、（4），我們可歸納出只要取成此圖形的玩家必獲勝。證明完畢。

B 規則：

定理 9：我方只要取後，剩下邊上無分點的偶數邊形，則我方必獲勝。

定理 10：我方只要取後，剩下如圖（13）的情形，則我方必獲勝。

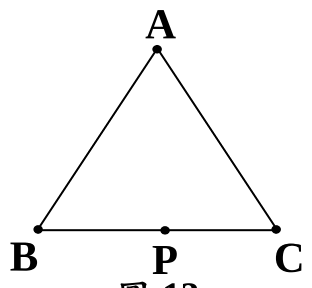


圖 13

定理 11：在 n≠1 的情況下，我方只要取後，剩下如圖（14）的情形，則我方必獲勝。

Proof：

（1）若剩下圖形為圖（14）中 n =1 的情況，則對手只需將其切成如圖（13）就獲勝了，故取成此種圖形我方必敗。

（2）若將原圖形取成圖（14）中 n 的情況，則我方只要把剩下的圖形取成如

①定理 9 的圖形，或

②定理 10 的情形，就獲勝了。

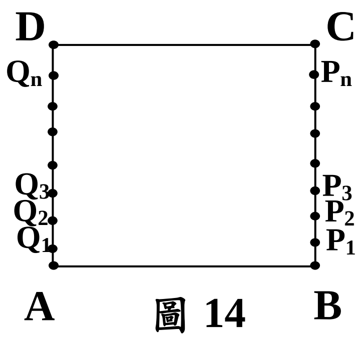


圖 14

定理 12：我方只要取後，剩下如圖（15）的情形，則我方必獲勝。

Proof：

不論對手如何取，我方只要將剩餘圖（15）切成：

（1） 定理 9 的圖形，或

（2） 定理 10 的情形，就獲勝了。

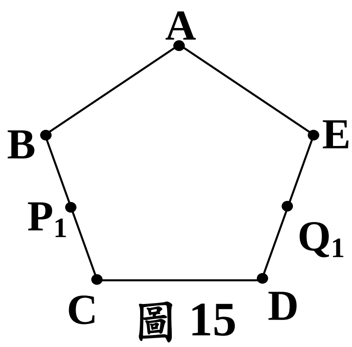


圖 15

定理 13：我方只要取後，剩下如圖（16）的情形，則我方必獲勝。

Proof：

不論對手如何取，我方只要將剩餘圖（16）切成：

（1）定理 9 的圖形，或

（2）定理 11 的圖形，或
（3）定理 12 的圖形，就獲勝了。

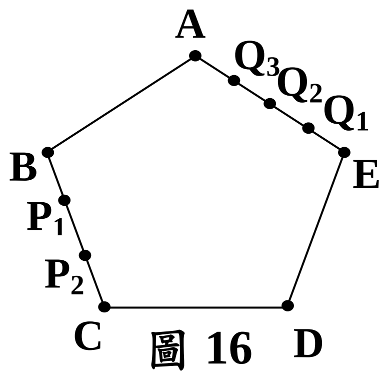


圖 16

定理 14：我方只要取後，剩下如圖（17）的情形，則我方必獲勝。

Proof：

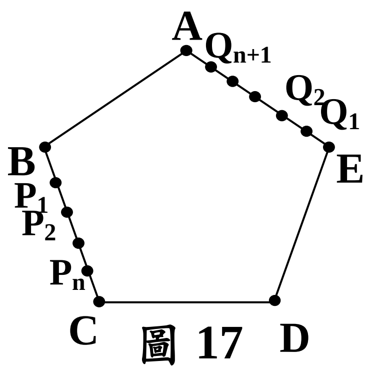


圖 17

（1）如圖（17）中有兩邊各有 n 個和 n+1 個分點，其中 **n 是偶數。**

（2）若對手取△ABC，則我方取△EDQ_{n+1}，圖形變成無分點的四邊形，由定理 1 得我方獲勝。

（3）若對手取△CDE，則我方取△ABQ_{n+1}，圖形變成四邊形其中一組對邊各有n個分點，而另一組對邊無分點，即（0，n，0，n）的圖形。由定理 3 知我方獲勝。但若n=1，則我方取△ABE，仍然獲勝。

（4）當對手取△DCP_i（i＝1，2，3、、、n +1），則我方取△DEQi，圖形仍然維持在五邊形（0，n，0，n+1，0）的形式。若對手仍然取△BCP_i或△EAQi，則我們依著上述的方法繼續取，最後必可取成五邊形（0，2，0，3，0）的圖形，由定理 3 得我方必獲勝。但若對手改為取△ADE或△AQ_kC，我方用上述的方法，仍然能獲勝。

綜合上述（1）、（2）、（3）、（4），我們可歸納出只要取成此圖形的玩家必獲勝。證明完畢。

2.三個相關的計數結果

（1）三角形三邊皆有 n 個分點時，欲切一刀取三角形，則有 $\frac{n(n+3)}{2}$ 取法。

Proof：

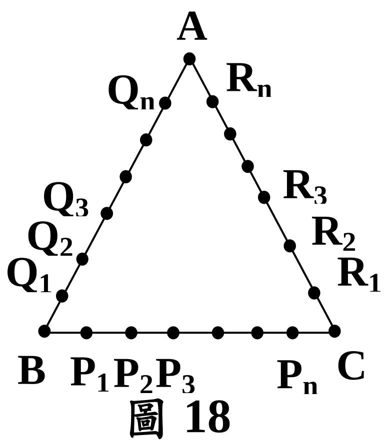


圖 18

如圖（18），若所切下的三角形，除了切割邊外另二邊上分別有i、j個分點，那麼就單的以（i，j）型代表這樣的三角形。如△AQ_1R_1 、△BP_nQ_n,及△CP_1R_n都是以（0，0）型表示，三

者均視為同一種三角形。所取的三角形可以形如（0，0)；(0，1)；(0，2)；(1，1)……；(0，n)；(1，n)……；(n-1，n）共有 $1+2+3+4+\ldots\ldots\ldots+n+n=\frac{n(n+3)}{2}$ 個，證明完畢。

（2）三角形三邊分點數皆不等，設 m、n、k 為分點數，則切一刀所能取的三角形有 m(1+n) + n(1+k) + k(1+m)種。

Proof：

如圖（19)，對從 A、Q1、Q2、、、、、、、，依順時鐘方向討論，而且討論任何一點時，只討論它與剩下點數的連接情形，也就是當討論 A 點時，可以切△ABP_1，而討論P_1時，就不用考慮切△ABP_1，也就可以避免重複情形發生。A點可與P_1~Pm點連接，共m種。而Q_1~Qn點可與R_1~R_k點和C和P_1~P_m點連接，共n(k+m+1)種。而B點可與R_1~R_k點連接，共k種。而P_1~P_m點可與R_1~R_k點連接，共mk種。全部的切法就有m + n(k + m +1) + k + mk = m(1+ n) + n(1+ k) + k(1+ m)種。

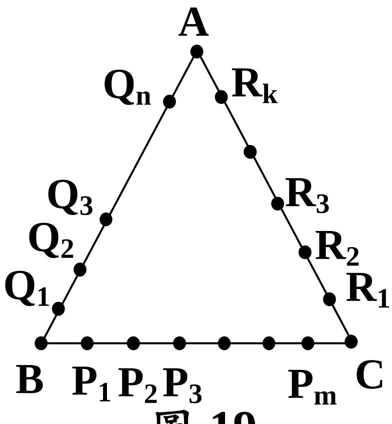


圖 19

3.三角形僅兩邊分點數相等時，設 m、m、n 為分點數，則對手一開始所能取的三角形有(m+1)(m+n)種。

Proof：

如圖（20)，A點可與P_1~P_m點連接，共m種。而Q_1~Q_n點可與P_1~P_m點和C點連接，如果與另一邊R_1~R_m點連接就會重複，共n(m+1)。而P_1~P_m點可與R_1~R_m點連接，共m^2種。全部的切法就有m + n(m + 1) + m^2＝(m + 1)(m + n)種。

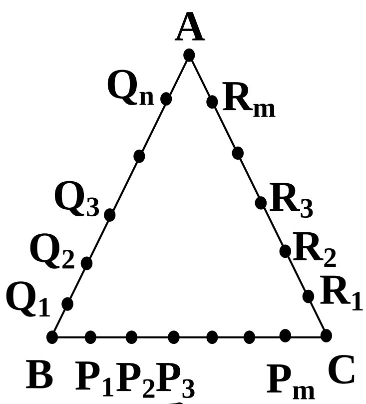


圖 20

三.研究過程與步驟

（四）研究過程

1.定義：

（1）本報告中的未知數如 p、q、r、s、m、n、k、 i、j….∈N。

（2）設三邊的分點數分別為（k，m，n）且 k、m、n 均≧0，我們以（k，m，n）表示這種三角形，多邊形以此類推。

（3）在 A 規則中我們使用 A 規則的預備定理。（定理 1~6），在 B 規則中我們使用 B 規則的預備定理。（定理 7~11）

2.A 規則：

三角形的邊上取任意多個點，切割線必須是點（或頂點）和點的連線，可以切任意大小的三角形，但不可以一次取走整個三角形。約定拿到最後一塊不能再分割的三角形的人獲勝（或失敗）。

（1）三角形的必勝策略

當三角形上任兩邊邊上的分點數皆≥2，依遊戲規則只要先手切完第一刀後，剩下的圖形如圖（21）所示，即切割線上無分點且和它相鄰的二邊上各恰有一分點的四邊形，則先手獲勝。

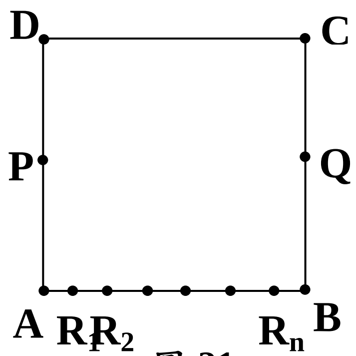


圖 21

Proof：

（i）當 AD 邊上無分點時：

①若後手切△ABD 或△ABC，那麼先手只要取走所剩的三角形就獲勝。

②若後手取走△PBC（或△BCQ），則先手就取走△ADQ（或△ADP），先手就獲勝了。

（ii）當 AD 邊上有分點時：

①若後手取△APR_i（或△DQR_i），（i＝1，2，、、、、，n），則先手取△CDR_i（或△ABR_i），先手就獲勝。

②若後手取△CDR_i（或△ABR_i），（i＝1，2，、、、、，n），則先手取△APR_i（或△DQR_i），先手就獲勝。

綜合（i）、（ii）得先手必勝，證明完畢。

*無法使用上述必勝策略的其他三角形：

上述的三角形必勝策略雖可適用於大部分的三角形情況，但在某些情況必勝策略將無用武之地，以下我們列出這些情形：

① **（0，0，n）型**

必勝策略：不論先手怎麼取，後手直接把剩下的三角形取掉就獲勝。如圖

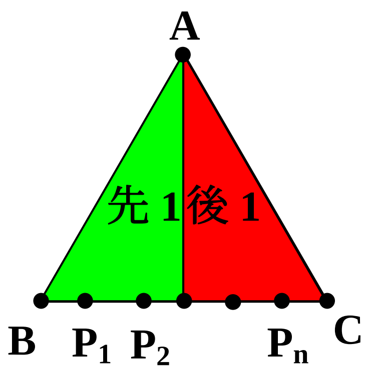


圖 22

（22）。

Proof：

先手礙於規定不能一開始就把整個三角形取走，導致不論先手怎麼取，都會剩下一個三角形，故後手必勝。

② **（0，1，n）型**

必勝策略：先手直接取成如定理 1 即可獲勝。
如圖（23）。

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 1 的圖形，故先手必勝。

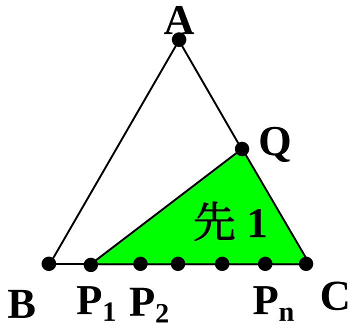


圖 23

③ **（1，1，n）型**

必勝策略：不論先手怎麼取，後手直接把剩下的三角形取成如定理 1 的圖形就獲勝。如圖（24）。

Proof：

三邊上均有分點，所以先手不論怎麼取，必定改變其中 2 邊的分點數，而使得剩下的圖形至少有一個邊沒有分點，此時後手只要切掉一塊涵蓋所有剩下分點數的三角形，必獲勝。

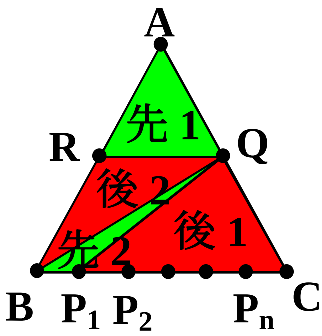


圖 24

（2）四邊形的必勝策略

討論：

先從最簡單的狀況下手，改變四邊形 1 個邊以及 2 個邊上的分點數，其餘邊的分點數則控制在 0 個分點，我們可以直觀地發現結論。接著我們嘗試將變化推廣至 3 個邊，將四邊形上 3 個邊的的分點數分別增為 n、m、k 個。雖然我們已經解決了有三邊不一樣多分點的情況，但我們發現，一樣多分點的情況與不一樣多分點的情況會有不同的必勝策略，點數和邊的排列組合關係會對我們的必勝策略產生影響。所以我們開始討論其他可能的情況。我們先嘗試（0，2k，2k，2k）的情況，並發現了必勝策略，我們再檢驗此必勝策略，發現（0，2k，2k，2k）的必勝策略於（0，2k，2k+1，2k）中也成立，於是我們歸納出了（0，2k，n，2k）的必勝策略。解決了（0，2k，n，2k）的情形後，我們繼續討論（0，2k+1，n，2k+1）的情況，發現（0，2k+1，n，2k+1）與（0，2k，n，2k）的必勝策略其實是一體兩面的，兩者皆應用了定理 4 的原理做變化。在解決三邊有分點的情況後，我們討論四邊有分點的情

況，四邊的情況比三邊複雜，同時也沒有定理可供參考，其必勝策略端看邊上分點數的奇偶性而定，我們找出了部分較具規律性的必勝策略。

①（0，0，0，n）與（0，0，m，n）型：

必勝策略：先手只要把三角形取成如定理 1 的情況就獲勝。如圖（25）與圖（26）的取法。

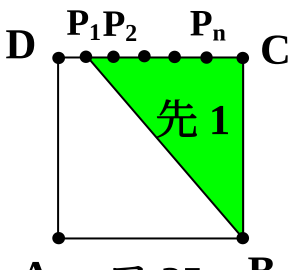


圖 25

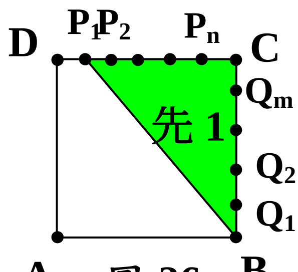


圖 26

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 1 的圖形，故先手必勝。

②（0，n，m，k）型與（0，n，n，k）型：

必勝策略：先手直接取成（0，n，0，n）的情況就獲勝。如圖（27）與圖（28）的取法。

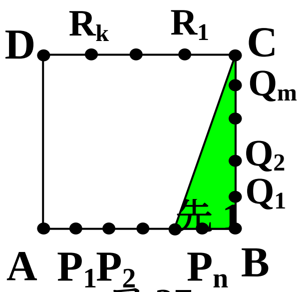


圖 27

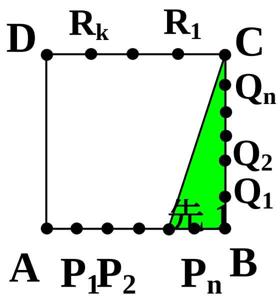


圖 28

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 2 的圖形，故先手必勝。

③（0，2k，n，2k）型：

必勝策略：先手只要直接取成如定理 4 的圖形即可獲勝，如圖（29）。

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 4 的圖形，故先手必勝。

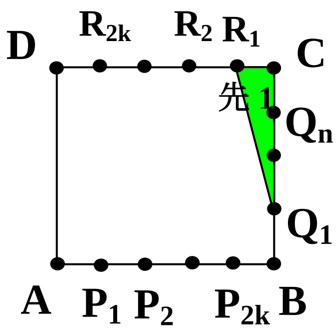


圖 29

④（0，2k+1，n，2k+1）型：

必勝策略：不論先手怎麼取，後手取成如定理 2 或定理 4 的圖形即可獲勝。如圖（30）與圖（31）。

Proof：

四邊形上三邊有分點，先手不論怎麼切，剩下的圖形必為五邊形（0，p，0，q，2k+1）的圖形，或四邊形（0，2k，n，2k+1）的圖形。

（i）五邊形的情況中，若 $p = 2k_1$，則後手就把剩下的圖形取成（0，$2k_1$，0，0，$2k_1$-1）的圖形，由定理 4 得後手獲勝。若 $p = 2k_1+1$，則後手就把剩下的圖形取成（0，k_1+1，0，$2k_1$+2）由定理 4 得後手獲勝。

（ii）四邊形的情況中，後手只要把圖形取成（0，2k，0，2k），由定理 2 得後手獲勝。

綜合（i）、（ii）得五邊形（0，2k+1，n，2k+1）後手必勝

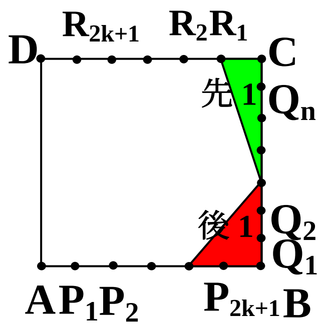


圖 30

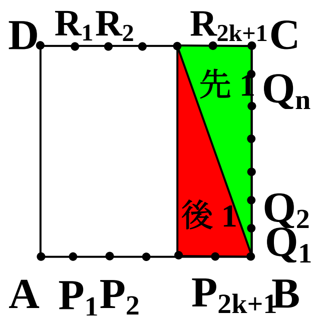


圖 31

⑤（n，n，n，n）型：

必勝策略：不論先手怎麼取，後手使用對稱切法即可獲勝，如圖（32）。

Proof：

不論先手怎麼取，後手只要使用對稱切法便可不斷使剩下的圖形維持在偶數邊形，且對邊有一樣多分點。所以遊戲進行到最後，圖形必會剩下如同定理 1 的圖形，故後手必勝。

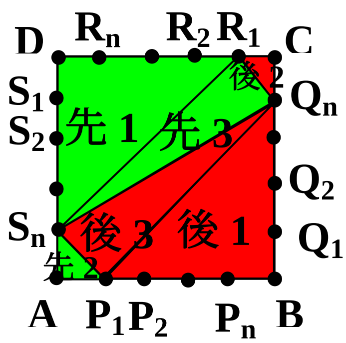


圖 32

（3）五邊形的必勝策略

討論：

我們維持一貫的方法，仍然從改變最少邊的分點數討論起。因為在五邊形的圖形中，先手取一刀之後，原五邊形只可能變成四邊形、五邊形或六邊形，所以我們就認為五邊形的必勝策略與四邊形的必勝策略必定有某種程度上的關聯，從這裡下手，我們直接假設先手如果大刀一揮，把五邊形直接切成四邊形，會出現什麼情況。而我們也從這裡順利的發現了某些必勝規則，但不能涵蓋所有的五邊形。我們嘗試發現一個新的定理來補足我們無法破解

的部分，但並未成功。

① （0，0，0，0，n）與（0，0，0，m，n）型

必勝策略：先手只要取成如定理 1 的圖形即可獲勝，如圖（33）與圖（34）

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 1 的圖形，故先手勝。

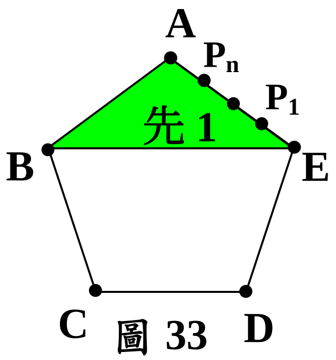


圖 33

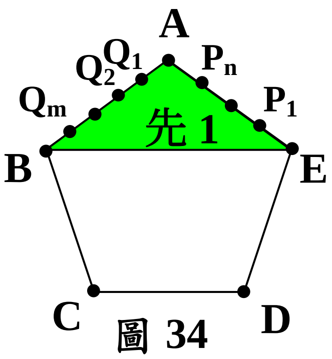


圖 34

② （0，2k，2k，2k，n）型（n＜2k）

已知利用定理 2 和定理 4 可以解決本型問題，但尚未找到本型的必勝策略。

③ （0，0，2k，n，2k）型與（n_1，n_2，2k，2k，2k）型。

必勝策略：因為（0，2k，2k，2k，n）型的必勝策略並不能套用，所以以上兩型的必勝策略我們只知道應該是後手必勝，但無法證明。

④ （0，0，2k+1，n，2k+1）型與（0，2k+1，2k+1，2k+1，n）型與（n_1，n_2，2k+1，2k+1，2k+1）型：

必勝策略：先手先取成（0，2k+1，n，2k+1）的圖形，然後不論後手怎麼取，先手取成如定理 2 或 4 的圖形即可獲勝。如圖（35）

Proof：

先手把圖形取成如（0，2k+1，n，2k+1）圖形後，由前面四邊形時（0，2k+1，n，2k+1）證明所述，先手必勝。

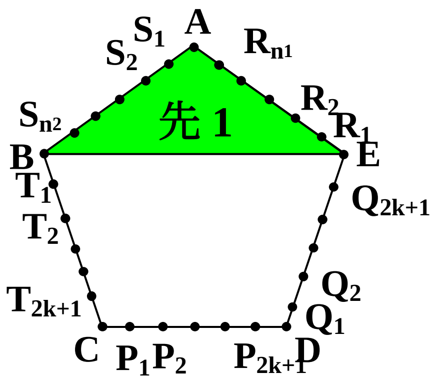


圖 35

（4）六邊形的必勝策略

討論：

雖然偶數邊形方面有四邊形做參考，但由於並沒有找出一個偶數邊型都能適

用的規律，所以我們繼續研究六邊形，看看偶數邊型的必勝策略，會不會有層遞的現象（四邊形的必勝策略經由某些特定的改變後可適用於六邊形，六邊形的必勝策略再經由某些特定的改變後可適用於八邊形....以此類推)。沿襲 A 規則的模式，我們仍藉由控制邊上的點數來進行討論，雖然尚未找到四邊形與六邊形之間完整的聯繫，但對我們思考偶數邊形有不少幫助。

①（n，0，0，0，0，0）型與（m，n，0，0，0，0）型：

必勝策略：先手直接取成如定理 1 即可獲勝。如圖（36）與圖（37）

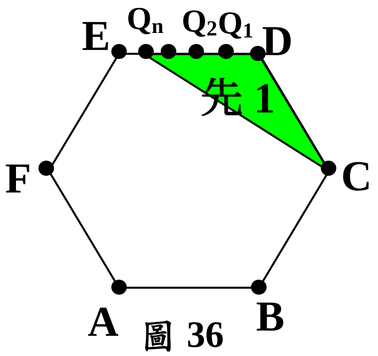


圖 36

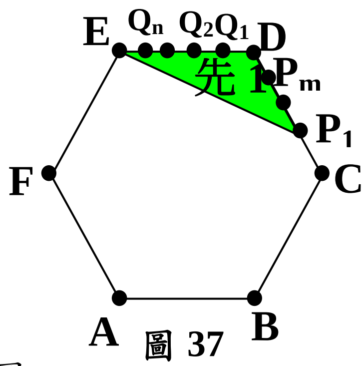


圖 37

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 1 的圖形，故先手必勝。

②（0，n，0，k，0，n）型與（0，n，m，k，0，n）型與（0，n，m，k，0，0）型：

必勝策略：先手取成 1.如定理 4 的圖形或 2.如定理 6 的圖形即可獲勝。如圖（38）

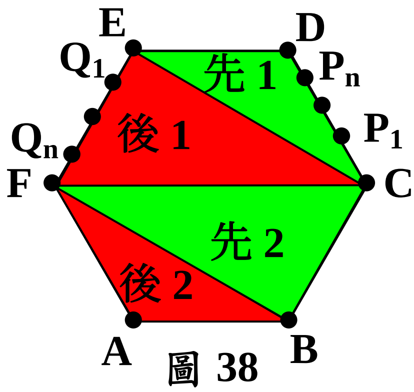


圖 38

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理或定理 6 的圖形，故先手必勝。

③（0，n，m，k，0，p）型：

目前尚未找到必勝策略，但已知可從定理 6 及定理 8 下手。如圖（39）

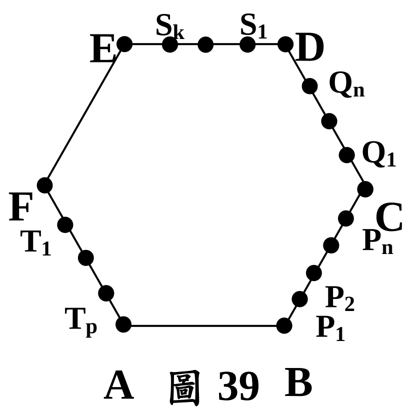


圖 39

④（0，n，p，q，r，n）型與（0，n，p，q，r，m）型：

目前尚未找到必勝策略，除非（0，n，m，k，0，p）型有突破，否則沒辦法解決。

⑤（n，n，n，n，n，n）型：

必勝策略：不論先手怎麼取，後手只要使用對稱切法即可獲勝。

Proof：

後手只要使用對稱切法，不斷的使剩下的圖形保持一個對邊有等分點的後必留下一個邊上無分點的四邊形，由定理 1 得後手必勝。

（5）奇數邊形的必勝策略

討論：

任意奇數邊形每邊有相同 n 個分點，我們”推測”其必勝策略與五邊形之必勝策略相同。目前我們得知：在定理 4 的情況中，奇數邊形的必勝策略與五邊形相同。

Proof：

欲證定理 4 可以上推至奇數邊形，我們必須先把定理 3 上推至奇數邊形，再進一步證明定理 4 也可以推至奇數邊形。

（i）定理 3 部分的證明：

任何人取成（0，……，0，1，0，0，……，0，2），其中 1 之前有 n 個 0，而 1 和 2 之間有 n+1 個 0，且 $n \in N$，則必獲勝。不失一般性，後手取完後，剩餘圖形如（0，……，0，1，0，0，……，0，2）之圖形。

①若先手改變任一堆中的 0 和 0

此數列中有兩堆各 n 個與 n +1 個 0，若先手改變任一堆中的 0 和 0，使其由（0，0）變成（0），則後手就改變另一堆的 0 和 0，也使其由（0，0）變成（0），此時圖形就變成（0，……，0，1，0，0，……，0，2），其中 1 之前有 k 個 0，而 1 和 2 之間有 k +1 個 0，且 $k \in N$，$k < n$，不斷使用此方法，圖形最後會變成（0，1，0，0，2），由定理 3 得證，後手必勝。

②若先手改變 0 和 1

（a） 當（0，1）變成（0，0）時，則後手就將 0 和 2，從（0，2）變成（0），此時圖形就變成（0，0，……，0，0），共有偶數個 0，由定理？得證，後手必勝。

（b）當（0，1）變成（0）時，則後手就將 0 和 2，從（0，2）變成（0，0），此時圖形就變成（0，0，……，0，0），共有偶數個 0，由定理？得證，後手必勝。

③若先手改變 0 和 2

（a）當（0，2）變成（0，1）時，則後手就將任兩個 0，從（0，0）變成（0），此時圖形就變成（0，……，0，1，0，0，……，0，1），共有偶數個數字，由定理？得證，後手必勝。

（b）當（0，2）變成（0，0）時，則後手就將 0 和 1，從（0，1）變成（0），此時圖形就變成（0，0，……，0，0），共有偶數個 0，由定理？得證，後手必

勝。

（c）當（0，2）或（2，0）變成（0）時，則後手就將 0 和 1，從（0，1）變成（0，0），此時圖形就變成（0，0，……，0，0），共有偶數個 0，由定理 1 得證，後手必勝。

由上①②③知，不論先手如何取，後手皆會獲勝，因此得證，任何人取成（0，……，0，1，0，0，……，0，2），其中 1 之前有 n 個 0，而 1 和 2 之間有 n +1 個 0，且 n∈N，則必獲勝。

（ii）定理 4 部分的證明：

任何人取成（0，……，0，n，0，0，……，0，n+1），其中 n 之前有 k 個 0，而 n 和 n+1 之間有 k+1 個 0，且 k∈**N**，則必獲勝。不失一般性，令後手取完後，剩餘圖形如（0，……，0，1，0，0，……，0，2）之圖形

①若先手改變任一堆中的 0 和 0

此數列中有兩堆各 k 個與 k +1 個 0，若先手改變任一堆中的 0 和 0，使其由（0，0）變成（0），則後手就改變另一堆的 0 和 0，也使其由（0，0）變成（0），此時圖形就變成（0，……，0，n，0，0，……，0，n+1），其中 1 之前有 m 個 0，而 1 和 2 之間有 m +1 個 0，且 m∈**N**，m＜n，不斷使用此方法，圖形最後會變成（0，k，0，0，k+1），由定理？得證，後手必勝。

②若先手改變 0 和 k

（a）當（0，k）變成（0，t）時

（1）當 t 是奇數時，則後手就將 0 和 k+1，從（0，k+1）變成（0，t+1），但此時的 0 是另一堆 0 中的 0，此時圖形就變成（0，……，0，t，0，0，……，0，t+1），不斷使用此方法，最後圖形會變成（0，……，0，1，0，0，……，0，2），由定理 4 得證，後手必勝。

（2）當 t 是偶數時，則後手就將 0 和 k+1，從（0，k+1）變成（0，t-1），但此時的 0 是另一堆 0 中的 0，此時圖形就變成（0，……，0，t，0，0，……，0，t-1），不斷使用此方法，最後圖形會變成（0，……，0，2，0，0，……，0，1），由定理 4 得證，後手必勝。

（b）當（0，k）變成（0，0）時，則後手就將 0 和 k+1，從（0，k+1）變成（0），則圖形就變成（0，0，……，0，0），共有偶數個 0，由定理 1 得證，後手必勝。

（c）當（0，k）變成（0）時，則後手就將 0 和 k+1，從（0，k+1）變成（0，0），則圖形就變成（0，0，……，0，0），共有偶數個 0，由定理 1 得證，後手必勝。

③若先手改變 0 和 k+1

（a）當（0，k+1）變成（0，k）時

後手就將任兩個 0，從（0，0）變成（0），此時圖形就變成（0，……，0，1，0，0，……，0，1），共有偶數個數字，由定理 6 得證，後手必勝。

（b）當（0，k+1）變成（0，t）時，t<k

（1）當 t 是奇數時，則後手就將 0 和 k，從（0，k）變成（0，t+1），但此時的 0 是另一堆 0 中的 0，此時圖形就變成（0，……，0，k，0，0，……，0，k+1），不斷使用此方法，最後圖形會變成（0，……，0，1，0，0，……，0，2），由定理 4 得證，後手必勝。

（2）當 t 是偶數時，則後手就將 0 和 k，從（0，k）變成（0，t-1），但此時的 0 是另一堆 0 中的 0，此時圖形就變成（0，……，0，t，0，0，……，0，t-1），不斷使用此方法，最後圖形會變成（0，……，0，2，0，0，……，0，1），由定理 4 得證，後手必勝。

（c）當（0，k+1）變成（0，0）時

後手就將 0 和 k，從（0，k）變成（0），　　則圖形就變成（0，0，……，0，0），共有偶數個 0，由定理 1 得證，後手必勝。

（d）當（0，k+1）變成（0）時

後手就將 0 和 k，從（0，k）變成（0，0），則圖形就變成（0，0，……，0，0），共有偶數個 0，由定理 1 得證，後手必勝。

由上①②③知，不論先手如何取，後手皆會獲勝，因此得證，任何人取成（0，……，0，n，0，0，……，0，n+1），其中 n 之前有 k 個 0，而 n 和 n+1 之間有 k+1 個 0，且 $k \in \mathbf{N}$，則必獲勝。

（6）偶數邊形的必勝策略

任意偶數邊形每邊有相同 n 個分點，則後手只要使用**對稱切法**即必勝。

Proof：

若偶數邊形各邊上都有相同個分點，那麼後手只要使用對稱切法，不斷的使剩下的圖形保持一個對稱的四邊形，則最後必留下一個邊上無分點的四邊形，由定理 1 得後手必勝。

3.B 規則：

如 A 規則，但若某邊上有分割點的話，就必須再切割。

討論：

雖然我們在 A 規則方面已有一些結果，但我們想到，這個遊戲在一開始其實存在了某些不公平，因為我們只限定先手不能一次拿走整個三角形，這導致先手在最簡單的三角形中，面臨了無可奈何的失敗。所以我們為了解決這方面的不公平，同時也為了嘗試找出另一種玩法的必勝策略，我們限定如果邊上還有剩下分點，遊戲就必須繼續進行。有了 A 規則的基礎，我們做起

B 規則就不會有”伸手不見五指”的感覺，我們發現所有 A 規則中的必勝規則以及定理大部份可引用至 B 規則，但在某些情況下會出現差異，原本的必勝規則也就會產生變化。

（1）三角形的必勝策略

當三角形上任兩邊邊上的分點皆≥2，依遊戲規則只要先手第一刀切完後，剩下的圖形如圖（40）所示，即切割線上無分點且和它相鄰的二邊上各恰有二分點的四邊形，則先手獲勝。

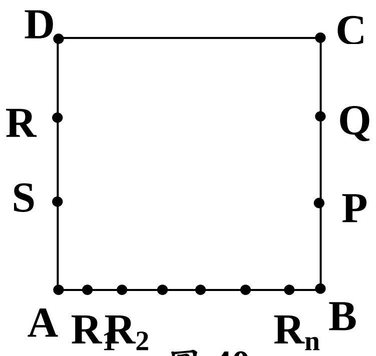


圖 40

Proof：

（i）當 AD 邊上無分點時：

①若後手切△ABD 或△ABC，那麼先手只要取走所剩的三角形就勝了，所以後手不該這麼做。

②若後手取走△PBC（或△BCQ），則先手就取走△ADQ（或△ADP），先手就獲勝了。

③若後手取走$\triangle P_1BC$（或$\triangle BCQ_1$），則先手就取走△ADC（或△ADB），先手就獲勝了。

（2）當 AD 邊上有分點時：

①若後手取$\triangle AP_1R_i$（或$\triangle DQ_1R_i$），（i＝1，2，、、、、，n）， 則先手取$\triangle DQ_1R_i$（或$\triangle AP_1R_i$），先手就獲勝。

②若後手取$\triangle AP_2R_i$（或$\triangle DQ_2R_i$），（i＝1，2，、、、、，n）， 則先手取$\triangle DCR_i$（或$\triangle ABR_i$），先手就獲勝。

③若後手取$\triangle CDR_i$（或$\triangle ABR_i$），（i＝1，2，、、、、，n），則先手取$\triangle AP_2R_i$（或$\triangle DQ_2R_i$），先手就獲勝。

*無法使用必勝策略的三角形

①（0，0，n）型與（1，1，n）型與（1，2，n）型

必勝策略：先手直接取成如定理 10 即可獲勝。如圖（41）與圖（42）與圖（43）

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 10 的圖形，故先手必勝。

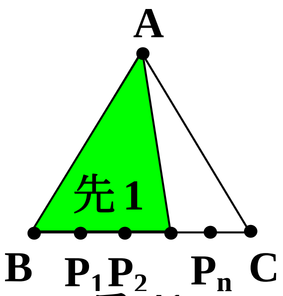


圖 41

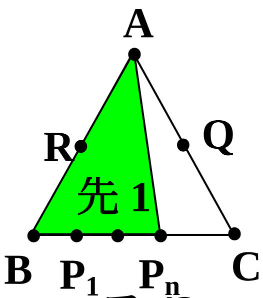


圖 42

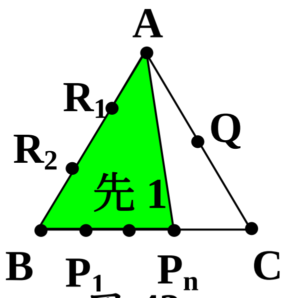


圖 43

② （0，1，n）與（0，2，n）型

必勝策略：先手直接取成如定理 9 即可獲勝。如圖（44）與圖（45）

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 9 的圖形，故先手必勝。

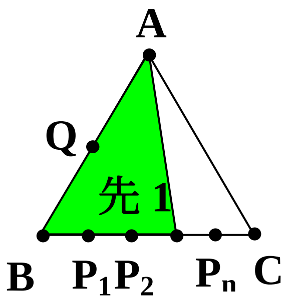


圖 44

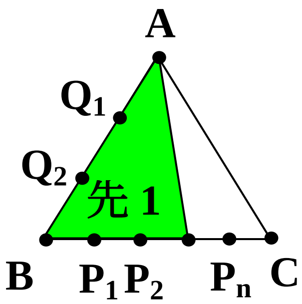


圖 45

③ （2，2，n）型

必勝策略：不論先手怎麼取，後手只要取成如定理 9 或定理 10 即可獲勝。如圖（46）

Proof：

排除剩下圖形為三角形的情形，不論先手怎麼取，都會使剩下的圖形變成四邊形（1，0，m，2）或（0，0，m，2）或（0，1，n，1），此時後手只要把圖形取成如（1，0，0）的圖形，由定理 9 得後手必勝。

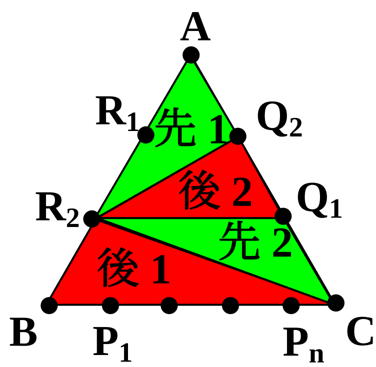


圖 46

（2）四邊形的必勝策略

討論：

剛開始討論的時候，就發現我們在 A 規則裡辛辛苦苦推的規則似乎沒有用，於是我們準備重新推導規則，不過，後來卻發現，其實除了點數較少的情形

會有改變外，其他的情形只是利用了不同的定理獲勝，結果不會改變。

① （0，0，0，n）型與（0，0，m，n）型

必勝策略：先手直接取成如定理 9 即可獲勝。如圖（47）與圖（48）

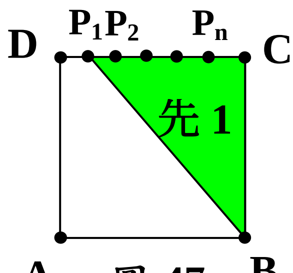


圖 47

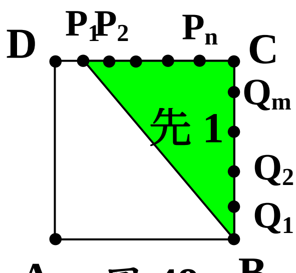


圖 48

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 9 的圖形，故先手必勝。

② （0，2k，n，2k）型

必勝策略：不論先手怎麼取，後手只要取成如定理 14 即可獲勝。如圖（49）

Proof：

四邊形上三邊有分點，先手不論怎麼切，剩下的圖形必為五邊形（0，p，0，q，2k+1）的圖形，或四邊形（0，2k，n，2k-1）的圖形。

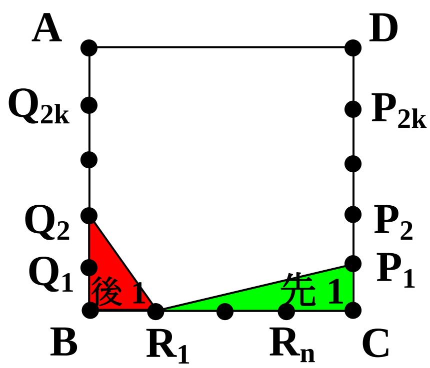


圖 49

（i）在五邊形的情況中，若 $p = 2k_1$，則後手就把剩下的圖形取成（0，$2k_1$，0，0，$2k_1+1$）的圖形，由定理 14 得後手獲勝。若 $p = 2k_1+1$，則後手就把剩下的圖形取成（0，$2k_1+1$，0，0，$2k_1$）由定理 14 得後手獲勝。

（ii）在四邊形的情況中，後手只要把圖形取成（0，2k，0，2k），由定理 11 得後手獲勝。

綜合（i）、（ii）得五邊形（0，2k+1，n，2k+1）後手必勝

③ （0，2k+1，n，2k+1）型

必勝策略：先手直接取成如定理 14 的圖形即可獲勝。如圖（50）

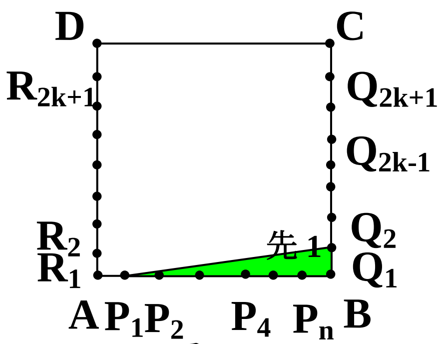


圖 50

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 14 的圖形，故先手必勝。

④（0，n，m，k）型

必勝策略：先手直接取成如定理 11 的圖形，若 n、m、k 有一為 1，則取成如定理 10 的圖形即可獲勝。如圖（51）

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 10 或定理 11 的圖形，故先手必勝。

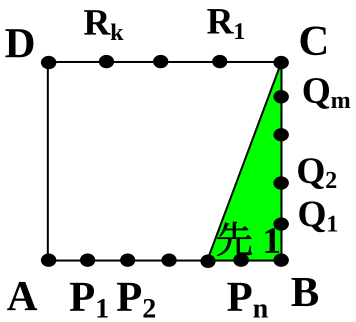


圖 51

⑤（n，n，n，n）型

必勝策略：後手只要使用對稱切法，即可獲勝。若剩餘圖形上有一邊僅剩下一個分點時，切成如定理 10 的圖形仍可獲勝。如圖（52）

Proof：

A 規則（n，n，n，n）的情形與此大同小異，唯一不同在剩餘圖形上有一邊僅剩下一個分點時，若後手仍然使用對稱切法，將會使剩下的圖形為（0，1，0，1）的四邊形，由定理 11 的例外可得後手必敗，故後手不可使用必勝切法。圖形上有一邊僅剩下一個分點時，必形如（0，n，0，1），後手只須將其切成（0，1，0），由定理 10 得後手必勝。

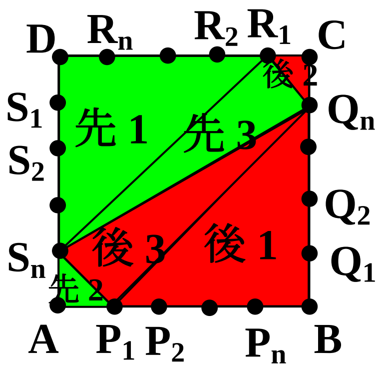


圖 52

（3）五邊形的必勝策略

討論：

接著下去之後又有不錯的發展，我們發現了定理 14，而定理 14 正好和定理 4 是相反的，於是，我們進一步想推論是否其他定理也有相同情形。但我們仍未發現定理 15，如果能找到定理 15，並將其應用在破解五邊形上，必能使我們五邊形部分的成果更完整。

①（0，0，0，0，n）型與（0，0，0，m，n）　型

必勝策略：先手直接取成如定理 1 的圖形即可

獲勝。如圖（53）

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 9 的圖形，故先手必勝。

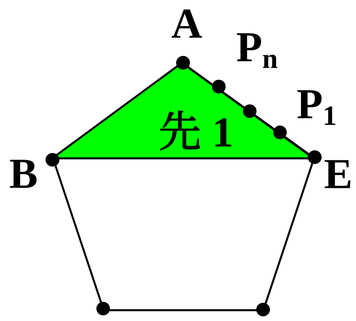


圖 53

② （0，0，2k+1，n，2k+1）型

必勝策略：先手直接取成如定理 14 的圖形即可獲勝。如圖（54）

Proof：

先手可以直接把三角形取成如定理 14 的圖形故先手必勝。

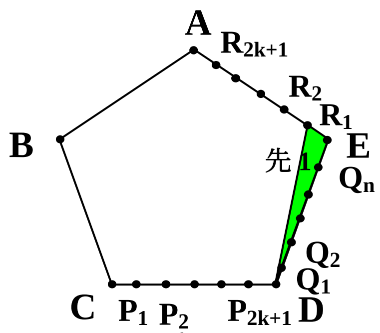


圖 54

③ （0，0，2k，n，2k）型與（n_1，n_2，2k，2k，2k）型

必勝策略：先手直接取成（0，2k，n，2k）的圖形即可獲勝。如圖（55）

Proof：

先手把圖形取成如（0，2k，n，2k）圖形後，由前面四邊形時（0，2k，n，2k）證明所述，先手必勝。

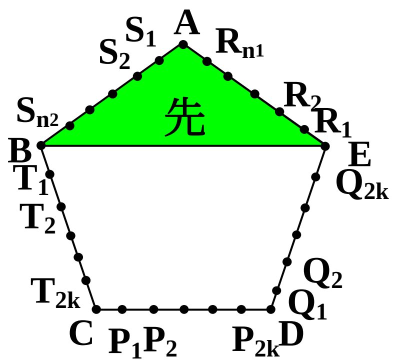


圖 55

④ （0，2k，2k，2k，n）型與（0，2k+1，2k+1，2k+1，n）型

目前尚未找到本型的必勝策略

⑤ （n_1，n_2，2k+1，2k+1，2k+1）型

目前尚未找到本型的必勝策略

（4）奇數邊形的必勝策略

任意奇數邊形每邊有相同 n 個分點，我們”推測”其必勝策略與五邊形之必勝策略相同。目前我們得知：在定理 4 的情況中，奇數邊形的必勝策略與五邊形相同。但仍無法證明。

（5）偶數邊形的必勝策略

任意偶數邊形每邊有相同 n 個分點，則後手只要使用**對稱切法**即必勝。

Proof：

若偶數邊形各邊上都有相同個分點，那麼後手只要使用對稱切法，不斷的使

剩下的圖形保持一個對稱的四邊形，則最後必留下一個邊上無分點的四邊形，由定理 1 得後手必勝。

4.C 規則

限制每一次所能取的三角形大小。

（**1**）**限定每一次所能取的三角形只能一邊有分點，而分點數不超過 n，其他二邊皆無點。且如果邊上還有分點，就必須再切割。取法如圖（56-1）、圖（56-2）與圖（56-3）**

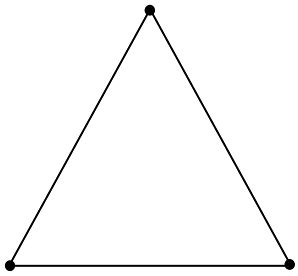


圖 56-1

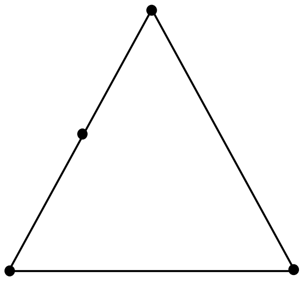


圖 56-2

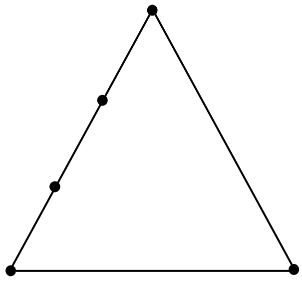


圖 56-3

必勝策略：只要一直讓自己取到剩下 2 + k（n+1）塊基本三角形，則獲勝。

（k∈N）

Proof：

1.首先，我們假想把原三角形切割成若干個邊上無分點的三角形，此種無分點三角形稱之為「基本三角形。」由於點與點之間的連線數一定，故當邊上點數一定時，製造出的基本三角形數也一定。經由計算可得：若三角形三邊分點數分別為 p、q、r，則分割出的基本三角形數就有 p + q + r + 1 個基本三角形。

2.由於一開始我們就已限定只能一邊有 n 點，故每次所能取的最多基本三角形數為 n + 1 個。

3.拿到最後一塊的人獲勝，所以兩邊都極力讓自己最後取完後只剩下 2 塊基本三角形，那麼，對手按規定，只能取其中一塊，最後自己就能拿取最後一塊而獲勝。

4.經過試驗我們發現：這個問題如同兩人拿石子（拈）的問題，其獲勝規則為：只要一直讓自己取到剩下（n +1）k + 2 塊基本三角形，則獲勝。

5. 不過這個必勝策略有其缺陷，當玩家雙方都明白有這個必勝規則時，沒辦法使必勝策略的一方可以用一種小技巧來干擾此必勝策略：由於三角形和多邊形角的個數一定，所以居劣勢的對方可以不斷地在角上取 1 個基本三

角形，我方使用必勝策略，故會取 1 + k（n+1）塊基本三角形，如此週而復始，最後居劣勢的對方就會把我方逼入沒辦法取 1 + k（n+1）塊三角形的窘境！此時不用擔心，只要我方改為利用 B 規則的定理繼續遊戲，勝負結果不變。但我們沒辦法證明為什麼勝負結果不變。

我們針對 5.的例外情形舉例解釋：

若限定每一次所能取的三角形只能一邊有分點，而分點數不超過 3，其他二邊皆無點。此時圖（57）中的三角形有 19 個基本三角形（由 1.的公式得到），於是一開始我方就取走 1 塊基本三角形，使基本三角形個數剩下 18 個（由必勝策略得到），對手居劣勢，但它可在一個角取走 1 個基本三角形，使圖形的邊數越來越多，由必勝策略我們得取 3 個基本三角形，如此下去，最後就會變成如圖（58）中的情形，對方若再取 1 個基本三角形，我方就無法取 3 個基本三角形了，不過此時的圖形為邊上無分點的五邊形，故我方只要把它取成無分點的四邊形，由 B 規則定理 1 得我方仍獲勝。

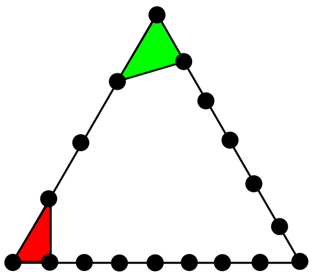


圖 57

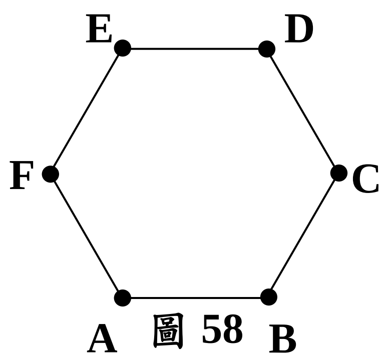


圖 58

（2）上述規則於多邊形中亦成立

1.我們仍然假想把原多邊形切割成若干個基本三角形。由於點與點之間的連線數一定，故當邊上點數一定時，製造出的基本三角形數也一定。經由計算可得：若多邊形 n 邊分點數分別為 p、q、r，則分割出的基本三角形數就有 p + q + r + n－2 個基本三角形。

2.由於一開始我們就已限定只能一邊有 n 點，故每次所能取的最多基本三角形數為 n + 1 個。

3.拿到最後一塊的人獲勝，所以兩邊都極力讓自己最後取完後只剩下 2 塊基本三角形，那麼，對手按規定，只能取其中一塊，最後自己就能拿取最後一塊而獲勝。

4.除了剛開始的三角形總數不同之外，其他的解法並沒有什麼不同。

四.研究結果與討論

在此我們列出較具代表性的結果。

（五）研究結果

1.A、B 規則中三角形的必勝策略

A 規則：

當三角形上任兩邊邊上的分點數皆≥2，依遊戲規則只要先手第一刀切完後，剩下的圖形如圖（59）所示，即切割線上無分點且和它相鄰的二邊上各恰有一分點的四邊形，則先手獲勝。

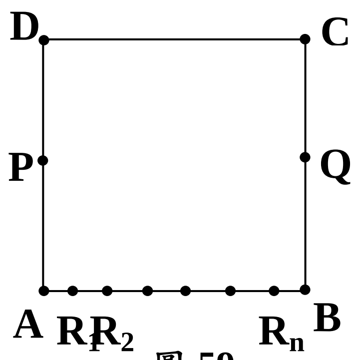


圖 59

B 規則：

當三角形上任兩邊邊上的分點數皆≥2，依遊戲規則只要先手第一刀切完後，剩下的圖形如圖（60）所示，即切割線上無分點且和它相鄰的二邊上各恰有二分點的四邊形，則先手獲 勝。

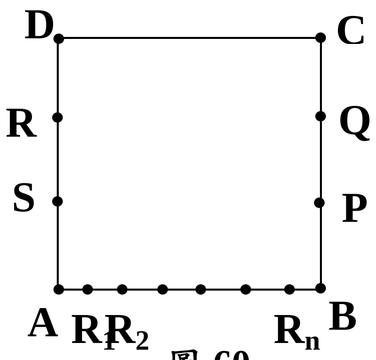


圖 60

2.A、B 規則中四邊形的部分必勝策略

A 規則：

①（0，2k，n，2k）的四邊形中，先手取成如定理 4 的圖形即可獲勝

②（0，2k+1，n，2k+1）的四邊形中，不論先手怎麼切，後手只要將剩餘圖形切成定理 4 的圖形即可獲勝。

③（0，n，m，k）的四邊形中，先手直接將圖形切成定理 2 的情形即可獲勝。

④（n，n，n，n）的四邊形中，後手使用對稱切法則必勝。

B 規則：

①（0，2k，n，2k）的四邊形中，不論先手怎麼切，後手只要取成如定理 14 的圖形即可獲勝

②（0，2k+1，n，2k+1）的四邊形中，先手直接取成定理 14 的圖形即可獲勝。

③（0，n，m，k）的四邊形中，先手直接將圖形切成定理 2 的情形即可。

④（n，n，n，n）的四邊形中，不論先手怎麼切，後手只要使用對稱切法即可，但若對方取成任一邊有 1 點的情況，則後手需利用定理 4 方能獲勝。

3.A、B 規則中五邊形的部分必勝策略

A 規則：

①（0，2k，2k，2k，n）的五邊型中，後手只要把圖形取成（0，2k，n，0，2k-1，n）的圖形就獲勝。但若原圖形 n=2k，則先手必勝。

②（n_1，n_2，2k+1，2k+1，2k+1）的五邊形中，先手直接切成（0，2k+1，2k+1，2k+1）的四邊形，再取成如定理 4 的圖形即可獲勝。（0，0，2k+1，n，2k+1）型與（0，2k+1，2k+1，2k+1，n）型與（n_1，n_2，2k+1，2k+1，2k+1）的必勝策略相同。

③（n_1，n_2，2k，2k，2k）的五邊形中，由於（0，2k，2k，2k，n）的必勝策略不能套用，故尚未找出必勝策略，但已知後手必勝。

B 規則：

①（n_1，n_2，2k，2k，2k）的五邊形中，先手只要直接取成（0，2k，n，2k）的圖形即可獲勝。（0，0，2k，n，2k）與（n_1，n_2，2k，2k，2k）的必勝策略相同。

②（0，2k+1，2k+1，2k+1，n）的五邊型中，先手只要把圖形取成（0，2k，n，2k+1，n）的圖形就獲勝。但若原圖形 n=2k+1 的話，則後手必勝。

③（n_1，n_2，2k+1，2k+1，2k+1）的五邊形中，由於（0，2k+1，2k+1，2k+1，n）的必勝策略不能套用，故尚未找出必勝策略，但已知後手必勝。

4.A、B 規則中奇數邊形的部分必勝策略

任意奇數邊形每邊有相同 n 個分點，我們”推測”其必勝策略與五邊形之必勝策略相同。目前我們得知：在定理 4 的情況中，奇數邊形的必勝策略與五邊形相同。

5.A、B 規則中偶數邊形的必勝策略

A 規則：

不論先手怎麼切，後手只要使用對稱切法，即可獲勝

B 規則：

不論先手怎麼切，後手只要使用對稱切法，但若對方取成任一邊有 1 點的情況，則後手需利用定理 4 方能獲勝

6.C 規則中所有圖形的必勝策略

只要一直讓自己取到剩下 2 + k（n+1）塊基本三角形，則獲勝。
（n 為分點數的最大限制，**k∈N** ）

（六）討論

我們所研究的題目，基本上最困難的地方是在於雙方玩家所能取的可能性太多，即使是利用電腦程式，也沒辦法把我們要的情況表達出來，所以大

部分只能靠著自己花費大量的時間與精力，想出破解的辦法。可是只要稍不小心，研究結果就有可能出錯，使我們不但要找規則，還要反覆的檢驗，非常的繁雜。不過我們也一直不放棄，努力做出了一些結果。報告進行到現在，我們已完成了：

1.A、B 規則中三角形的必勝策略以及部分多邊型的策略。

2.C 規則中大部分的的必勝策略

當然，我們也有尚未完成的部分

1.在 A 規則與 B 規則的五邊形必勝策略中，仍有部分不能使用定理 4 或定理 14 解決的情形待解決。

2.奇數邊型中的必勝策略，我們除了已證出在定理 4 下，奇數邊形的情況可成立之外，目前找不出一個完備的方法找出所有奇數邊形的必勝策略。

3.C 規則中，存在著不能使用必勝策略的情況，我們經過多次的驗證，得知即使有時候無法使用必勝策略，使用必勝策略而佔優勢的那一方仍能獲勝，也就是說最後的勝負結果是不會變的。但我們還沒有找出一個方法，來證明我們的結果。

3.我們目前所完成的結果應該可以整理成一個系統的規則，礙於時間不足，我們尚未完成這個「大一統」定理。

除此之外，其實本題目仍然有許多發展的空間，例如：

1.我們可以改變規則，變成取到最後一塊三角形的人失敗。

2.我們可以改變規則，變成取到最多塊基本三角形的玩家，才獲勝。

3.我們可以限定後手所取的三角形必須和先手取的三角形有相鄰的邊。

4.我們可以把 A、B 規則再擴大，上推到三維空間的切割。

5.我們可以利用電腦程式，設計一個平台，讓我們的遊戲可以在平台上進行，這將大大節省我們使用手工的時間與精力。

上述皆是我們未來可以發展的方向，礙於時間不足以及狀況繁複，這些東西我們都只有初步的構想，希望未來能有機會將它完成。

五.結論與應用

（七）結論

我們把目前所得到的研究結果加以統整歸納，得到下列的結論。

（一）A、B 規則中三角形的必勝策略

我們發現：在 A、B 規則中，兩者的必勝策略其實大同小異，差別只在剩下圖形的兩邊分點數，而之所以剩下的圖形兩側邊上會有一點、二點的差別則是因為定理 4 和定理 12 有一邊的分點數恰好差 1 所導致。

（二）A、B 規則中四邊形的必勝策略

我們發現：在 A、B 規則中，除了 B 規則中 n=1 的情形需用另一種解法解決之外，其他的狀況完全相同。主要都是利用對稱切法的原理獲勝。同樣的情形也可以在偶數邊形中發現。

（三）A、B 規則中五邊形的必勝策略

我們發現：在 A 規則中的定理 4 是五邊形（0，n，0，0，n+1）的圖形且 n 為奇數。至於 B 規則中的定理 14 也是五邊形（0，n，0，0，n+1）的圖形，但 n 為偶數。這表示 A、B 規則的必勝策略其實是互補的，此種情形在五邊形的其他規則上也可以發現。大部分是利用定理 2、定理 4、定理 11、定理 14 而獲勝。

（四）A、B 規則中奇數邊形的必勝策略

我們推測：A、B 規則中的奇數邊形必勝策略應該都是建構在五邊形的必勝策略上，但由於只得到定理 4 可以推廣至奇數邊形中，其他部分我們並不確定是否有此一傾向。

（五）A、B 規則中偶數邊形的必勝策略

偶數邊形的必勝策略，並不如奇數邊形複雜，只要抓住大原則「不斷讓剩下的圖形成為對邊等分點的偶數邊形」，解法如對稱切法或定理 5、定理 6 都是由這個大原則出發，找出各種偶數邊形的必勝策略。但情況實在太複雜，分點數與分點數間可能的連結關係多如牛毛，我們舉出較具規律性的部分，其餘的就要靠更多的努力與時間了。

（六）C 規則中的必勝策略

在 C 規則中可以有一個比較接近「大一統」定理的必勝策略，也就是取到剩下 2 + k（n+1）塊基本三角形的圖形，就獲勝。（其中 n 為分點數的最大限制，$k \in \mathbf{N}$）。即使有例外的情況，只要佔優勢的一方改為使用 B 規則的定理繼續遊戲，仍然獲勝。

（八）應用

六.參考文獻

全國環球城市杯春季賽國中組高級卷第 4 題,2003