

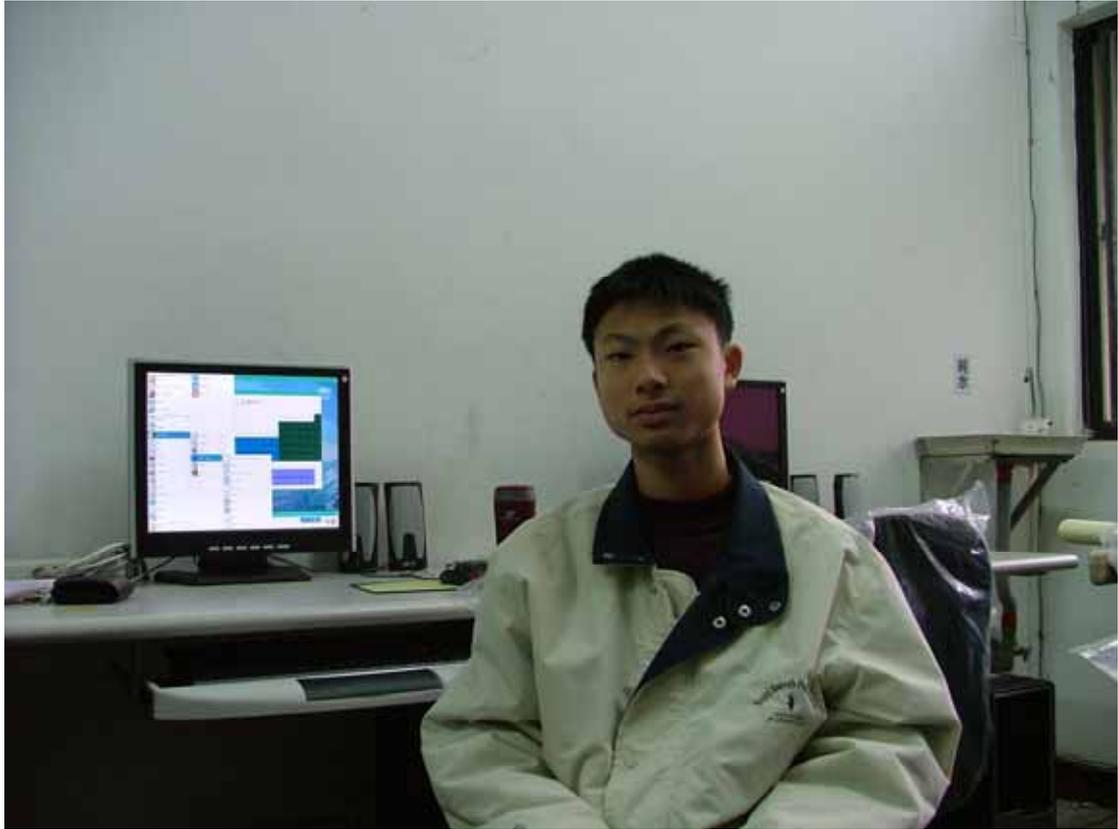
台灣二〇〇五年國際科學展覽會

科 別：數學

作品名稱：外接正多邊形法與對稱性

學 校：國立新竹高級中學

作 者：邱華彥



我是邱華彥，目前就讀於新竹高中。我對數理有一股莫名的求知慾，相信世界上的東西一定可以做出某些方面的解釋與分析。空閒時間我喜歡以綠色的樹林和山徑塗抹生命裡的空白，或化身成一蠹魚在幻想與科技的伏流裡打轉。

在這次的專題研究中，充分的體會了專注於一件事情、享受研究與成果的快樂。對於想獲得的事、物，大家都想尋求一帝王之徑，實際上那就是專注！只要不斷的思考、像剝洋蔥一樣從各個角度切入、剝皮，一定會有頓悟的時刻，看到那甜美的結晶。

這次科展也特別感謝張世標老師不眠不休的陪著我和其他組的同學思考、做壁報、印報告書，也感謝一直在背後支持我的爸媽。

目次

摘要	P.2
壹、前言	P.3
一、研究動機	P.3
二、研究目的	P.3
貳、研究方法	P.3
一、研究器材	P.3
二、研究方法	P.3
參、研究成果	P.4
一、三角形中垂線延伸研究	P.4
二、四邊形中垂線延伸研究	P.8
三、正 N 邊形外接正 N 邊形	P.10
四、利用正 N 邊形反作法找出目的 N 邊形及其性質	P.12
五、利用正 N 邊形反作法找出新 N 邊形的性質	P.18
肆、結論與應用	P.22
伍、參考資料	P.21

摘要

英文摘要(Abstract)

Motivated by Napoleon theorem, we study the properties of the triangles obtained by moving the midpoint of each side of a given triangle along the perpendicular bisector of corresponding sides, and extend the results to the case of quadrilaterals. On the other hand, we consider the method of erecting a regular M -gon to each side of a given N -gon and joint the N centers of these M -gons to form a new N -gon. (abbreviated as CRG method), and get the following results.

1. We characterize some kinds of N -gons that can be transformed to regular N -gons via CRG method.
2. If M, N are nature numbers with MIN , then it is possible to find a N -gon that can be transformed to a regular N -gon by CRG method.
3. If a polygon P is symmetric with respect to a fixed point or a fixed line, then P can be transformed by CRG to a polygon with similar symmetries.
4. If a polygon P is transformed by CRG to P' , there exists a common point G such that $\sum \overrightarrow{GA} = \vec{0}$ and $\sum \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, where A and B runs through vertices of P and P' , respectively.

中文摘要

本研究將拿破崙定理加以延伸。先探討由各邊中點沿中垂線延伸得出之三角形的性質並推廣至四邊形之情形條列式報告成果。另一個推廣是將給定的多邊形的每邊外接一個正多邊形，再以這些外接的正多邊形的中心為頂點造出一個新的多邊形。我們發現此幾何變換具有以下性質：

- (1) 「哪些多邊形能被變換成正多邊形呢?」，我們觀察出能被變換成正多邊形的多邊形其限制條件隨邊數增加而增多，並進一步區分了哪些多邊形可以被變換成正多邊形。
- (2) 在將非正 N 邊形做變換時，不一定須外接正 N 邊形才能得到正 N 邊形，我們區分出可外接哪些正多邊形而得到正多邊形。
- (3) 對給定的多邊形作此變換時，若原多邊形有點對稱或線對稱等性質，則新多邊形也將具有相同的性質。
- (4) 此變換得到的新多邊形會與原多邊形共重心，亦即新舊兩多邊形內到各自的頂點向量和為 $\vec{0}$ 的點會是同一點。

研究報告

壹、前言

一、研究動機:

幾何之中有拿破崙定理和 Aubel 定理兩種藉由一般或特殊性質的多邊形來得到正多邊形的方法，無疑是提供了另一些途徑繪出正三角形和正方形，且原先不規則的圖形經由此種變換後得到正多邊形，是個很有趣的部分。因此我們想探討一般多邊形以此變換可獲得哪些新性質，並找出何種多邊形可以經由外接正多邊形取中心的方法得出另一正多邊形，並找出這類幾何變換的意義。

二、研究目的:

- 1.藉由 GSP 的協助，探討由三角形或四邊形各邊中點沿中垂線向外延伸該邊長度之固定倍數所得之點連出的新三角形的性質，並將此加以推廣。
- 2.找出可被外接正多邊形法變換成正多邊形的多邊形的特徵。
- 3.利用正多邊形反作法，找出外接正多邊形法作出的多邊形的特徵。

貳、研究方法

一、研究器材

紙、筆、個人電腦、GSP

二、研究方法

- 1.以 GSP 繪製圖形、測量邊長比與角度，並尋找圖形的特性。
- 2.找出特性後加以證明得出結果，並依其結果探討下一主題。
- 3.為方便研究、紀錄與敘述，我們採用底下的符號或術語：
 - (1)以下之大寫 N, M 為大於 2 的自然數
 - (2)以下各研究中稱被變換的 N 邊形為原 N 邊形，稱變換所得的多邊形為新 N 邊形。
 - (3)以下將”對一給定 N 邊形之各邊外接正 M 邊形，再取各正 M 邊形中心點為頂點而作出新 N 邊形”的方法稱為外接正 M 邊形法，而所得的 N 邊形稱新 (M, N) 邊形，其中 M 不一定等於 N ，若 $M=N$ 則簡稱新 N 邊形。
 - (4)重複操作的定義為原 N 邊形經過(1)或(2)的變換後，以新 N 邊形(新 (M, N) 邊形)作為原 N 邊形再作變換，其重複次數若未說明則不限。
 - (5)以下各證明中常用旋轉的概念，所以定義一向量算符 ϕ ， $\phi(a, b) = (-b, a)$ ，即繞原點逆時針旋轉 90 度，而 ϕ_θ 是繞原點旋轉 θ 。
 - (6)給定 k 個定點 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ ，以下將”點 P_0 對給定點 A_1 旋轉 $\frac{2\pi}{N}$ 後得點 P_1 ，再把點 P_1 對 A_2 旋轉 $\frac{2\pi}{N}$ 後得點 P_2 …把點 P_{k-1} 對 A_k 旋轉 $\frac{2\pi}{N}$ 後得點 P_k ”之方法稱為作 k 次正 N 邊形反作法。

參、研究結果與討論

一、三角形中垂線延伸研究

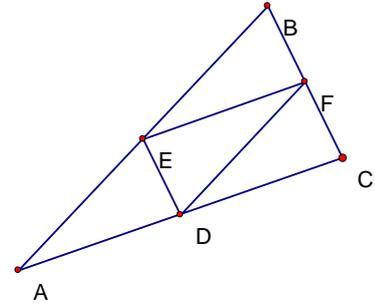
1. 當由三中垂線延伸的三點延伸倍數為邊長之 0 倍時，三點即為三邊中點可得一相似形。

由 D、E、F 分別平分 \overline{AC} 、 \overline{AB} 、 \overline{BC} 得到

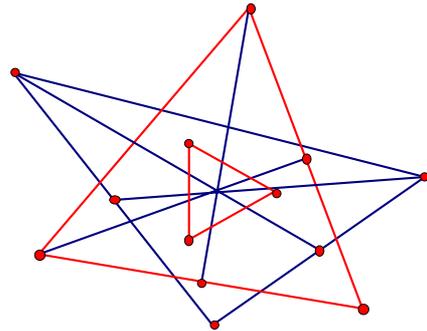
$$\overline{EF} = \frac{1}{2}\overline{AC}, \overline{DF} = \frac{1}{2}\overline{AB}, \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{BC} \text{ 得}$$

$$\triangle DEF \cong \triangle ABC (sss)$$

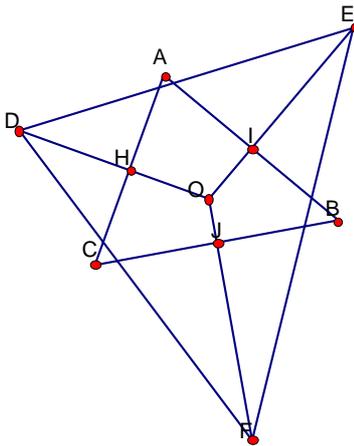
$m\angle CAB = 27.54^\circ$	$m\angle EFD = 27.54^\circ$
$m\angle ABC = 69.14^\circ$	$m\angle FDE = 69.14^\circ$
$m\angle BCA = 83.32^\circ$	$m\angle DEF = 83.32^\circ$



2. 當由三中垂線延伸的三點延伸倍數為邊長之 $1/2\sqrt{3}$ 倍時，三點連線即為一正三角形，不論往三角形內部延伸或往外延伸皆可作出正三角形，且新正三角形與原三角形共重心(拿破崙定理)。



3. 由三中垂線延伸的三點延伸倍數為邊長之 k 倍而 k 趨近於無限時，新三角形的性質。



推導：當由三中垂線延伸的三點延伸倍數為邊長之 k 倍而 k 趨近於無限時，設三角形 ABC 重心為 G

$$\overline{OE} = k\phi\overline{AB} + \overline{OI}$$

$$\overline{OF} = k\phi\overline{BC} + \overline{OJ}$$

$$\overline{OD} = k\phi\overline{CA} + \overline{OH}$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = k_l \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{OJ} - k\phi \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OI} = k\phi(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) + \overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{FD} = k\phi(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) + \overrightarrow{JH}$$

$$\overrightarrow{DE} = k\phi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{HI}$$

所以當 $k \rightarrow \infty$ 時,

$$\overrightarrow{EF} : \overrightarrow{FD} : \overrightarrow{DE}$$

$$\rightarrow (|\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}|) : (|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}|) : (|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|)$$

$$= \overrightarrow{BG} : \overrightarrow{CG} : \overrightarrow{AG},$$

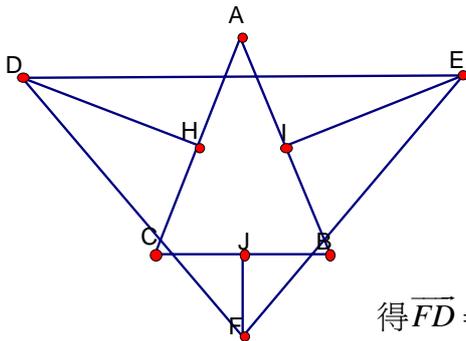
故得新三角形三邊長度比會趨近於原三角形三頂點到重心的距離

因此，給定一三角形 T，將其三邊平移到有共同端點，取三線段的另一端點後得到另一三角形 I，則三角形 I 從三邊中點沿三中垂線延伸各邊邊長之 k 倍而 k 趨近於無限時，新三角形 I' 的的三邊長會趨近於給定的三角形 T

4. 作此類型變換時，對稱性如等腰三角形之線對稱性質(等腰性質)會維持。

證明：

已知一等腰 $\triangle ABC$ (A 為頂角) 各邊終點沿中垂線向外延伸 k 倍得點 D、E、F



$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + k\phi \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2} + k\phi(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + k\phi \overrightarrow{AC}$$

$$\text{得 } \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AF} = -\frac{\overrightarrow{AB}}{2} + k\phi \overrightarrow{AB},$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF} = -\frac{\overrightarrow{AC}}{2} + k\phi \overrightarrow{AC}$$

$$\text{使 } |\overrightarrow{FD}| = \sqrt{\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\right)^2 + (k\overrightarrow{AB})^2} = \sqrt{\left(\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right)^2 + (k\overrightarrow{AC})^2} = |\overrightarrow{FE}|,$$

故得新 $\triangle DEF$ 為等腰三角形

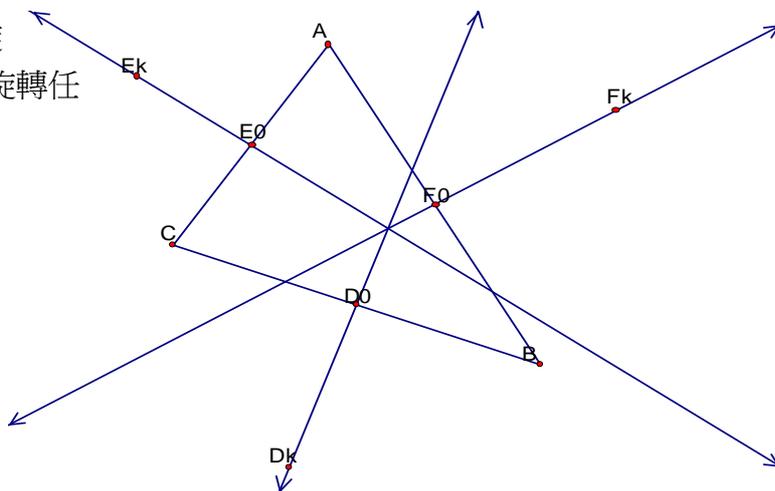
5. 三角形由各邊中點沿中垂線伸長對應邊長之固定倍數得到的點所連成的的新三角形與原三角形共重心。

證明:

設原三角形 ABC 重心為 G, 各邊中點為各邊中點 $D_0 E_0 F_0$ 如圖所示，向外各沿中垂線延伸 k 倍，得新三角形頂點為 $D_k E_k F_k$

$$\begin{aligned}
& \text{由 } G \text{ 爲重心得 } \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0} \\
& \overline{GD_k} + \overline{GE_k} + \overline{GF_k} \\
& = \overline{GD_0} + \overline{GE_0} + \overline{GF_0} + \overline{D_0D_k} + \overline{E_0E_k} + \overline{F_0F_k} \\
& = \vec{0} + \phi k \overline{BC} + \phi k \overline{AC} + \phi k \overline{AB} \\
& = \phi k (\overline{BC} + \overline{AC} + \overline{AB}) \\
& = \vec{0}
\end{aligned}$$

在這個證明中，並未用到 ϕ 旋轉 90 度的特性，可見 ϕ 可爲旋轉任意角度的算符。



6. 重心共點的推廣研究

將 5 推廣，在原三角形內找出一點 P ，使 $\alpha \overline{PA} + \beta \overline{PB} + \gamma \overline{PC} = \vec{0}$ 。以 \overline{PA} 與 \overline{BC} 、 \overline{PB} 與 \overline{AC} 、 \overline{PC} 與 \overline{AB} 的交點 $D_0E_0F_0$ 爲出發點，與各邊夾固定角度延伸出去，各延伸該邊長的某個倍數而得點 $D_kE_kF_k$ 且 $\overline{PD_k} + \overline{PE_k} + \overline{PF_k}$ 爲一個固定的向量，那各邊延伸的倍數該如何安排？

若 $\alpha + \beta$ 或 $\beta + \gamma$ 或 $\alpha + \gamma$ 等於 0

若 $\alpha + \beta$ 則 $\overline{PC} \parallel \overline{AB}$ 無法找出 \overline{AB} 上的起始點 F_0

同理可證 $\beta + \gamma$ 或 $\alpha + \gamma$ 等於 0

當 α, β, γ 任兩個等於 0

則 P 與其中一個頂點重合，且其對邊的分點並非定點，故不予討論

由上可知 $\alpha\beta\gamma = 0$ ，則方程式 $\alpha \overline{PA} + \beta \overline{PB} + \gamma \overline{PC} = \vec{0}$

其實並未給出任何條件規範 $\overline{PA}, \overline{PB}$ 及 \overline{PC} ，故不予討論

因此,我們只考慮 $\alpha\beta\gamma \neq 0$ 之情形.對此我們討論如下:

由 $\alpha\overline{PA} + \beta\overline{PB} + \gamma\overline{PC} = \vec{0}$ 和分點公式

我們可知

$$\overline{PD}_0 = \frac{\alpha}{\beta + \gamma} \overline{AP}$$

$$\overline{PE}_0 = \frac{\beta}{\alpha + \gamma} \overline{BP}$$

$$\overline{PF}_0 = \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \overline{CP}$$

$$\text{得} (\beta + \gamma)\overline{PD}_0 + (\alpha + \gamma)\overline{PE}_0 + (\alpha + \beta)\overline{PF}_0 = \vec{0}$$

設從 D_0, E_0, F_0 分別沿與各邊夾 θ 角的方向延伸邊長的 uk, vk, wk 倍而得 D_k, E_k, F_k

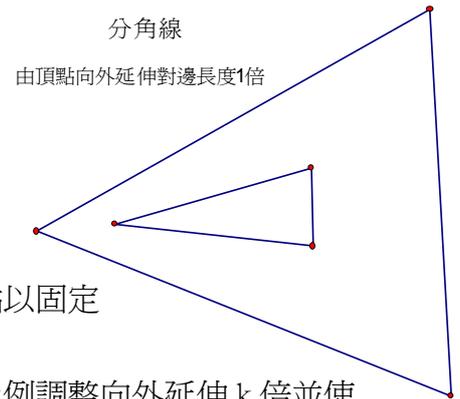
$$\text{得知要找的延伸倍數會使} (\beta + \gamma)\overline{PD}_k + (\alpha + \gamma)\overline{PE}_k + (\alpha + \beta)\overline{PF}_k = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \text{又} \vec{0} &= (\beta + \gamma)\overline{PD}_k + (\alpha + \gamma)\overline{PE}_k + (\alpha + \beta)\overline{PF}_k \\ &= (\beta + \gamma)\overline{PD}_0 + (\alpha + \gamma)\overline{PE}_0 + (\alpha + \beta)\overline{PF}_0 + (\beta + \gamma)\overline{D_0D_k} + (\alpha + \gamma)\overline{E_0E_k} + (\alpha + \beta)\overline{F_0F_k} \\ &= \vec{0} + (\beta + \gamma)\overline{D_0D_k} + (\alpha + \gamma)\overline{E_0E_k} + (\alpha + \beta)\overline{F_0F_k} \\ &= (\beta + \gamma)\phi_0 uk \overline{BC} + (\alpha + \gamma)\phi_0 vk \overline{CA} + (\alpha + \beta)\phi_0 wk \overline{AB} \end{aligned}$$

$$\text{得} u = \frac{1}{\beta + \gamma}, v = \frac{1}{\alpha + \gamma}, w = \frac{1}{\alpha + \beta}$$

因此各邊延伸的倍數分別為 $\frac{1}{\alpha + \beta} \overline{AB}, \frac{1}{\beta + \gamma} \overline{BC}, \frac{1}{\alpha + \gamma} \overline{AC}$

則所有的新三角形會有共同的特殊點 P 使 $(\beta + \gamma)\overline{PD}_k + (\alpha + \gamma)\overline{PE}_k + (\alpha + \beta)\overline{PF}_k = \vec{0}$



7.討論:

- (1)本節以討論沿中垂線延伸出去的做法為主，再以共重心的部分作了進一步延伸。
- (2)共重心的延伸使我們發現可由三角形各邊的分點以固定角度延伸而得到新三角形。
- (3)我們可由一給定的三角形經由各邊適當的分點比例調整向外延伸 k 倍並使該新三角形在 $k \rightarrow \infty$ 時，其形狀會趨近於我們給定的另一三角形。
- (4)在研究過程中也使用分角線不過尚未有有趣的發現。
- (5)目前的研究只與各邊延伸的長度只與單邊相關，與多邊相關的部分在代數的計算後發現這是一個線性組合，因此不會有特殊倍數，使三角形的各邊中點沿中垂線延伸其對應邊長的固定倍數後，能得到正三角形。

二、四邊形中垂線延伸研究

1.若原四邊形為平行四邊形，且由各中垂線延伸的四點延伸倍數為邊長之 $1/2$ 倍，四點連線即為一正方形，且不論往四邊形內部延伸或往外延伸皆可作出正方形(Aubel定理)。

2.線對稱的圖形若以外接正方形法可得線對稱的圖形，且我們觀察出新四邊形之邊長比和角度會更為接近正方形。

中軸對稱的四邊形共有兩類：等腰梯形及箏形(鸞形)

(1)以等腰梯形為原四邊形作出的新四邊形一定為箏形。

(2)以箏形為原四邊形作出的新四邊形一定為等腰梯形。

證明：

線對稱圖形經此變換仍為線對稱圖形

若一給定多邊形具有線對稱性質

設其對稱線為y軸，則必可找到 $A(x,y)$ 與對稱點 $A'(-x,y)$ $x,y \in R$

不失一般性

設有點 $A(x_1,y_1), B(x_2, y_2)$

其對稱點為 $A'(-x_1,y_1), B'(-x_2, y_2)$

由中點沿中垂線依邊長延伸變換後

$$A^*:\frac{1}{2}(x_1+x_2,y_1+y_2)+k\phi(x_2-x_1,y_2-y_1) \quad k \in R$$

$$A'^*:\frac{1}{2}(-x_1+(-x_2),y_1+y_2)+k\phi(-x_2-(-x_1),y_2-y_1) \quad k \in R$$

$$\text{得} A^*:\frac{1}{2}(-(x_1+x_2),y_1+y_2)+k\phi(-(x_2-x_1),y_2-y_1) \quad k \in R$$

A^* 與 A'^* 對稱於y軸

在多邊形與y軸相交時有兩種情況

(1)一頂點在y軸上,可引用上述證明而點A為 $(0,y_1)$

(2)兩對稱點的連線與y軸相交

$C(x,y)$ 與對稱點 $C'(-x,y)$

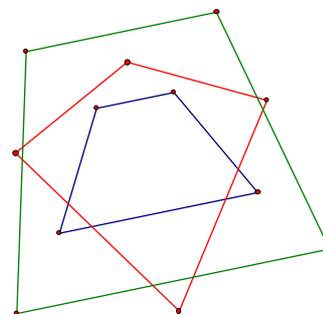
$$\text{變換後得點} C^*:\frac{1}{2}(x+(-x),y+y)+k\phi(x-(-x),y-y) \quad k \in R$$

得點 $C^*:(0,y)+k\phi(2x,0)$

得 $C^*:(0,y+2kx)$ 在y軸上

得到線對稱的多邊形經此變換仍能得到線對稱的多邊形

且對稱軸不變



(1)以等腰梯形為原四邊形作出的新四邊形一定為箏形。

給定一等腰梯形ABCD

令 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(-x_2, y_2), D(-x_1, y_1)$

則新四邊形由 \overline{AB} 邊變換而得之點稱 A'

由 \overline{BC} 邊變換而得之點稱 B'

由 \overline{CD} 邊變換而得之點稱 C'

由 \overline{DA} 邊變換而得之點稱 D'

而 \overline{AB} 與 \overline{CD} 對稱於y軸,得 A' 與 C' 對稱於y軸(前述之證明情況(1))

又 \overline{BC} 與 \overline{DA} 之兩端點兩兩為對稱點得 B' 與 D' 在y軸上(前述之證明情況(2))

得 $A'B'C'D'$ 為箏形(鳶形)

(2)以箏形為原四邊形作出的新四邊形一定為等腰梯形。

給定一箏形ABCD

令 $A(0, y_1), B(x_2, y_2), C(0, y_3), D(-x_2, y_2)$

則新四邊形由 \overline{AB} 邊變換而得之點稱 A'

由 \overline{BC} 邊變換而得之點稱 B'

由 \overline{CD} 邊變換而得之點稱 C'

由 \overline{DA} 邊變換而得之點稱 D'

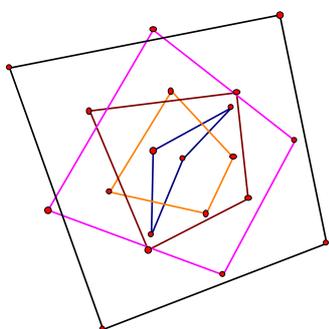
而 \overline{AB} 與 \overline{DA} 對稱於y軸,得 A' 與 D' 對稱於y軸(前述之證明情況(1))

又 \overline{BC} 與 \overline{CD} 對稱於y軸,得 B' 與 C' 對稱於y軸(前述之證明情況(1))

得 $A'B'C'D'$ 為等腰梯形

3. 由觀察而猜測，將原四邊形不斷的重複操作外接正方形法得出之四邊形其角度與邊長比會接近正方形。

若對原四邊形不斷重複操作外接正方形法，其角度與邊長比會接近正方形。角度部分最大角與最小角的差距會縮小；邊長比也會接近 1:1:1:1。



原 N 邊形為鏢形(有一角大於 π)

新四邊形似梯形

重複操作 1 次的新四邊形為似箏形

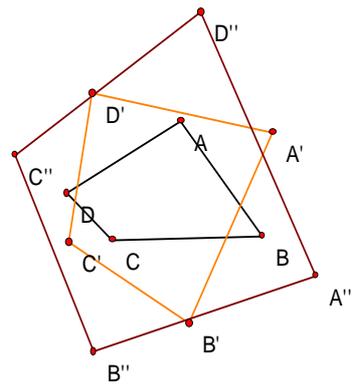
重複操作 2 次的新四邊形為似梯形

重複操作 3 次的新四邊形為似箏形

雖然在箏形梯形間變換，但其邊長比和角度越來越接近正方形

測量示意圖

原四邊形	新四邊形	重複操作1次新四邊形
$m\angle ABC = 52.50^\circ$	$m\angle A'B'C' = 85.49^\circ$	$m\angle A''B''C'' = 97.58^\circ$
$m\angle DAB = 99.58^\circ$	$m\angle B'C'D' = 110.80^\circ$	$m\angle B''C''D'' = 100.08^\circ$
$m\angle BCD = 135.93^\circ$	$m\angle C'D'A' = 89.05^\circ$	$m\angle C''D''A'' = 81.84^\circ$
$m\angle CDA = 71.99^\circ$	$m\angle D'A'B' = 74.67^\circ$	$m\angle D''A''B'' = 80.50^\circ$
$\frac{m\overline{AB}}{m\overline{AB}} = 1.00$	$\frac{m\overline{A'B'}}{m\overline{A'B'}} = 1.00$	$\frac{m\overline{A''B''}}{m\overline{A''B''}} = 1.00$
$\frac{m\overline{BC}}{m\overline{AB}} = 1.15$	$\frac{m\overline{B'C'}}{m\overline{A'B'}} = 0.74$	$\frac{m\overline{B''C''}}{m\overline{A''B''}} = 0.82$
$\frac{m\overline{CD}}{m\overline{AB}} = 0.47$	$\frac{m\overline{D'C'}}{m\overline{A'B'}} = 0.71$	$\frac{m\overline{C''D''}}{m\overline{A''B''}} = 0.97$
$\frac{m\overline{DA}}{m\overline{AB}} = 1.00$	$\frac{m\overline{D'A'}}{m\overline{A'B'}} = 0.98$	$\frac{m\overline{D''A''}}{m\overline{A''B''}} = 1.12$



4.討論

- (1)在四邊形的研究中推廣了對稱性保留的部分，發現只要線對稱的圖形作外接正多邊形法後仍然具有線對稱的特性。
- (2)另外由「只有對平行四邊形作外接正方形法才得到正方形」這與三角形的情況不同，告訴我們能以外接正多邊形法作出正多邊形的多邊形其限制可能隨邊數增加而增多。若以外接正多邊形法是一種變換的還原來看，他可以還原兩個變數，但是多邊形每增加一個邊便需加入兩個變數，因此能由外接正多邊形法得到正多邊形的多邊形限制也隨邊數增加而增多
- (3)雖然並非每個四邊形以外接正方形法都可得到正方形，但我們觀察到其重複操作的結果會趨近正方形，但由於其變換較為複雜，我們還在積極研究當中。

(三)N 邊形外接正 N 邊形

當 N 越大可被歸類的 N 邊形之種類越少，同時也越難找出取外接正 N 邊形中心連線時可得正 N 邊形的原 N 邊形(以下簡稱目的 N 邊形)。

1.運用 GSP 尋找使新 N 邊形是正 N 邊形的原 N 邊形

法一：可將新 N 邊形的各邊邊長及各角角度量出，一次移動原 N 邊形一點使各邊邊長比趨近於 1、角度最接近正 N 邊形角度時，移動第二點，反覆操作直到新 N 邊形為正 N 邊形。

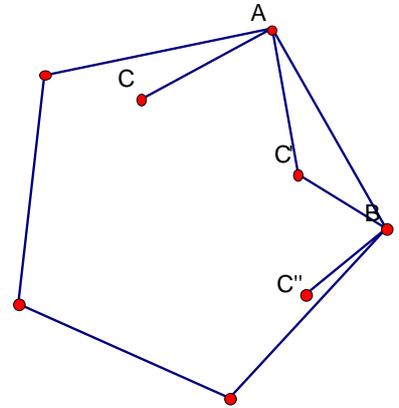
法二：利用等腰三角形的「等腰性質在外接正三角形法變換後被保留」、「平行四邊形以外接正方形法變換得出正方形等對稱性保留」的特性，由原先有對稱性的圖形，如：中軸對稱的 N 邊形改動各點間距找出目的 N 邊形。

法三：由正 N 邊形及平面上一點反作出目的 N 邊形

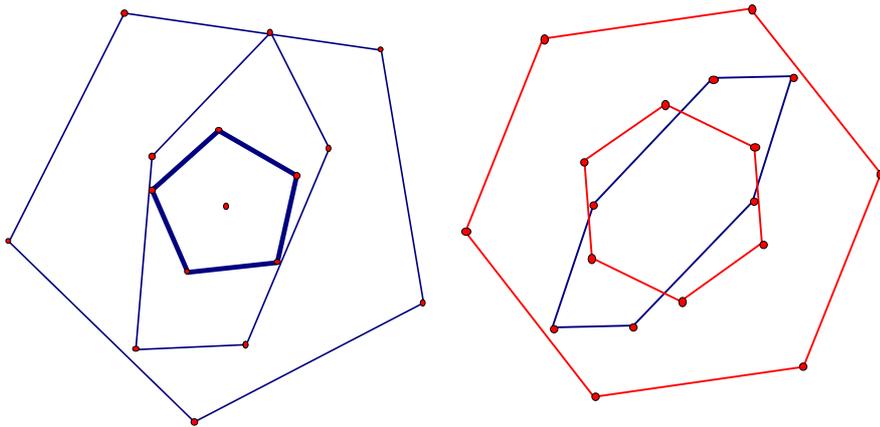
(1)說明：

由於法一及法二須耗費大量時間體力卻只能得到少部分結果，因此我想出法三來尋找。因為要找的目的 N 邊形有「經過外接正 N 邊形取中心點連線的操作可得正 N 邊形」的性質，並可由正 N 邊形反向操作得出目的 N 邊形的集合，故可藉此尋找其互為充要條件的性質。

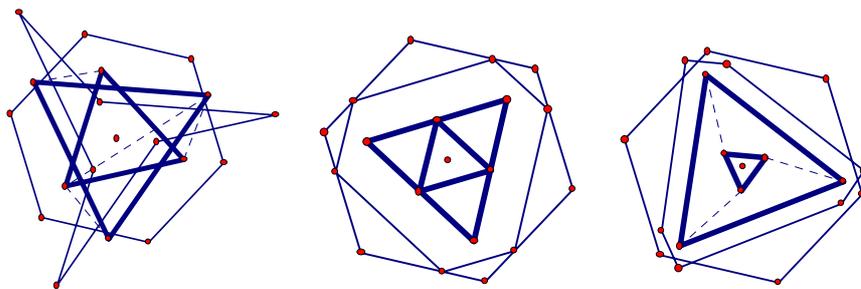
(2)在反作法的部分(如右圖)，由於是外接正 N 邊形取其中心點。就先假設 C 點為目的 N 邊形的一個頂點，以 C 對新正 N 邊形的一個頂點 A 逆時鐘旋轉 $\frac{2\pi}{N}$ 可得 C' 點，而 $\overline{CC'}$ 則滿足外接正 N 邊形取中心點為新 N 邊形之頂點 A 的條件，如此重複操作。



2.目的 N 邊形則不論是作外接正 N 邊形變換或內接正 N 邊形變換都可得出新 N 邊形為正 N 邊形。 證明可見於四-3 的證明後半



3.當 N 邊形外接正 M 邊形法變換後可得到正 N 邊形時，並不保證內接正 M 邊形法時也可以得到正 N 邊形，我們還觀察出由內接正 M 邊形法變換可以得到正 M 邊形重疊而成的新 N 邊形。下圖以 6 邊形為例：粗線部份為正 3 角形，虛線部份是經內接正 3 角形法變換後的 6 邊形（有些虛線與粗線重疊故沒畫上）



4.不論是外接正多邊形法或者沿中垂線延伸邊長 k 倍，新多邊形與原多邊形皆會具有相同的點使得該點到多邊形各頂點的向量和為 0。

證明

設原 N 邊形之頂點為

$$P_1, P_2, P_3 \dots P_N$$

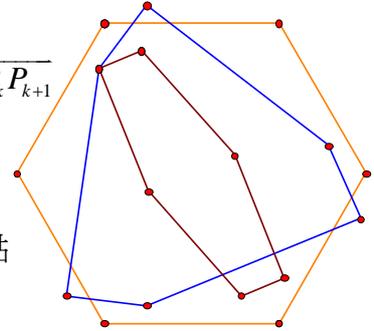
$$\text{則由 } N_k N_{k+1} \text{ 經轉換的點為 } M_k, \text{ 而 } \overline{P_k M_k} = \frac{1}{2} \overline{P_k P_{k+1}} + k\phi \overline{P_k P_{k+1}}, 1 \leq k \leq N-1$$

設原多邊形中到各頂點向量和為 $\vec{0}$ 的點為 O

$$\sum_{k=1}^N \overline{OM_k} = \sum_{k=1}^N \overline{OP_k} + \frac{1}{2} \overline{P_k P_{k+1}} + k\phi \overline{P_k P_{k+1}} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \overline{P_k P_{k+1}} + k\phi \overline{P_k P_{k+1}}$$

$$\text{又 } \sum_{k=1}^N \overline{P_k P_{k+1}} \text{ 圍出原 } N \text{ 邊形得 } \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \overline{P_k P_{k+1}} + k\phi \overline{P_k P_{k+1}} = \vec{0}$$

得原多邊形與新多邊形中到各頂點向量和為 $\vec{0}$ 的點共點



5. 討論:

利用正多邊形反作法來找出目的多邊形對本研究有以下幫助

- (1) 可以系統化有效的取得大量的目的多邊形，且在座標化之後容易看出每個目的多邊形的共同特性。
- (2) 將給定的點 P_0 移至多邊形外部可將此反做法視為內接正多邊形反做法。
- (3) 在將給定的點 P_0 移動時，有時產生出凹多邊形，表示此變換應可推廣至凹多邊形。

(四) 利用正 N 邊形反作法找出目的 N 邊形及其性質

1. 利用 N 邊形反作法找出在外接正 M 邊形變換下的目的 N 邊形

定理：

設正 N 邊形外接圓半徑 r ，又設正 N 邊形 Λ 和一點 P_0 在同一平面

若 MIN ，則以點 P_0 對正 N 邊形 Λ 之各頂點作正 M 邊形反作法 N 次。則 P_n 會與 P_0 重合，將 P_0 到 P_{n-1} 連線可得一目的 N 邊形。該目的 N 邊形可藉由向外作正 M 邊形法得到正 N 邊形。

詳細步驟：

P_0 對 Λ 的頂點 R_1 $\left[r, \frac{2\pi}{N} \right]$ 旋轉 $\frac{2\pi}{M}$ 後得點

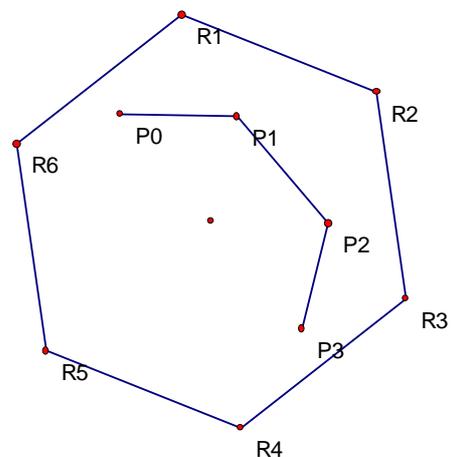
P_1 ，再對頂點 R_2 $\left[r, 2 \cdot \frac{2\pi}{N} \right]$ 旋轉 $\frac{2\pi}{M}$ 後得點

P_2, \dots 以 P_k 再對頂點 R_{k+1} $\left[r, (k+1) \cdot \frac{2\pi}{N} \right]$ 旋轉

$\frac{2\pi}{M}$ 後得點 P_{k+1} 重複作 N 次，若 N_k 的編排是順

時鐘則要逆時鐘旋轉 $\frac{2\pi}{M}$ ，若 R_k 的編排是逆

時鐘則要順時鐘旋轉 $\frac{2\pi}{M}$ 。



證明：

給定一點 $P_0[a, \theta]$

$$\text{則 } P_1 \text{ 爲 } \left(\left[a, \theta + \frac{2\pi}{M} \right] - \left[r, \frac{2\pi}{M} - \frac{2\pi}{N} \right] + \left[r, -\frac{2\pi}{N} \right] \right)$$

$$\text{則 } P_k \text{ 爲 } \left((P_1 - N_2) \text{ 旋轉 } \frac{2\pi}{M} + N_2 \right)$$

$$P_k : \left(\left[a, \theta + k \cdot \frac{2\pi}{M} \right] - \sum_{i=1}^N \left[r, i \cdot \left(-\frac{2\pi}{N} \right) + (k-i+1) \cdot \frac{2\pi}{M} \right] + \sum_{i=1}^N \left[r, i \cdot \left(-\frac{2\pi}{N} \right) + (k-i) \cdot \frac{2\pi}{M} \right] \right)$$

當 $k=N$ 時

$$\text{則 } P_N : \left(\left[a, \theta + N \cdot \frac{2\pi}{M} \right] - \sum_{i=1}^N \left[r, i \cdot \left(-\frac{2\pi}{N} \right) + (N-i+1) \cdot \frac{2\pi}{M} \right] + \sum_{i=1}^N \left[r, i \cdot \left(-\frac{2\pi}{N} \right) + (N-i) \cdot \frac{2\pi}{M} \right] \right)$$

又 $N = hM, h \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \text{則 } P_N & \left(\left[a, \theta + hM \cdot \frac{2\pi}{M} \right] - \sum_{i=1}^{hM} \left[r, i \cdot \left(-\frac{2\pi}{hM} \right) + (hM-i+1) \cdot \frac{2\pi}{M} \right] + \sum_{i=1}^{hM} \left[r, i \cdot \left(-\frac{2\pi}{hM} \right) + (hM-i) \cdot \frac{2\pi}{M} \right] \right) \\ & = \left(\left[a, \theta \right] - \sum_{i=1}^{hM} \left[r, i \cdot \left(-\frac{2\pi}{hM} \right) + (-i+1) \cdot \frac{2\pi}{M} \right] + \sum_{i=1}^{hM} \left[r, i \cdot \left(-\frac{2\pi}{hM} \right) + (-i) \cdot \frac{2\pi}{M} \right] \right) \\ & = \left(\left[a, \theta \right] - \sum_{i=1}^{hM} \left[r, i \cdot \left(-(1+h) \frac{2\pi}{hM} \right) + \frac{2\pi}{M} \right] + \sum_{i=1}^{hM} \left[r, i \cdot \left(-(1+h) \frac{2\pi}{hM} \right) \right] \right) \end{aligned}$$

令 $\omega = -(1+h) \frac{2\pi}{hM}$, 則

$$\begin{aligned} & \left[a, \theta \right] - \sum_{i=1}^{hM} \left[r, i \cdot \left(-(1+h) \frac{2\pi}{hM} \right) + \frac{2\pi}{M} \right] + \sum_{i=1}^{hM} \left[r, i \cdot \left(-(1+h) \frac{2\pi}{hM} \right) \right] \\ & = \left[a, \theta \right] - r \sum_{i=1}^{hM} \left[1, i \cdot \omega + \frac{2\pi}{M} \right] + r \sum_{i=1}^{hM} [1, i \cdot \omega] \\ & = \left[a, \theta \right] - 0 + 0 \\ & = \left[a, \theta \right], \end{aligned}$$

故 P_N 之極座標為 $[a, \theta]$ 與 $P_0[a, \theta]$ 相同，即 P_N 與 P_0 重合。

2. 目的 N 邊形的性質

- (1) 三角形部分，由拿破崙定理得知，所有三角形皆為目的三角形
- (2) 四邊形部分，由 Aubel 定理得知，目的四邊形為平行四邊形且平行四邊形可視為經過推移與伸縮的正方形。
- (3) 六邊形部分，目的 6 邊形三雙對邊平行且相等(稱平行六邊形)，且其任相鄰三頂點可與 6 邊形之對角線交點連成一平行四邊形。
- (3) 之證明：

設正 6 邊形之中心點為原點且其至各頂點距離為 r ，又原點至 A 點距離為 a ，角度 θ ，則由正多邊形反作法可得目的 6 邊形 A B C D E F 的各頂點經過平移、旋轉或縮放後極座標可表示成：

$$A[a, \theta],$$

$$B\left(\left[a, \theta + \frac{\pi}{3}\right] - \left[r, \frac{\pi}{3}\right] + [r, 0]\right) = \left(\left[a, \theta + \frac{\pi}{3}\right] + \left[r, -\frac{\pi}{3}\right]\right),$$

$$C\left(\left[a, \theta + \frac{2\pi}{3}\right]\right) = \left(\left[a, \theta + \frac{2\pi}{3}\right] + \left[r, -\frac{\pi}{3}\right]\right),$$

$$D\left(\left[a, \theta + \pi\right] - [r, \pi] + \left[r, \frac{2\pi}{3}\right] - \left[r, \frac{\pi}{3}\right] + [r, 0] - \left[r, -\frac{\pi}{3}\right] + \left[r, \frac{2\pi}{3}\right]\right) = [a, \theta + \pi],$$

$$E\left(\left[a, \theta + \frac{4\pi}{3}\right] - \left[r, \frac{4\pi}{3}\right] + [r, \pi]\right) = \left(\left[a, \theta + \frac{4\pi}{3}\right] + \left[r, \frac{2\pi}{3}\right]\right),$$

$$F\left(\left[a, \theta + \frac{5\pi}{3}\right] + [r, \pi] - [r, \pi] + \left[r, \frac{2\pi}{3}\right]\right) = \left(\left[a, \theta + \frac{5\pi}{3}\right] + \left[r, \frac{2\pi}{3}\right]\right).$$

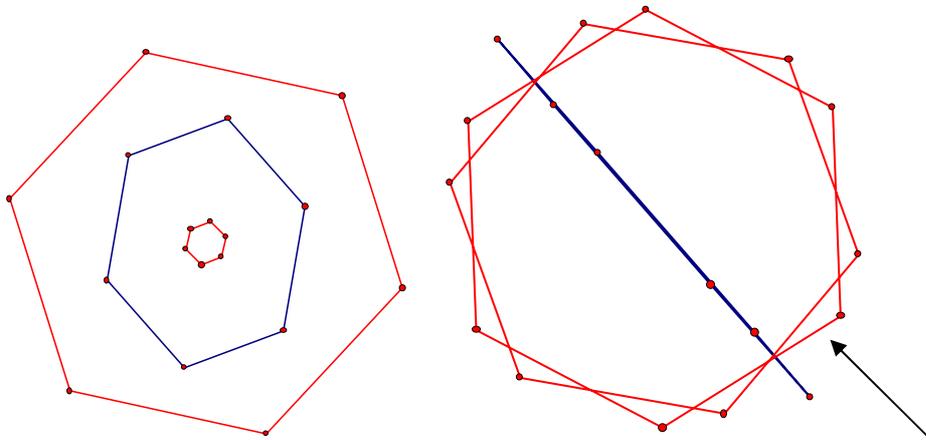
故得DEF為ABC對原點旋轉 π ，所以只需考慮OABC的情況：

$$\overline{OA} = [a, \theta] = \left[a, \theta + \frac{2\pi}{3}\right] - \left[a, \theta + \frac{\pi}{3}\right] + 2[r, 0] + 2\left[r, \frac{2\pi}{3}\right] + 2\left[r, \frac{4\pi}{3}\right] = \overline{CB},$$

$$\overline{AB} = \left[a, \theta + \frac{\pi}{3}\right] - [a, \theta] - \left[r, \frac{\pi}{3}\right] + [r, 0] = \left[a, \theta - \frac{2\pi}{3}\right] + \left[r, -\frac{\pi}{3}\right] = \overline{OC},$$

由 $\overline{OA} = \overline{CB}$, $\overline{AB} = \overline{OC}$ 得四邊形OABC為平行四邊形

且A、B、C對O有對稱點D、E、F得ABCDEF為平行六邊形



可推廣至壓縮成一直線的正六邊形

定理：

當一平行6邊形其任相鄰三頂點可與6邊形之對角線交點連成一平行四邊形時，該6邊形可被外接正6邊形法變換為正六邊形。

證明：

當一平行6邊形其任相鄰三頂點可與6邊形之對角線交點連成一平行四邊形時。

令其對角線交點為O

因為四邊形 $OABC$ 為平行四邊形
且六邊形 $ABCDEF$ 為平行六邊形

$$\text{所以 } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

設 D 、 E 、 F 分別是 A 、 B 、 C 對 O 的對稱點，
外接正六邊形的中心點分別為 $A'B'C'D'E'F'$ 。

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} - \frac{\sqrt{3}}{2}\phi\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\phi\overrightarrow{OB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\phi\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\phi\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OA'}^2 = |\overrightarrow{OA'}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{3}{2}\phi\overrightarrow{OA} \cdot \phi\overrightarrow{OB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \phi\overrightarrow{OB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\phi\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$$

$$= |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} \cdot \phi\overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OB'}^2 = |\overrightarrow{OB'}|^2 = |\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} \cdot \phi\overrightarrow{OA}$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB'}$$

$$\text{另一方面, } \overrightarrow{OA'} \cdot \overrightarrow{OB'} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{\sqrt{3}}{2}\phi\overrightarrow{OB} + \frac{\sqrt{3}}{2}\phi\overrightarrow{OA} \right) \cdot \left(\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\phi\overrightarrow{OA} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} - \frac{1}{4}|\overrightarrow{OA}|^2 + 0 + \frac{1}{2}|\overrightarrow{OB}|^2 - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{4}\overrightarrow{OB} \cdot \phi\overrightarrow{OA} - 0 +$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\phi\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} - \frac{3}{4}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{OB} \cdot \phi\overrightarrow{OA} - 0 + \frac{3}{4}|\overrightarrow{OA}|^2$$

$$= \frac{|\overrightarrow{OA}|^2 + |\overrightarrow{OB}|^2 - \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} \cdot \phi\overrightarrow{OA}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}|\overrightarrow{OA'}||\overrightarrow{OB'}|$$

因此 $\overrightarrow{OA'}$ 與 $\overrightarrow{OB'}$ 之夾角為 $\frac{\pi}{6}$ ，

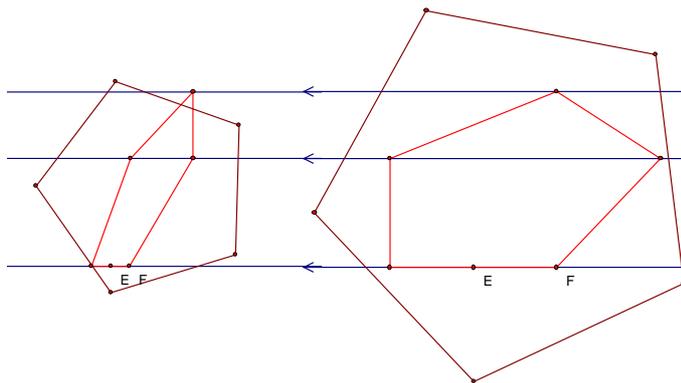
由 $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OB'}$ 且 $\overrightarrow{OA'}$ 與 $\overrightarrow{OB'}$ 張角為 $\frac{\pi}{6}$ ，

又 ABC 三點是目的六邊形上任意相鄰三點，得 $A'B'C'D'E'F'$ 為正六邊形。

而向內接正六邊形取中心點的部分同理可證，

只需把向量算符 $\phi(a, b) = (-b, a)$ 改為 $\phi(a, b) = (b, -a)$ 即可。

3.對正 N 邊形進行推移、伸縮得出的 N 邊形



定理：

對正 N 邊形進行推移、伸縮得出的 N 邊形會被外接正 N 邊形法變換為正 N 邊形。

證明：

不失一般性，

設座標原點於一正 N 邊形中心，則正多邊形之相鄰兩頂點為

$A(r \cos \theta, r \sin \theta)$ 及

$B(r \cos(\theta + \frac{2\pi}{N}), r \sin(\theta + \frac{2\pi}{N}))$ 。

以矩陣表示進行推移與伸縮

$$x' = ax + by$$

$$y' = y$$

得

$$\begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \cos(\theta + \frac{2\pi}{N}) & r \sin(\theta + \frac{2\pi}{N}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{外接正}N\text{邊形變換後的點}A^* = \frac{1}{2}A' + \frac{1}{2}B' - \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{n} \phi \overline{A'B'} = \frac{1}{2}(A' + B') + \frac{\cot \frac{\pi}{n}}{2} \phi(A' - B')$$

$$= \frac{1}{2}r \left(\begin{pmatrix} \cos \theta + \cos(\theta + \frac{2\pi}{N}) & \sin \theta + \sin(\theta + \frac{2\pi}{N}) \\ b & 1 \end{pmatrix} + \cot \frac{\pi}{n} \begin{pmatrix} \cos \theta - \cos(\theta + \frac{2\pi}{N}) & \sin \theta - \sin(\theta + \frac{2\pi}{N}) \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2}r \left(\begin{pmatrix} 2 \cos(\theta + \frac{\pi}{N}) \cos(\frac{\pi}{N}) & 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{N}) \cos(\frac{\pi}{N}) \\ b & 1 \end{pmatrix} + \cot \frac{\pi}{n} \begin{pmatrix} 2 \sin(\theta + \frac{\pi}{N}) \sin(\frac{\pi}{N}) & -2 \cos(\theta + \frac{\pi}{N}) \sin(\frac{\pi}{N}) \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} \right)$$

$$= r \left(\begin{pmatrix} \cos(\theta + \frac{\pi}{N}) \cos(\frac{\pi}{N}) & \sin(\theta + \frac{\pi}{N}) \cos(\frac{\pi}{N}) \\ b & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin(\theta + \frac{\pi}{N}) \cos(\frac{\pi}{N}) & -\cos(\theta + \frac{\pi}{N}) \cos(\frac{\pi}{N}) \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ -1 & b \end{pmatrix} \right)$$

$$= r \cos(\frac{\pi}{N}) \begin{pmatrix} a \cos(\theta + \frac{\pi}{N}) + b \sin(\theta + \frac{\pi}{N}) + \cos(\theta + \frac{\pi}{N}) & a \sin(\theta + \frac{\pi}{N}) - b \cos(\theta + \frac{\pi}{N}) + \sin(\theta + \frac{\pi}{N}) \\ N & N \end{pmatrix}$$

可表示成

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \cos(\theta + \frac{2\pi}{N}) & r \sin(\theta + \frac{2\pi}{N}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cot \frac{\pi}{n} & -\cot \frac{\pi}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ r \cos(\theta + \frac{2\pi}{N}) & r \sin(\theta + \frac{2\pi}{N}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

轉換為極座標A*為

$$\left(ar \cos\left(\frac{\pi}{N}\right), \left(\theta + \frac{\pi}{N}\right) \right) + \left(br \cos\left(\frac{\pi}{N}\right), \left(\theta + \frac{\pi}{N} + \frac{\pi}{2}\right) \right) + \left(r \cos\left(\frac{\pi}{N}\right), \left(\theta + \frac{\pi}{N}\right) \right)$$

當我們所選取的 θ 依次增加 $\frac{2\pi}{N}$

則A*就對原點旋轉 $\frac{2\pi}{N}$

得新N邊形為正N邊形

$$\text{內接正N邊形法部分} A^{\#} = \frac{1}{2} \overline{A'B'} + \frac{1}{2} \cot \frac{\pi}{n} \phi \overline{A'B'}$$

$$\text{矩陣可整理成} r \cos\left(\frac{\pi}{N}\right) \left(a \cos\left(\theta + \frac{\pi}{N}\right) + b \sin\left(\theta + \frac{\pi}{N}\right) - \cos\left(\theta + \frac{\pi}{N}\right) \quad -a \sin\left(\theta + \frac{\pi}{N}\right) + b \cos\left(\theta + \frac{\pi}{N}\right) + \sin\left(\theta + \frac{\pi}{N}\right) \right)$$

轉換為極座標A#為

$$\left(\left[ar \cos\left(\frac{\pi}{N}\right), \left(-\theta - \frac{\pi}{N}\right) \right] + \left[br \cos\left(\frac{\pi}{N}\right), \left(\frac{\pi}{2} - \theta - \frac{\pi}{N}\right) \right] + \left[r \cos\left(\frac{\pi}{N}\right), \left(\pi - \theta - \frac{\pi}{N}\right) \right] \right)$$

當我們所選取的 θ 依次增加 $\frac{2\pi}{N}$ ，則A#就對原點旋轉 $\left(-\frac{2\pi}{N}\right)$ ，得新N邊形為正N邊形

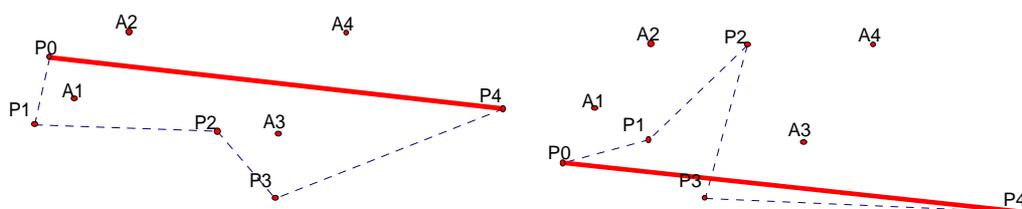
4.討論:

- (1)本研究目前僅三角形和四邊形部分有對各邊中點沿中垂線一般比例延伸的研究，多邊形部分也以外接正多邊形為主，內接正多邊形以鏡射方式討論。
- (2)再探討一般性的部分仍有很大的推廣空間。且四邊形部分中，以外接正方形法可以得到一系列的箏形-等腰梯形互換，也暗示了此法可將多邊形進行一種新的分類，往後還有很多的討論空間。
- (3)而由正多邊形反作法得到一個有趣的結果：在非正N邊形外接正M邊形的方面，只要外接的正M邊形其M是N的因數，就有可能得到新N邊形為正N邊形。這似乎與如果M是N的因數，則可藉由正N邊形的頂點連線得到正M邊形有關。
- (4)在N邊形外接正M邊形的部分，我們得出外接與內接得到正N邊形情況不互為充要的結果，其間的關係與正N邊形外接正N邊形有些許差異，也值得討論。

五、利用正 N 邊形反作法找出新 N 邊形的性質

1. 由點 P_0 對任一給定 N 邊形作正 N 邊形反作法，最後得到的點 P_N ， $\overline{P_0 P_N}$ 為定值

在上個部分，給定的 N 個點是正 N 邊形的頂點，我們將她改為任意給定 N 個點，作更廣泛的研究，發現一些有趣的循環現象：由點 P_0 對任一給定 N 邊形作正 N 邊形反作法，最後得到的點 P_N ，則 $\overline{P_0 P_N}$ 為定值。



證明:

對給定 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ ，以任一點 P_0 為起始點作 N 邊形反作法，即對 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ 依序旋轉 $\frac{2\pi}{N}$ 得到 P_N 。給定一定點 O 為原點，以下將 \overline{OP} , \overline{OA} 簡化為 \bar{P} , \bar{A}

P_k 對 A_k 旋轉可得 P_{k+1} 關係如下

$$\bar{P}_{k+1} = (\bar{P}_k - \bar{A}_k) e^{i\frac{2\pi}{N}} + \bar{A}_k$$

得到 P_k 通式如下

$$\bar{P}_k = \sum_{m=1}^k \left(-\bar{A}_m e^{i\frac{2(k-m+1)\pi}{N}} + \bar{A}_m e^{i\frac{2(k-m)\pi}{N}} \right) + \bar{P}_0 e^{i\frac{2k\pi}{N}}$$

當旋轉 N 次後 $k=N$ ，

$$\bar{P}_N = \sum_{m=1}^N \left(-\bar{A}_m e^{i\frac{2(N-m+1)\pi}{N}} + \bar{A}_m e^{i\frac{2(N-m)\pi}{N}} \right) + \bar{P}_0 e^{i\frac{2N\pi}{N}}$$

$$= \sum_{m=1}^N \left(2 \cos \frac{(N-1)\pi}{2N} \bar{A}_m e^{i\frac{(N-2m+1)\pi}{N}} \right) + \bar{P}_0$$

$$\text{故 } \overline{P_0 P_N} = \sum_{m=1}^N \left(2 \cos \frac{(N-1)\pi}{2N} \bar{A}_m e^{i\frac{(N-2m+1)\pi}{N}} \right)$$

和起始點無關

故給定 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ 時，也決定了此定值。

2. 正 N 邊形反作法確定由外接 N 邊形法變換只能得出特定的 N 邊形

由上個證明我們得到 $\overline{P_0 P_N}$ 為定向量且其值由 $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ 決定。在實驗時發現並非每個 N 邊形都可以經正 N 邊形反作法得到封閉 N 邊形，可知外接 N 邊形法變換只能得出特定的 N 邊形。

(1) 三角形

對三角形 $A_1A_2A_3$ 作正 3 角形反作法 3 次後，若要得到一三角形必須使 $\overline{P_0P_3} = \vec{0}$

$$\text{則 } \sum_{m=1}^N \left(2 \cos \frac{(N-1)\pi}{2N} \overline{A_m} e^{i \frac{(N-2m+1)\pi}{N}} \right) = \vec{0}$$

$$\sum_{m=1}^N \left(\overline{A_m} e^{i \frac{(-2m)\pi}{N}} \right) = \vec{0}$$

$$\overline{A_1} e^{i \frac{-2\pi}{3}} + \overline{A_2} e^{i \frac{-4\pi}{3}} + \overline{A_3} e^{i \frac{-6\pi}{3}} = \vec{0}$$

只有正三角形符合此條件

這同時也驗證了拿破崙定理。因每個三角形都可以由外接正三角形法變換得到一個新三角形，而我們發現新三角形只能是正三角形，因此得到所有的三角形經外接正三角形變換都得到正三角形。

(2) 四邊形

沿用(1)的方法，對一四邊形作正 4 邊形反作法 4 次，要得到一個四邊形就必須

$$\text{使 } \overline{P_0P_4} = \vec{0}。 \text{ 可以得到 } \overline{A_1} e^{i \frac{-2\pi}{4}} + \overline{A_2} e^{i \frac{-4\pi}{4}} + \overline{A_3} e^{i \frac{-6\pi}{4}} + \overline{A_4} e^{i \frac{-8\pi}{4}} = \vec{0}$$

$$\text{即 } \overline{A_1} e^{i \frac{-\pi}{2}} + \overline{A_2} e^{i(-\pi)} + \overline{A_3} e^{i \frac{-3\pi}{2}} + \overline{A_4} e^{i(-2\pi)} = \vec{0}$$

$$\left(\overline{A_1} - \overline{A_3} \right) e^{i \frac{-\pi}{2}} + \left(\overline{A_2} - \overline{A_4} \right) e^{i-\pi} = \vec{0}$$

若 $\overline{A_3A_1}$ 及 $\overline{A_4A_2}$ 皆不等於 $\vec{0}$

則 $\overline{A_1A_3} \perp \overline{A_2A_4}$ 且 $\overline{A_1A_3} = \overline{A_2A_4}$

若 $\overline{A_3A_1} = \vec{0}$ 則 $\overline{A_4A_2} = \vec{0}$ 並非一個四邊形不予討論

這也是從另一個方法驗證四邊形外接正方形取中心連線所得的四邊形對角線互相垂直且相等。

(3) 五邊形

以正 5 邊形反作法作 5 次的結果得出

$$\overline{A_1} e^{i \frac{-2\pi}{5}} + \overline{A_2} e^{i \frac{-4\pi}{5}} + \overline{A_3} e^{i \frac{-6\pi}{5}} + \overline{A_4} e^{i \frac{-8\pi}{5}} + \overline{A_5} e^{i \frac{-10\pi}{5}} = \vec{0}$$

(4) 六邊形

以正 6 邊形反作法作 6 次的結果得出

$$\overline{A_1} e^{i \frac{-2\pi}{6}} + \overline{A_2} e^{i \frac{-4\pi}{6}} + \overline{A_3} e^{i \frac{-6\pi}{6}} + \overline{A_4} e^{i \frac{-8\pi}{6}} + \overline{A_5} e^{i \frac{-10\pi}{6}} + \overline{A_6} e^{i \frac{-12\pi}{6}} = \vec{0}$$

$$\overline{A_4 A_1} e^{i \frac{-2\pi}{6}} + \overline{A_5 A_2} e^{i \frac{-4\pi}{6}} + \overline{A_6 A_3} e^{i \frac{-6\pi}{6}} = \bar{0}$$

$$\overline{A_4 A_1} e^{i \frac{-\pi}{3}} + \overline{A_5 A_2} e^{i \frac{-2\pi}{3}} + \overline{A_6 A_3} = \bar{0}$$

和四邊形一樣可以化簡成一個對角線的關係

3.N 邊形分類法

由多邊形只能被外接正 N 邊形法變換出一些具有特殊性質的 N 邊形，所以可以將 N 邊形分為兩類：可由外接正 N 邊形法變換而得、不可由外接正 N 邊形法變換而得。又每個 N 邊形外接正 N 邊形所得的新 N 邊形只有一個，可將外接正 N 邊形法變換後都得到相同的新 N 邊形的 N 邊形歸為一類。而這類 N 邊形便是對新 N 邊形作 N 次正 N 邊形反作法得到的 N 邊形的集合。

4.討論

- (1)在正 N 邊形反作法中發現作 N 次正 N 邊形反作法得到的點與起始點的向量為定向量的特性也可運用在任意給定的點上，若給定的點不變，只要知道起始點的位置便可以預測作 N 次正 N 邊形反作法後的點的位置。
- (2)我們雖已找到對 N 邊形作外接正 N 邊形法變換所能得出的 N 邊形的各點向量關係式，但還為能處理這類多邊形在分類上的問題，邊數增多其頂點間的向量關係卻始終只有一條使推導上困難不斷增加。
- (3)對 N 邊形分類方面由於其具有函數性質，可由正 N 邊形反作法得出一系列 N 邊形經正 N 邊形法變換後都會得到相同的 N 邊形，但這些 N 邊形除了變換後會得到正 N 邊形的系列外其他集合的性質仍有待討論。

肆、結論與應用

- 一、由一給定線對稱多邊形各邊中點沿中垂線延伸 k 倍該邊長度 ($k \in R$) 的點連線所成的圖形(新多邊形)仍有線對稱性質。
- 二、由正多邊形反作法可推得若 MIN 則一特定非正 N 邊形可經由外接正 M 邊形法得到正 N 邊形。
- 三、目的 N 邊形為正 N 邊形推移或伸縮後的圖形。
- 四、目的 N 邊形與原 N 邊形共重心，亦即兩圖形內到各點向量和為 $\bar{0}$ 的點會共點。
- 五、對 N 邊形作外接正 N 邊形法可看成是對正 N 邊形進行推移、伸縮的還原。
- 六、當平面上任一點 O 到多邊形之各頂點的向量具有特殊性質使得

$\overline{A_1} e^{i \frac{-2\pi}{N}} + \overline{A_2} e^{i \frac{-4\pi}{N}} + \overline{A_3} e^{i \frac{-6\pi}{N}} + \dots + \overline{A_N} e^{i \frac{-2N\pi}{N}} = \bar{0}$ 時，該 N 邊形可由外接正 N 邊形法變換得到。

伍、參考資料

- 一、胡杞、周春荔/初等幾何研究基礎教程/北京第一版/北京師範大學出版社/第二章 初等幾何變換的理論與方法/1998 年
- 二、許明俊/康熙數學課本第二冊/二版/台灣/康熙出版社/170 頁/九十一年
- 三、許明俊/康熙數學課本數學甲上冊/一版/康熙出版社/3-3 二階方陣所對應的平面變換/九十一年
- 四、Mathworld/ <http://mathworld.wolfram.com/>
 1. Aubel's Theorem
 2. Napoleon 's Theorem
 3. Napoleon Triangles
- 五、Cut the knot/ <http://www.cut-the-knot.com/ctk/index.shtml>
 1. [Napoleon's Theorem](http://www.cut-the-knot.com/ctk/Napoleon.shtml)/ <http://www.cut-the-knot.com/ctk/Napoleon.shtml>/ March 1999
 2. A Generalization of Napoleon's Theorem/
<http://www.cut-the-knot.com/Generalization/napoleon.shtml>
- 六、Mark R. Treuden/Napoleon-Like Properties of Spherical Triangles
- 七、Pavel Pech/The Harmonic Analysis of Polygons and Napoleon Theorem/Journal of Geometry and Graphics/No.1,13-22/ Volume 5 (2001)
- 八、Barukh Ziv/Napoleon-Like Configurations and Sequences of Triangles/Forum Geometricorum/ 115-128/ Volume 2 (2002)
- 九、Stephen B. Gray/Generalizing the Petr-Douglas-Numann Theorem on N-gons/American Mathematical Monthly/ 210-227/March 2003
- 十、Stephen B. Gray/Experiments in Generalizing Geometry Theorems/
<http://crd.lbl.gov/~dhbailey/expmath/workshop2004/gray-talk.pdf>