台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：變形的橢圓—從距離及距離和談起

得獎獎項：大會獎第三名

紐西蘭正選代表:參加紐西蘭 2005 年科技展覽會

學　　校：國立新竹高級中學

作　　者：凃智展

評語與建議事項：

橢圓的幾何定義建立於固定點(焦點)及固定距離和有關。本研究將固定集合取代固定點來探討廣義橢圓的性質。

大家好，我是涂智展，目前就讀新竹高中二年級。我的興趣非常廣泛，喜歡下棋、打球、游泳；也會彈鋼琴，拉小提琴，並在國中時加入管樂團吹小號。蕭邦和德布西的音樂總是在我失意時，成爲我情感上的寄託。

從小數學就一直是我唸得比較輕鬆、覺得比較有趣的科目。但是一直到了高中我才有機會認識各方數理的英雄好手，接觸到許多課外的東西，認識了浩瀚無邊的科學。

在準備科展的過程中，我了解到了什麼叫做嚴謹，也學習到了許多解決問題的科學方法。感謝張老師辛勤努力的指導和鼓勵，讓我能參加這次的國際科展。同時也感謝我們班同學獨到的點子，以及數學理論上的幫助，讓我這篇作品能更加的完備。

目　　錄

<u>英文摘要</u>(Abstract)

Metamorphic ellipses – From distance and sum of distances

Let E be a plane and A a fixed point on E. Given $r>0$, it is known that all of the points on E with distance r to A form a circle and the point A is called the center of this circle. What is the corresponding graph if we replace the point A with a set F (for example,a segament or a polygon) contained in E? Similarly, what is the case when we modify the two focuses F_1 and F_2 in the definition of an ellcpse to sets F_1 and F_2 (or example,two segments or two polygons) contained in E ? Taking advantages of GSP and analytic geomety, we research related situations and so far we have obtained the following results:

1. Let $\Gamma \subset E$ be a segment, a convex polygon or a circle , etc. and $r>0$ be fixed. We sketch the graph of points on E with distance r to Γ and study properties of such graphs.

2. Let F_1 and F_2 be singletons, line segments , polygons(may not be convex), or circles,etc., on E. Taking advantage of envelopes, we sketch the graph of those points P on E satisfying $d(P,F_1)+d(P,F_2)=k$ ($k>0$ is large enough).

3. Let C_1 and C_2 be circles on E. We sketch the graph of the points P on E that satisfiy $d(P,C_1)+d(P,C_2)=k$ ($k>0$ is large enough) and study properties of this graph.

4. Let L_1 and L_2 be two line segments on E and $k>0$ be a large enough constant. We sketch the graph of points on E that satisfy $d(P,L_1)+d(P,L_2)=k$ ($k>0$ is large enough) and research properties of this graph.

5. Let $A \in E$ and Γ be a convex polygon on E. We sketch the graph of points on E that satisfy $d(P,L_1)+d(P,L_2)=k$ ($k>0$ is large enough) and research properties of this graph.

6.We compare the optical properties of metamorphic circles with circles and we deal with metamorphic ellipses similiarly.

中文摘要

變形的橢圓—從距離及距離和談起

給定一平面E ，A為平面上一點。取$r>0$ ，則我們知道到其距離為定值的點形成一圓，而A為此圓圓心。如果把A改成一平面圖形，則到其距離為定值的點形成的集合會是什麼樣子？類似地，給定平面上兩焦點F_1及F_2在平面上，則到其距離和為定值的點形成橢圓。同樣的，若把F_1及F_2改成平面圖形，其圖形會是什麼樣子？藉著 GSP 的輔助，到目前為止，我們得到了以下的結果：

1. 給定一平面E及此平面上的一個凸多邊形，我們描繪出在此平面上到此凸多邊形之距離為定值的點所形成的圖形。
2. 設F_1和F_2分別為平面E上之點或線段或多邊形（未必是凸多邊形），我們利用包絡線描繪出所有滿足$d(P,F_1)+d(P,F_2)=k$（k夠大）的P點所形成的圖形。
3. 設C_1,C_2為平面E上之兩圓，我們討論所有滿足$d(P,C_1)+d(P,C_2)=k$（k夠大）的P點形成的圖形並討論其性質。
4. 設L_1和L_2分別為平面E上之兩線段，我們討論所有滿足$d(P,L_1)+d(P,L_2)=k$（k夠大）的P點形成的圖形並討論其性質。
5. 設A為平面E上之一點，Γ為平面上一凸多邊形，我們討論所有滿足$d(P,A)+d(P,\Gamma)=k$（k夠大）的P點形成的集合並討論其特性。
6. 藉由和圓作比較，我們研究了變形圓的光學性質；而對變形橢圓也做類似的討論。

研究報告

壹、前言

(一)研究動機 我們常能看見一些視力不良的人投球投不準，或者是射飛鏢射到靶外。不一定是他們協調不好，而可能是他們看東西常常只是一團在那邊，無法掌握真正的形狀。或許他們看到的東西，是到那東西距離爲定值的點形成的的範圍。

若他們看到的是兩個物體呢？如果把焦點放在中央，看到的會是什麼樣子？若我們猜測他看到兩點會變成橢圓，那如果把點改成直線,甚至一般的平面幾何圖形,其集合會長什麼樣子?又有些什麼特性?

(二)研究目的

(一)給定平面上一集合（例如線段、凸多邊形或圓），希望能描繪並探討在此平面上到此集合之距離爲定值的點所成之圖形。

(二) 給定平面上兩集合（例如線段、凸多邊形或圓），希望能描繪並探討在此平面上到此兩集合之距離和爲定值的點所成之圖形。

貳、研究過程

定義:

一、給定平面上一圖形 G，在平面上取一點 P，則 $\inf\limits_{Q\in G} d(P,Q)$ 爲 P 到 G 的距離。

(有時 $\inf\limits_{Q\in G} d(P,Q)=\min\limits_{Q\in G} d(P,Q)$，本研究之情形屬之。)

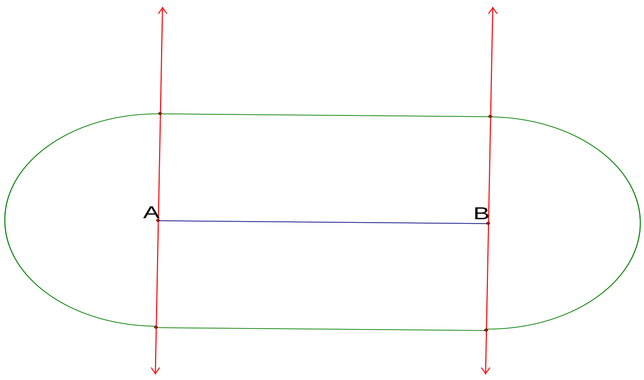
二、給定平面上二平行直線 L_1，L_2，則在 L_1，L_2 間形成的帶狀平面(包含 L_1，L_2)以 $E(L_1,L_2)$ 表示。給定平面上一條直線 L_3，則在其左邊和右邊形成的半平面(包含 L_3)，分別以 $E_L(L_3)$ 和 $E_R(L_3)$ 表示。

三、(一)若要使「到平面上兩圖形 G,S 距離和爲定值 k」的點存在，則 $k \ge \inf\limits_{Q\in G, R\in S}(Q,R)$，此時我們稱這種點所成的圖形爲廣義的變形橢圓。

(二) 當 $k > \sup\limits_{Q\in G, R\in S}(Q,R)$ 時，此時我們稱「到平面上兩圖形 G,S 距離和爲定值 k」的點所成的圖形爲狹義的變形橢圓。

第一節　對平面上任一凸多邊形，到其距離爲定值的點形成的圖形

一、對一條平面上的線段



如圖：

$\overline{AB}$ 爲此線段，外圈部分爲其軌跡。

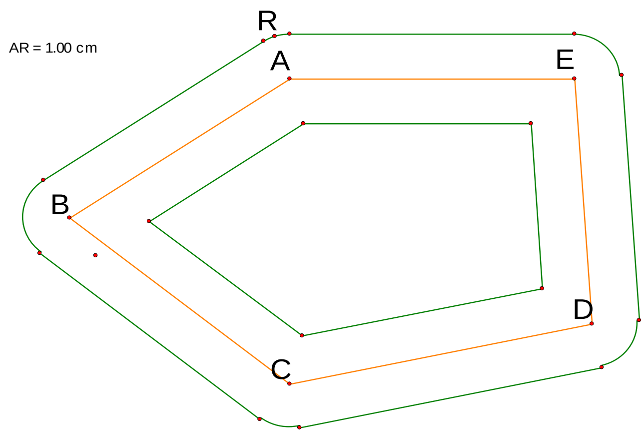
證明：在 A，B 上分別對 $\overline{AB}$ 作垂線 L_1，L_2，則中間形成一個帶狀平面 $E(L_1,L_2)$。

若此點在 $E(L_1,L_2)$ 內，則其集合軌跡爲二線段。若此點不在 $E(L_1,L_2)$ 內，其到 AB 距離爲其到 A 距離或其到 B 距離。故形成軌跡爲圓弧。

二、對一般的凸多邊形

其圖形不過是多條直線形成的集合而已。

例：五邊形：



外圈和內圈部分即爲我們所要的變形圓。

對一般的凸多邊形而言，由前知到各邊距離爲定值的點形成的集合，再把各集合圓部分取交集，線段部分在多邊形的外部取聯集，內部取形成的多邊形相似形即得到圖形。但若所取距離過大，則可能沒有內部圖形。

對沒有角的圖形而言:在外部和在內部各畫一相似形即可，且距離爲兩平行切線距離。

第二節：利用包絡線做出到兩給定圖形距離爲定值的點形成的圖形

我們以到兩線段距離和爲定值的點所形成的圖形舉例：

一、在兩線段上各找一動點 A 和 B

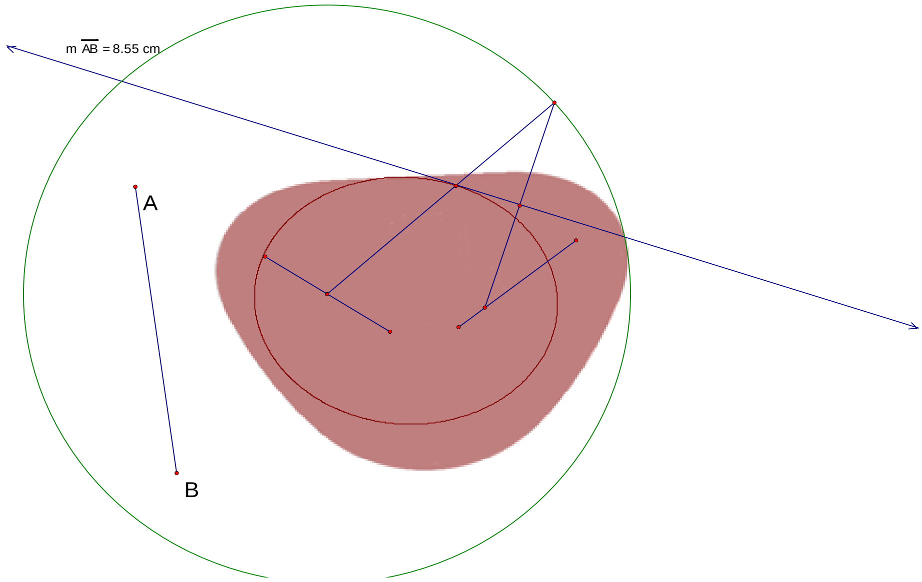
二、給定一長度 k

三、以 A 和 B 爲焦點， k 爲距離和畫橢圓。

四、使 p 和 q 在各線段上隨意充分移動，橢圓形成的軌跡最外部就是我們要的圖形。

註：充分移動：當 A 固定時，B 點必須在其所在線段上移動過所有線段上的點；同樣的，當 A 固定時， B 點必須在其所在線段上移動過所有線段上的點。

例：

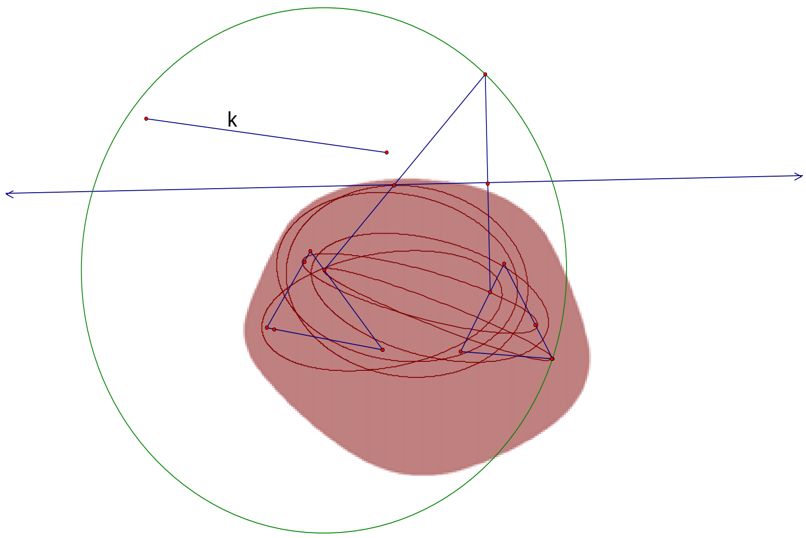


證明：設 A 在 L_1 上， B 在 L_2 上，且有 $\overline{PA}+\overline{PB}=k$

則因爲 $\overline{PA}\geq d(P,L_1)$ ， $\overline{PB}\geq d(P,L_2)$ ，故 $d(P,L_1)+d(P,L_2)\leq\overline{PA}+\overline{PB}=k$ ，證明了所有軌跡最外圈就是所要的圖形。

對於其他的凸多邊形或圓形，都不過是點和線段形成的集合而已，故如果要做到兩個三角形的距離和爲定值的點形成的圖形，只要在每一邊都找動點，再各自充分搭配即可。

例：



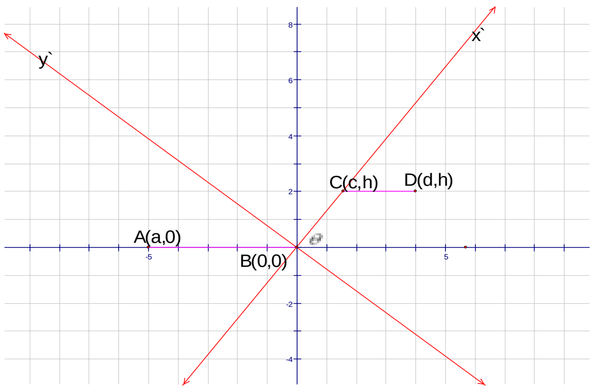
利用此方法可以很容易找到我們要找的圖形。

第三節：到兩平行線段距離和爲定值的點所形成的集合圖形：

在往下的討論中，爲研究圖形性質之便，在圖形的不同部分我們可能使用不同的座標系，而在兩部分重疊之處則可以用轉換座標系(平移，旋轉)的方式得到，故我們不必在單一的直角座標系下來討論整個圖形。
在本部分的討論中，我們將採狹義意義去探討所有的圖形，因爲廣義意義的圖形是爲狹義意義圖形的簡化，在研究過狹義意義後，可推測廣義意義的圖形。
<u>一、若此兩平行線段垂直平移後不重合:</u>
其形成之集合由三橢圓及四拋物線之部分組成。

不失一般性，在平面E中，設此二線段爲$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，其中$\overline{AB}$在 X 軸上，並有四點座標 A(a,0)，B(0,0)，C(c,h)，D(d,h)，且到兩平行線段距離和爲定值 k。

$(k \geq \overline{AC}$且$k \geq \overline{BD})$



對A，B，C，D分別作垂線垂直於$\overline{AB}$, $\overline{CD}$，形成　L_1，L_2，L_3，L_4。設$P(x,y)$

滿足$d(P,\overline{AB})+d(P,\overline{CD})=k$，則若

(一) P 在$E(L_2,L_3)$內:

$$d(P,\overline{AB})+d(P,\overline{CD})=d(P,B)+d(P,C)$$

方程式：設$\overline{BC}$通過一新$X'Y'$座標平面上的 X 軸，且原點通過原座標平面 Y 軸。

則有新方程式

$$\Gamma'=\frac{\left(x'-\frac{p}{2}\right)^2}{(\frac{k}{2})^2}+\frac{y'^2}{(\frac{k}{2})^2-(\frac{p}{2})^2}=1$$，其中$p=\sqrt{c^2+h^2}$。

又在新座標系中，依據旋轉定理得 $\begin{aligned}x'&=x\cos(-\theta)-y\sin(-\theta)\\ y'&=x\sin(-\theta)+y\cos(-\theta)\end{aligned}$

且 $\begin{aligned}\cos\theta&=\frac{c}{p}\\ \sin\theta&=\frac{h}{p}\end{aligned}$ 代回原方程得 $\dfrac{(\frac{cx+hy}{p}-\frac{p}{2})^2}{(\frac{k}{2})^2}+\dfrac{(\frac{cy-hx}{p})^2}{(\frac{k}{2})^2-(\frac{p}{2})^2}=1$

此方程不便拆開，因會得 xy 項。

(二) P 在$E_L(L_1)$或$E_R(L_4)$中:

結果和 P 在$E(L_2,L_3)$內相同爲二橢圓，把座標系做適當轉換即可。只是兩焦點分別爲A，C或B，D

但在此用到 k>$\overline{AC}$ 且 k>$\overline{BD}$，否則沒有橢圓存在。

(三) P 在$E(L_3,L_4)$間：

$$d(P,\overline{AB})+d(P,\overline{CD})=d(P,B)+d(P,\overline{CD})$$

1.方程式：設$q=\overline{BQ}$，Q 爲軌跡上一點，則:

$x^2+y^2=q^2$且

$|y-h|+q=k$ 其中$|y-h|$爲 Q 到$\overline{CD}$的距離。

得到 $x^2+y^2=\left(k-|y-h|\right)^2$

又有 $x^2+y^2=\left(y-h\right)^2-2k|y-h|+k^2$

可知 $x^2=h^2+k^2-2hy-2k|y-h|$

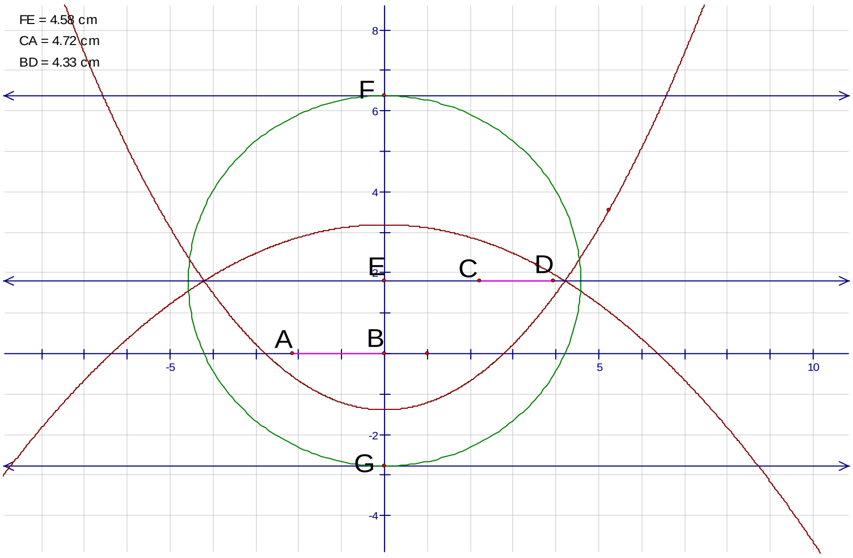
若 $y-h>0$ ，則： $x^2=-2(h+k)\left(y-\frac{h+k}{2}\right)$ （$c>x>0$）

若 $y-h<0$ ，則: $x^2=-2(h-k)\left(y-\frac{h-k}{2}\right)$ （$c>x>0$）

其圖形爲兩個拋物線之部分

且其焦點爲原點，其準線分別爲 $y=h+k$ 及 $y=h-k$

可做出圖形。



其中 $\overline{EF}=k,\overline{\mathrm{BE}}=h$

2.特性：

此二拋物線交點經過直線 CD。

(Pf):

因爲兩個式子的 x 座標相同 $-2(h+k)(y-\frac{h+k}{2})=-2(h-k)(y-\frac{h-k}{2})$

故 $hy+ky-\frac{(h+k)^2}{2}=hy-ky-\frac{(h-k)^2}{2}$

得到 $2ky=\frac{(h+k)^2}{2}-\frac{(h-k)^2}{2}$

所以由 $2ky=2hk$

得知 $y=h$

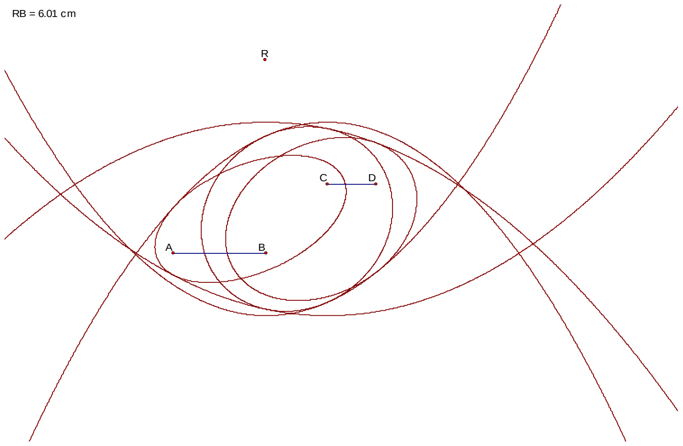
(四) P 在 $E(L_1,L_2)$ 間：

結果和 P 在 $E(L_3,L_4)$ 間相同，只是討論不同的座標系而已。

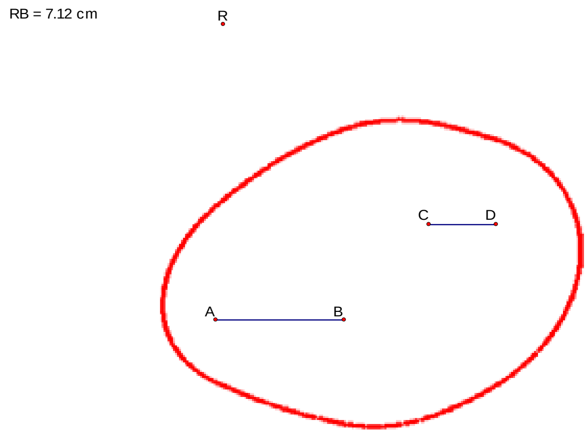
(五)綜合討論

在已知橢圓的兩焦點及其長軸(k)，拋物線的交點及準線後，我們能做出一系列的圖形：

所有圖形：



取範圍後圖形：



(1)圖形的連續性：

本圖形應爲連續圖形。

證明：我們先證$E(L_2,L_3)$上的橢圓和$E(L_1,L_2)$上的拋物線是連續。

由方程式知二拋物線各交一點於$x=0$上，橢圓亦交二點於$x=0$上。

且不管對拋物線或橢圓而言，其兩點之縱座標必分別爲一正一負。

故在$x=0$上，$y>0$部分和$y<0$部分皆有兩交點。

設$P(0,y)$，$y>0$且滿足$d(P,\overline{AB})+d(P,C)=k$

則若P往上下移動,由基本三角不等式可看出k必無限遞增或遞減到P在$y=0$爲止。故P點唯一，得證橢圓和拋物線接交於同一點P。設$Q(0,y)$，$y<0$則同理可證。

得證$E(L_2,L_3)$上的橢圓和$E(L_1,L_2)$上的拋物線連續。

$E(L_2,L_3)$上的橢圓和$E(L_3,L_4)$上的拋物線轉換座標後同理可證。

$E_L(L_1)$外及$E_R(L_4)$外的圖形亦同理。

得證整圖形連續。

(2)平滑性

命題一：給定一條線段$\overline{AB}$和一點F (F 不在$\overline{AB}$上)，則若P滿足

$d(P,F)+d(P,\overline{AB})=k, k>\overline{AF}, k>\overline{BF}$ ，則P點形成的軌跡爲一平滑曲線。

對$E(L_2,L_3)$上的橢圓和$E(L_1,L_2)$上的拋物線而言(此時B爲一焦點，$\overline{CD}$爲此線段)：

利用上面拋物線之特性，可得其準線爲在$\overline{AB}$上及下取距離爲 k 之平行線得 $y=-k$ 或 $y=k$ ，又其焦點爲(c,h) 。故其方程式爲：

$(x-c)^2=2(h+k)(y-\frac{h-k}{2})$ 或

$(x-c)^2=2(h-k)(y-\frac{h+k}{2})$

我們取一拋物線$(x-c)^2=2(h+k)(y-\frac{h-k}{2})$和原來的橢圓

$\frac{(\frac{cx+hy}{p}-\frac{p}{2})^2}{(\frac{k}{2})^2}+\frac{(\frac{cy-hx}{p})^2}{(\frac{k}{2})^2-(\frac{p}{2})^2}=1$，證明他們在交點時的斜率是否相同。

推導：已知它們的焦點在 y 軸上，拋物線代入$x=0$得

$c^2=2(h+k)(y-\frac{h-k}{2})$

我們有$\frac{c^2}{2(h+k)}+\frac{h-k}{2}=y$

得到$y=\frac{c^2+h^2-k^2}{2(h+k)}$

<u>1.把橢圓對x作微分</u>

$$\frac{(\frac{cx+hy}{p}-\frac{p}{2})^2}{(\frac{k}{2})^2}+\frac{(\frac{cy-hx}{p})^2}{(\frac{k}{2})^2-(\frac{p}{2})^2}=1$$

得到$(\frac{cx+hy}{p}-\frac{p}{2})^2\left[(\frac{k}{2})^2-(\frac{p}{2})^2\right]+(\frac{cy-hx}{p})^2(\frac{k}{2})^2=R, R$爲不含$xy$變數的常數

兩邊同時乘以p^2得

$$(cx+hy-\frac{p^2}{2})^2\left[k^2-p^2\right]+k^2(cy-hx)^2=R$$

把上式對x作微分得

$$\left[k^2-p^2\right]\left[2(cx+hy-\frac{p^2}{2})(c+h\frac{dy}{dx})\right]+k^2(2c^2y\frac{dy}{dx}-2chy-2chx\frac{dy}{dx}+2h^2x)=0$$

把$x=0$代入得$(k^2-p^2)\left(hcy+h^2y\frac{dy}{dx}-\frac{p^2}{2}c-\frac{p^2}{2}h\frac{dy}{dx}\right)+k^2(c^2y\frac{dy}{dx}-chy)=0$

所以有$\left[(h^2y-\frac{p^2}{2}h)(k^2-p^2)+k^2c^2y\right]\frac{dy}{dx}+\left[(k^2-p^2)(hcy-\frac{p^2}{2}c)-k^2chy\right]=0$

得$\frac{dy}{dx}=\frac{k^2chy-(k^2-p^2)(hcy-\frac{p^2}{2}c)}{(h^2y-\frac{p^2}{2}h)(k^2-p^2)+k^2c^2y}$

把$y=\frac{c^2+h^2-k^2}{2(h+k)}$及$p^2=c^2+h^2$代入上式,將得一大串不好處理的數字

故我們用數學軟體 Mathematica 幫助我們運算

把函數作全微分,其中 k,h,c 是常數。

Dt ... + ... == 1, x, Constants → {k, h, c}

得到

2 (h x - c y) (h - Dt[y, x, Constants → {c, h, k}]) ... c^2 ... h^2 ... k^2 ...

{ ... c + h ... x, Constants → {c, h, k} ... == 0

再把Dt[y,x,Constants → {c,h,k}]解出來(就是$\frac{dy}{dx}$)

Solve[... Dt[y, x, Constants → {c, h, k}] ... == 0, Dt[y, x, Constants → {c, h, k}]]

得到以下

{{Dt[y, x, Constants → {c, h, k}] → ...}}

把上式化簡

Simplify[...]

得$\frac{dy}{dx}$如下

$$\frac{-c^3+2c^2x-2k^2x+c(h^2+k^2+2hy)}{c^2h-2chx+\ldots(k^2-\ldots)}$$

$y=\frac{c^2+h^2-k^2}{2*(h+k)}$ 代入

得$\frac{dy}{dx}=$

$$\frac{-c^3+2c^2x-2k^2x+c\left(h^2+k^2+2h\frac{c^2+h^2-k^2}{2*(h+k)}\right)}{c^2h-2chx+\ldots(k^2-\ldots)\,\frac{c^2+h^2-k^2}{2*(h+k)}}$$

化簡

Simplify $\dfrac{-c^3+2c^2x-2k^2x \ldots c \ldots h^2+ \ldots ^2+2h\frac{c^2+ \ldots}{2* \ldots k}}{c^2h-2chx+ \ldots ^2-k^2 \ldots h-2\frac{c^2+ \ldots -k^2}{2* \ldots +k}}$

得 $\dfrac{dy}{dx}=$

$\dfrac{-c^3k+c \ldots h^2 \ldots k^3 \ldots 2c^2 \ldots +k \ldots k-2k^2 \ldots +k \ldots k}{\ldots +k \ldots ^2 \ldots +h^2k-k^3-2chx \ldots}$

$x=0$ 代入

得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\ldots c^3 \ldots +c \ldots h^2k+k^3 \ldots}{\ldots +k \ldots ^2 \ldots +h^2k-k^3 \ldots}$

提出 c 得 $\dfrac{dy}{dx}=$

$-\dfrac{c}{h+k}$

<u>2.把拋物線微分</u>

$$y=\frac{(x-c)^2+h^2-k^2}{2(h+k)}$$

得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-2c}{2(h+k)}$

又以 $x=0$ 代入

得 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-c}{h+k}$

<u>3.比較：</u>

兩方程式在 $x=0$ ，也就是交點上時有同樣的斜率： $\dfrac{-c}{h+k}$

故在接點時兩圖形平滑相接。

$E(L_2,L_3)$ 上的橢圓和 $E(L_3,L_4)$ 上的拋物線轉換座標後同理可證。

$E_L(L_1)$ 外及 $E_R(L_4)$ 外的圖形亦同理。

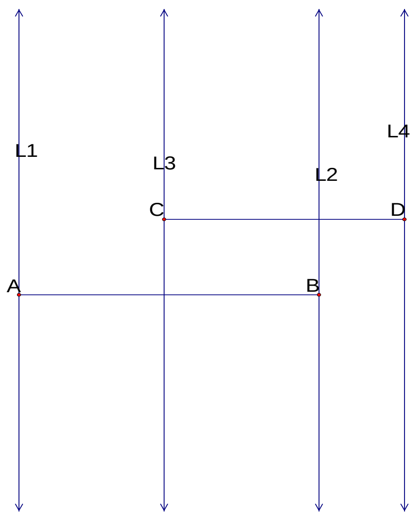
故整個圖形平滑。

命題一也得證。

<u>二、若此二平行線平移後重合</u>

有兩種情形：

(一) C 在 $E(L_1,L_2)$ 間：



設 $P(x,y)$ 滿足 $d(P,\overline{AB})+d(P,\overline{CD})=k$ ，則

(1)若 P 在 $E(L_1,L_3)$ 和 $E(L_2,L_4)$ 中，則圖形爲四拋物線之部分。
(2)若 P 在 $E_L(L_1)$ 或 $E_R(L_4)$ 中，則圖形爲二橢圓之部分。
(3)若 P 在 $E(L_2,L_3)$ 間，則方程式如下：

距離和 $|y-h|+|y|=k$

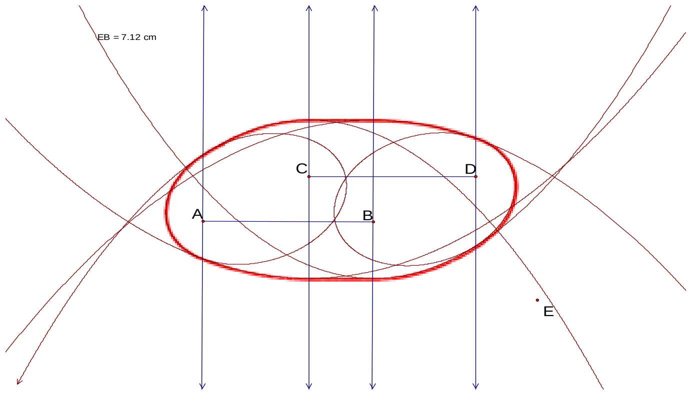
若 $y-h>0$ (P 在 $\overline{AB}$ 之上)，則得到圖形 $y=\dfrac{h+k}{2}$

若 $y<0$ (P 在 $\overline{AB}$ 之下)，則得到圖形 $y=\dfrac{h-k}{2}$

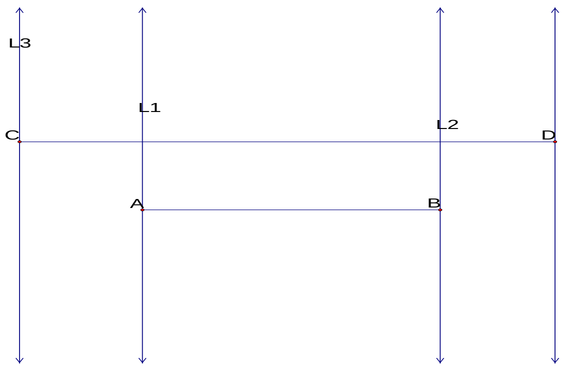
若 $y-h>0$ 且 $y<0$ (P 在 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 間)，則不存在圖形。

因此時 $k=h$ ，又 $h\le\overline{BD}$ ，但原條件要 $k\ge\overline{BD}$ 。

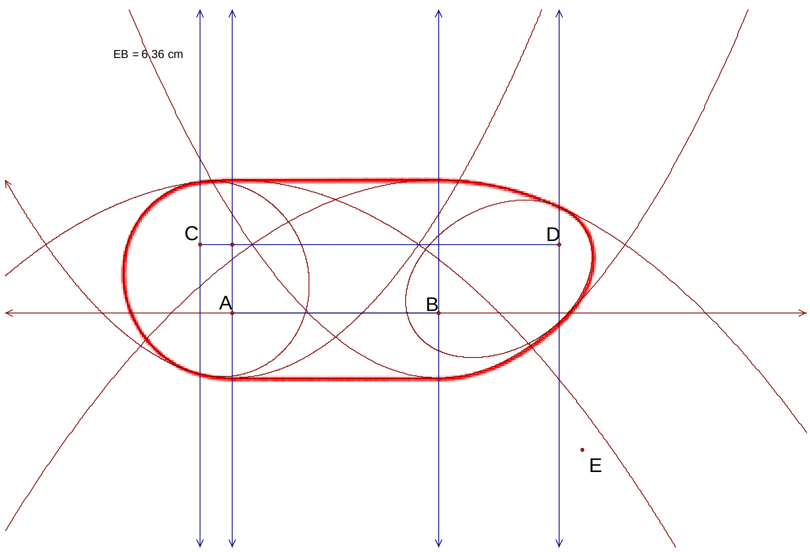
而且此圖形平滑。
證： $E(L_1,L_3)$ 上的拋物線以 C 爲其焦點，且準線平行於 x 軸，故斜率在 L_3 上時爲零和縣段相同。
圖形：



(二) C 在$E_L(L_1)$外：

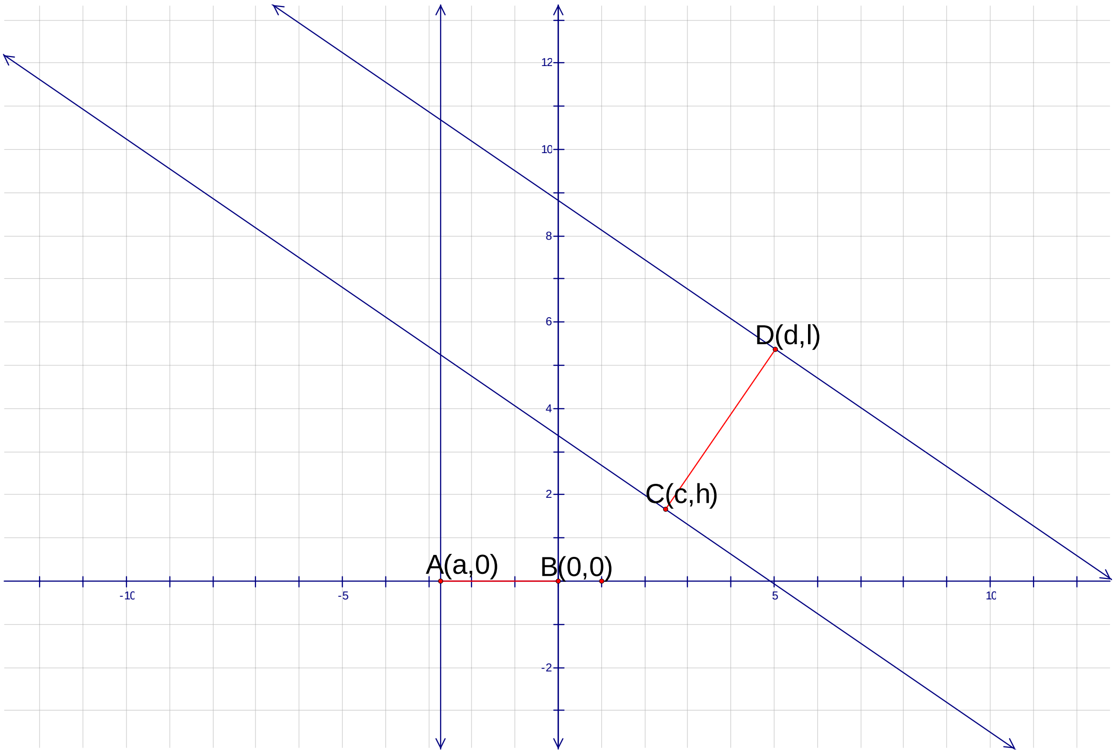


(1)若P在$E(L_1,L_3)$和$E(L_2,L_4)$中，則圖形爲四拋物線之部分。
(2)若P在$E_L(L_3)$或$E_R(L_4)$中，則圖形爲二橢圓之部分。
(3)若P在$E(L_2,L_3)$間，則推導和上述同，特性亦同。



第四節：到兩不平行且不重疊線段之距離和爲定值的點形成的圖形

一、 圖形的討論：



不失一般性，在平面E中，設此二線段爲$\overline{AB}$和$\overline{CD}$，其中$\overline{AB}$在 X 軸上，並有四點座標 A(a,0)，B(0,0)，C(c,h)，D(d,h)。

設到兩平行線段距離和爲定值的定值爲 k($k \ge \overline{AC}$且$k \ge \overline{BD}$)。

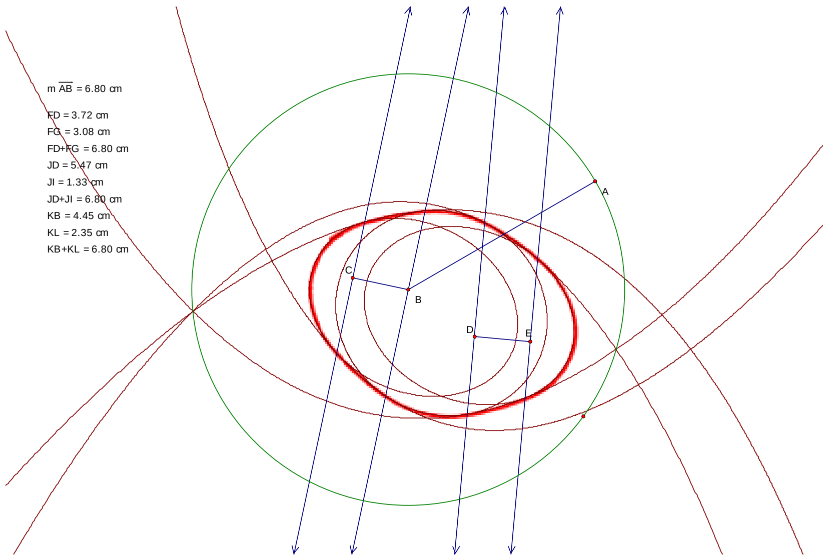
對A，B，C，D分別作垂線垂直於$\overline{AB}$,$\overline{CD}$，形成 L_1，L_2，L_3，L_4。

則其共有九區，且用以上結果可得圖形：
第一區：$E_R(L_2) \cap E_L(L_3)$，P在此區形成橢圓的一部分。
第二區：$E_R(L_2) \cap E(L_3, L_4)$，$P$在此區形成拋物線的一部分。
第三區：$E_R(L_2) \cap E_R(L_4)$，P在此區形成橢圓的一部分。
第四區：$E_R(L_4) \cap E(L_1, L_2)$，$P$在此區形成拋物線的一部分。
第五區：$E_L(L_1) \cap E_R(L_4)$，P在此區形成橢圓的一部分。
第六區：$E_L(L_1) \cap E(L_3, L_4)$，$P$在此區形成拋物線的一部分。
第七區：$E_L(L_1) \cap E_L(L_3)$，P在此區形成橢圓的一部分。
第八區：$E_L(L_3) \cap E(L_1, L_2)$，$P$在此區形成拋物線的一部分。
第九區：$E(L_1, L_2) \cap E(L_3, L_4)$，$P$在此區形成一條或二條線段。

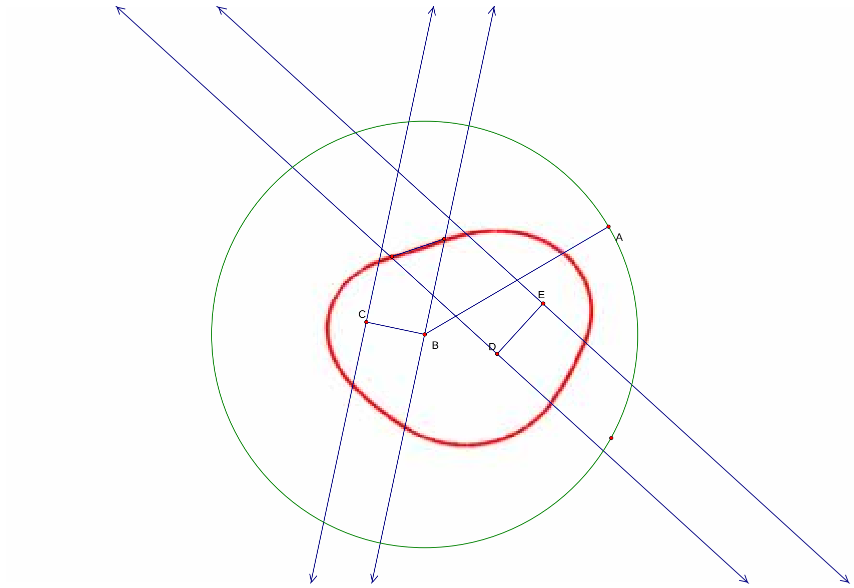
證明： 1.由於在此距離和爲$d(P, \overleftrightarrow{AB}) + d(P, \overleftrightarrow{CD})$，爲兩個點到直線距離相加。故形成兩個一次式，相加仍爲一次式形成直線，取範圍後變線段。2. 若$\overline{CD}$和$E(L_1, L_2)$有交集，則圖形可能形成二條線段。

<u>二、 圖形的特性</u>：
1.經由座標系轉換，仿照第二節做法可知全部圖形連續。
2.由於全部圖形連續，故若第九區有一條線段，則第一區或第五區其一沒有圖形。若第九區有二條線段，則第一區和第五區皆沒有圖形。

圖形：第九區沒有線段：



第九區有一條線段：



第五節：到兩圓距離和爲定值的點形成的圖形

設兩圓C_1, C_2，圓心K_1 , K_2而其半徑分別爲r_1, r_2，且可有各種相交情形。

設點P到兩圓心距離和爲定值k' ($k' > \overline{O_1O_2}$)，形成的橢圓爲Γ，則：

<u>一、若Γ和兩圓不相交，或相交於一點：</u>

已知P到C_1距離$d(P, C_1)$爲P到C_1任一點的最短距離，即到最靠近邊的垂直距離。設$\overline{PQ}$爲P到C_1距離，則過Q存在一條C_1的切線垂直$\overline{PQ}$。但又$\overline{K_1Q}$亦垂直

此切線，即$\overline{PQ}$和$\overline{K_1Q}$共線，得P到C_1距離為$\overline{PK_1}-r_1$。同理P到C_2距離為

$\overline{PK_2}-r_2$，故

$k=\overline{PK_1}-r_1+\overline{PK_2}-r_2$。又$\overline{PK_1}+\overline{PK_2}=k'$，而$r_1,r_2$固定，故$\Gamma$就是到兩圓距離和為

定值所形成圖形。

<u>二、若Γ和圓有兩個以上交點：</u>

(一)若P在C_1,C_2外，則形成的圖形仍為橢圓的一部分

(二)若P在C_1內，則

$d(P,C_1)=r_1-\overline{PK_1}$，$d(P,C_2)=\overline{PK_2}-r_2$

我們有$k=d(P,C_1)+d(P,C_2)=\overline{PK_2}-\overline{PK_1}+r_1-r_2$

又r_1-r_2為定值，故形成之圖形為一雙曲線之部分，以$\overline{PK_2}-\overline{PK_1}=k+r_2-r_1$為其

距離差，以K_1,K_2為其兩焦點形成。

(三)若P在C_2內：

同理，

$d(P,C_2)=r_2-\overline{PK_2}$，$d(P,C_1)=\overline{PK_1}-r_1$

我們有$k=d(P,C_1)+d(P,C_2)=\overline{PK_1}-\overline{PK_2}+r_2-r_1$

同樣做出雙曲線。

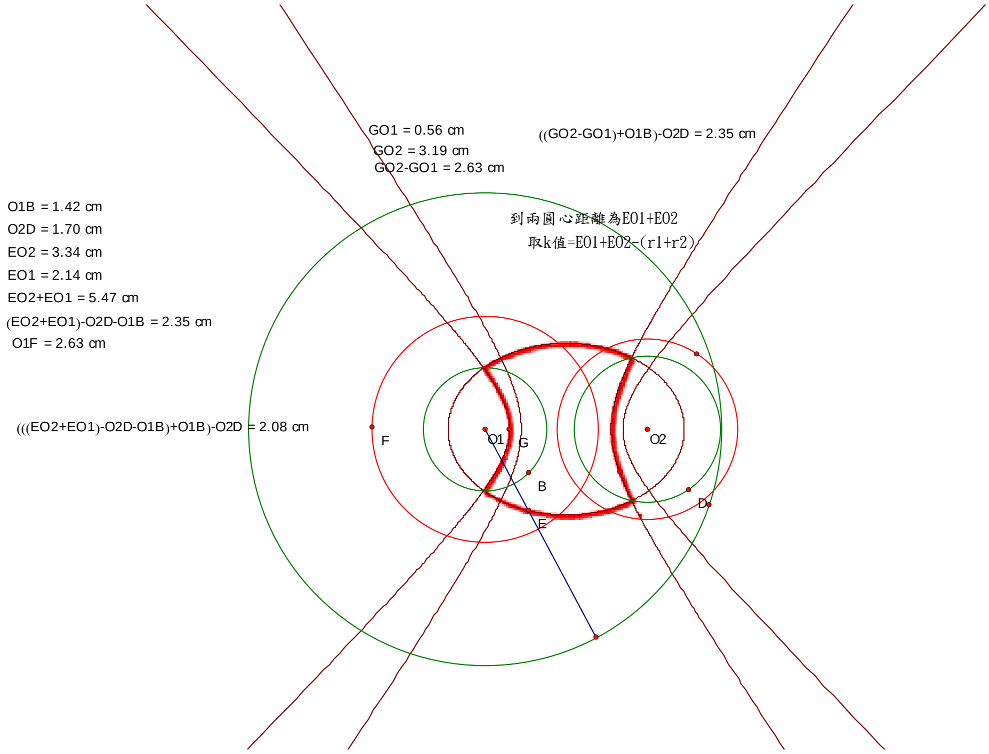
(四) 若P在C_1內且P在C_2內

$d(P,C_2)=r_2-\overline{PK_2}$，$d(P,C_1)=r_1-\overline{PK_1}$

我們有$k=d(P,C_1)+d(P,C_2)=-(\overline{PK_1}+\overline{PK_2})+r_2+r_1$

得到$r_1+r_2-k=(\overline{PK_1}+\overline{PK_2})$

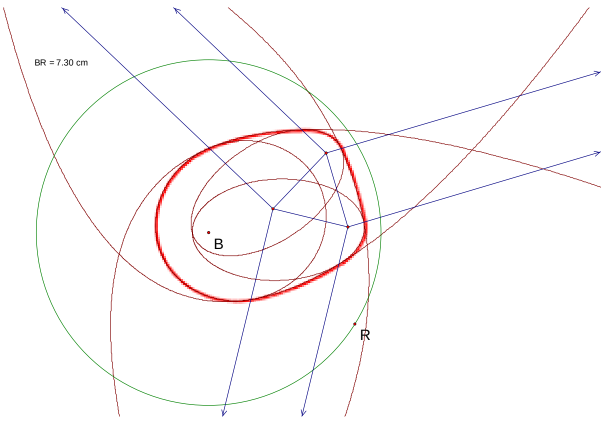
得到所有圖形(例：若P經過C_1內部且P經過C_2內部)：



第六節：到固定點和多邊形距離和爲定值的點形成的圖形

一、狹義意義形成的圖形：

以三角形爲例：



(一)：圖形的產生

因爲我們取的k值有狹義意義,故所有的圖形都在多邊形外產生
設F_1爲一點,F_2爲此多邊形,$a_n \in F_2$爲此多邊形上的邊$(n \in N)$
在線段a_n的兩個端點上作線段a_n的垂直射線L_{1n}, L_{2n},且$E(L_{1n}, L_{2n})$內不得包含F_2
設P爲滿足$d(P,F_1)+d(P,F_2)=k$的點,則
若P在$E(L_{1n}, L_{2n})$內
$d(P,F_1)+d(P,F_2)=d(P,F_{1n})+d(P,a)$,
得到的軌跡爲一條拋物線的一部分(另一條拋物線不符合要求)
若P不在$E(L_{1n}, L_{2n})$內
形成的圖形爲橢圓的一部分

(二)：圖形的特性：

此多邊形由多條線段所構成。

設$\overline{AB}, \overline{BC}$ 爲 F_2 上的兩個相鄰的邊 ，並過A, B作$\overline{AB}$的垂線L_1, L_2 ；

過B, C作$\overline{BC}$的垂線L_3, L_4 。

則滿足$d(P,\overline{AB})+d(P,F_1)=k$的點在$E(L_1, L_2)$間形成一拋物線(取多邊形外的) 。

滿足$d(P,\overline{AB})+d(P,F_1)=k$的點在$E(L_2, L_3)$間形成一橢圓 。

我們由命題一知兩圖形接合處平滑，又此橢圓同時並滿足$d(P,\overline{BC})+d(P,F_1)=k$

且和$E(L_3, L_4)$間形成的拋物線 由命題一知接合處平滑。

故整個圖形平滑。

二、廣義意義形成的圖形：

<u>(一)到點和三角形距離和爲定值的廣義圖形：</u>

(1)三角形的內心與圖形的關係：

給定三角形ABC,並作出其內心I
若P在三角形ABC內部,且在三角形AIC內部,則取$d(P,ABC)=d(P,\overline{AC})$

(2)圖形的組成：

設F爲一定點,ABC爲一三角形
設P滿足$d(P,F)+d(P,ABC)=k, k>\overline{FB}>\overline{FA}, k<\overline{FC}$
則由於滿足$d(P,F)+d(P,C)=k$的點不存在,

1.P點有可能存在於三角形內部

2.由第二節的討論知道滿足$d(P,F)$=$d(P,\overline{BC})=k$的P形成的兩條拋物線交於$\overleftrightarrow{BC}$上,又滿足$d(P,F)+d(P,C)=k$的圖形不存在,而滿足$d(P,F)+d(P,B)=k$的圖形仍在,故滿足$d(P,F)+d(P,\overline{BC})=k$的$P$形成的兩條拋物線交於$\overline{BC}$上

3.同理,滿足$d(P,F)+d(P,\overline{AC})=k$的$P$形成的兩條拋物線交於$\overline{AC}$上

定義:若以$\overleftrightarrow{BC}$的某一邊半平面中沒有A點,則定義此半平面爲$\overleftrightarrow{BC}$的外半平面,反之,則定義爲內半平面.

設$\Gamma\left(O,F,\overline{BC}\right)$爲滿足$d(P,F)+d(P,\overline{BC})=k$的$P$點形成的兩條拋物線之中在外半平面的拋物線,$\Gamma\left(I,F,\overline{BC}\right)$則在內半平面.

則$\Gamma\left(I,F,\overline{BC}\right)$和$\Gamma\left(I,F,\overline{AC}\right)$相交於$\overleftrightarrow{IC}$;$\Gamma\left(I,F,\overline{AC}\right)$和$\Gamma\left(I,F,\overline{AB}\right)$相交於$\overleftrightarrow{IA}$;

$\Gamma\left(I,F,\overline{BC}\right)$和$\Gamma\left(I,F,\overline{AB}\right)$相交於$\overleftrightarrow{IB}$

(證明:)

在$\overleftrightarrow{IC}$上,若存在P點滿足$d(P,F)+d(P,ABC)=k$,則P點必同時滿足$d(P,\overline{BC})+d(P,F)=k$和$d(P,\overline{AC})+d(P,F)=k$故兩拋物線和此角平分線交於同一點

(3)：結論：

若點P在ABC外，則圖形和取狹義意義所得的圖形相同。

若點P在AIC內，則取$\Gamma\left(I,F,\overline{AC}\right)$作爲其圖形

若點P在BIC內，則取$\Gamma\left(I,F,\overline{BC}\right)$作爲其圖形

若點P在AIB內，則取$\Gamma\left(I,F,\overline{AB}\right)$作爲其圖形

且圖形連續。

這解釋了我們再用包絡線畫圖的時候，看到不平滑的地方的形成原因。

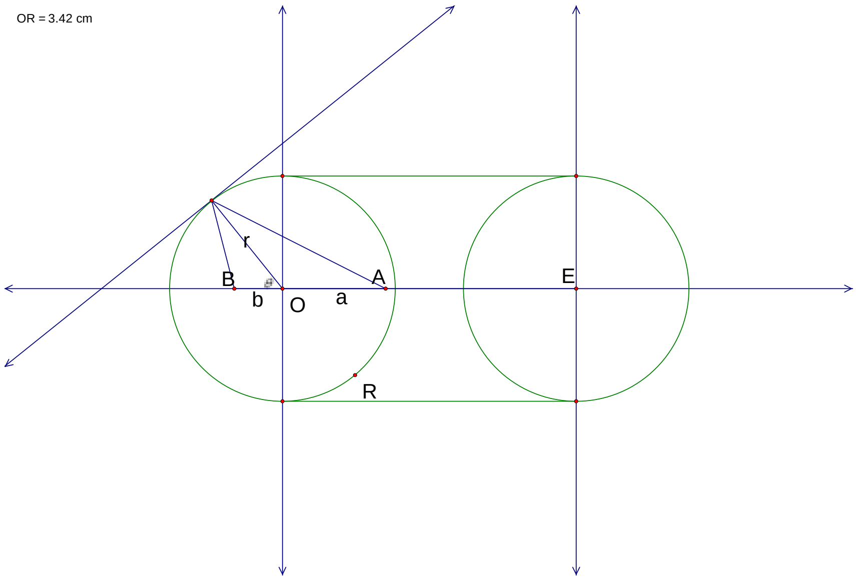
<u>(二)到點和其他凸多邊形距離和爲定值的廣義圖形：</u>

由於四邊形以上的凸多邊形沒有內心，故角平分線相交情形複雜，做完圖後不易找到當 P 點在多邊形內部時，要取 P 到哪一線段的距離爲 P 到此多邊形的距離。但圖形的形狀我們能作出，基本的特性也大概能掌握。

第七節：光學性質的探討

一：變形的圓的光學性質：

我們都知道一條從圓心射出去的光線打到圓弧會反彈回圓心，而在本節我們討論的圖形相當於一個變形的圓。我們不禁要問：從這個集合射出去的光線，會和原來偏差多少？



設 A 為線段 $\overline{OE}$ 上的點，射出一條光線交軌跡於 P 反射到 B 。

(一)若光線射到的軌跡為線段，則

過P作$\overline{AE}$的垂線交$\overline{AE}$於Q,則以Q為圓心,k為半徑作圓交原軌跡於Q
故我們計算P對Q的偏差
設$\angle PAQ=\theta$,則偏差為$k\csc\theta$

(二)若光射到圓弧，則比較偏差量 $\overline{AO}$ 與 $\overline{BO}$ (如圖)：

設$\overline{OR}=r,\overline{OA}=a,\overline{OB}=b,\angle POB=\theta$

因為入射角等於反射角,故

$\angle APO=\angle BPO$,得到$\dfrac{\overline{AP}}{\overline{PB}}=\dfrac{\overline{AO}}{\overline{OB}}$

又$\overline{AP}^2=r^2+a^2+2ar\cos\theta$

$\overline{BP}^2=r^2+b^2-2br\cos\theta$

有$\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{r^2+a^2+2ar\cos\theta}{r^2+b^2-2br\cos\theta}$

整理得$(r+2a\cos\theta)b^2+2(a^2r\cos\theta)b-a^2r^2=0$

有$b=\dfrac{-2(a^2r\cos\theta)\pm\sqrt{4(a^2r\cos\theta)^2+4a^2r^2(r+2a\cos\theta)}}{2(r+2a\cos\theta)}$且負不合,故

得到$b=\dfrac{-(a^2r\cos\theta)+ar\sqrt{(a^2\cos\theta+r+2a\cos\theta)}}{(r+2a\cos\theta)}$

有了這個關係式後，我們可以計算偏差多遠。

因為$0\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}$,所以$r+2a\cos\theta\ge r$,

得$b<\dfrac{1}{r}\left[-(a^2r\cos\theta)+ar\sqrt{a^2\cos\theta+r+2a\cos\theta}\right]$,

故$b<a\left[-a\cos\theta+\sqrt{a^2\cos\theta+r+2a\cos\theta}\right]$

$<a\sqrt{a^2+2a+r}$

若我們令反射光的偏差值為O到$\overleftrightarrow{BP}$的垂直距離c，則$c<b$，故由上式可得，若發射光的偏差a很小，則反射光的偏差c也就很小，這印證了我們的直覺。（其實，類似於底下對變形橢圓的光學性質的推導，我們可以得到：對於變形的圓而言，若此變形圓在光所射到的點處有切線，則反射光的偏差≤入射光的偏差）。

二：變形的橢圓的光學性質：

設F_1,F_2為平面上兩集合(點,線段或凸多邊形)，Q為平面上的點，且滿足$d(Q,F_1)+d(Q,F_2)=k$，k取狹義意義。設諸Q點形成的變形橢圓為Γ。設Γ在P有切線，且在P點所對應的橢圓之焦點為$A,B,A\in F_1,B\in F_2$。設$C\in F_1$，有一光線從C射出打到P點後反彈，設此射線為L。設A對$\overleftrightarrow{CP}$的垂足為E，B對L的垂足為G，則由於入射角等於反射角

得到$\angle EPA=\angle GPB$

又已知$\angle BGP=\angle AEP$

故$\triangle AEP\sim\triangle BGP$

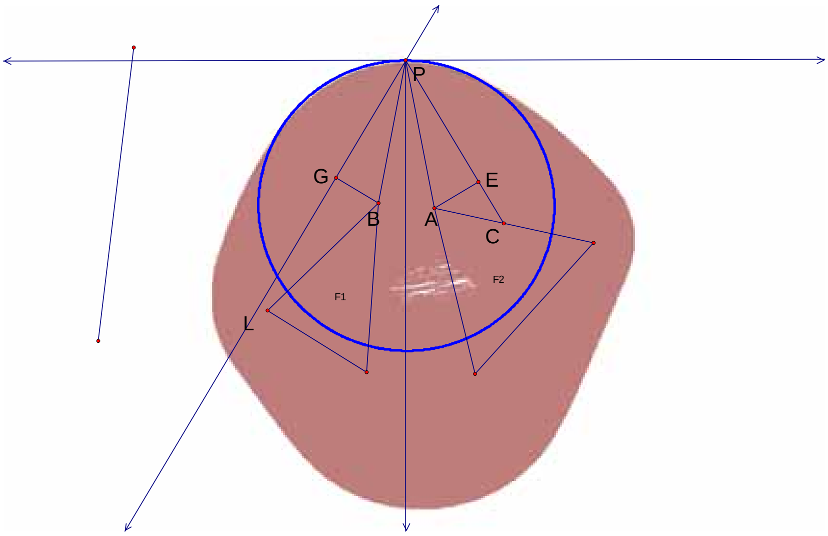
得$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AP}}=\dfrac{\overline{BG}}{\overline{CA}}$,有$\overline{BG}=\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AP}}*\overline{CA}$，$\overline{BG}$是我們要的偏差值。

因為我們對k取狹義意義，故F_1,F_2和Γ的距離大於零，

故$\dfrac{\overline{BP}}{\overline{AP}}$必小於某一個常數$\lambda$($\lambda$和$k$及$F_1,F_2$有關)。

所以反射光的偏差值 $\overline{BG}$ 線段長 $< \lambda \times$ 入射光的偏差值 $\overline{CA}$ 線段長。

所以當入射光的偏差很小時，反射光的偏差也很小。
圖形：



參、研究結果與討論

<u>(一)研究結果：</u>

1.對一般平面凸多邊形而言，到其距離爲定值的點形成的集合爲內部一相似形(可能不存在)，外部用一圓滾過其邊形成外部的軌跡。

2.若光從平面上的一個凸多邊形打出，射到到其距離爲定值的點形成的圖形，則我們可以估計其反射光和圓比較的偏差值。

3.給定平面上兩線段 $\overline{AB}$和$\overline{CD}$ ，過A, B,對$\overline{AB}$作垂線L_1, L_2;過C, D,對$\overline{CD}$作垂線L_3, L_4，則若到此兩線段距離和爲定值的圖形不經過其交集(或沒有交集)，則所有圖形由橢圓和拋物線的部分組成，且取狹義意義形成的圖形平滑。

4. 若圖形不滿足上述條件，則到兩線段距離和爲定值的圖形由橢圓、拋物線及線段的部分組成，且圖形連續。

5.到兩圓距離和爲定值的點形成的圖形由橢圓或雙曲線的部分構成。

6.到一點和一平面凸多邊形距離和爲定值的點形成的圖形由橢圓和拋物線的部分組成，且取狹義意義形成的圖形平滑。

<u>(二)討論：</u>

本研究對到兩集合距離和爲定值的圖形有了初步的討論，並巧妙的設座標系證明一些特性。研究過程中，充分利用設特殊座標系的方法，讓我們省去一些計算的麻煩。

唯在兩條不平行線段部分的討論，因爲有斜直線而在點線距離公式代入時出現絕對值內有不好處理的式子，無法進一步討論其特性，是日後有待克服的。

當我們討論到凹多邊形，甚至兩個不同的物件形成的集合，取狹義意義，發現形成的圖形也不一定平滑，而有一些凹進去的地方。希望往後能進一步探討其特性。
在多邊形角平分線的研究上我們遭遇了不小的困難，因爲太複雜而沒能有成果，不能進一步探討到點和凸多邊形距離和爲定値形成的集合，甚至是到凸多邊形和凸多邊形距離和爲定値形成的集合，這些都是我們未來討論的目標。
在光學性質研究的部分，我們希望將來能再作更深入的探討。
另外我們也對距離差爲定値的問題感興趣。再者，再圓錐曲線定義中的準線會變形成什麼呢？

肆、結論與應用

(一)結論：
在本研究中，我們分別探討了到一集合距離爲定値、到兩集合距離和爲定値的點形成的圖形，得到了變形的圓和變形的橢圓。目前我們討論到的集合包括了點、線段、和凸多邊形。我們同時也知道了圖形是由各式各樣的圓錐曲線和線段組成，並討論各種情況會出現哪些曲線。就光學性質而言，我們已經可以估算出光從集合射出，射到變形的圓及橢圓，其反射光的偏差。
(二)應用：
本研究把兩點推廣成兩線段、兩圓、甚至一點及一凸多邊形，討論到其距離和爲定値的點形成的集合。由此結果可繼續推廣到兩平面的幾何圖形，並不限定凹凸。除了數學的研究意義外，這也或許是一個視力不良的人，在看一個或兩個物體的中央時所得到的形狀，以及他們射擊時的命中範圍。雖然我們沒有直接證據證明他們看到的是如此，但若哪天醫學上發現了有人或動物的眼睛視力病變，並且看到的東西本研究的模糊模式 (距離和爲定値) 相近，則此研究可當作參考。

伍、參考資料

余文卿 李白飛 吳志揚 高正雄 方述誠 翁錫伍 李善文 丁村成/龍騰數學甲上冊/第二版/中華民國/龍騰文化事業股份有限公司/220 頁/中華民國九十一年
李虎雄 李政貴 陳昭地 林礽堂 黃登源 儲啓政/康熙數學課本第四冊/修訂二版/中華民國/康熙網路圖書股份有限公司/121 頁/中華民國九十二年
全任重/清大全任重教授GSP教學/ http://140.114.32.3/chuan/test.html
陳創義/陳創義教授的GSP講義/
http://www.math.ntnu.edu.tw/~cyc/_private/m1.htm
官長壽/阿壽工坊/ http://140.111.115.8/longlife/