台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：斬不斷，理還亂—方塊切割

得獎獎項：大會獎佳作

學　　校：國立彰化高級中學

作　　者：呂亦翔、謝政佑

評語與建議事項：

本研究探討與平面集合聯通性相關的問題。過程十分複雜。

作者簡介

我的名字叫呂亦翔(右)，目前就讀於彰化高級中學二年級，平時就對數學就頗有興趣，卻沒有適當的機會去研究，直到高中時才在老師的引導下，去研究一些較深入的題目，也發現了數學世界的奧妙、無邊無際！

這次是我第一次參加科展，在許多方面仍屬生疏，也因此在許多方面下過了一番苦心，更特別感謝王聖輝老師、施皓耀教授的指導，以及同學和家人的支持。從研究的過程中，讓我學習到科學的精神與解決問題能力的提升，這次的科展研究，將會是一項珍貴的經驗！

我叫謝政佑(左)是彰化高中二年級的學生，對於體育活動(尤其是球類運動)非常熱衷，倒不是因為我是體育好手，我只是享受那種去融入、體驗的感覺，不想讓自己的生活被教科書淹沒而乏味無趣。

這次參加台灣國際科展科展，在許多方面仍顯不足，也因此使我特別融入想去體會題目的意義，更特別感謝老師、教授的指導，以及同學和家人的支持和鼓勵。從研究的過程中，讓我學習到研究的精神與樂趣，這次的科展研究，將會是一項珍貴的經驗！

一、前言

(一)、研究動機

看到環球城市數學競賽 2003 年春季賽國中組試題中，一題有關方格遊戲的問題：

> 在一塊 9×9 的正方形方格紙板中，最多可以挑選幾個小方格，使得沿著這些小方格的二條對角線割開後，原正方形方格紙板不會分裂為二片或二片以上(即沒有小片紙板會從原正方形紙板中“掉下來”)？

原題目雖然只有一種圖形解，但我們發覺在其他方格紙板中，圖形解不一，在對幾個圖形分析和研究過後，發覺“似乎”有其特定作圖法，而且可挑選的小方格數也頗有發展的地方，令我們覺得相當有趣，而且此題目和之前看過方格類的問題不大一樣，因此，決定以此問題當作科展主題，加以延伸、研究，自我挑戰。

(二)、研究目的

1. 在 $n\times n$ 的正方形紙板中，可切割之小方格數之極大值為何？切割方法為何?

2. 考慮 $m\times n$ 的長方形紙板中，可切割之小方格數之極大值為何？切割方法為何?

3. 探討 3 維空間中的類似切割，並推廣至 n 維空間中的切割。

(三)、研究設備及器材

筆、方格紙、電腦程式 Visual Basic 6.0

二、研究方法及過程

(一)、預備知識及符號說明

1.我們把 $n\times n$ 方格中格子的位子按照圖1依序編號為(i,j)，其中$1\leqq i,j\leqq n$。

(1,1)	**(1,2)**	**…**	**(1,n)**
(2,1)	**(2,2)**	**…**	**(2,n)**
…	**…**	**…**	**…**
(n,1)	**(n,2)**	**…**	**(n,n)**

圖 1

我們把m × n方格中格子的位子按照圖2依序編號為(i , j)，其中$1≦i≦$m，$1≦j≦$n。

（1,1）	**（1,2）**	**…**	**（1,n）**
（2,1）	**（2,2）**	**…**	**（2,n）**
…	**…**	**…**	**…**
（m,1）	**（m,2）**	**…**	**（m,n）**

圖 2

2. 基本限制

(1)被切割的小方格不能在四角上，因為會剝離出兩個三角形(圖 3)。

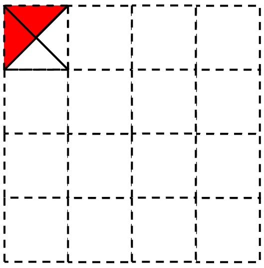


圖 3

(2)被選取的小方格不能在四邊上，因為會剝離出一個三角形（圖4）。

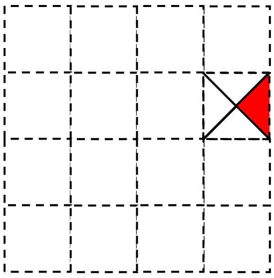


圖 4

(3)被選取的小方格不能相鄰，因為會剝離出一個小正方形（圖 5）。

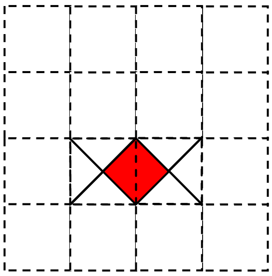


圖 5

3. 切割方式為在小方格的兩對角線上同時作切割。
4. 剝離：切割後掉離母體的區域。
5. 定義本文中“[X]”均為高斯函數。
6. 定義小圓環

(1) 作圖時，為了方便我們辨識哪裡需消去切割，故定義每一個小圓環為消去一次切割的地方。

(2) 每一個小圓環視為最多可控制三個剝離的紅色正方形（圖 6）。

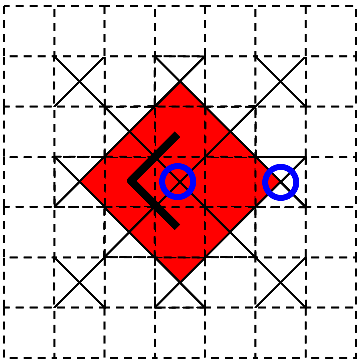


圖 6

7. 定義 P：不侵犯基本限制下可以做上記號的小方格數；Z：剝離的正方形數；Y：圓環數；X：目的所求之小方格數，即為 P−Y。
8. 所做的各種圖形中若經由旋轉、翻轉，能互相重合者，則視為同一種圖形（圖 7、圖 8）。

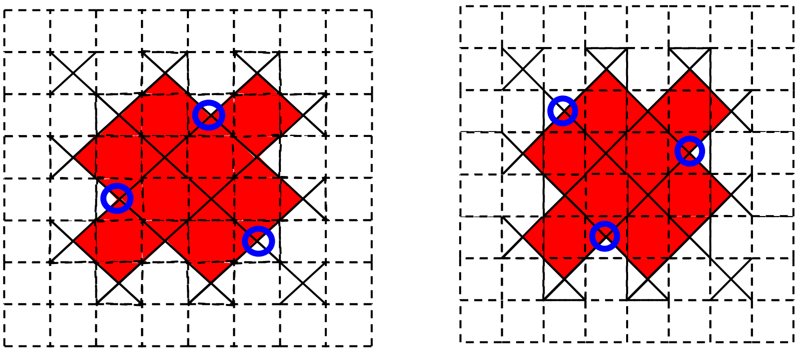


圖 7

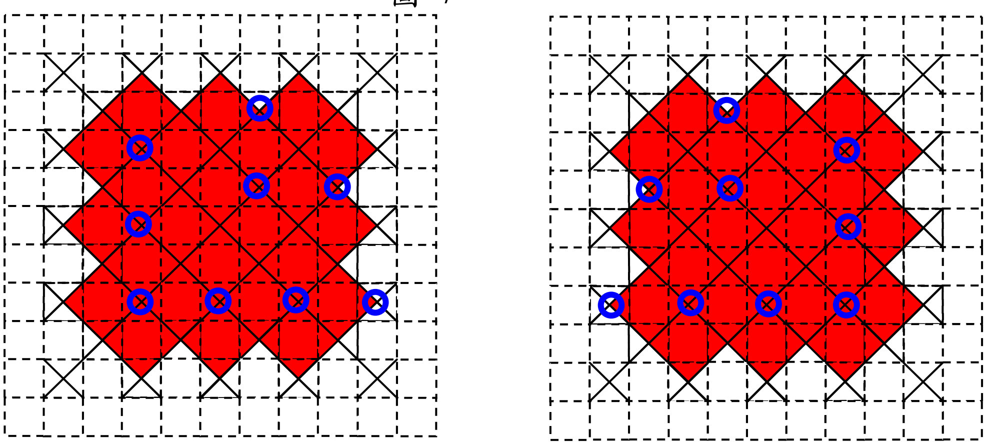


圖 8

（二）、解題想法

1. 藉由手畫和程式作圖，在不侵犯基本限制下，我們先將所有可以切割之處作上記號（打╳），再一步步將作上記號的地方給予檢查，並判斷何處為該消去記號的地方。

2. 將其數據紀錄下來，找出規律性。

3. 寫出題目之電腦程式，減少研究時間加快研究速率，並對找出的規律加以證明。

（三）、n × n 之方格紙板的切割情形

1. 在開始討論前，我們可先由方格圖中看出，在不侵犯到基本條件下，有兩種畫法：

(1)從左上角(2,2)開始切割（圖 9）。

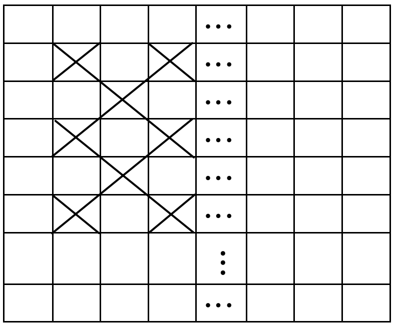


圖 9

由圖中可求得在不侵犯到基本限制下,可以作上記號的最多格數為 $P=2k^2-4k+2$，當 $n=2k$，$k\in N$；$P=2k^2-2k+1$，當 $n=2k+1$，$k\in N$。

(2)從左上角(3,2)開始切割（圖 10）。

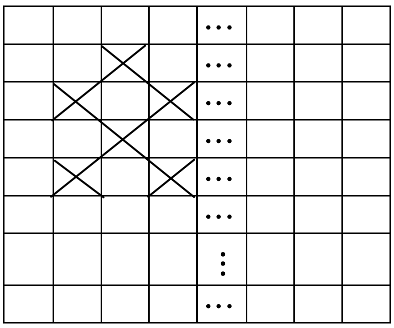


圖 10

由圖中可求得在不侵犯到基本限制下，可以作上記號最多格數為 $P=2k^2-4k+2$，當 $n=2k$，$k\in N$； $P=2k^2-2k$，當 $n=2k+1$，$k\in N$。
因為 $2k^2-2k+1$ 恆大於 $2k^2-2k$，故我們在作圖時，就從圖 9 的類型開始討論。

2. 作圖觀察至 **10×10**

(1) 當 n=1、2 時，顯而易見，不能做切割（圖 11）。

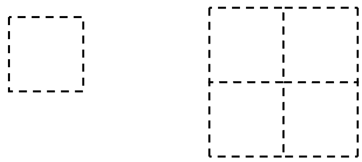


圖 11

(2) 當 n=3、4、5 時，在不侵犯到基本限制下，不會有剝落現象，其最多分別可切割 1、2、5 塊小方格（圖 12）。

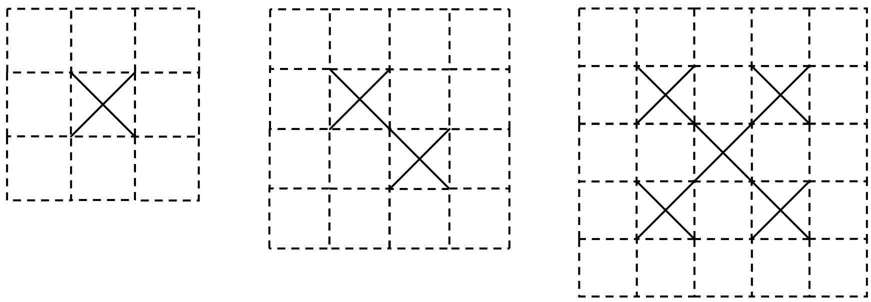


圖 12

(3) 當 n=6 時，在不侵犯到基本限制下，最多可在 8 格上作記號，然而卻會產生 2 塊剝離的正方形，所以至少需要消去 1 個記號，即最多可挑選 7 個小方格（圖 13）。

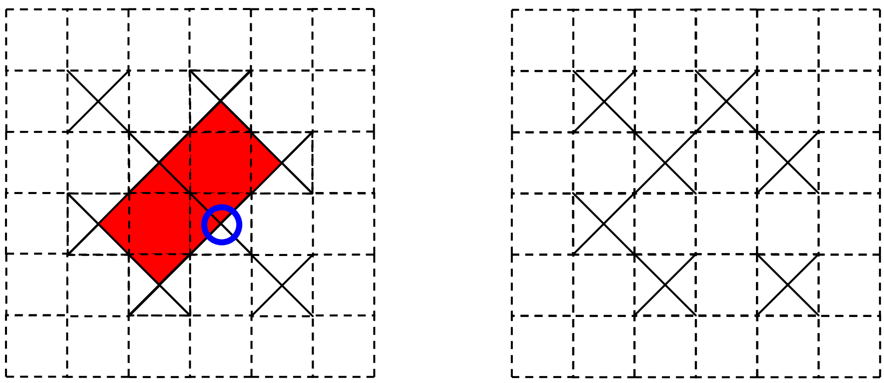


圖 13

(4) 當 n=7 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 13 格可以做記號，如此一來卻會產生 4 塊剝離的正方形，所以至少需消去 2 個記號，即最多可以挑選 11 個小方格（如圖 14）。

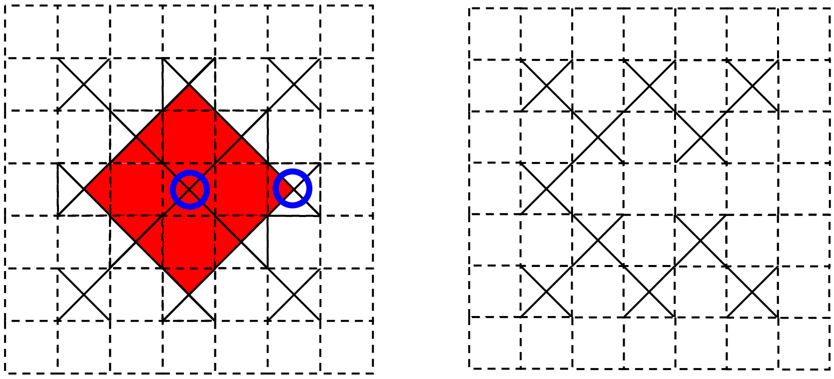


圖 14

在 7 × 7 的圖形中，我們可以發現，選擇消去記號的地方並非唯一，以致圖形也不只一種形式（圖 15）。

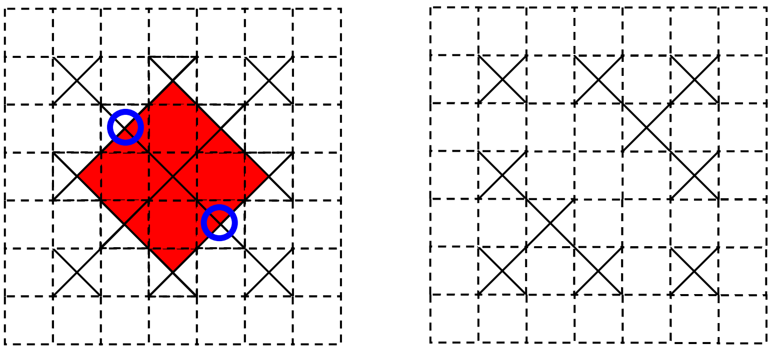


圖 15

(5) 當 n=8 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 18 格可做上記號，而產生 8 塊剝離的正方形，所以至少需要消去 3 個記號，故最多可以挑選 15 個小方格（圖 16）。

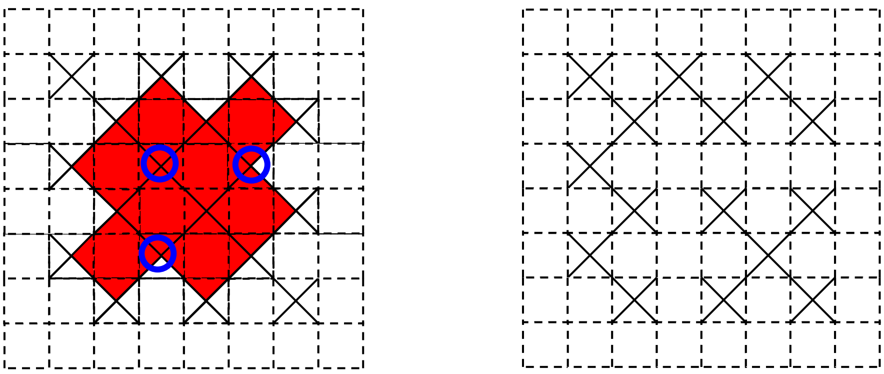


圖 16

在 8 × 8 的圖形中，選擇消去記號的地方並非唯一，圖形的形式也不只一種（圖 7）。

(6) 當 n=9 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 25 格可做上記號，而產生 12 塊剝離的正方形，所以至少需要消去 4 個記號，故最多可以挑選 21 個小方格（圖 17）。

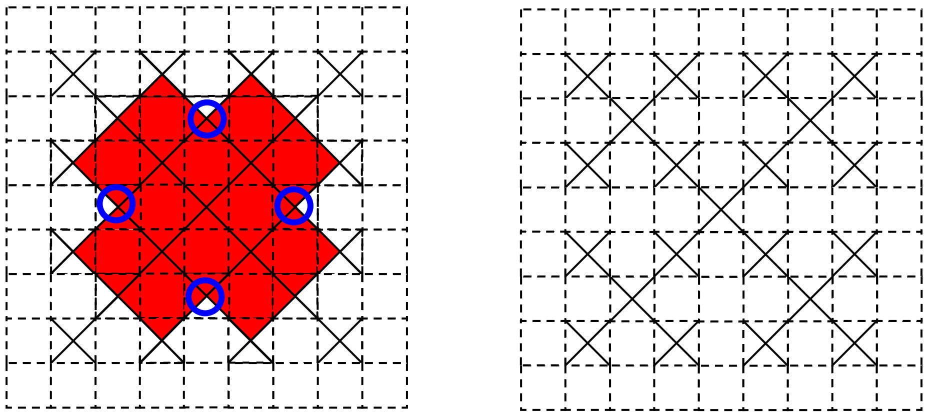


圖 17

(7) 當 n=10 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 32 格可做上記號，而產生 18 塊剝離的正方形，所以至少需要消去 6 個記號，故最多可以挑選 26 個小方格（圖 18）。

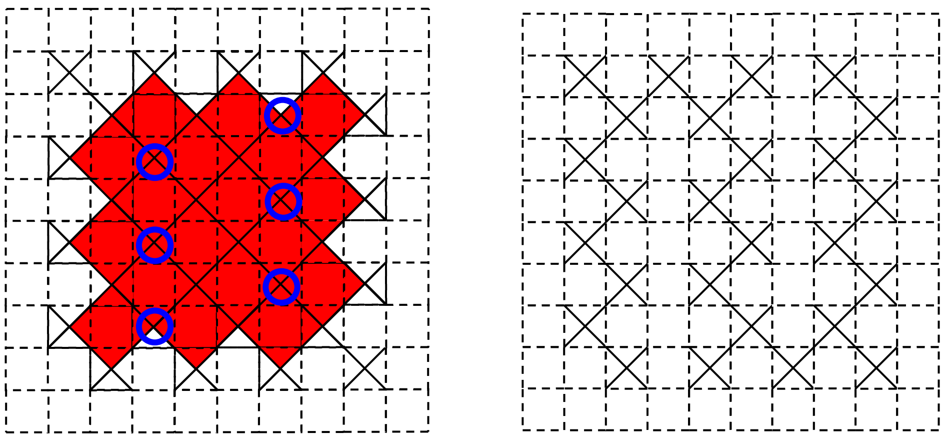


圖 18

同樣地圖形也都不只一種，但是在許多作圖法中，似乎感覺到某些圖形畫法有規律性，所以決定先將值求出後，再去找出規律性畫法。

3. 將 n=2~10 圖形所得的各個數據列表觀察（表一）。

表一

個數＼圖形 邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
2	**0**	**0**	**0**	**0**
3	**1**	**0**	**0**	**1**
4	**2**	**0**	**0**	**2**
5	**5**	**0**	**0**	**5**
6	**8**	**2**	**1**	**7**
7	**13**	**4**	**2**	**11**
8	**18**	**8**	**3**	**15**
9	**25**	**12**	**4**	**21**
10	**32**	**18**	**6**	**26**
備註				**X=P−Y**

列表後，不難發現作記號的方格和剝離的正方形間有下述的關係存在：

當 n=2k，其中 k≧2，k 為正整數時，剝離出的正方形數 Z 與 n=2(k−1)，可作上記號的小方格數 P 相同（表一虛線箭頭）；當 n=2k+1，其中 k≧2，k 為正整數時，剝離出的正方形數 Z 與 n=2(k−1)+1，可作上記號的小方格數（P−1）相同（表一實線箭頭）。從這個地方，可以知道我們必須將邊長分為奇數、偶數兩類去討論，以方便研究。

4. 推導過程

n=3~10 的情況：

(1) 在表一我們發現了 Z 和 P 之間有一定的關係存在。

當 n=2k 時，$P=2k^2-4k+2$ ——①

將 k−1 代入 k

$Z=2(k-1)^2-4(k-1)+2=2k^2-8k+8$

當 n=2k+1 時，$P=2k^2-2k+1$ ——②

將 k−1 代入 k

$Z=\{2(k-1)^2-2(k-1)+1\}-1=2k^2-6k+4$

引理一：當$n=2k$時，最多可作上記號的方格數P為 $2k^2-4k+2$。

證明：在$(i,2)$，$2\leqq i\leqq n-1$ 中，最多可在$\left(\frac{n-2}{2}\right)$個方格上做記號。

∵每行中每兩個做記號的小方格間各夾 1 個空白方格，

∴每一行中最多可夾$\left(\frac{n-2}{2}-1\right)$個空白方格。

又知左右兩邊(3,2)、(5,2)、(7,2)… (n-1,2)和(2,n-1)、(4,n-1)、(6,n-1)… (n-3,n-1)的方格不會影響到剝離正方形的產生，

∴共有$\left(\frac{n-2}{2}-1\right)(n-4)$個會影響。

又 $n=2k$，

∴$Z=\left(\frac{2k-2}{2}-1\right)(2k-4)=2k^2-8k+8$ 故得證。

引理二：當$n=2k+1$ 時，最多可作上記號的方格數P為 $2k^2-6k+4$。

證明：在偶數行中，每行最多可在$\left(\frac{n-3}{2}+1\right)$個方格上作記號。

∵每行中每兩個做記號的小方格間各夾 1 個空白方格，

∴每一偶數設行中最多可夾$\left(\frac{n-3}{2}\right)$個空白方格。

又左右兩邊(3,2)、(5,2)、(7,2)…(n–2,2)和(3,n–1)、(5,n–1)、(7,n–1)… (n–2,n–1)的方格不會影響到剝離正方形的產生，

∴偶數行中共有$\left(\frac{n-3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}+1-2\right)$個會影響，

奇數行中，每行最多可在$\left(\frac{n-3}{2}\right)$個方格上作記號。

∵每行中每兩個做記號的小方格間各夾 1 個空白方格，

∴每一偶數設行中最多可夾$\left(\frac{n-3}{2}-1\right)$個空白方格。

∴奇數行中共有$\left(\frac{n-3}{2}-1\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)$個會影響。

∴$Z=2k^2-6k+4$ 故得證。

(2)每一個小圓環視為最多可控制三個剝離的正方形。

$Z=3h,\ h\in N$ 時　$Y=\frac{Z}{3}$,

$Z\neq 3h,\ h\in N$ 時　$Y=\left[\frac{Z}{3}\right]+1$。

(3) 我們的目的是在求在不剝離出正方形的情況下，最多能挑選多少個方格作切割，所以我們將可作上記號的小方格數 P 減去圓環數 Y 即得題目所求 X。

當 $n=2k$ 其中 $k \geqq 2$，$k \in N$，且 $(2k^2-8k+8)=3h,\ h \in N$ 時，

$$X=P-Y=(2k^2-4k+2)-Y=(2k^2-4k+2)-\left(\frac{2k^2-8k+8}{3}\right)。$$

當 $n=2k$ 其中 $k \geqq 2$，$k \in N$，且 $(2k^2-8k+8) \neq 3h,\ h \in N$ 時，

$$X=P-Y=(2k^2-4k+2)-Y=(2k^2-4k+2)-\left\{\left(\frac{2k^2-8k+8}{3}\right)+1\right\}。$$

當 $n=2k+1$ 其中 $k \geqq 2$，$k \in N$，且 $(2k^2-6k+4)=3h,\ h \in N$ 時，

$$X=P-Y=(2k^2-2k+1)-Y=(2k^2-2k+1)-\left(\frac{2k^2-6k+4}{3}\right)。$$

當 $n=2k+1$ 其中 $k \geqq 2$，$k \in N$，且 $(2k^2-6k+4) \neq 3h,\ h \in N$ 時，

$$X=P-Y=(2k^2-2k+1)-Y=(2k^2-2k+1)-\left\{\left(\frac{2k^2-6k+4}{3}\right)+1\right\}。$$

5. 研究後的發現

因為在 $n \leq 10$ 時，要考慮的作記號方格太少，連帶地剝離的正方形數也太少，而較易判斷何處該消去記號，但是繼續做圖後，圖形並非如此單純，又發現些在 $n \leq 10$ 時沒有的變化。

(1) 當 $n=11$ 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 41 格可以做作號，如此卻會產生 24 塊剝離的正方形，所以依照基本定義，我們必須利用 8 個小圓環以消去記號，但是經實際作圖後發現，無論如何都必須用到 9 個小圓環（圖 19）。

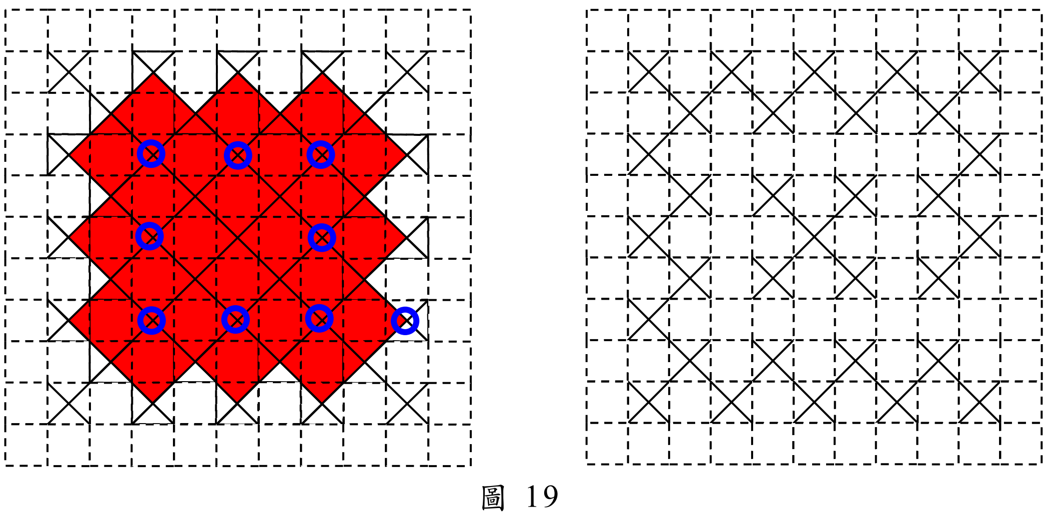


圖 19

(2) 當 n=12 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 50 格可以作記號，而會產生 32 塊剝離的正方形，依照基本定義需消去 11 個記號，經實際作圖後也符合推測（圖 20）。

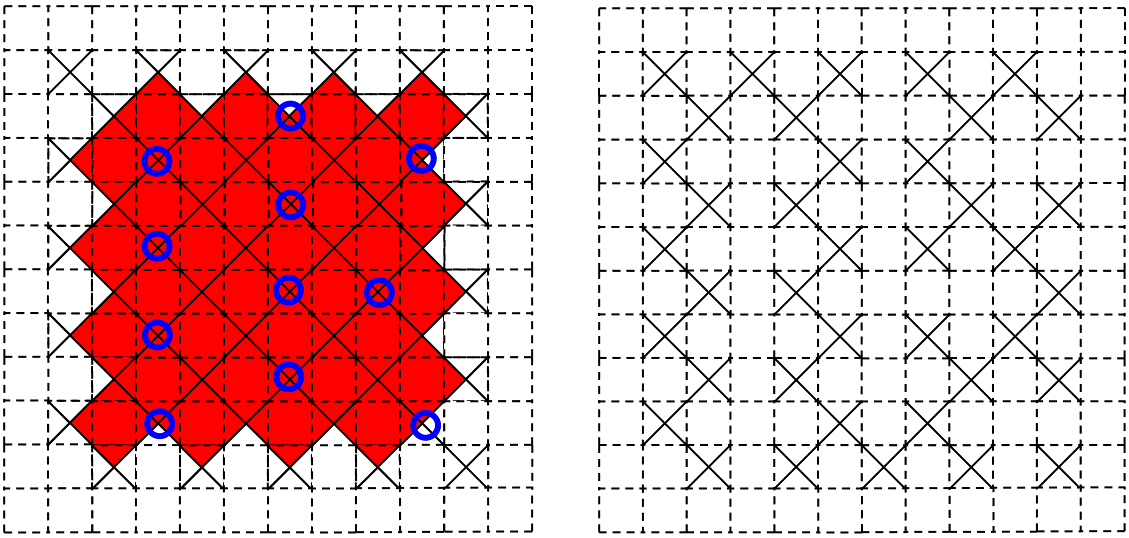


圖 20

(3) 當 n=13 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 61 格可以作記號，而會產生 40 塊剝離的正方形，依照基本定義需消去 14 個記號，經實際作圖後也符合推測（圖 21）。

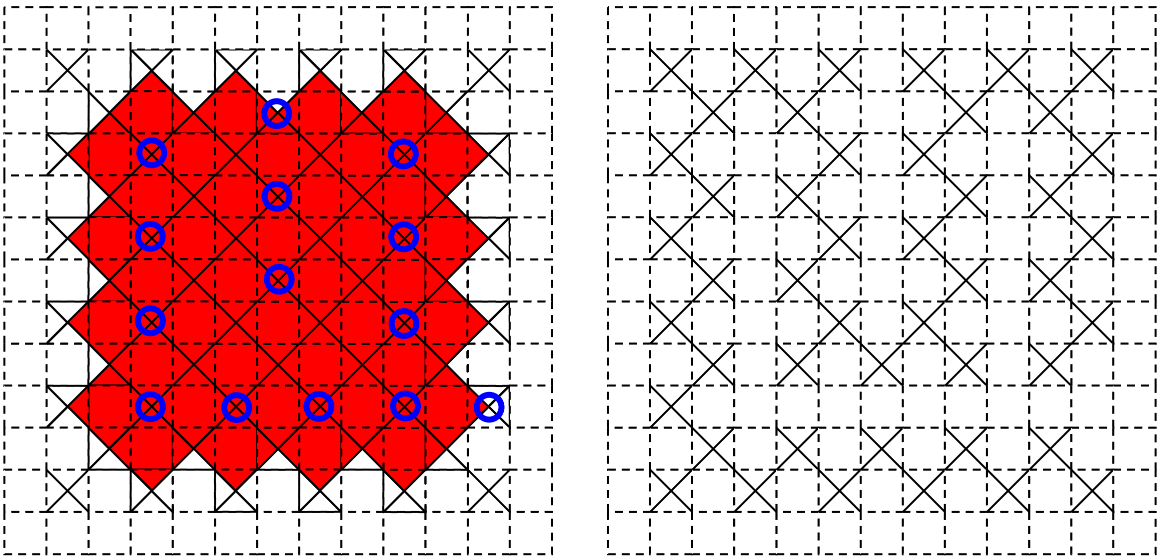


圖 21

(4) 當 n=14 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 72 格可以作記號，而會產生 50 塊剝離的正方形，依照基本定義需消去 17 個記號，經實際作圖後也符合推測（圖 22）。

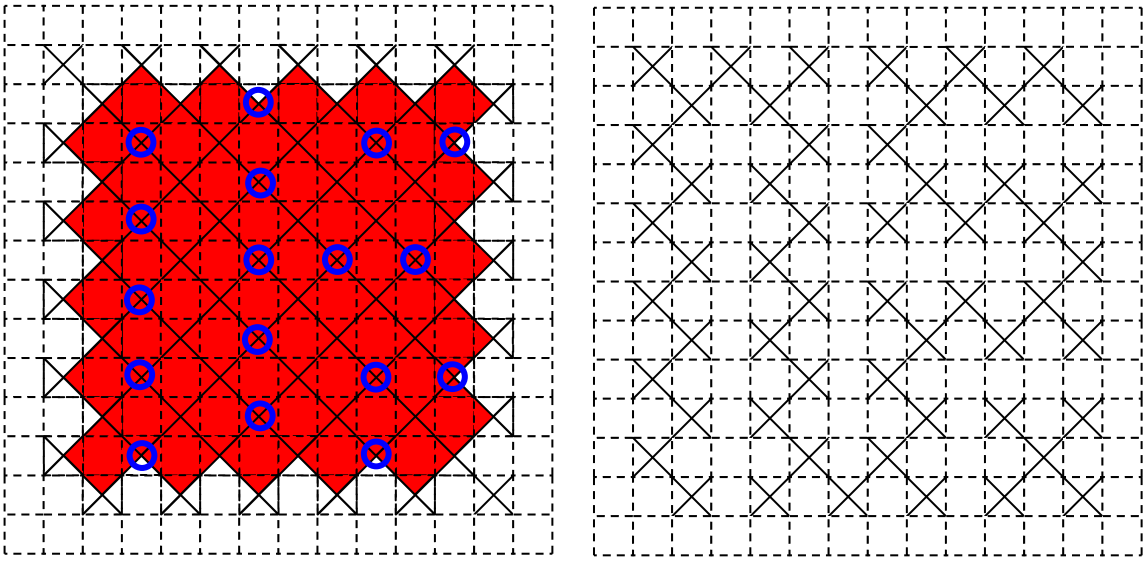


圖 22

(5) 當 n=15 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 85 格可以作記號，而會產生 60 塊剝離的正方形，依照基本定義需消去 20 個記號，但是經實際作圖後發現，還需再加上 1 個小圓環，所以共需要消去 21 個記號（圖 23）。

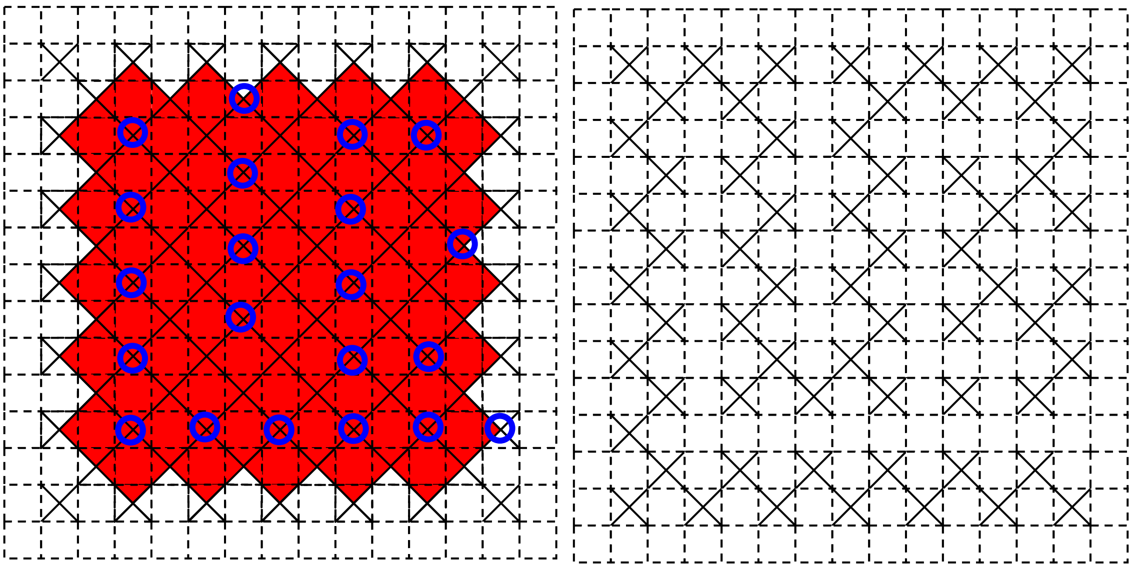


圖 23

(6) 當 n=16 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 98 格可以作記號，而會產生 72 塊剝離的正方形，依照基本定義需消去 24 個記號，經實際作圖後也符合推測（圖 24）。

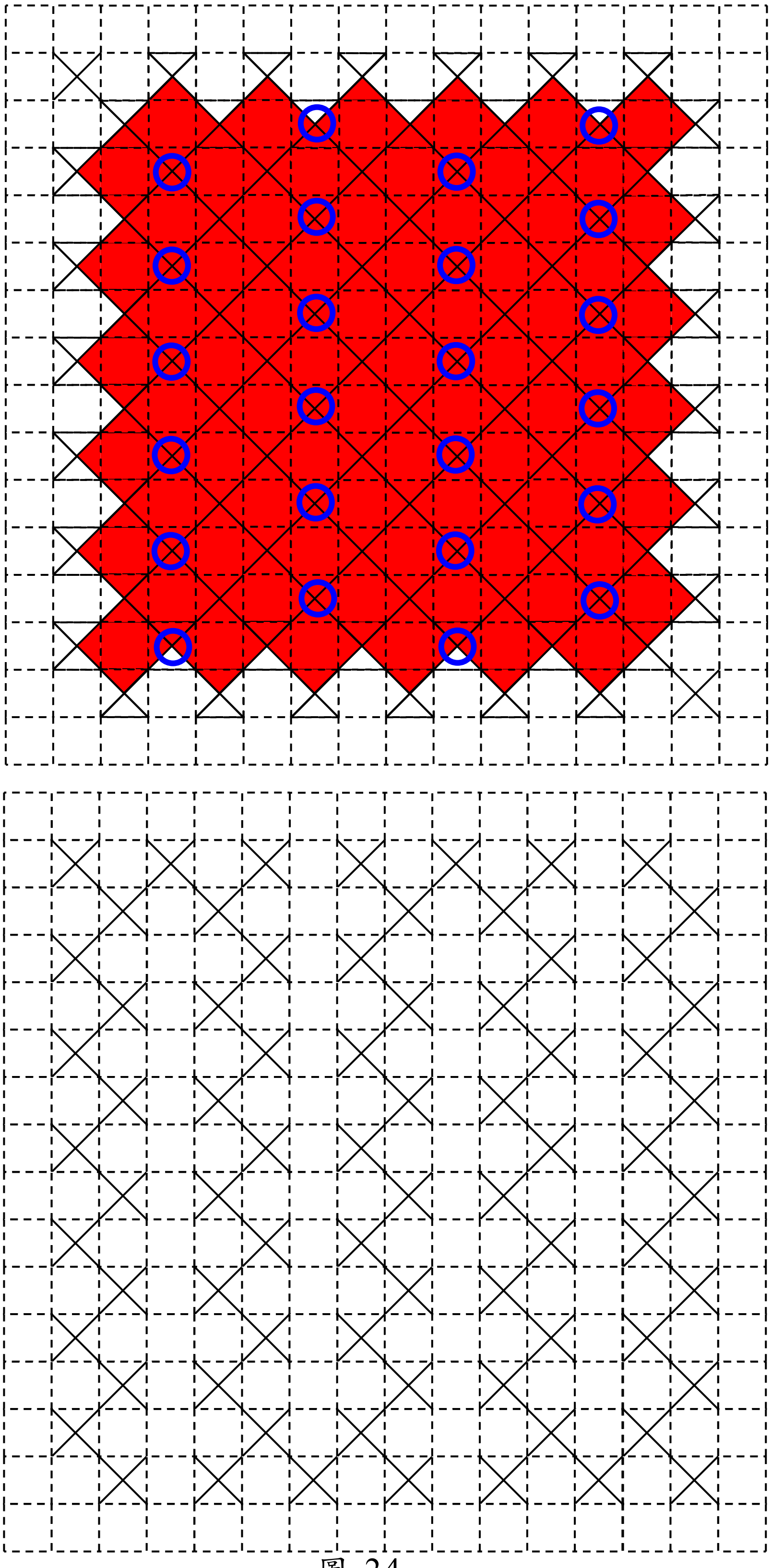


圖 24

(7) 當 n=17 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 113 格可以作記號，而會產生 84 塊剝離的正方形，依照基本定義需消去 28 個記號，經實際作圖後發現，似乎需再多消去 1 次記號（圖 25）。

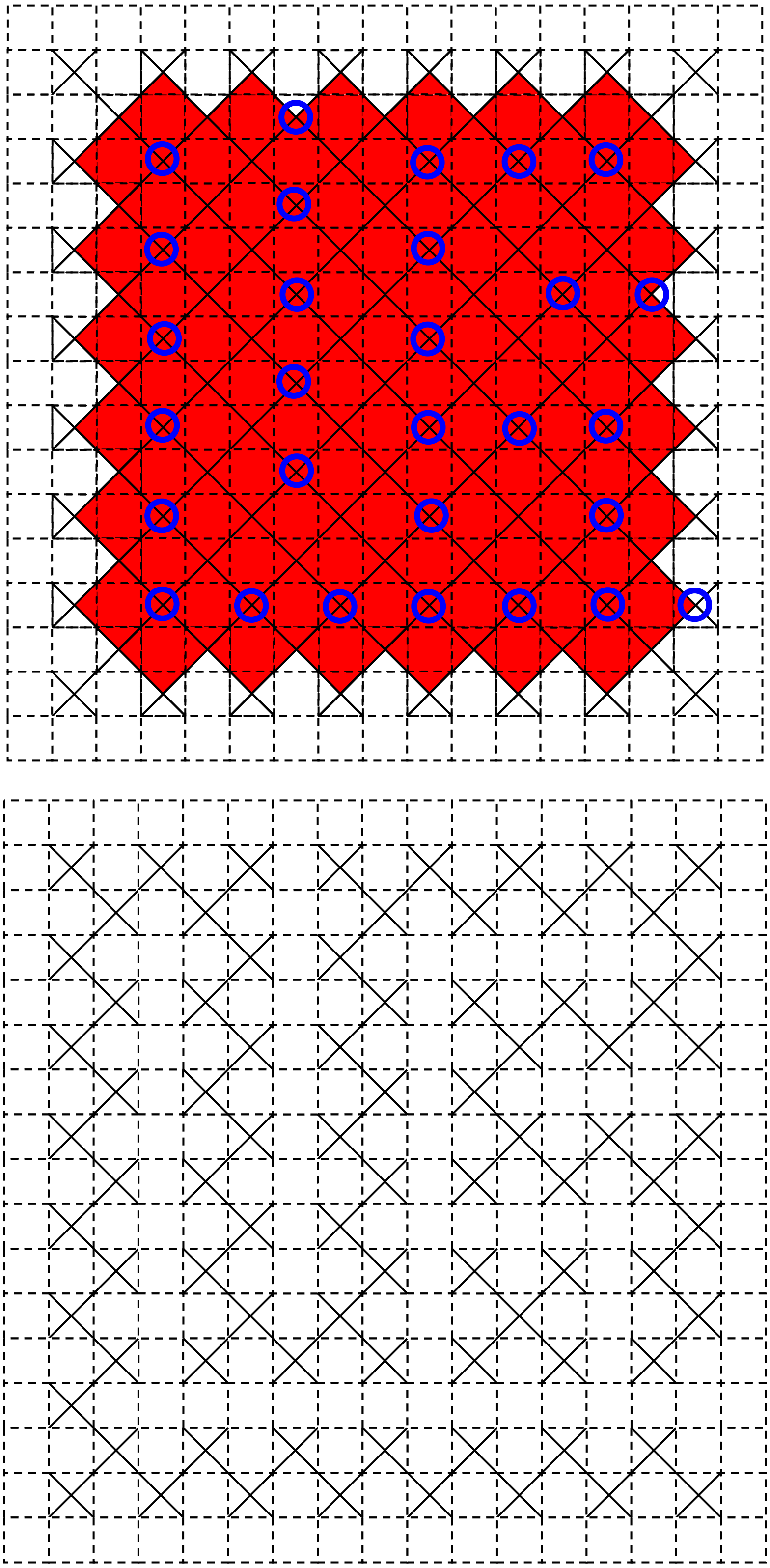


圖 25

(8) 當 n=18 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 128 格可以作記號，而會產生 98 塊剝離的正方形，依照基本定義需消去 33 個記號，經實際作圖後也符合推測（圖 26）。

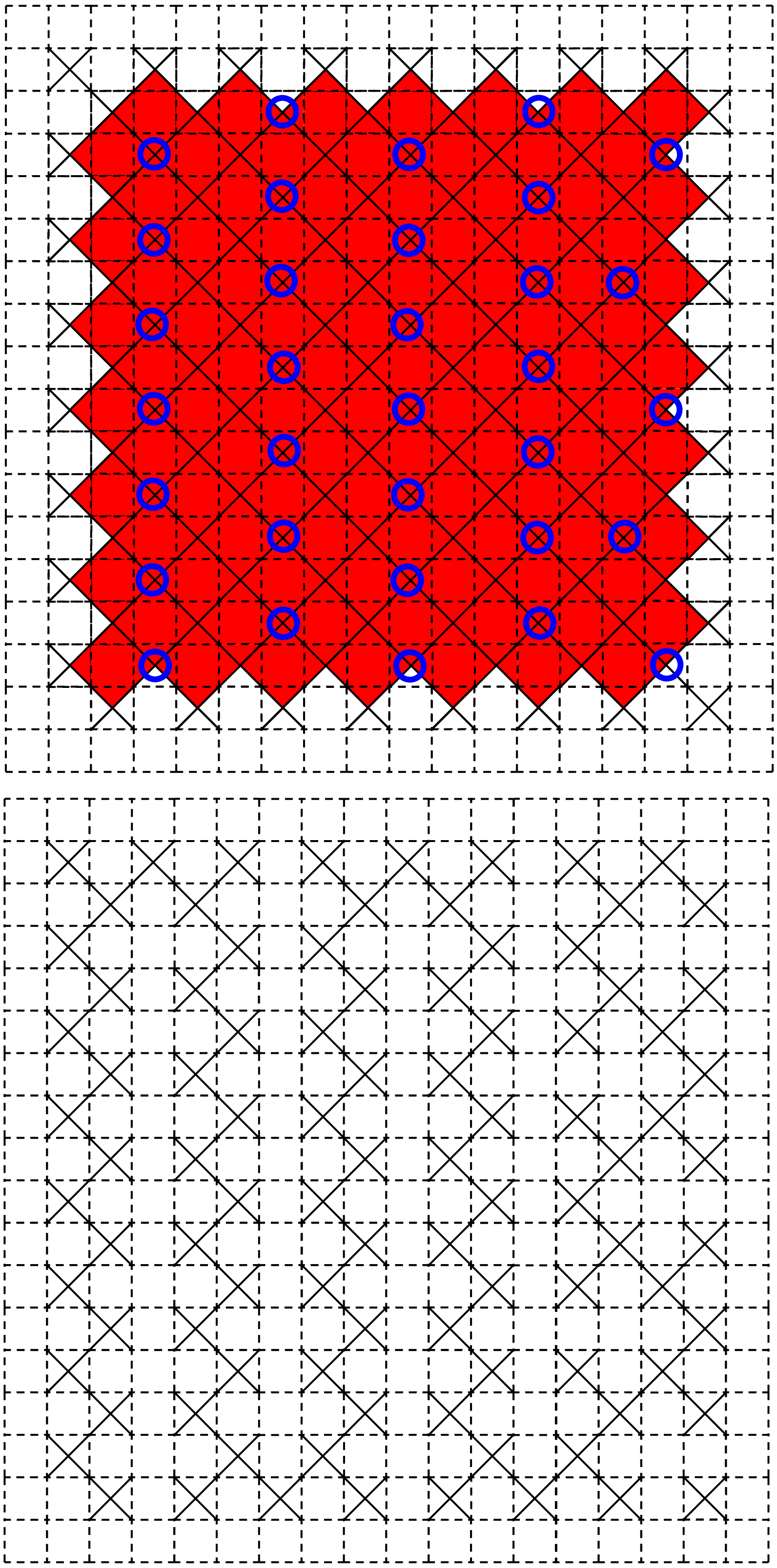
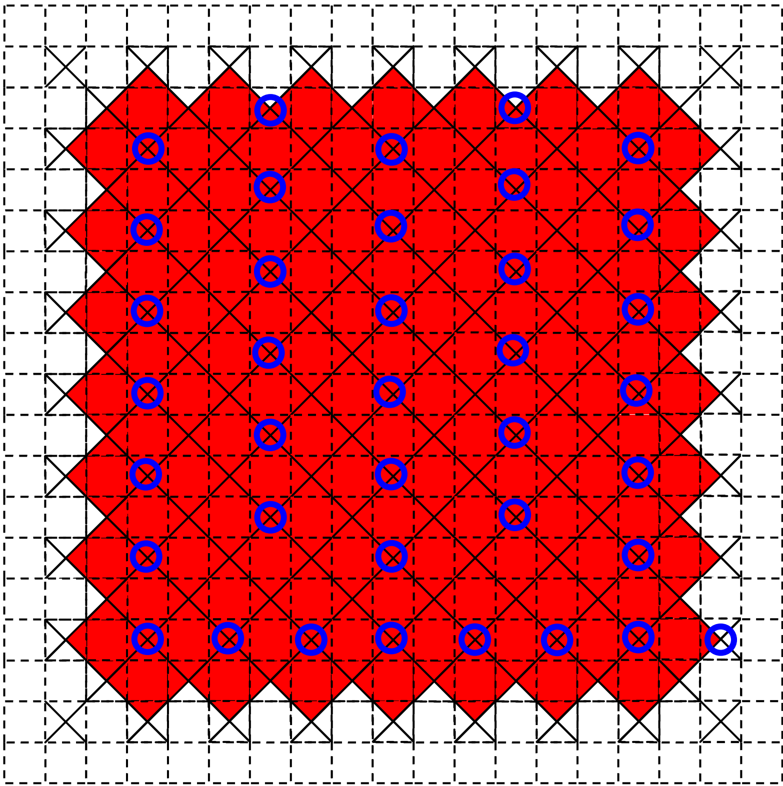


圖 26

(9) 當 n=19 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 145 格可以作記號，而會產生 112 塊剝離的正方形，依照基本定義需消去 38 個記號，經實際作圖後也符合推測（圖 27）。



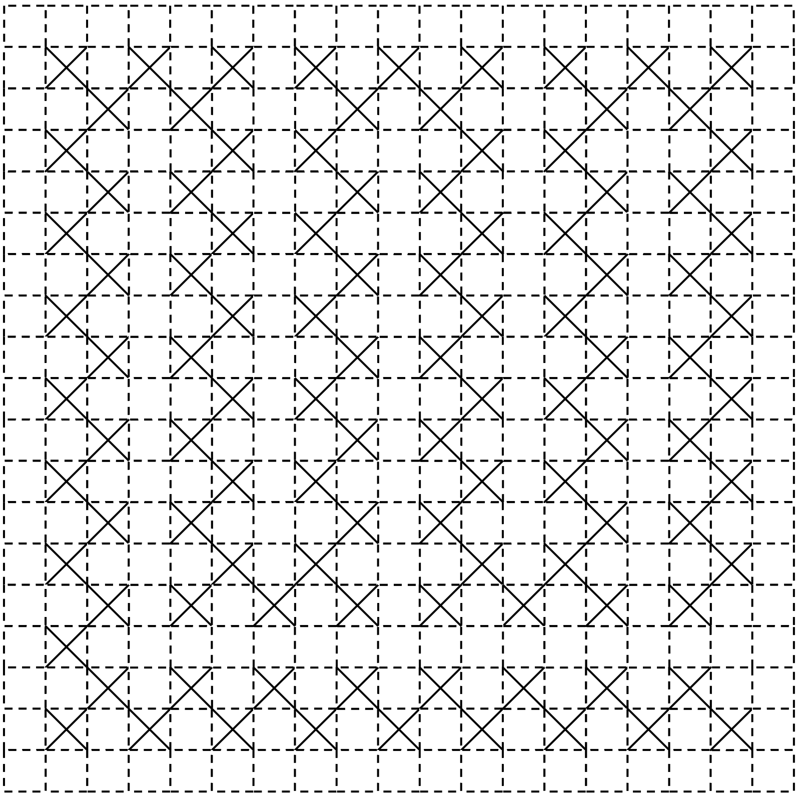


圖 27

(10) 當 n=20 時，在不侵犯到基本限制下，最多有 162 格可以作記號，而會產生 128 塊剝離的正方形，依照基本定義需消去 43 個記號，經實際作圖後也符合推測（圖 28）。

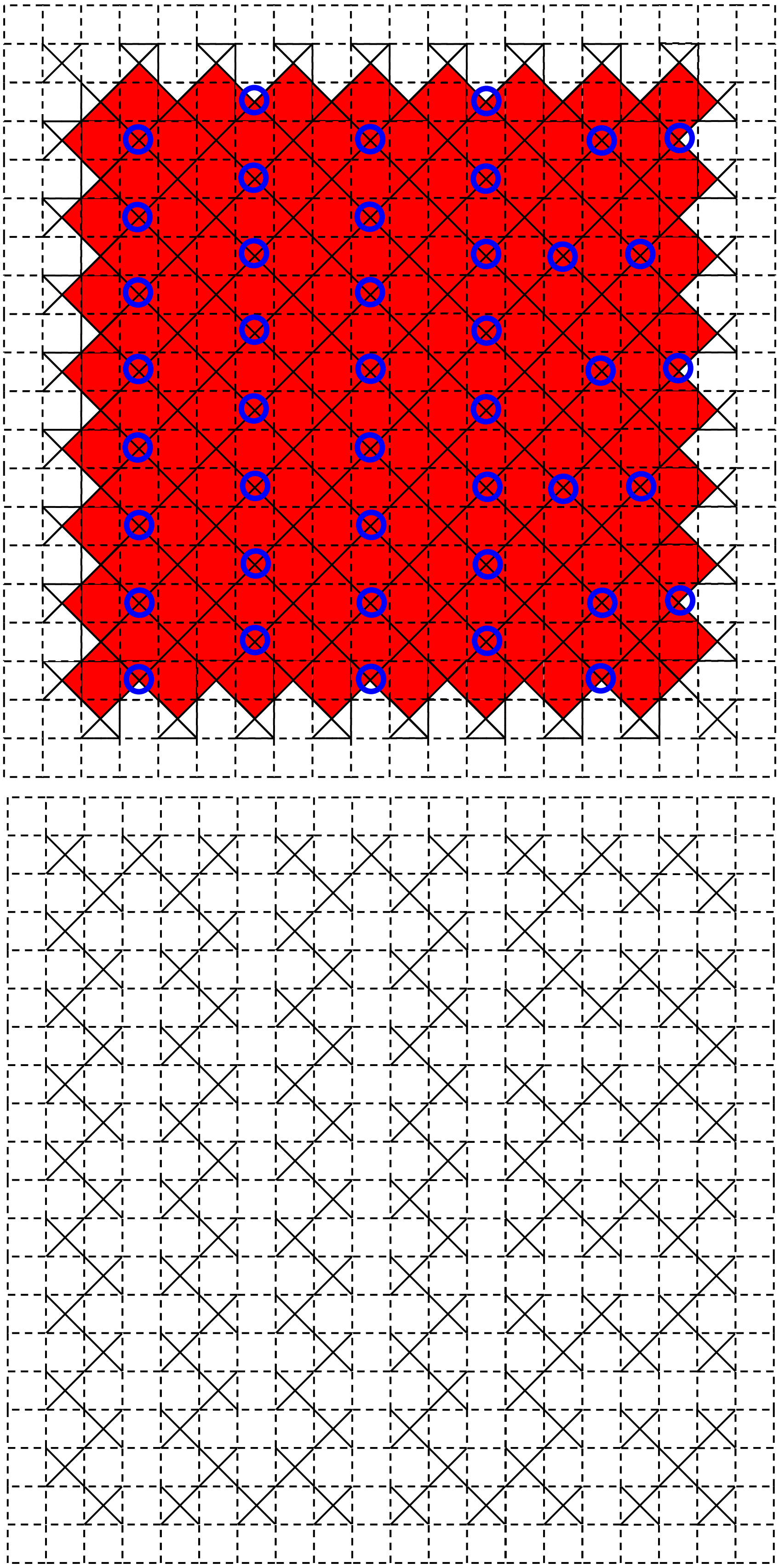


圖 28

做到這邊，我們分析問題是出在**需消去記號的個數**上：n=11、15、17時，分別有24、60、84塊剝離正方形，依照基本定義，則應只需8、20、24次消去記號，但是卻各需再多加一次消去；在n=12、13、14、16、18、19、20時，則依然符合代入先前推導的公式的值，所以我們推論**在n為奇數且剝離正方形數（Z）為3的倍數時，需消去切割的個數（Y）可能會有需要再加1甚至是其他可能。**將n=2~10圖形所得的各個數據列表觀察（表二）。

表二

圖形個數 / 邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
11	**41**	**24**	**9**	32
12	**50**	**32**	**11**	39
13	**60**	**40**	**14**	46
14	**72**	**50**	**17**	55
15	**85**	**60**	**21**	64
16	**98**	**72**	**24**	74
17	**113**	**84**	**29**	84
18	**128**	**98**	**33**	95
19	**145**	**112**	**38**	107
20	**162**	**128**	**43**	119
備註				**X=P−Y**

6. 數據分析

因為每消去一次切割最多可減少 3 個紅色正方形剝離，所以將剝離數 Z 除以 3，依照其餘數分類，找出不同 n 值之間的關係（表三）。

表三

餘 0	9,10,11,15,16,17,21,22,23,27,28,29,33,34,35,39,40,41,45,46,47,…
餘 1	7,13,19,25,31,37,43,49,56,62,68,74,80,…
餘 2	6,8,12,14,18,20,24,26,30,32,36,38,42,44,48,50,…

按照餘數將 n 值加以分類後，從餘 1 的數據中，發現 n 值以差 6 的等差級數成長，我們將其他的數也依此規則加以細分為 6 組數據來討論（表四）。

表四

第一組	第二組	第三組	第四組	第五組	第六組
餘 2	餘 1	餘 2	餘 0	餘 0	餘 0
6	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**
12	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**
18	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**
24	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**
30	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**
36	**37**	**38**	**39**	**40**	**41**
42	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**
48	**49**	**50**	**51**	**52**	**53**
54	**55**	**56**	**57**	**58**	**59**
60	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**
66	**67**	**68**	**69**	**70**	**71**
72	**73**	**74**	**75**	**76**	**77**
78	**79**	**80**	**81**	**82**	**83**
84	**85**	**86**	**87**	**88**	**89**
90	**91**	**92**	**93**	**94**	**95**
96	**97**	**98**	**99**	**100**	**101**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

由上表得知：

前面不符合推導公式的 n 值為第四組與第六組的數據。

我們再將第四組和第六組的數據作分析：

第四組（表五）:

表五

n 值	剝離(記號)數	推算消去切割數	實際消去切割數
9	**12**	**4**	**4**
15	**60**	**20**	**21**
21	**144**	**48**	**49**
27	**264**	**88**	**89**

第六組（表六）:

表六

n 值	剝離(記號)數	推算消去切割數	實際消去切割數
11	**24**	**8**	**9**
17	**84**	**28**	**29**
23	**180**	**60**	**61**
29	**312**	**104**	**105**

在第四組和第六組中，當 $n \leqq 10$ 時，實際消去切割數＝推算消去切割數。

在第四組和第六組中，當 $n \geqq 11$ 時，實際消去切割數＝（推算消去切割數+1）。

7. 一個有趣的例外

我們作圖發現：

(1)5×5 的圖形可用 4 個 3×3 的圖形組合而成（圖 29）。

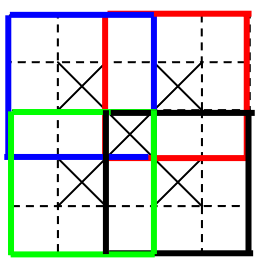


圖 29

(2)9 × 9 的圖形可用 4 個 5 × 5 的圖形組合而成（圖 30）。

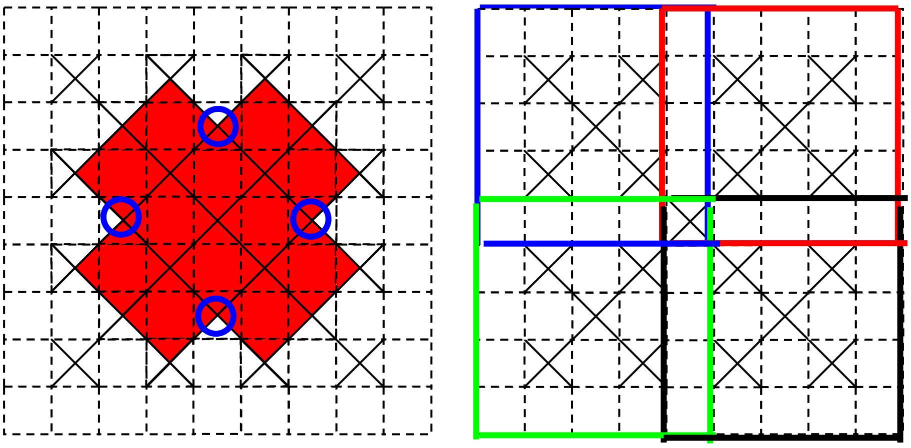


圖 30

(3)17 × 17 的圖形可用 4 個 9 × 9 的圖形組合而成（圖 31）。

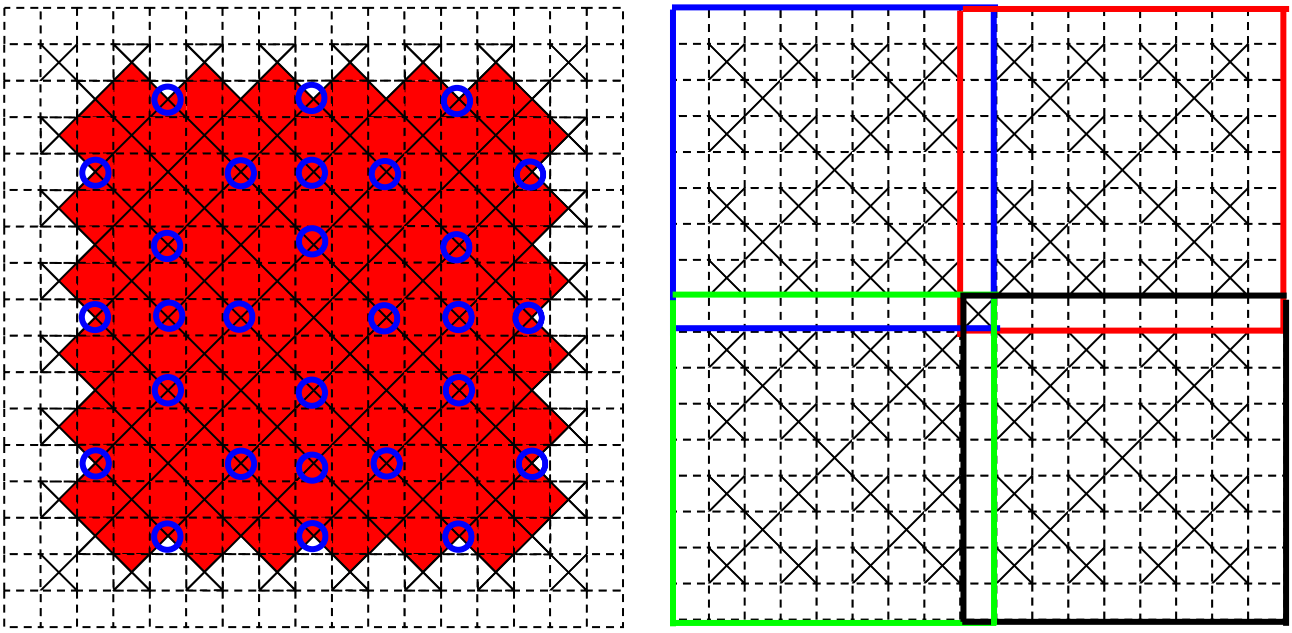
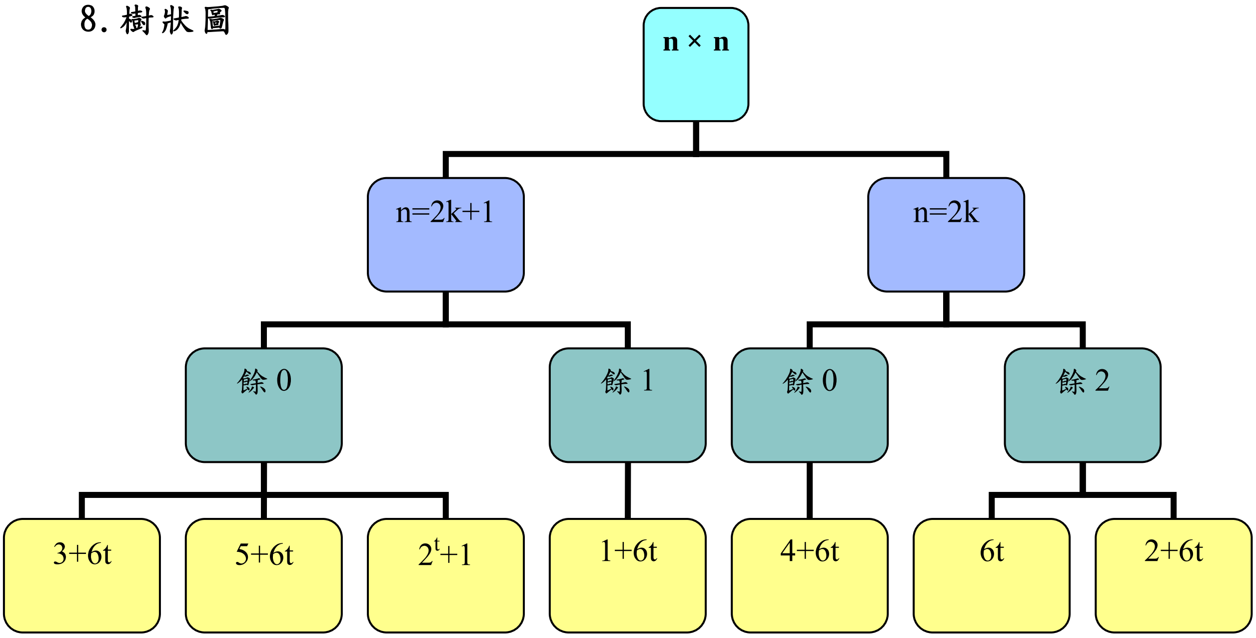


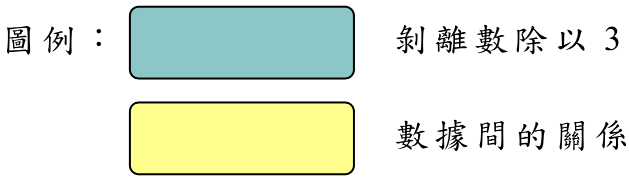
圖 31

觀察：

5、9、17、33 均為 2^s+1，$s \in N$，雖然 17 與 33 分別為第六組與第四組的數，但是實際消去切割數卻等於推算消去切割數，不需再加 1。

8. 樹狀圖





其中 k∈N，k≧3，t∈N。

圖 32

（四）、m × n 之方格紙板（m 列 n 行，n＞m）的切割情形

1. 當 m=1、2 時無法作切割，故不再討論。

2. 由方格圖中看出，在不侵犯到基本限制下，有兩種畫法：

(1)從左上角(2,2)開始切割（圖 33）。

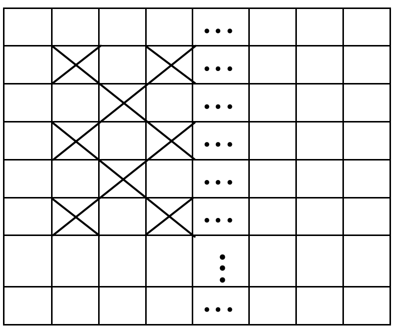


圖 33

由圖可求得在不侵犯到基本限制下，最多可作上記號的個數有

$P=\frac{(m-2)(n-2)}{2}$, 當 m=2k, k∈N，n∈N；$P=\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}$, 當 m=2k+1, n=2h+1，k∈N，h∈N。

(2)從左上角(3,2)開始切割（圖 34）。

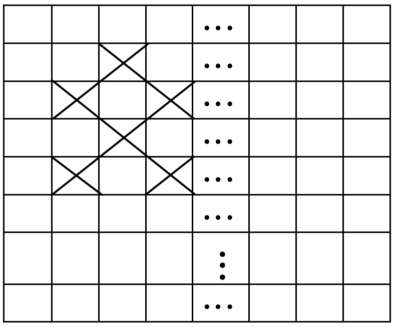


圖 34

由圖可求得在不侵犯到基本限制下，最多可作上記號的個數有 $P=\frac{(m-2)(n-2)}{2}$, 當 m=2k, $k\in N$，$n\in N$；$P=\frac{(m-2)(n-2)-1}{2}$, 當 m=2k+1, n=2h+1，$k\in N$，$h\in N$。

將**(1)**、**(2)**做比較，則在**(1)**時最多可以作上記號的方格數較多，所以我們從**(1)**開始討論、分析。

3. 作圖觀察

我們先從邊數較少的長方形著手，將邊長分為：偶數×n、奇數×n，經由大量作圖的方式，推出特定解，再從各項特定解中找出在偶數×n 的情況的一般解。由於之前在討論 n×n 的情形中，我們發現圖形數據之間以 6 為等差級數成長，所以我們猜想，是不是在 m×n 的情形下，圖形之間的變化也是以 6 來變化，或是成一循環？

(1)在 m 為偶數的情況

A.4×n 之方格紙板

a. 此情況下不會有剝離正方形產生，且切割方式也很單純（圖 35）。

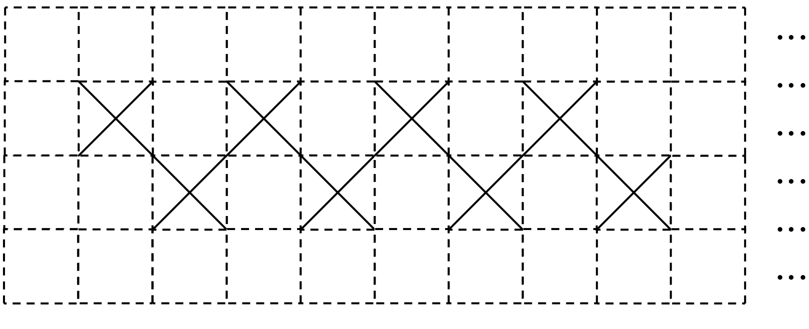


圖 35

b.公式推導

$P=n-2$, 當 n=2h, $h\in N$，

$P=\frac{2n-3}{2}$, 當 n=2h+1, $h\in N$。

B.6×n 之方格紙板

a.當 n=7 時，最多可在 10 個小方格上作記號，而產生 3 塊剝離正方形，所以需消去 1 次記號，故最多可以切割 9 個小方格（圖 36）。

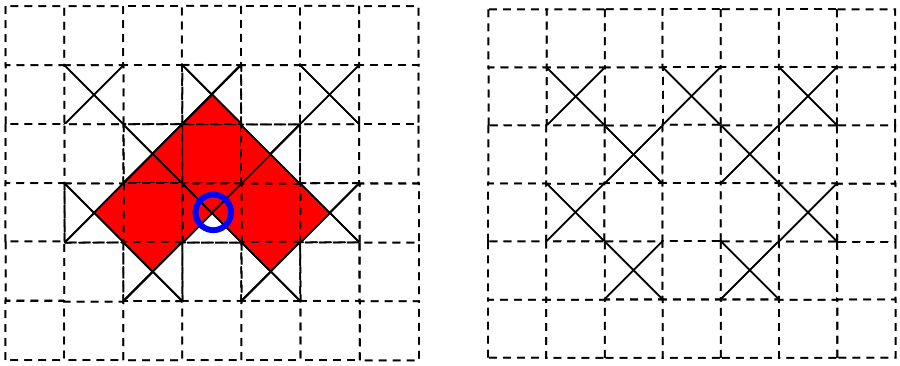


圖 36

當 n=8 時，最多可在 12 個小方格上作記號，而產生 4 塊剝離正方形，所以需消去 2 次記號，故最多可以切割 10 個小方格（圖 37）。

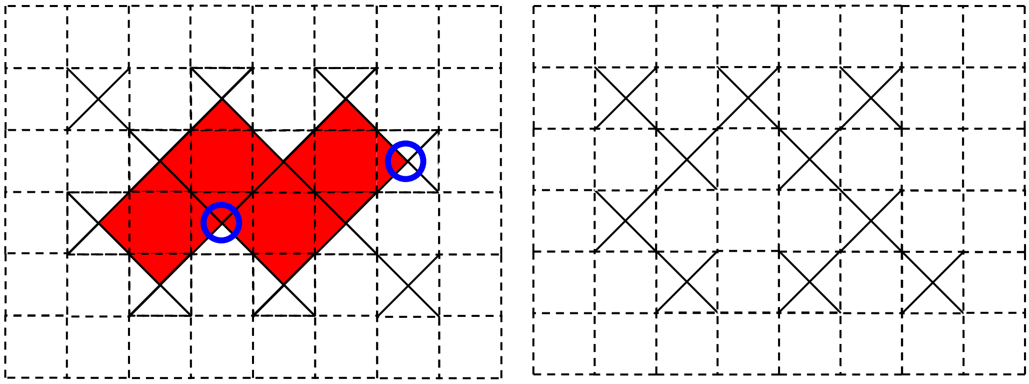


圖 37

當 n=9 時，最多可在 14 個小方格上作記號，而產生 5 塊剝離正方形，所以需消去 2 次記號，故最多可以切割 12 個小方格（圖 38）。

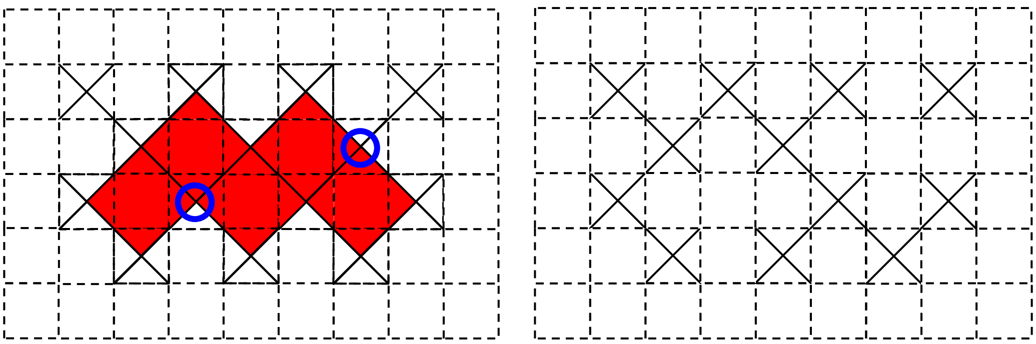


圖 38

當 n=10 時，最多可在 16 個小方格上作記號，而產生 6 塊剝離正方形，所以需消去 2 次記號，故最多可以切割 14 個小方格（圖 38）。

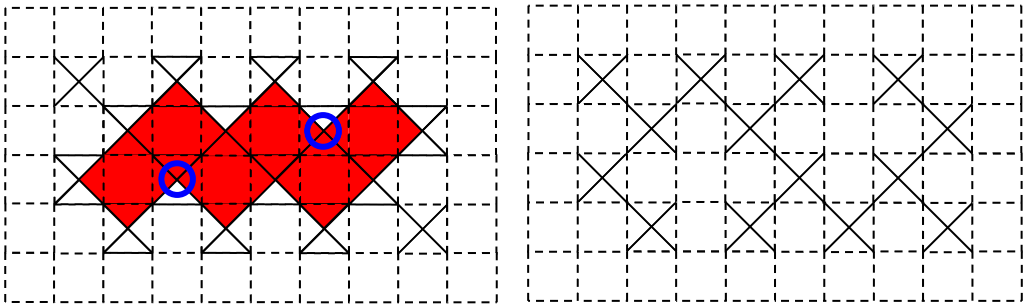


圖 38

當 n=11 時，最多可在 18 個小方格上作記號，而產生 7 塊剝離正方形，所以需消去 3 次記號，故最多可以切割 15 個小方格（圖 39）。

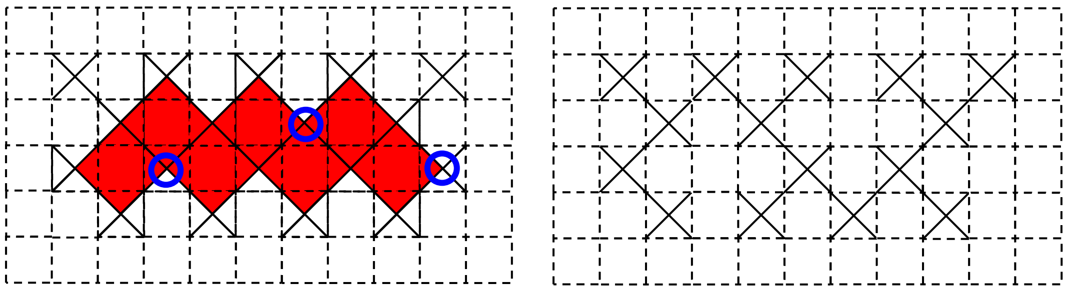


圖 39

當 n=12 時，最多可在 20 個小方格上作記號，而產生 8 塊剝離正方形，所以需消去 3 次記號，故最多可以切割 17 個小方格（圖 40）。

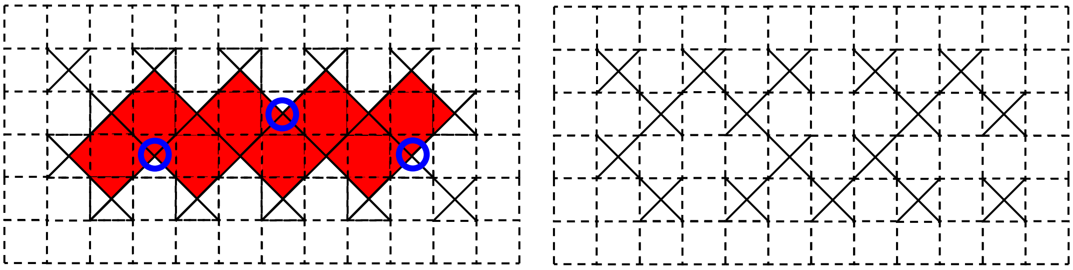


圖 40

b.持續作圖，將數據列表（表七）：

表七

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
7	**10**	**3**	**1**	**9**
8	**12**	**4**	**2**	**10**
9	**14**	**5**	**2**	**12**
10	**16**	**6**	**2**	**14**
11	**18**	**7**	**3**	**15**
12	**20**	**8**	**3**	**17**
13	**22**	**9**	**3**	**19**
14	**24**	**10**	**4**	**20**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.公式推導

觀察可知，當 n≦4 時無剝離的正方形產生，且正方形數（Z）以+1遞增。

$Z=n-4$

將 m=6 代入先前公式求得 $P=2(n-2)$。

$\therefore Y=\frac{(n-4)}{3}$，當 $n=3k+1$，$k\in N$，

$Y=\left[\frac{(n-4)}{3}\right]+1$，當 $n\neq 3k+1$，$k\in N$。

$\therefore X=P-Y=2(n-2)-\frac{(n-4)}{3}$，當 $n=3k+1$，$k\in N$，

$X=P-Y=2(n-2)-\left\{\left[\frac{(n-4)}{3}\right]+1\right\}$，當 $n\neq 3k+1$，$k\in N$。

C. 8×n 之方格紙板

a. 當 n=9 時，最多可在 21 個小方格上作記號，而產生 10 塊剝離正方形，所以需消去 4 次記號，故最多可以切割 17 個小方格（圖 41）。

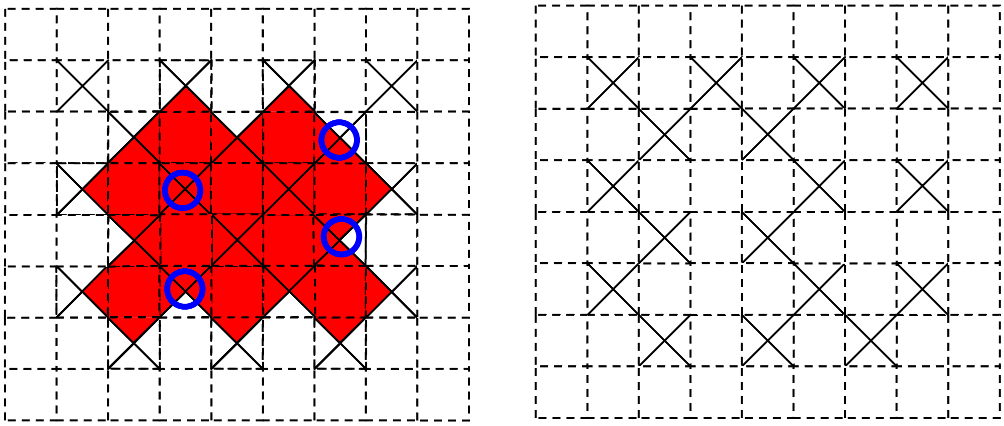


圖 41

當 n=10 時，最多可在 24 個小方格上作記號，而產生 12 塊剝離正方形，所以需消去 4 次記號，故最多可以切割 20 個小方格（圖 42）。

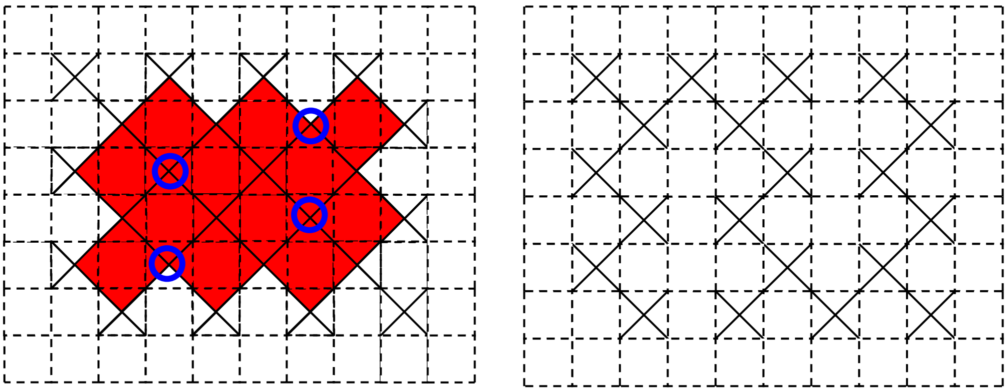


圖 42

當 n=11 時，最多可在 27 個小方格上作記號，而產生 14 塊剝離正方形，所以需消去 5 次記號，故最多可以切割 22 個小方格（圖 43）。

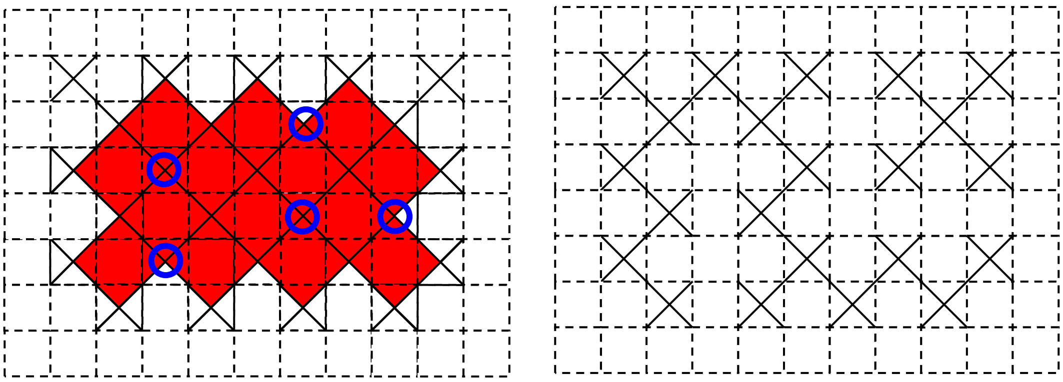


圖 43

當 n=12 時，最多可在 30 個小方格上作記號，而產生 16 塊剝離正方形，所以需消去 6 次記號，故最多可以切割 24 個小方格（圖 44）。

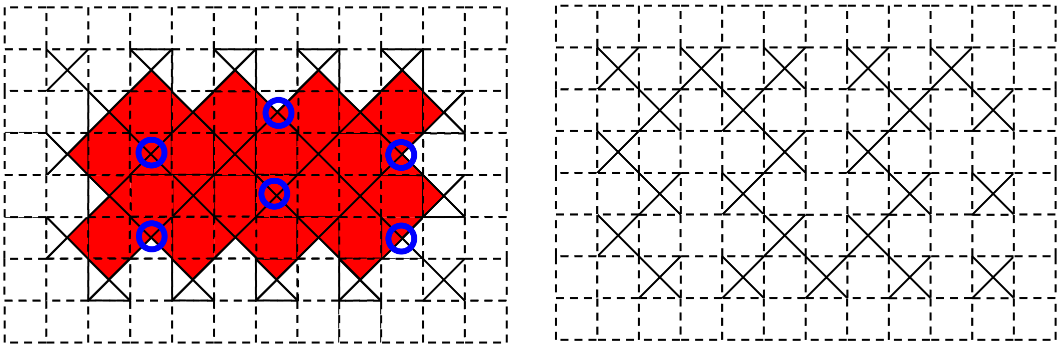


圖 44

當 n=13 時，最多可在 33 個小方格上作記號，而產生 18 塊剝離正方形，所以需消去 6 次記號，故最多可以切割 27 個小方格（圖 45）。

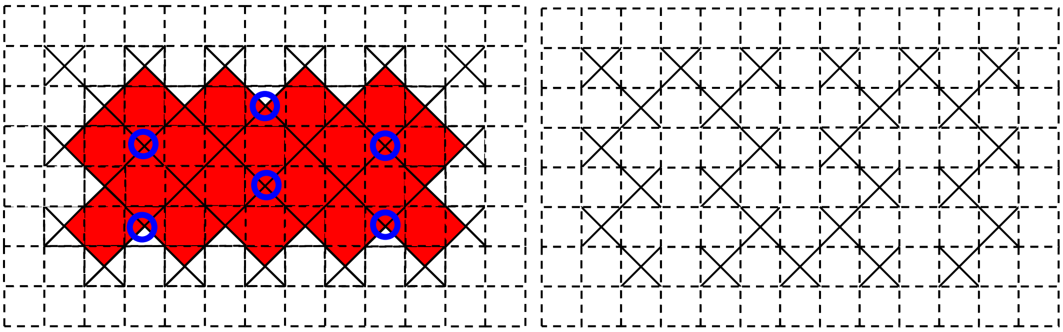


圖 45

當 n=14 時，最多可在 36 個小方格上作記號，而產生 20 塊剝離正方形，所以需消去 7 次記號，故最多可以切割 29 個小方格（圖 46）。

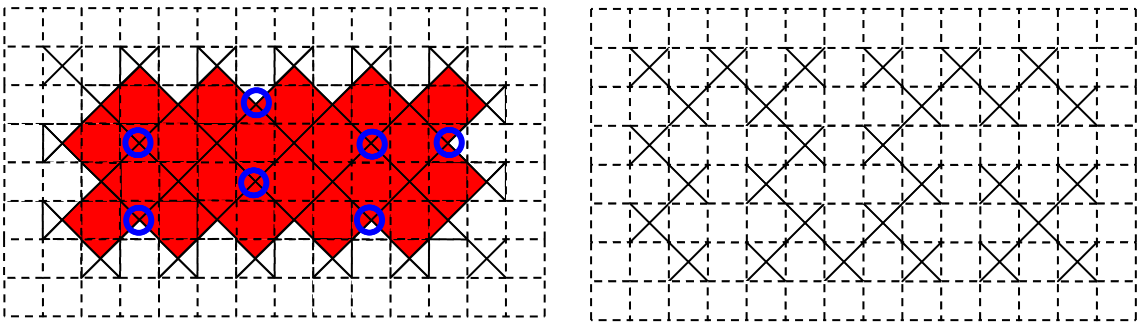


圖 46

b.持續作圖，將數據列表（表八）：

表八

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
9	**21**	**10**	**4**	**17**
10	**24**	**12**	**4**	**20**
11	**27**	**14**	**5**	**22**
12	**30**	**16**	**6**	**24**
13	**33**	**18**	**6**	**27**
14	**36**	**20**	**7**	**29**
15	**39**	**22**	**8**	**31**
16	**42**	**24**	**8**	**34**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.推導過程

觀察可知，當 $n \leqq 4$ 時無剝離的正方形產生，且正方形數（Z）以+1 增加。

$Z=2(n-4)$

將 $m=8$ 代入先前公式求得 $P=3(n-2)$。

$\therefore Y=\dfrac{2(n-4)}{3}$，當 $n=3k+1$，$k\in N$，

$Y=\left[\dfrac{2(n-4)}{3}\right]+1$，當 $n\neq 3k+1$，$k\in N$。

$\therefore X=P-Y=3(n-2)-\dfrac{2(n-4)}{3}$，當 $n=3k+1$，$k\in N$，

$X=P-Y=3(n-2)-\left\{\left[\dfrac{2(n-4)}{3}\right]+1\right\}$，當 $n\neq 3k+1$，$k\in N$。

D.10×n 之方格紙板

a. 當 n=11 時，最多可在 36 個小方格上作記號，而產生 21 塊剝離正方形，所以需消去 7 次記號，故最多可以切割 29 個小方格（圖 47）。

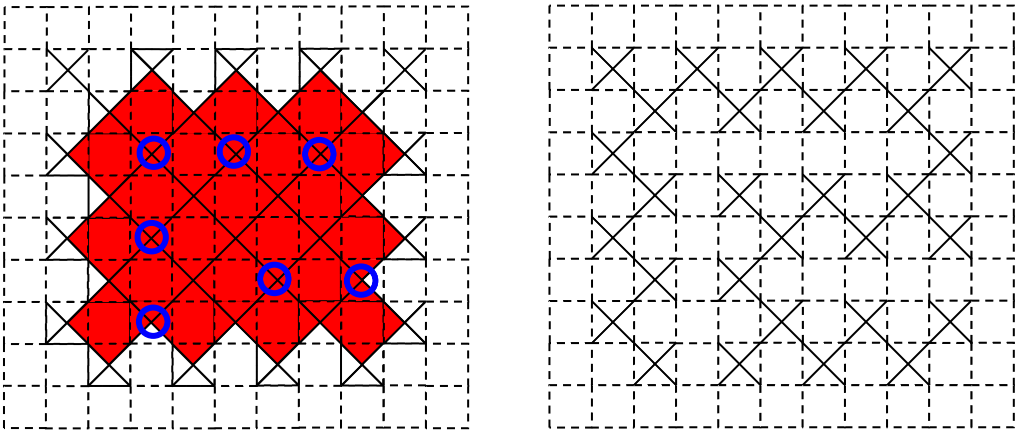


圖 47

當 n=12 時，最多可在 40 個小方格上作記號，而產生 24 塊剝離正方形，所以需消去 8 次記號，故最多可以切割 32 個小方格（圖 48）。

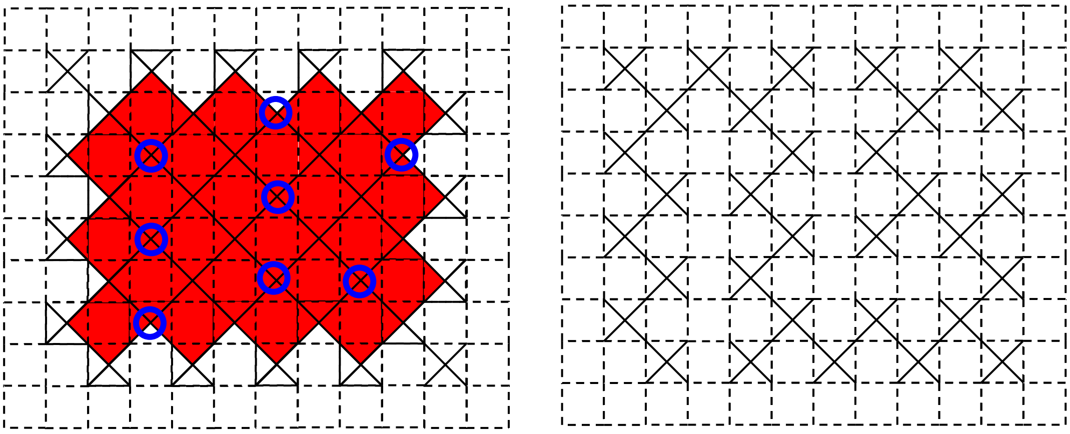


圖 48

當 n=13 時，最多可在 44 個小方格上作記號，而產生 27 塊剝離正方形，所以需消去 9 次記號，故最多可以切割 35 個小方格（圖 49）。

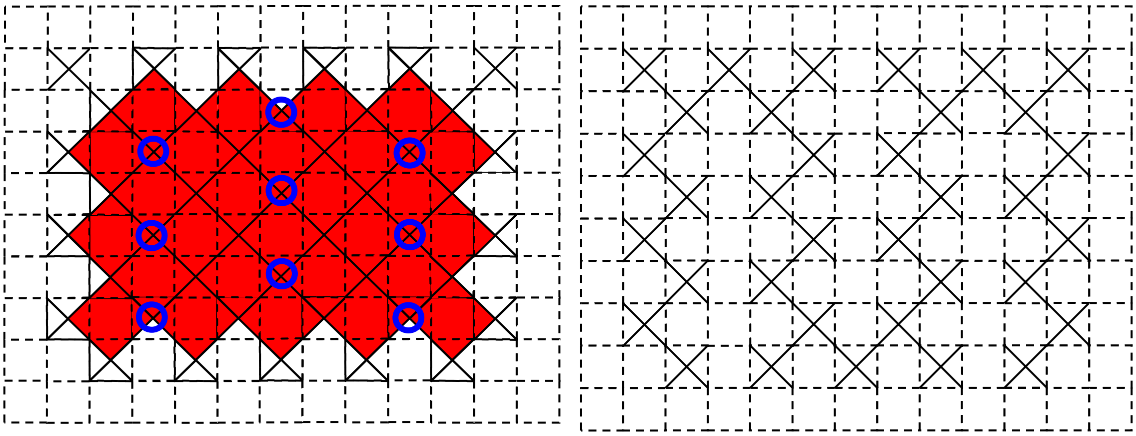
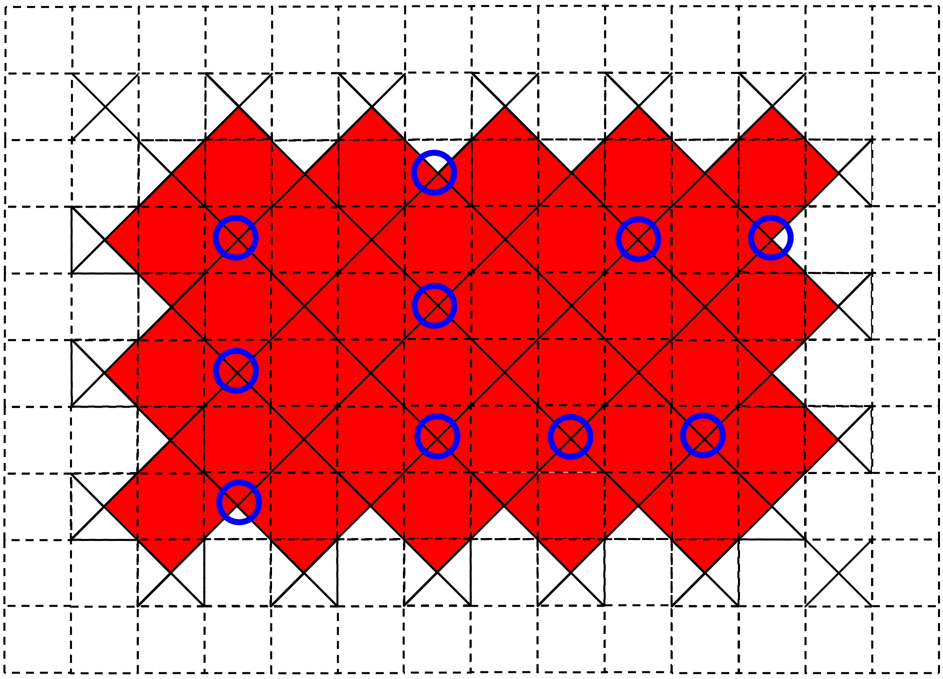


圖 49

當 n=14 時，最多可在 48 個小方格上作記號，而產生 30 塊剝離正方形，所以需消去 10 次記號，故最多可以切割 38 個小方格（圖 50）。



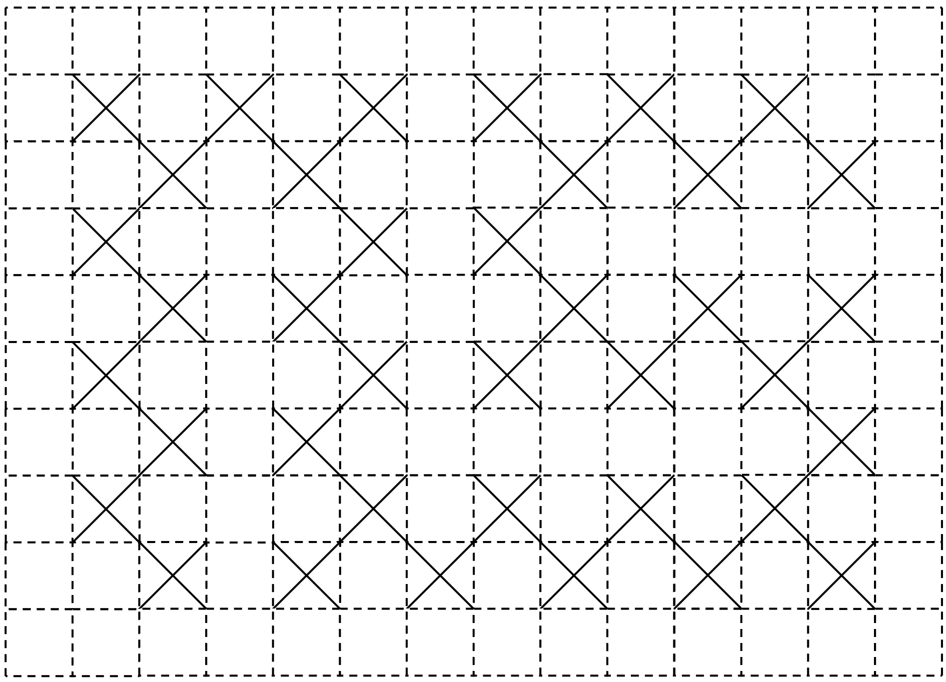
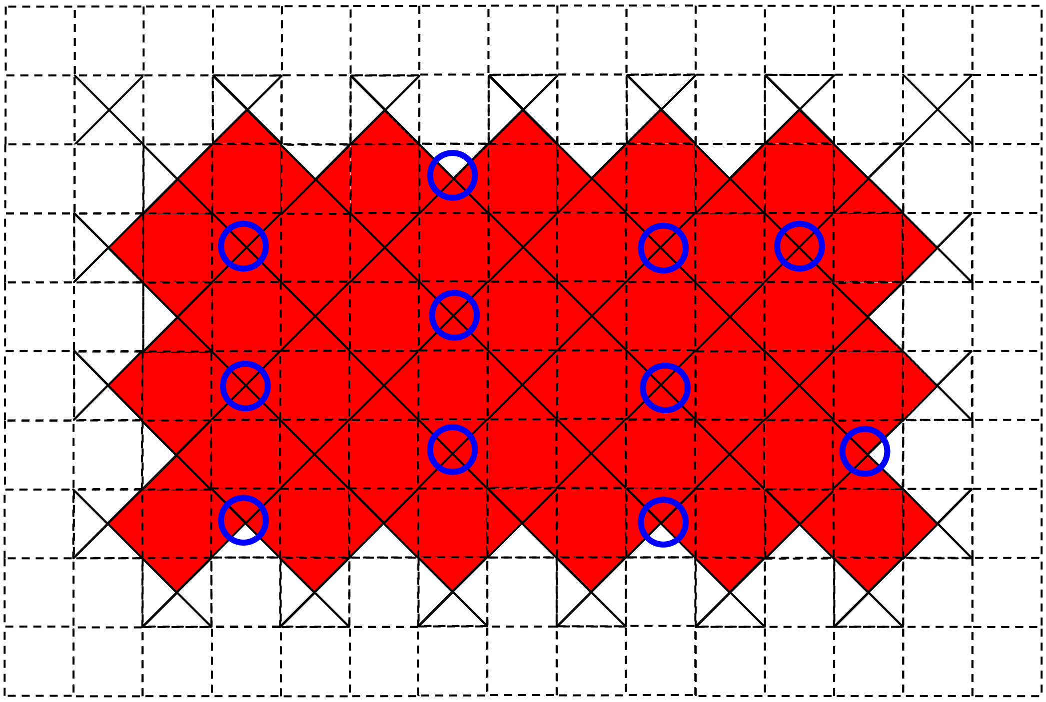


圖 50

當 n=15 時，最多可在 52 個小方格上作記號，而產生 33 塊剝離正方形，所以需消去 11 次記號，故最多可以切割 41 個小方格（圖 51）。



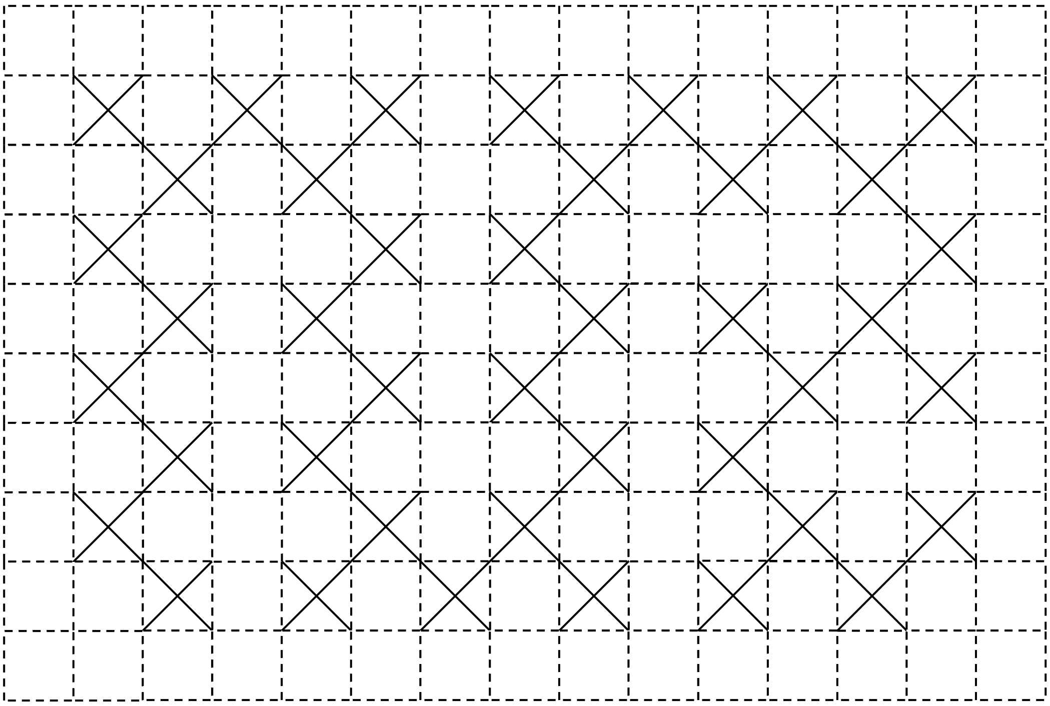
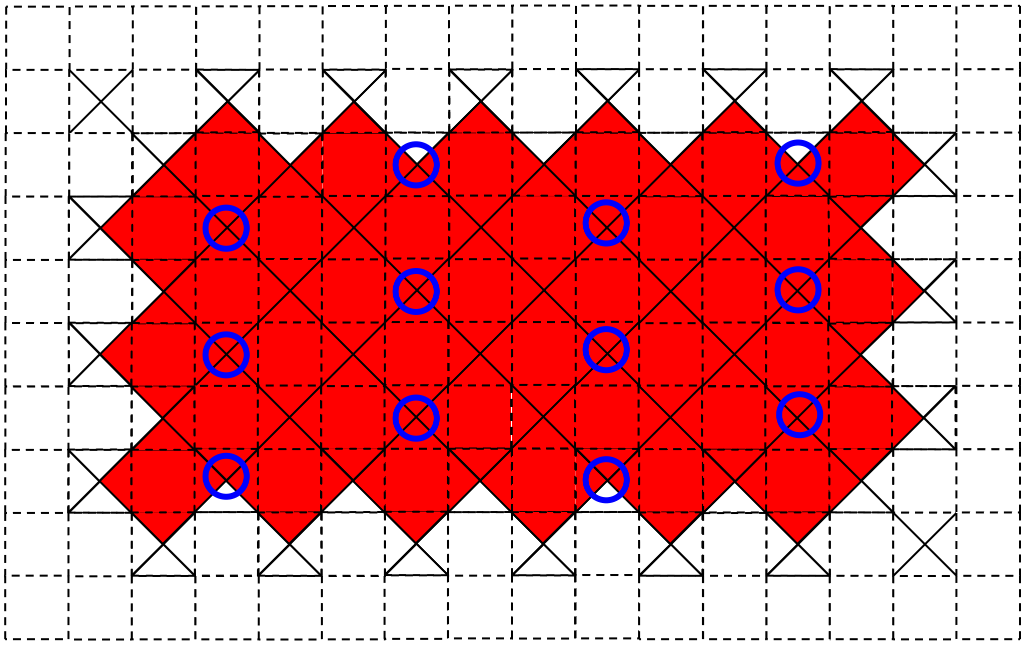


圖 51

當 n=16 時，最多可在 56 個小方格上作記號，而產生 36 塊剝離正方形，所以需消去 12 次記號，故最多可以切割 44 個小方格（圖 52）。



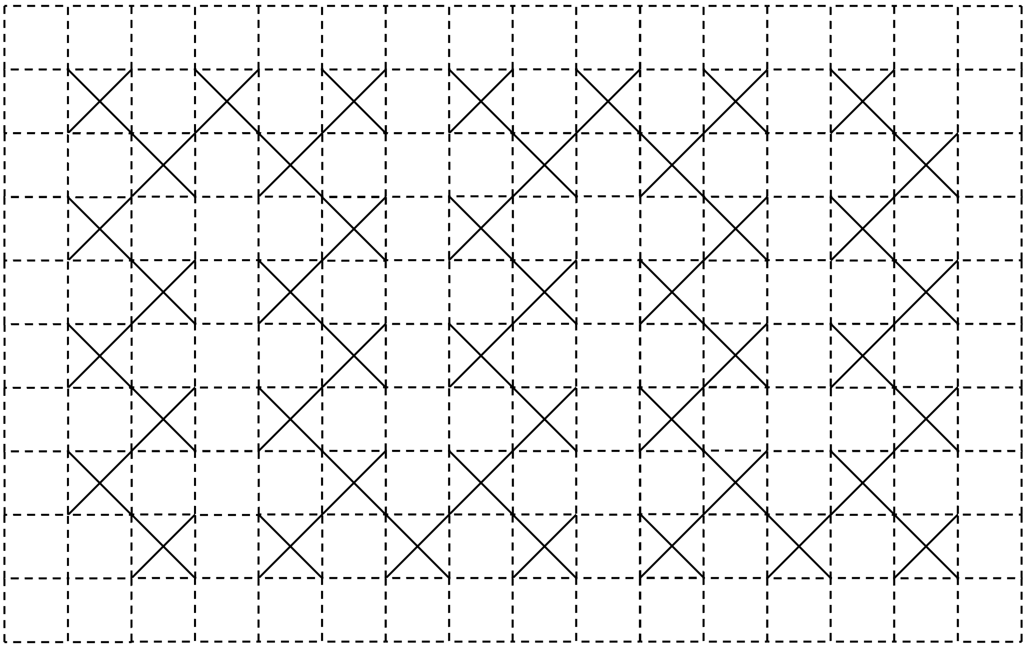
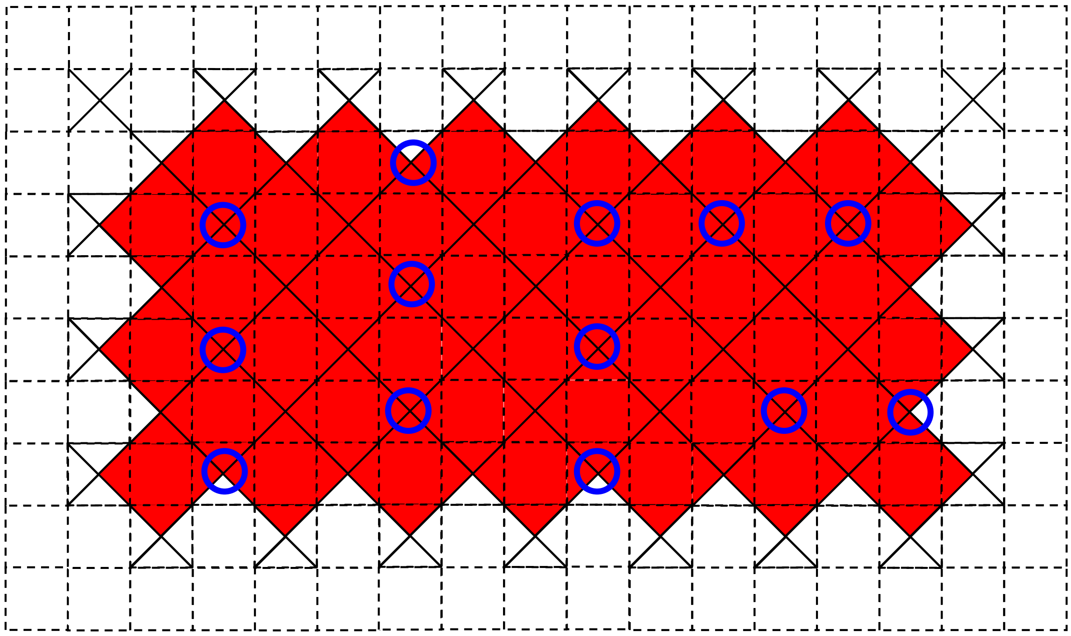


圖 52

當 n=17 時，最多可在 60 個小方格上作記號，而產生 39 塊剝離正方形，所以需消去 13 次記號，故最多可以切割 47 個小方格（圖 53）。



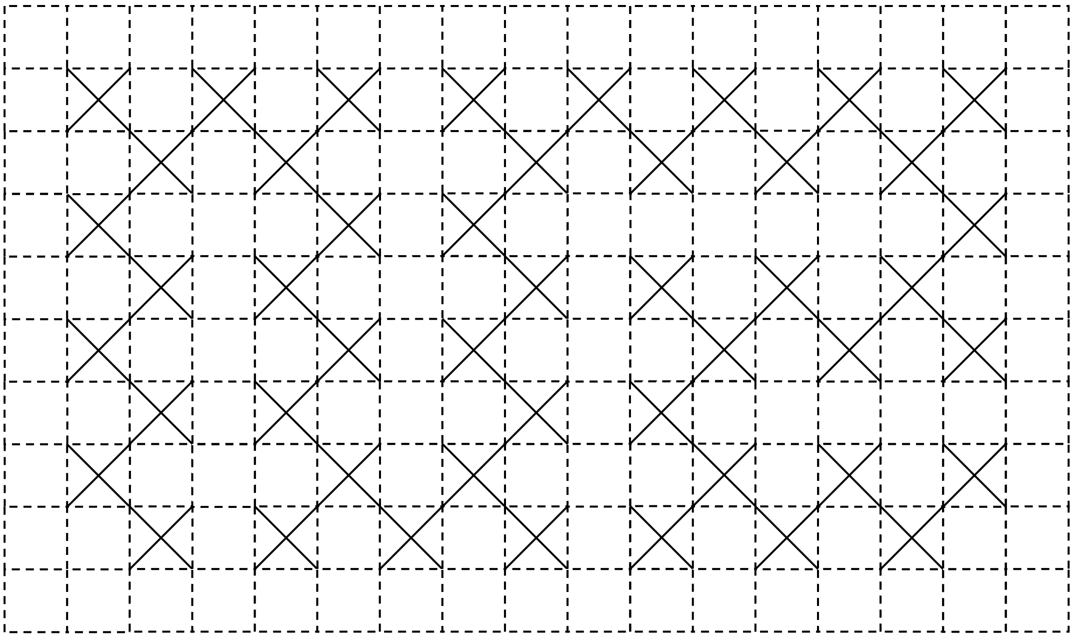


圖 53

b.持續作圖，將數據列表（表九）：

表九

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
11	**36**	**21**	**7**	**29**
12	**40**	**24**	**8**	**32**
13	**44**	**27**	**9**	**35**
14	**48**	**30**	**10**	**38**
15	**52**	**33**	**11**	**41**
16	**56**	**36**	**12**	**44**
17	**60**	**39**	**13**	**47**
18	**64**	**42**	**14**	**50**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.推導過程

觀察可知，當 $n \leqq 4$ 時無剝離的正方形產生，且正方形數（Z）以+1遞增。

$Z=3(n-4)$

將 $m=10$ 代入先前公式求得 $P=4(n-2)$。

$\therefore Y=\dfrac{3(n-4)}{3}$，當 $n=3k+1$，$k \in N$，

$Y=\left[\dfrac{3(n-4)}{3}\right]+1$，當 $n \neq 3k+1$，$k \in N$。

$\therefore X=P-Y=4(n-2)-\dfrac{3(n-4)}{3}$，當 $n=3k+1$，$k \in N$，

$X=P-Y=4(n-2)-\left\{\left[\dfrac{3(n-4)}{3}\right]+1\right\}$，當 $n \neq 3k+1$，$k \in N$。

E.12×n 之方格紙板

a. 當 n=13 時，最多可在 55 個小方格上作記號，而產生 36 塊剝離正方形，所以需消去 12 次記號，故最多可以切割 43 個小方格（圖 54）。

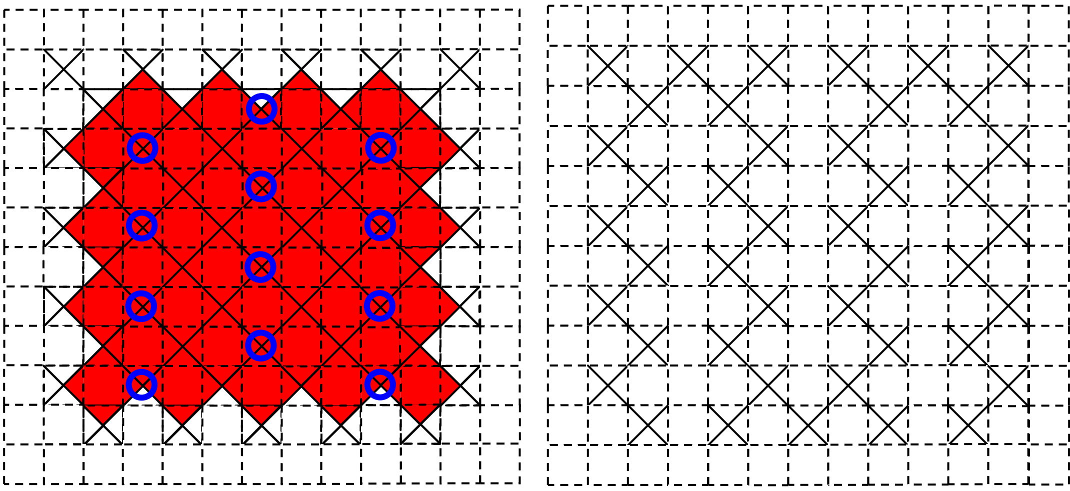


圖 54

當 n=14 時，最多可在 60 個小方格上作記號，而產生 40 塊剝離正方形，所以需消去 14 次記號，故最多可以切割 46 個小方格（圖 55）。

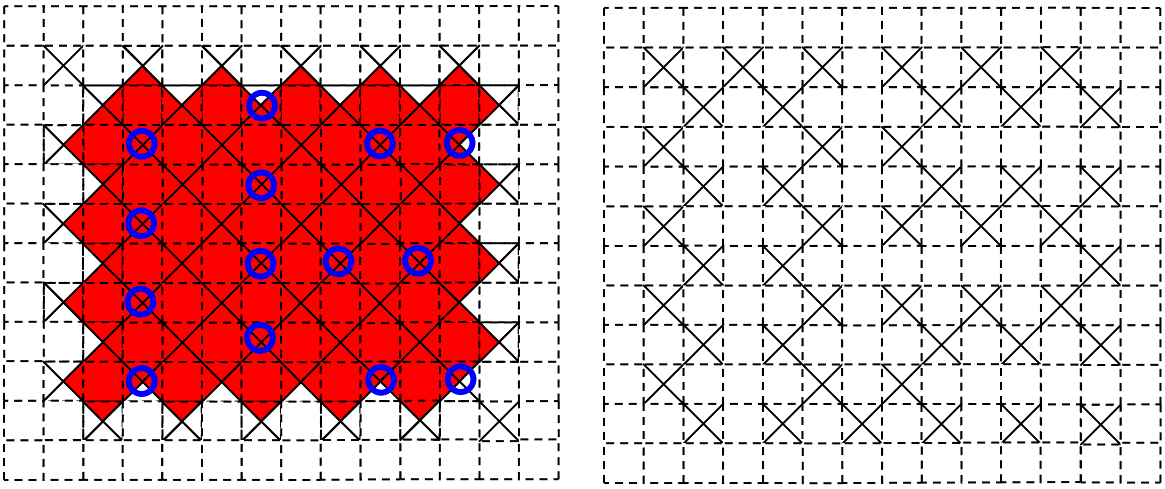
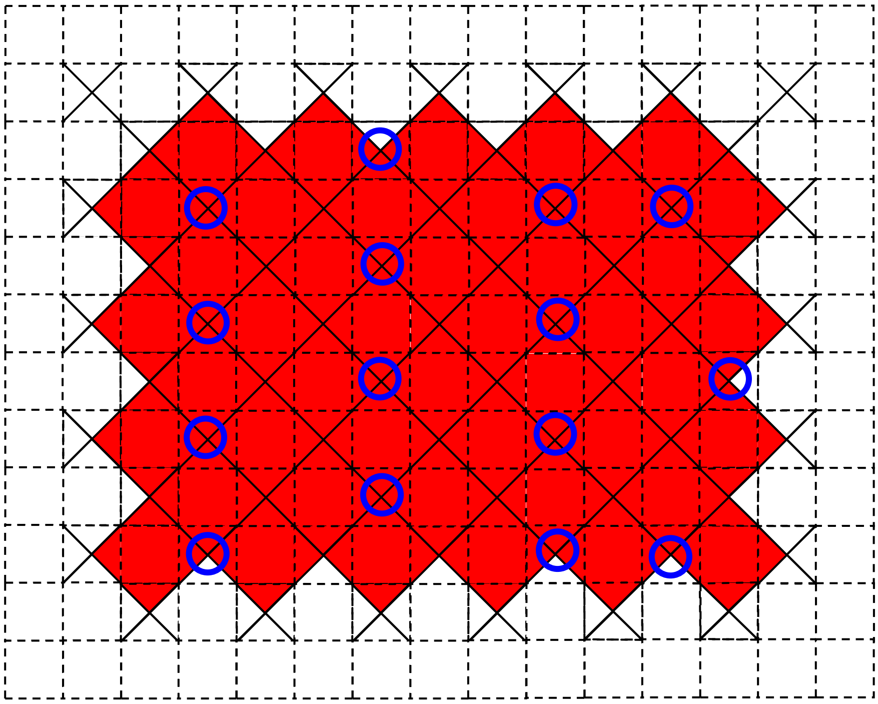


圖 55

當 n=15 時，最多可在 65 個小方格上作記號，而產生 44 塊剝離正方形，所以需消去 15 次記號，故最多可以切割 50 個小方格（圖 56）。



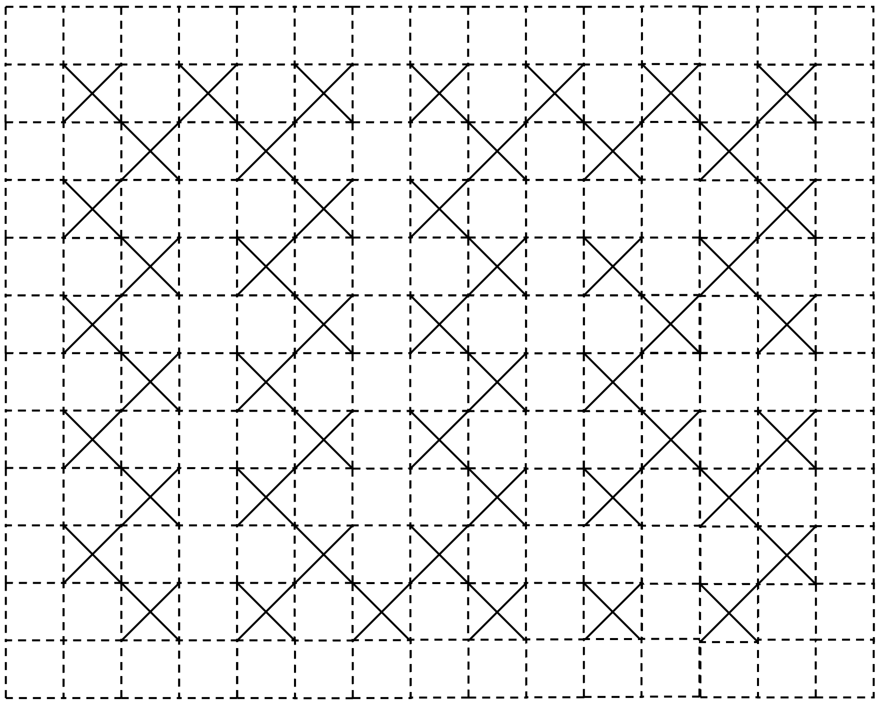


圖 56

當 n=16 時，最多可在 70 個小方格上作記號，而產生 48 塊剝離正方形，所以需消去 16 次記號，故最多可以切割 54 個小方格（圖 57）。

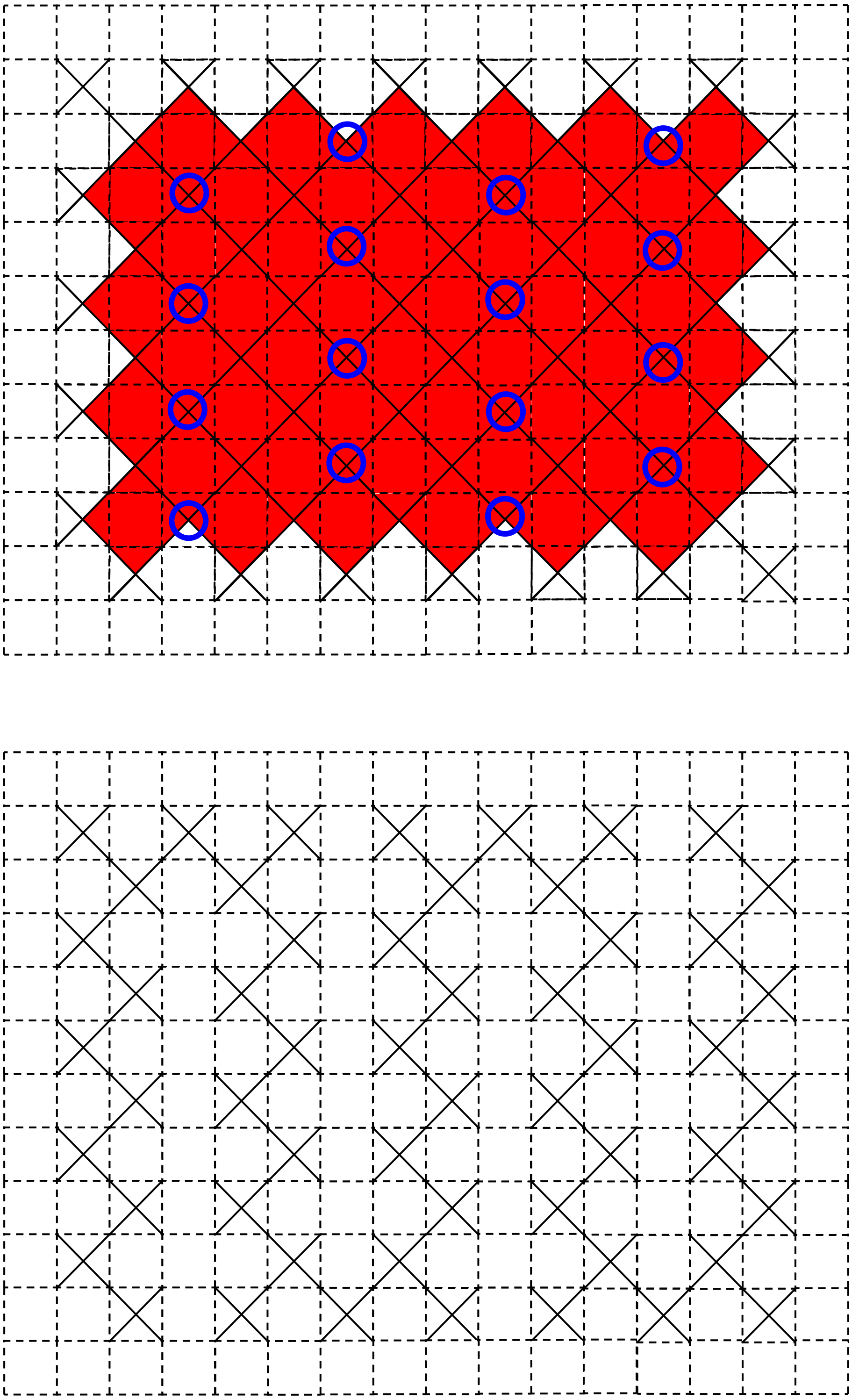
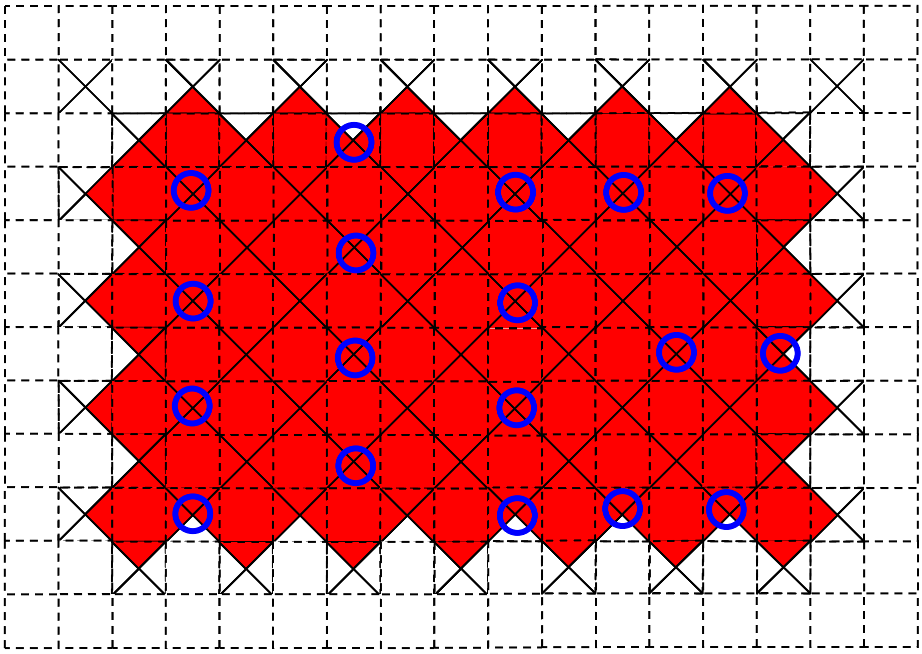


圖 57

當 n=17 時，最多可在 75 個小方格上作記號，而產生 52 塊剝離正方形，所以需消去 18 次記號，故最多可以切割 57 個小方格（圖 58）。



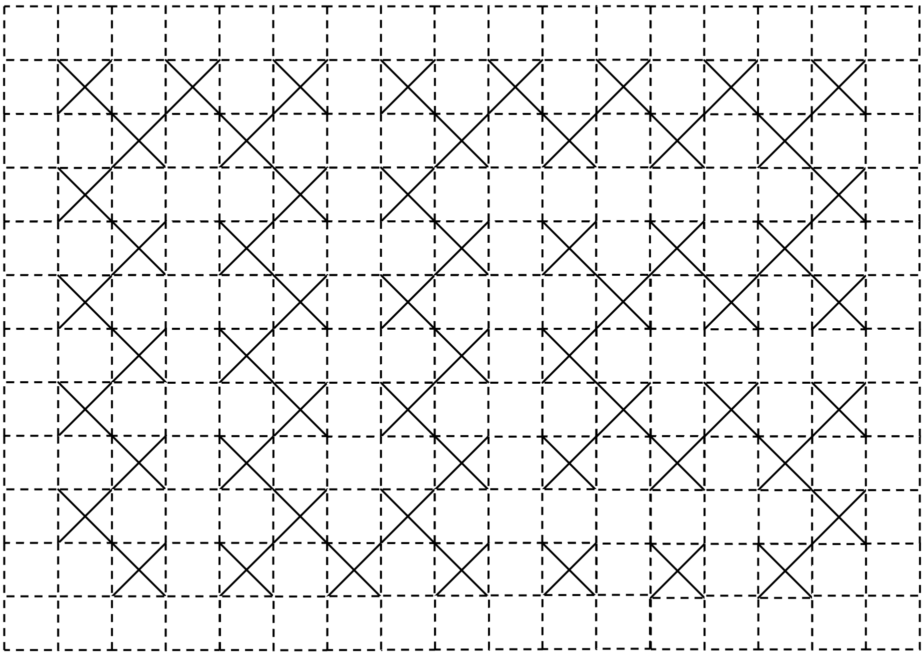


圖 58

當 n=18 時，最多可在 80 個小方格上作記號，而產生 56 塊剝離正方形，所以需消去 19 次記號，故最多可以切割 61 個小方格（圖 59）。

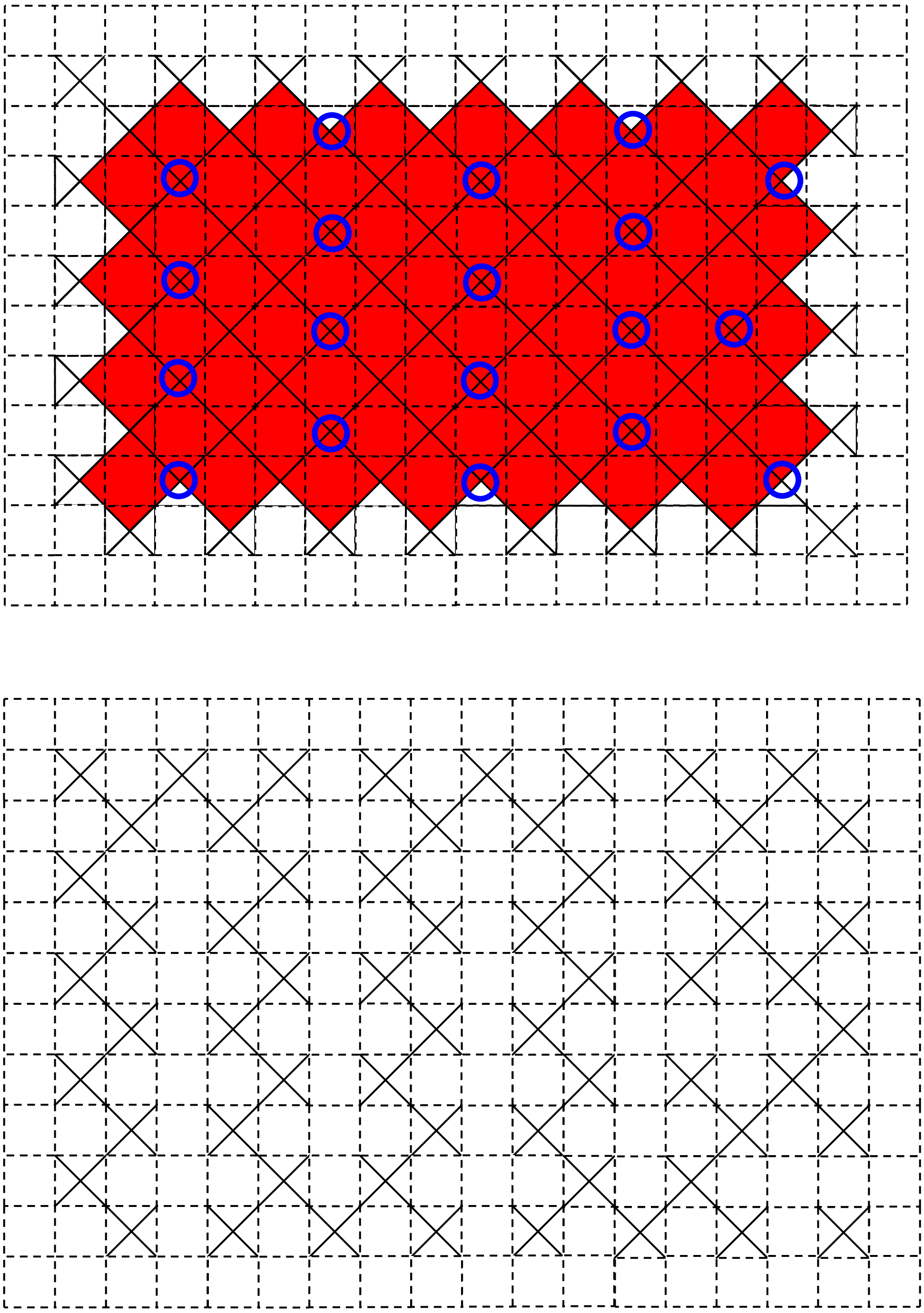


圖 59

b.持續作圖，將數據列表（表十）：

表十

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
13	**55**	**36**	**12**	**43**
14	**60**	**40**	**14**	**46**
15	**65**	**44**	**15**	**50**
16	**70**	**48**	**16**	**54**
17	**75**	**52**	**18**	**57**
18	**80**	**56**	**19**	**61**
19	**85**	**60**	**20**	**65**
20	**90**	**64**	**22**	**68**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.推導過程

觀察可知，當 $n \leqq 4$ 時無剝離的正方形產生，且正方形數（Z）以+1 遞增。

$Z=4(n-4)$

將 $m=12$ 代入先前公式求得 $P=5(n-2)$。

$\therefore Y=\frac{4(n-4)}{3}$，當 $n=3k+1$，$k\in N$，

$Y=\left[\frac{4(n-4)}{3}\right]+1$，當 $n\neq 3k+1$，$k\in N$。

$\therefore X=P-Y=5(n-2)-\frac{4(n-4)}{3}$，當 $n=3k+1$，$k\in N$，

$X=P-Y=5(n-2)-\left\{\left[\frac{4(n-4)}{3}\right]+1\right\}$，當 $n\neq 3k+1$，$k\in N$。

F. 推出一般解

從 m=6、8、10、12 中，獲得以下結論：

在(i,2)，2≦i≦m–1 中，最多可在 $\left(\frac{m-2}{2}\right)$ 個方格上做記號。

∵每行中每兩個做記號的小方格間各夾 1 個空白方格，

∴每一行中最多可夾 $\left(\frac{m-2}{2}-1\right)$ 個空白方格。

左右兩邊(3,2)、(5,2)、(7,2)… (m-1,2)和(2,n-1)、(4,n-1)、(6,n-1)…(m-3,n-1)的方格不會影響到剝離正方形的產生。

∴共有 $\left(\frac{m-2}{2}-1\right)(n-4)$ 個會影響到剝離正方形的產生。

$$Z=\left(\frac{m-2}{2}-1\right)(n-4)$$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

∴ $Y=\frac{Z}{3}$，當 n=3h+1，k∈N，

$Y=\left[\frac{Z}{3}\right]+1$，當 n≠3h+1，k∈N。

∴ $X=\frac{(m-2)(n-2)}{2}-\left[\frac{(m-4)(n-4)}{6}\right]$，其中 n=3h+1，k∈N，

$X=\frac{(m-2)(n-2)}{2}-\left\{\left[\frac{(m-4)(n-4)}{6}\right]+1\right\}$，其中 n=3h+1，k∈N。

(2) 在 m 為奇數的情況

A. 3×n 之方格紙板

a. 此情況下不會有剝離正方形產生，且切割方式也很單純（圖 60）。

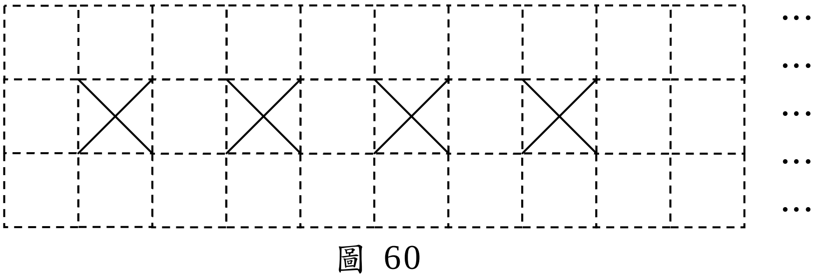


圖 60

b. 公式推導

$P=\frac{(n-2)}{2}$，當 n=2h，h∈N，

$P=\frac{(n-2)+1}{2}$，當 n=2h+1，h∈N。

B. 5×n 之方格紙板

a. 當 n=6 時，最多可在 6 個小方格上作記號，而產生 1 塊剝離正方形，所以需消去 1 次記號，故最多可以切割 5 個小方格（圖 61）。

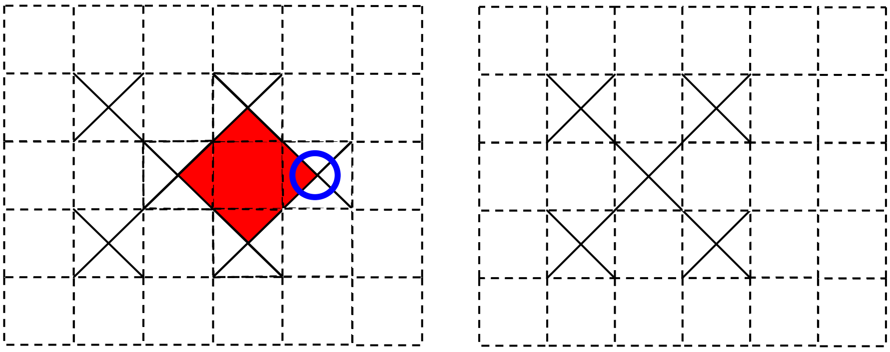


圖 61

當 n=7 時，最多可在 8 個小方格上作記號，而產生 1 塊剝離正方形，所以需消去 1 次記號，故最多可以切割 7 個小方格（圖 62）。

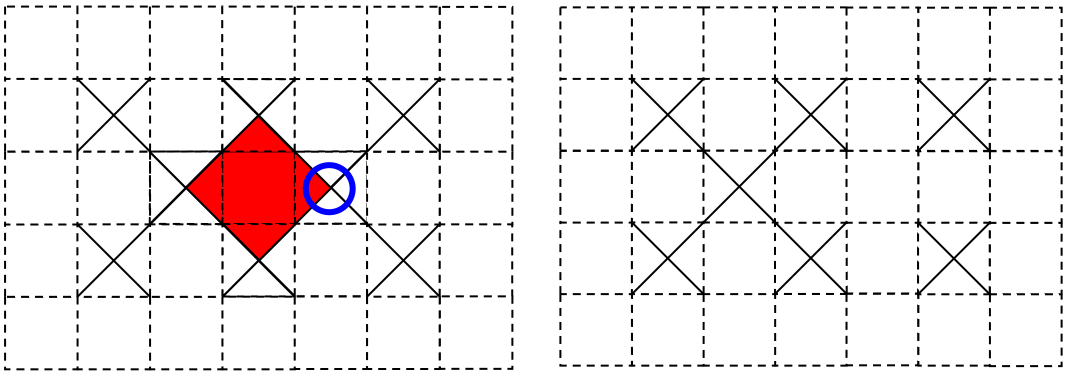


圖 62

當 n=8 時，最多可在 9 個小方格上作記號，而產生 2 塊剝離正方形，所以需消去 1 次記號，故最多可以切割 8 個小方格(圖 63)。

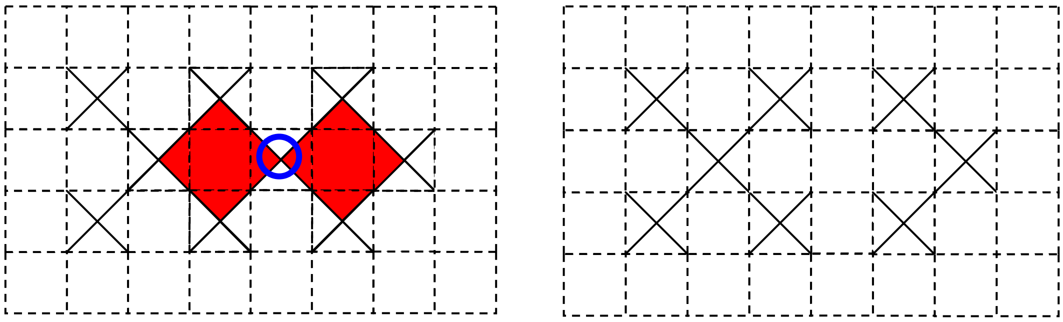


圖 63

當 n=9 時，最多可在 11 個小方格上作記號，而產生 2 塊剝離正方形，所以需消去 1 次記號，故最多可以切割 10 個小方格（圖 64）。

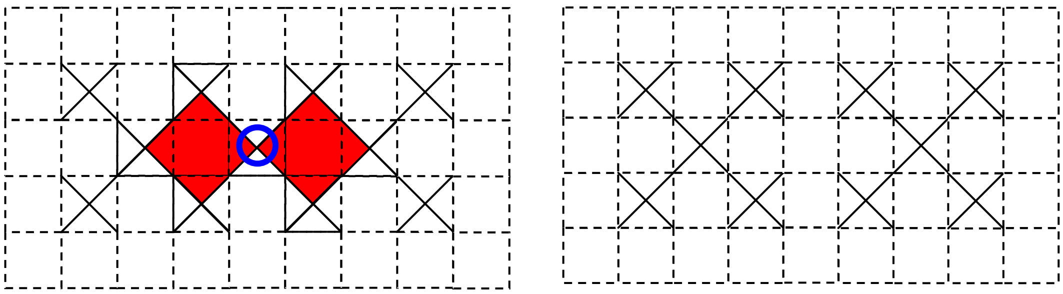


圖 64

當 n=10 時，最多可在 12 個小方格上作記號，而產生 3 塊剝離正方形，所以需消去 2 次記號，故最多可以切割 10 個小方格（圖 65）。

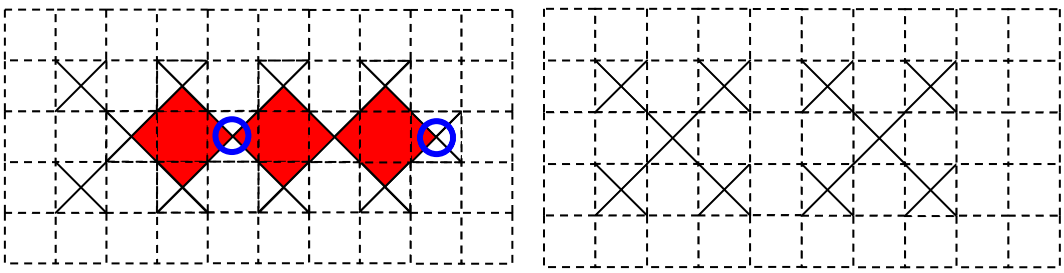


圖 65

當 n=11 時，最多可在 14 個小方格上作記號，而產生 3 塊剝離正方形，所以需消去 2 次記號，故最多可以切割 12 個小方格（圖 66）。

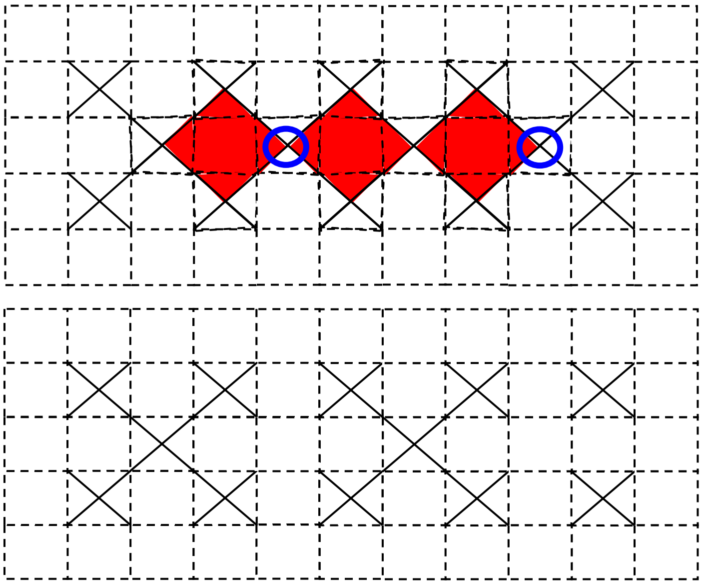


圖 66

當 n=12 時，最多可在 15 個小方格上作記號，而產生 4 塊剝離正方形，所以需消去 2 次記號，故最多可以切割 13 個小方格（圖 67）。

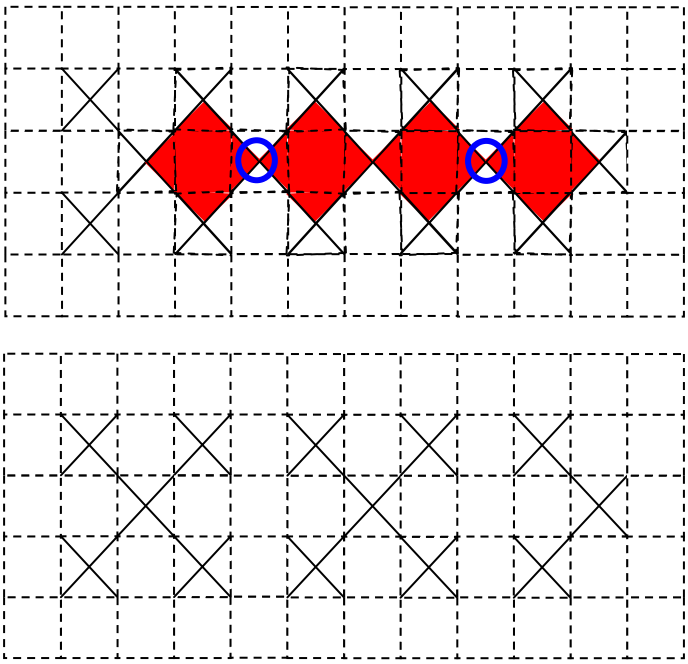


圖 67

b.在 5×n 的圖形中，每一個小圓環只能控制 2 個剝離正方形，和先前定義的能控制 3 個剝離正方形不同。

c.列表觀察（表十一）：

表十一

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
6	**6**	**1**	**1**	**5**
7	**8**	**1**	**1**	**7**
8	**9**	**2**	**1**	**8**
9	**11**	**2**	**1**	**10**
10	**12**	**3**	**2**	**10**
11	**14**	**3**	**2**	**12**
12	**15**	**4**	**2**	**13**
13	**17**	**4**	**2**	**15**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

d.公式推導

$P=\frac{3(n-2)}{2}$, 當 n=2h，$h\in N$。

$P=\frac{3(n-2)+1}{2}$, n=2h+1，$h\in N$。

∵每行最多可以在 2 個小方格作記號，

而每兩個作上記號的方格間各夾一個空白方格。

∴當 n=2h 時, 共可夾 $\frac{n-4}{2}$ 個空白方格；

當 n=2h+1 時, 仍然夾 $\frac{n-4}{2}$ 個空白方格。

∴在 n=2h 和 n=2h+1 時，剝離正方形數 $Z=\left\lceil\frac{n-4}{2}\right\rceil$。

由圖形得知：剝離正方形的排列方式為單行排列，所以每一個小圓環只能控制 2 個剝離正方形。

∴$Y=\left\lceil\frac{n-4}{4}\right\rceil$，其中 n=2h, $h\in N-\{1,2\}$,

$Y=\left\lceil\frac{n-4}{4}\right\rceil+1$，其中 n=2h+1, $h\in N-\{1,2\}$。

∴$X=\frac{3(n-2)}{2}$，當 n=2h，$h\in N-\{1,2\}$,

$X=\frac{3(n-2)+1}{2}$，當 n=2h+1，$h\in N-\{1,2\}$。

C.7×n 之方紙格板

a. 當 n=8 時，最多可在 15 個小方格上作記號，而產生 6 塊剩離正方形，所以需消去 2 次記號，故最多可以切割 13 個小方格（圖 68）。

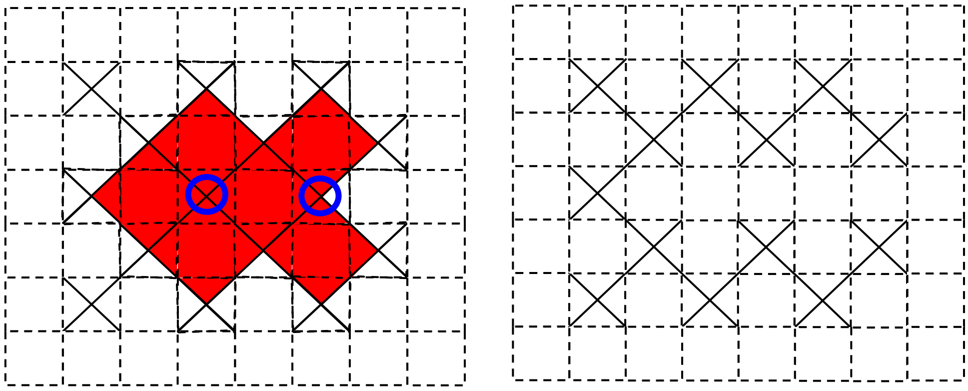


圖 68

當 n=9 時，最多可在 18 個小方格上作記號，而產生 7 塊剩離正方形，所以需消去 3 次記號，故最多可以切割 15 個小方格（圖 69）。

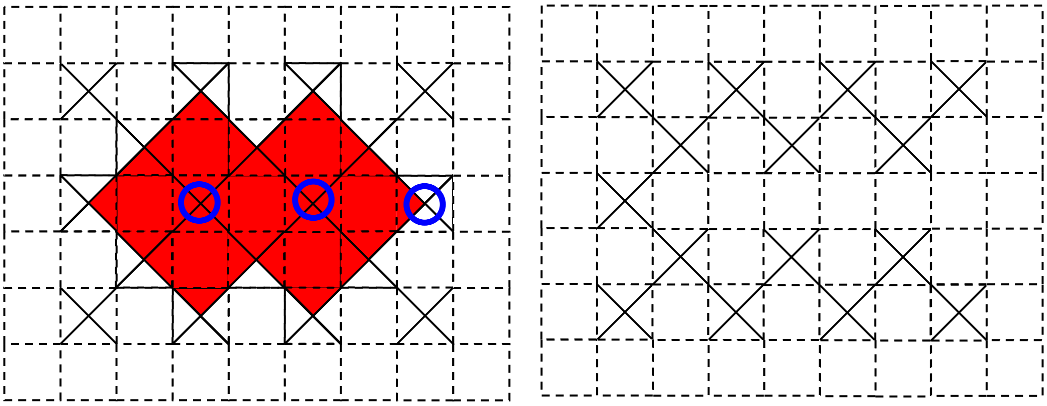


圖 69

當 n=10 時，最多可在 20 個小方格上作記號，而產生 9 塊剩離正方形，所以需消去 3 次記號，故最多可以切割 17 個小方格（圖 70）。

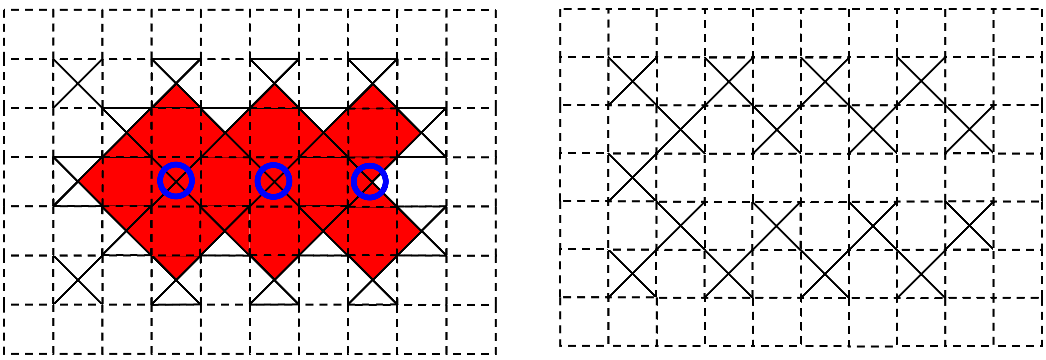


圖 70

當 n=11 時，最多可在 23 個小方格上作記號，而產生 10 塊剝離正方形，所以需消去 4 次記號，故最多可以切割 19 個小方格（圖 71）。

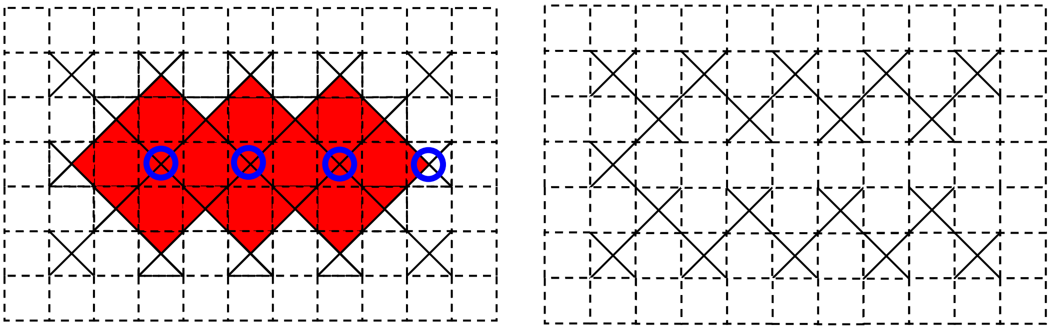


圖 71

當 n=12 時，最多可在 25 個小方格上作記號，而產生 12 塊剝離正方形，所以需消去 4 次記號，故最多可以切割 21 個小方格（圖 72）。

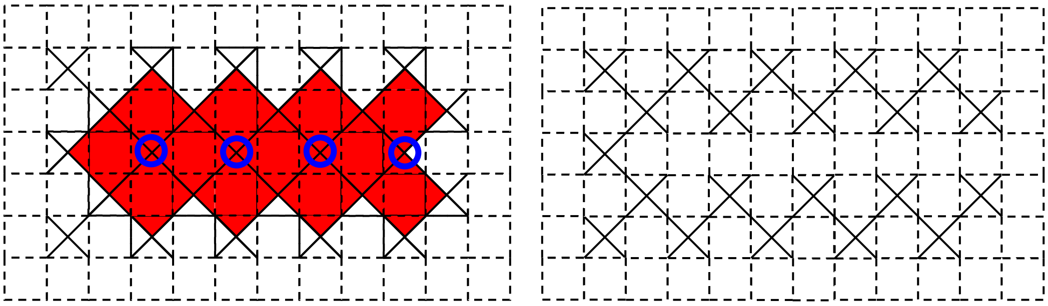


圖 72

當 n=13 時，最多可在 28 個小方格上作記號，而產生 13 塊剝離正方形，所以需消去 5 次記號，故最多可以切割 23 個小方格（圖 73）。

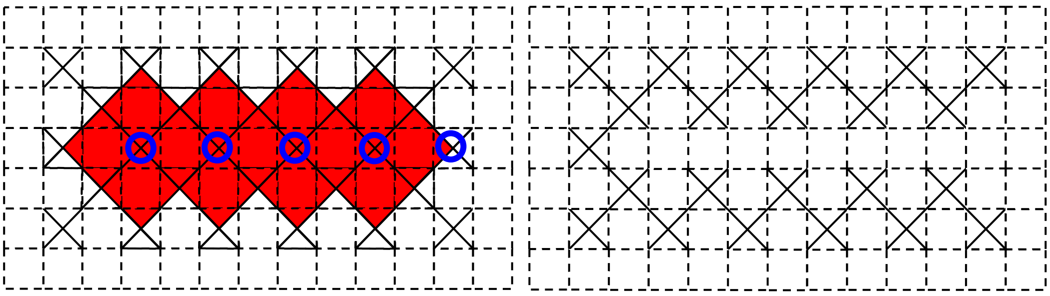


圖 73

當 n=14 時，最多可在 30 個小方格上作記號，而產生 15 塊剝離正方形，所以需消去 5 次記號，故最多可以切割 25 個小方格（圖 74）。

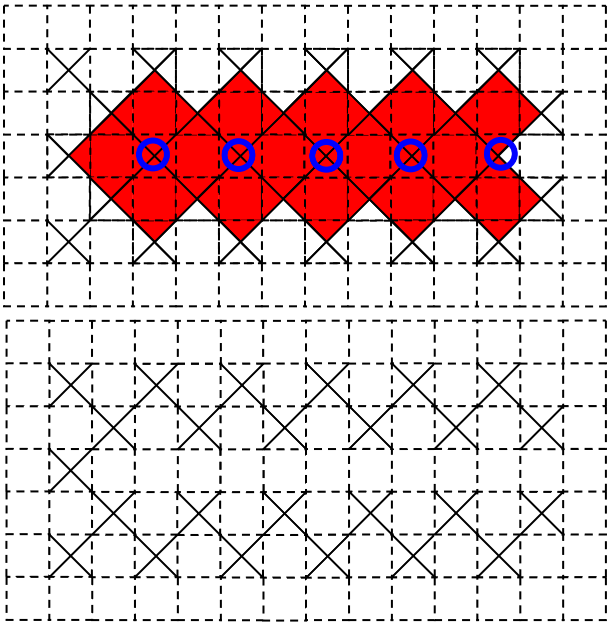


圖 74

b.列表觀察（表十二）：

表十二

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
8	**15**	**6**	**2**	**13**
9	**18**	**7**	**3**	**15**
10	**20**	**9**	**3**	**17**
11	**23**	**10**	**4**	**19**
12	**25**	**12**	**4**	**21**
13	**28**	**13**	**5**	**23**
14	**30**	**15**	**5**	**25**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.公式推導

我們將邊長 n 分為奇數與偶數來討論：

① 當 n=2h，h∈N 時

$$P=\frac{5(n-2)}{2}$$

∵偶數行中，每行最多可以在 3 個小方格作記號；
奇數行中，每行最多可以在 2 個小方格作記號。
且每兩個作上記號的方格間各夾一個空白方格，而左右兩邊(3,2)、(5,2)、(2,n-1)、(4,n-1)、(6,n-1)的空白方格不會影響到剝離正方形的產生。

∴偶數行中，共有 $(n-4)$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $\frac{(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$$Z=\frac{3(n-4)}{2}$$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

∴圓環數 $Y=\frac{(n-4)}{2}$。

∴ $X=\frac{5(n-2)}{2}-\frac{(n-4)}{2}$，當 n=2h，h∈N-{1}。

② 當 n=2h+1，h∈N 時

$$P=\frac{5(n-2)+1}{2}$$

偶數行中，共有 $(n-3)-2$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $\frac{(n-3)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$$Z=\frac{3(n-3)}{2}-2=\frac{3n-13}{2}$$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

∴圓環數 $Y=\left[\frac{3n-13}{6}\right]+1$。

∴ $X=\frac{5(n-2)+1}{2}-\left\{\left[\frac{3n-13}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h+1，h∈N-{1}。

D.9×n 之方紙格板

a.當 n=10 時，最多可在 28 個小方格上作記號，而產生 15 塊剝離正方形，所以需消去 5 次記號，故最多可以切割 23 個小方格（圖 75）。

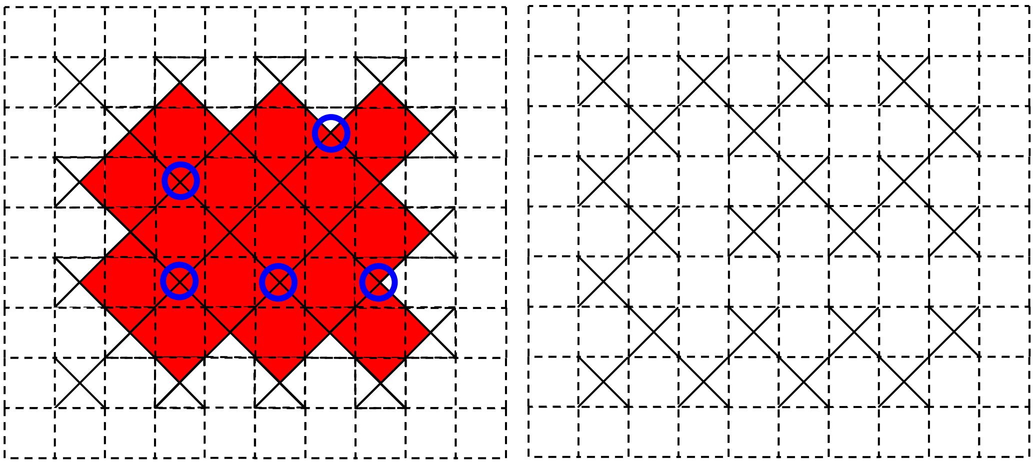


圖 75

當 n=11，最多可在 32 個小方格上作記號，而產生 17 塊剝離正方形，所以需消去 6 次記號，故最多可以切割 26 個小方格（圖 76）。

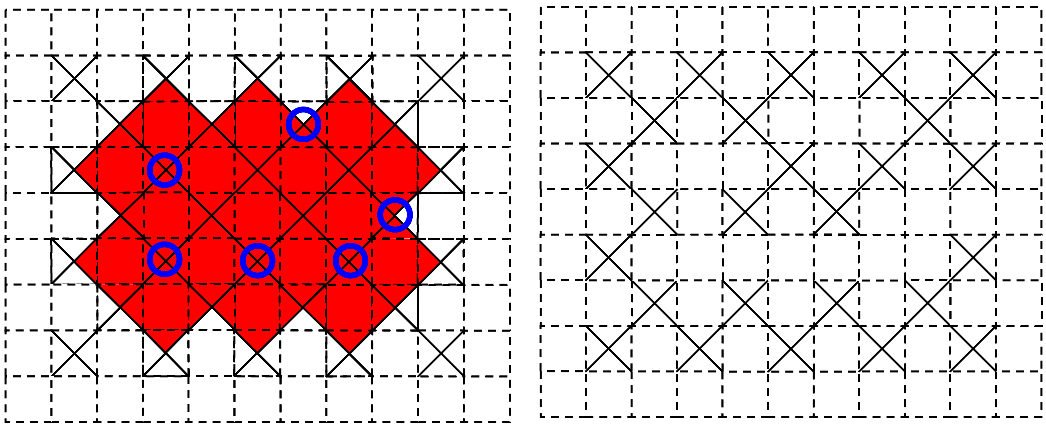


圖 76

當 n=12 時，最多可在 35 個小方格上作記號，而產生 20 塊剝離正方形，所以需消去 7 次記號，故最多可以切割 28 個小方格（圖 77）。

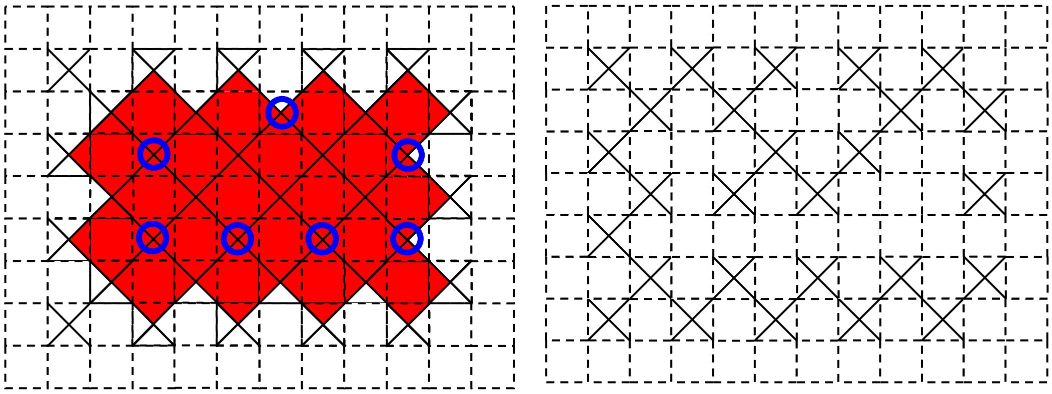


圖 77

當 n=13 時，最多可在 39 個小方格上作記號，而產生 22 塊剝離正方形，所以需消去 8 次記號，故最多可以切割 31 個小方格（圖 78）。

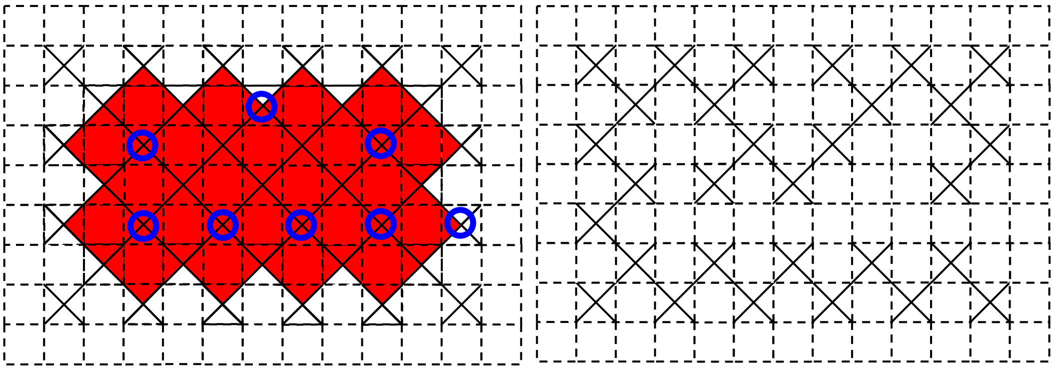


圖 78

當 n=14 時，最多可在 42 個小方格上作記號，而產生 25 塊剝離正方形，所以需消去 9 次記號，故最多可以切割 33 個小方格（圖 79）。

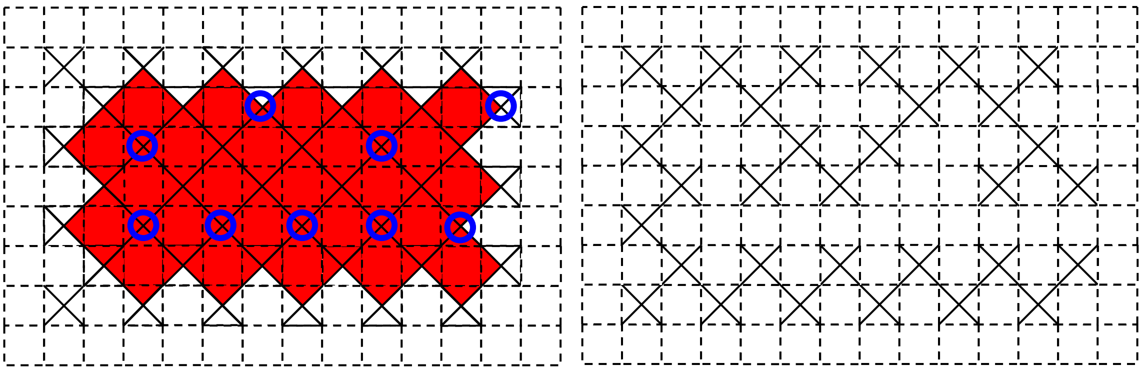


圖 79

當 n=15 時，最多可在 46 個小方格上作記號，而產生 27 塊剝離正方形，依照基本定義需消去 9 次記號，但由作圖得知須再消去一次記號，所以需消去 10 次記號，故最多可以切割 36 個小方格（圖 80）。

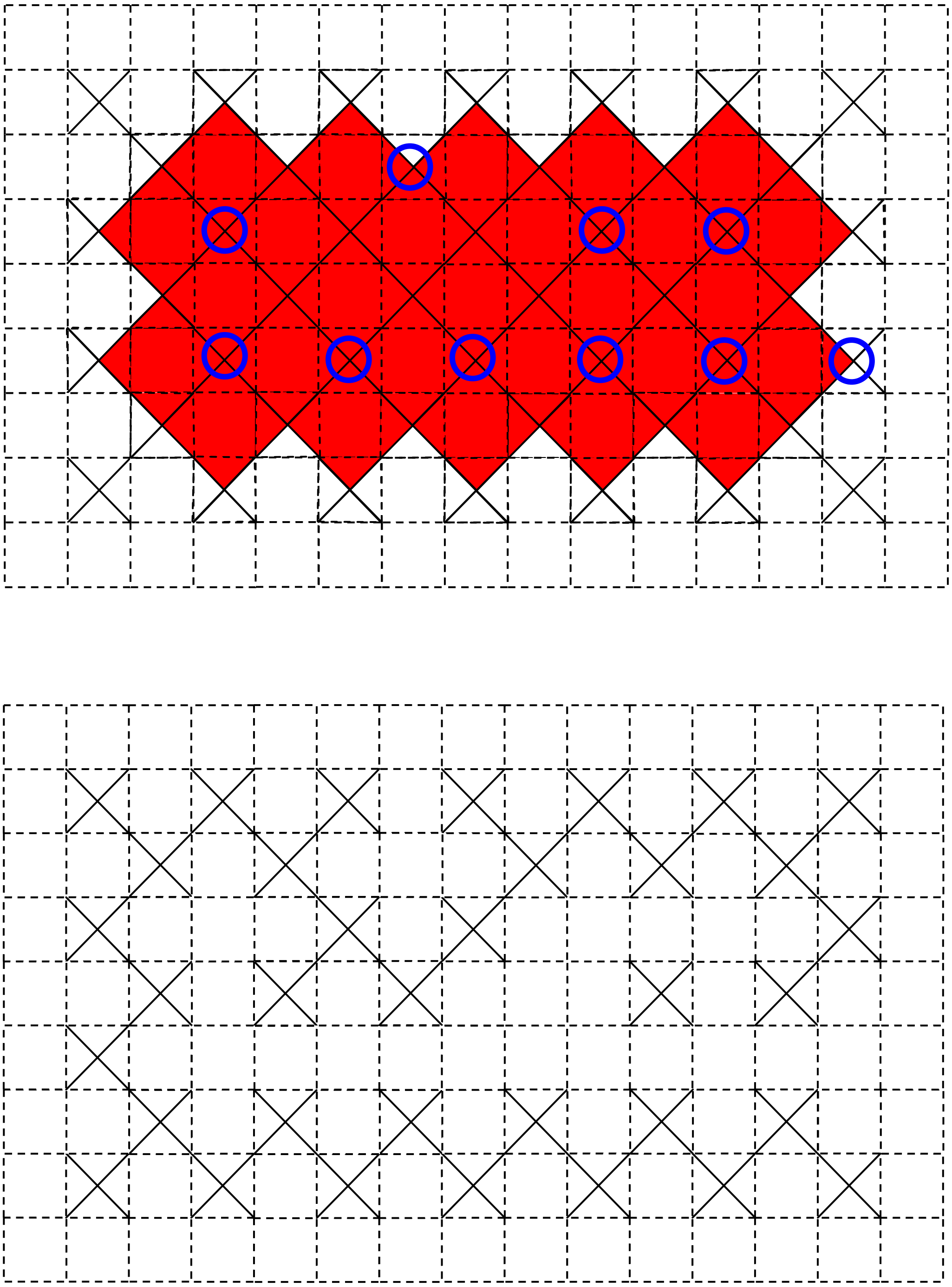
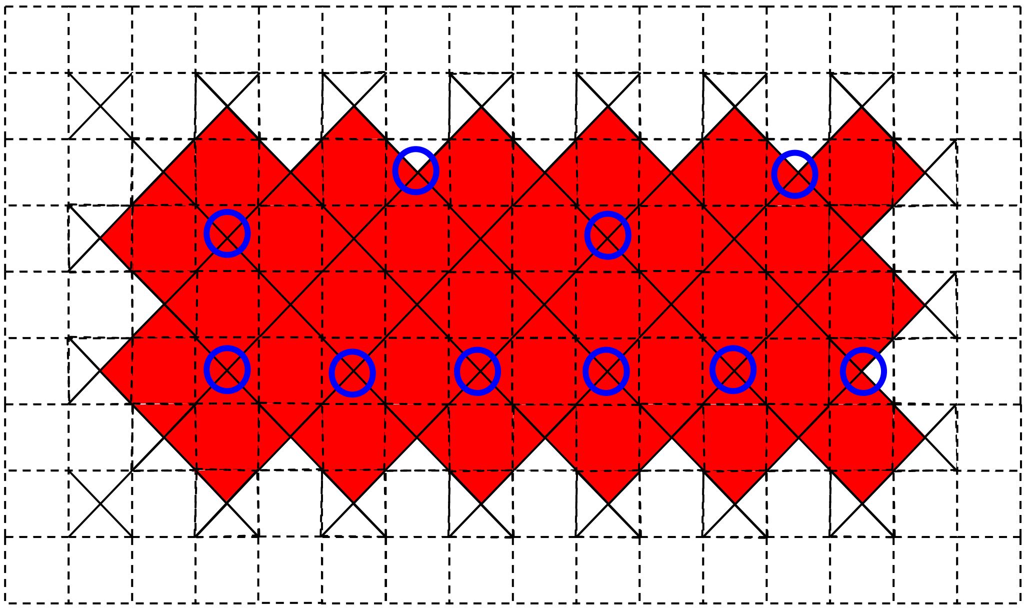


圖 80

當 n=16 時，最多可在 49 個小方格上作記號，而產生 30 塊剝離正方形，所以需消去 10 次記號，故最多可以切割 39 個小方格（圖 81）。



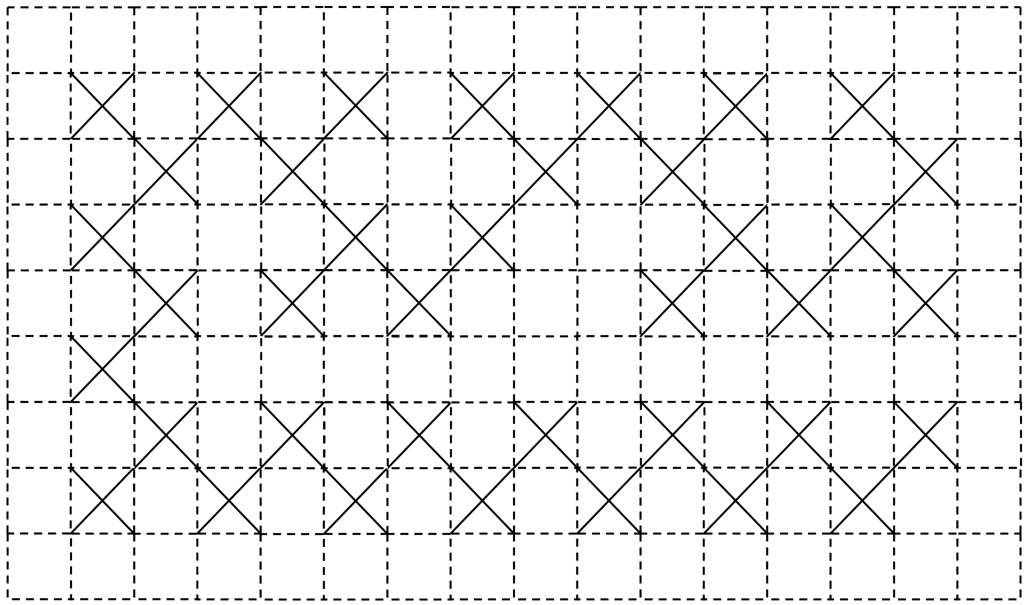


圖 81

b.列表觀察（表十二）：

表十二

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
10	**28**	**15**	**5**	**23**
11	**32**	**17**	**6**	**26**
12	**35**	**20**	**7**	**28**
13	**39**	**22**	**8**	**31**
14	**42**	**25**	**9**	**33**
15	**46**	**27**	**9+1**	**36**
16	**49**	**30**	**10**	**39**
17	**53**	**32**	**11**	**42**
18	**56**	**35**	**12**	**44**
19	**60**	**37**	**13**	**47**
20	**63**	**40**	**14**	**49**
21	**67**	**42**	**14+1**	**52**
22	**70**	**45**	**15**	**55**
23	**74**	**47**	**16**	**58**
24	**77**	**50**	**17**	**60**
25	**81**	**52**	**18**	**63**
26	**84**	**55**	**19**	**65**
27	**88**	**57**	**19+1**	**68**
28	**91**	**60**	**20**	**71**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.公式推導

由作圖中可發現，在 n=15、21、27 時，所需要的圓環數 Y 與我們先前做的推測不同，需再+1，且這些數字是以 6 為等差成長，和 n×n 時的變化類似。故我們將邊長 n 分為奇數、偶數和特殊型來討論。

①當 n=2h，h∈N 時

$$P=\frac{7(n-2)}{2}$$

∵偶數行中，每行最多可以在 4 個小方格作記號，

奇數行中，每行最多可以在 3 個小方格作記號。

且每兩個作上記號的方格間各夾一個空白方格，而左右兩邊(3,2)、(5,2)、(7,2)、(2,n-1)、(4,n-1)、(6,n-1)、(8,n-1)的空白方格不會影響到剝離正方形的產生。

∴偶數行中，共有 $\frac{3(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $(n-4)$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$$Z=\frac{3(n-4)}{2}+(n-4)=\frac{5(n-4)}{2}$$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

∴ $Y=\frac{5(n-4)}{6}$，當 Z=3t，t∈N，

$Y=\left[\frac{5(n-4)}{6}\right]+1$，當 Z≠3t，t∈N。

∴ $X=\frac{7(n-2)}{2}-\frac{5(n-4)}{6}$，當 n=2h，$\frac{5(n-4)}{6}$=3t，h∈N-{1}，t∈N，

$X=\frac{7(n-2)}{2}-\left\{\left[\frac{5(n-4)}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h, $\frac{5(n-4)}{6}$≠3t，h∈N-{1}，t∈N。

②當 n=2h+1，h∈N-{7,10,13...}時

$P=\dfrac{7(n-2)+1}{2}$

偶數行中，共有 $\dfrac{3(n-3)}{2}-3$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $\dfrac{2(n-3)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$Z=\dfrac{3(n-3)}{2}-3+\dfrac{2(n-3)}{2}=\dfrac{5n-21}{2}$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

∴ $Y=\dfrac{5n-21}{6}$，Z=3t，t∈N，

$Y=\left[\dfrac{5n-21}{6}\right]+1$，當 Z≠3t，t∈N。

∴ $X=\dfrac{7(n-2)+1}{2}-\dfrac{5n-21}{6}$，當 n=2h+1，$\dfrac{5n-21}{6}=3t$，h∈N-{1}，t∈N，

$X=\dfrac{7(n-2)+1}{2}-\left\{\left[\dfrac{5n-21}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h+1，$\dfrac{5n-21}{6}\neq 3t$，h∈N-{1}，t∈N。

③特殊型：當 n=9+6h，h∈N

因為 9 為奇數，所以特殊型恆發生在 n 為奇數時，又由②的情形中求得：

$Z=\dfrac{5n-21}{2}=\dfrac{5(9+6h)-21}{2}=12+15h$ 恆為 3 的倍數。

∴ $Y=\dfrac{5n-21}{6}+1=\dfrac{5n-15}{6}$

∴ $X=\dfrac{7(n-2)+1}{2}-\dfrac{5n-15}{6}$，當 n=9+6h，h∈N。

E.11×n 之方紙格板

a.當 n=12 時，最多可在 45 個小方格上作記號，而產生 28 塊剝離正方形，所以需消去 10 次記號，故最多可以切割 35 個小方格（圖 82）。

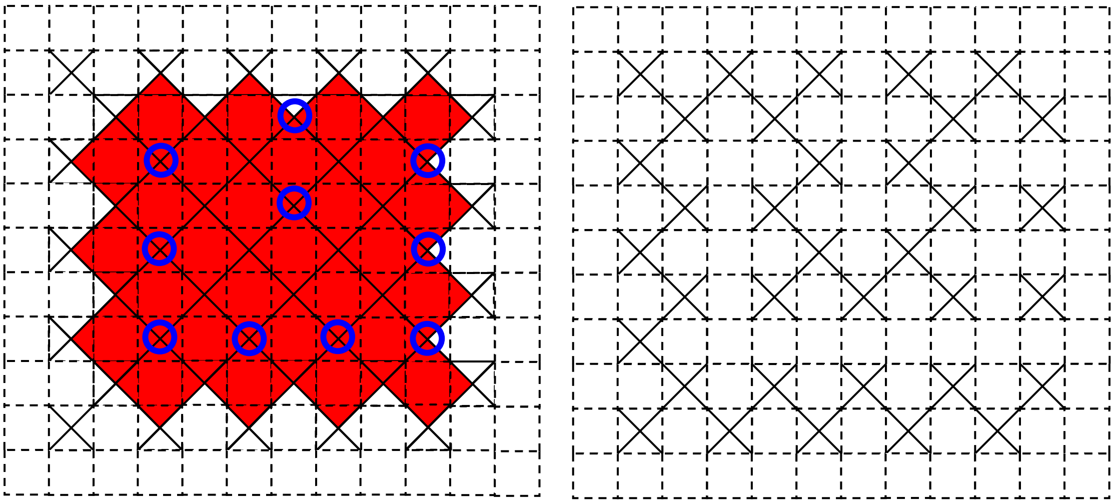


圖 82

當 n=13 時，最多可在 50 個小方格上作記號，而產生 31 塊剝離正方形，所以需消去 11 次記號，故最多可以切割 39 個小方格（圖 83）。

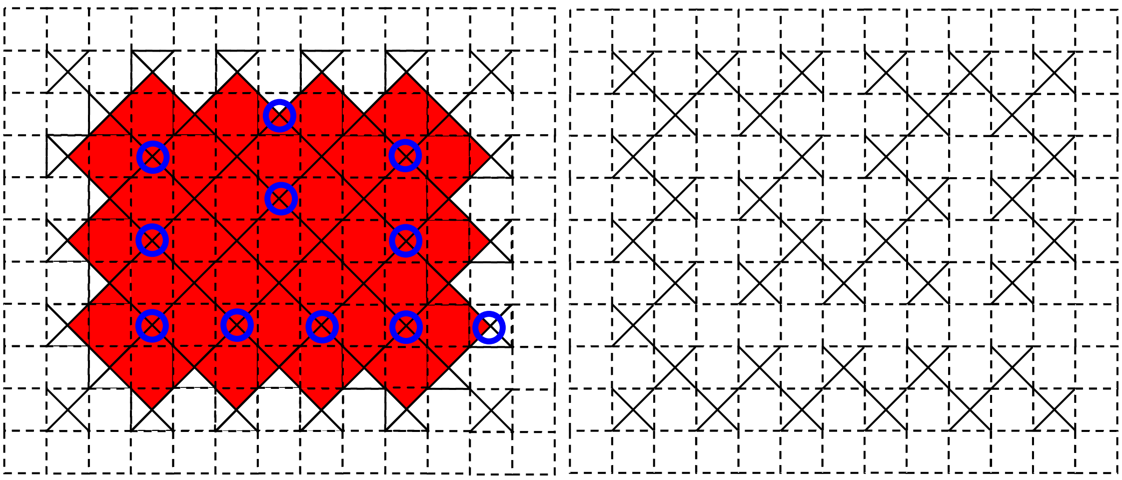


圖 83

當 n=14 時，最多可在 54 個小方格上作記號，而產生 35 塊剝離正方形，所以需消去 12 次記號，故最多可以切割 42 個小方格（圖 84）。

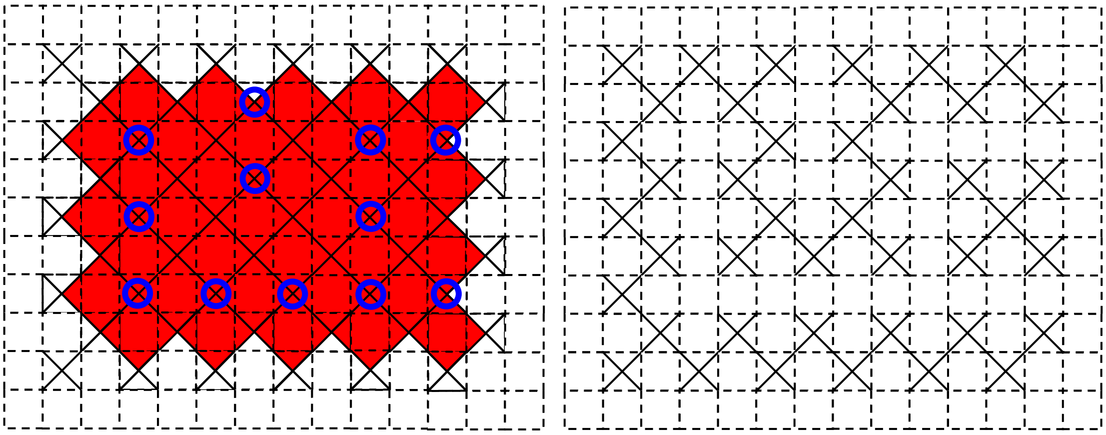


圖 84

當 n=15 時，最多可在 59 個小方格上作記號，而產生 38 塊剝離正方形，所以需消去 13 次記號，故最多可以切割 46 個小方格（圖 85）。

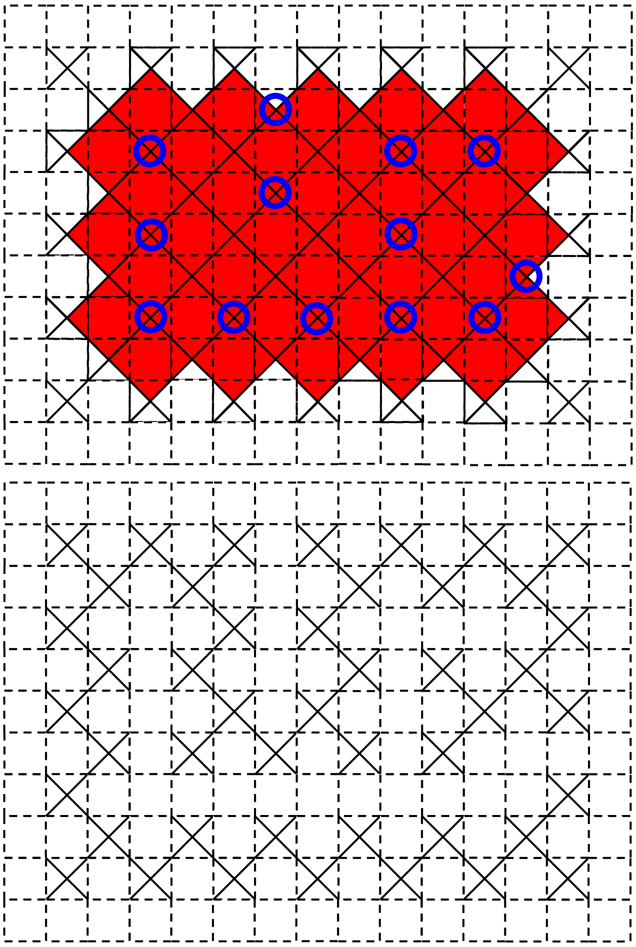
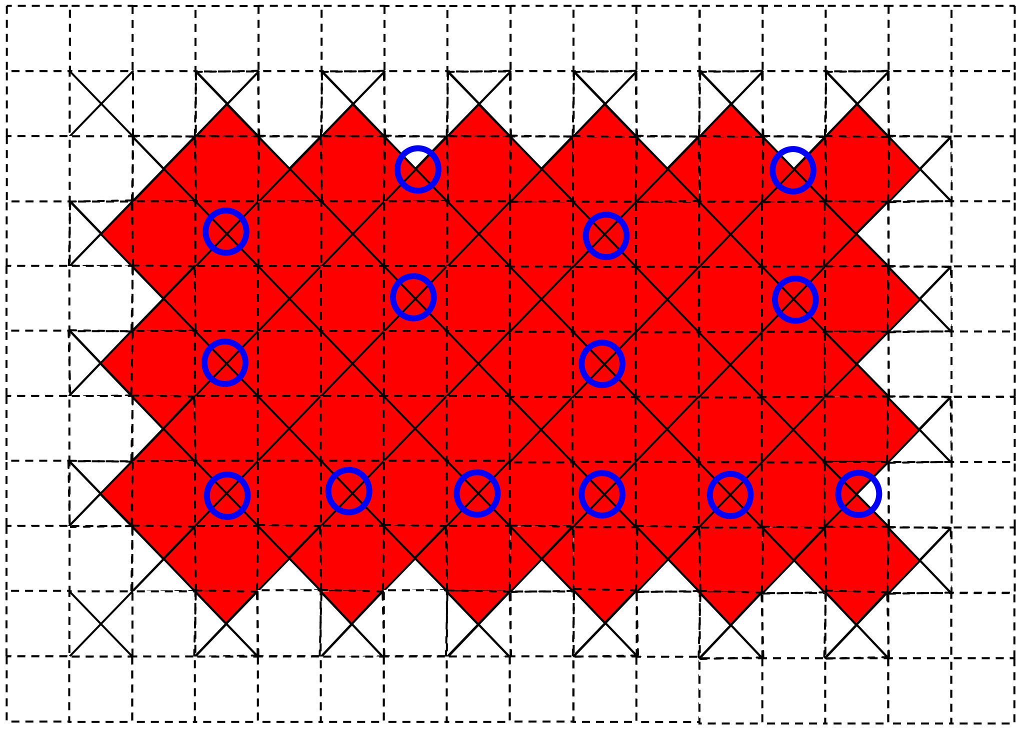


圖 85

當 n=16 時，最多可在 63 個小方格上作記號，而產生 42 塊剝離正方形，所以需消去 14 次記號，故最多可以切割 49 個小方格（圖 86）。



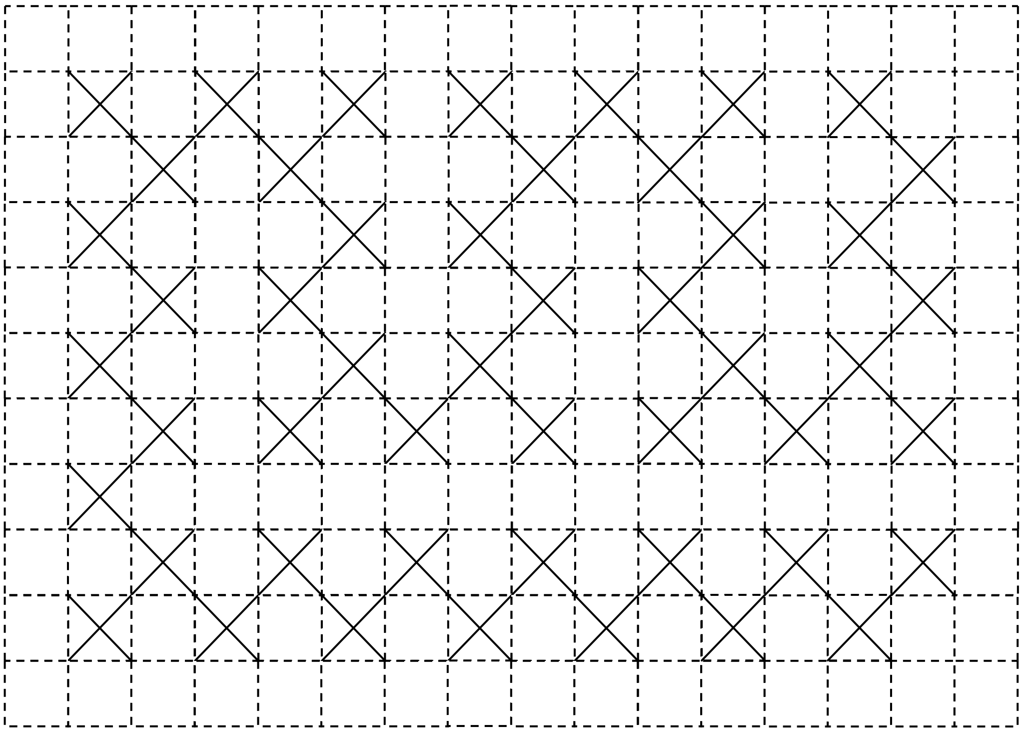
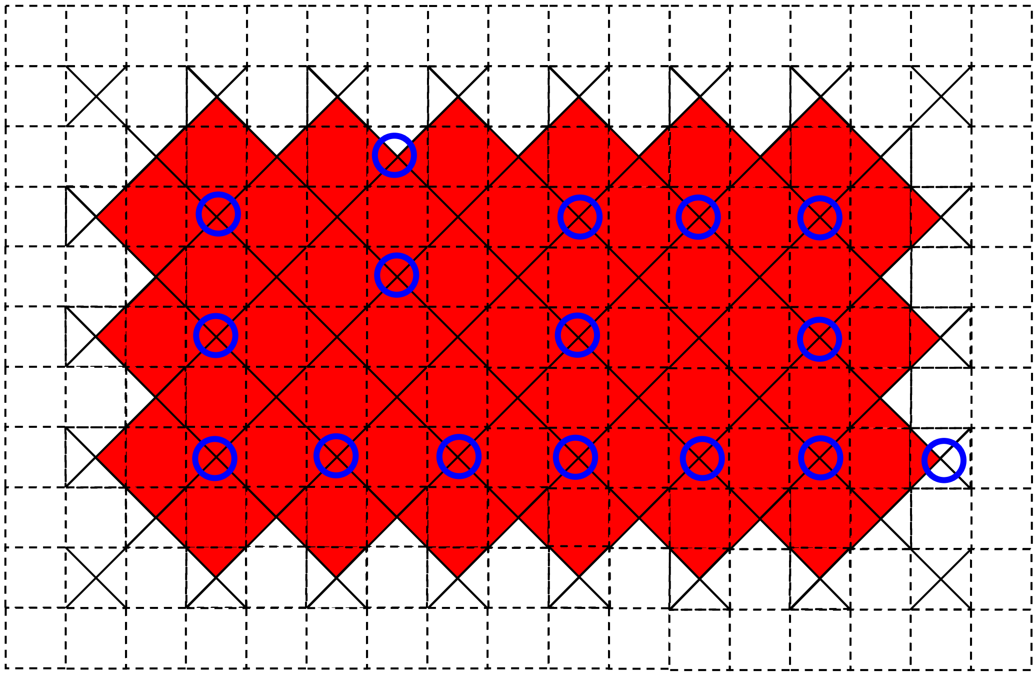


圖 86

當 n=17 時，最多可在 68 個小方格上作記號，而產生 45 塊剝離正方形，依照基本定義需消去 15 次記號，但由作圖得知須再消去 1 次記號，所以需消去 16 次記號，故最多可以切割 52 個小方格（圖 87）。



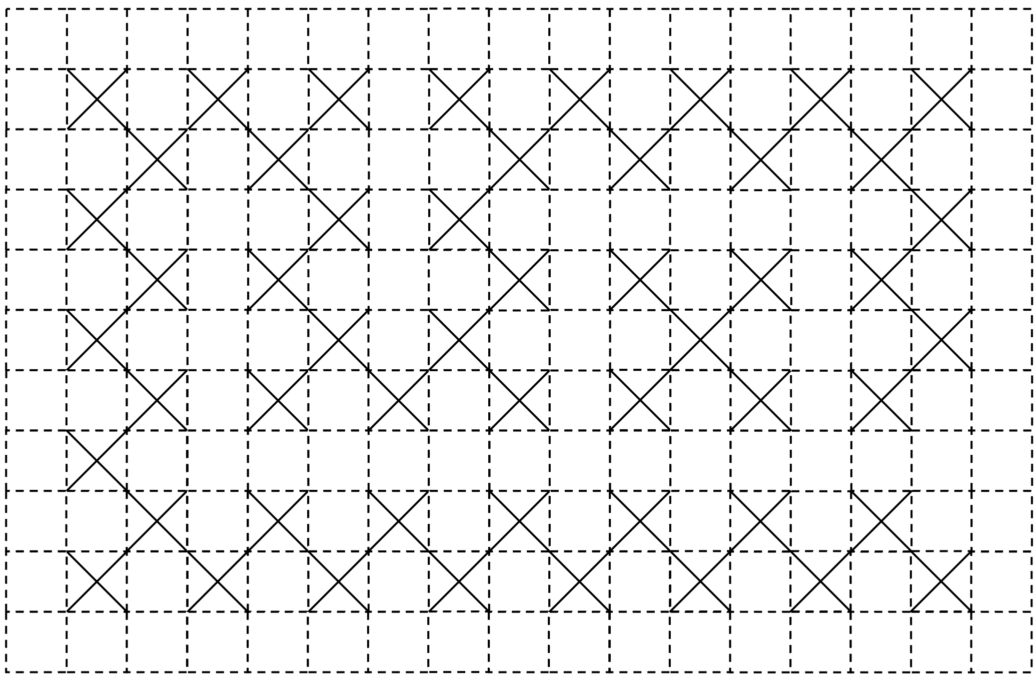
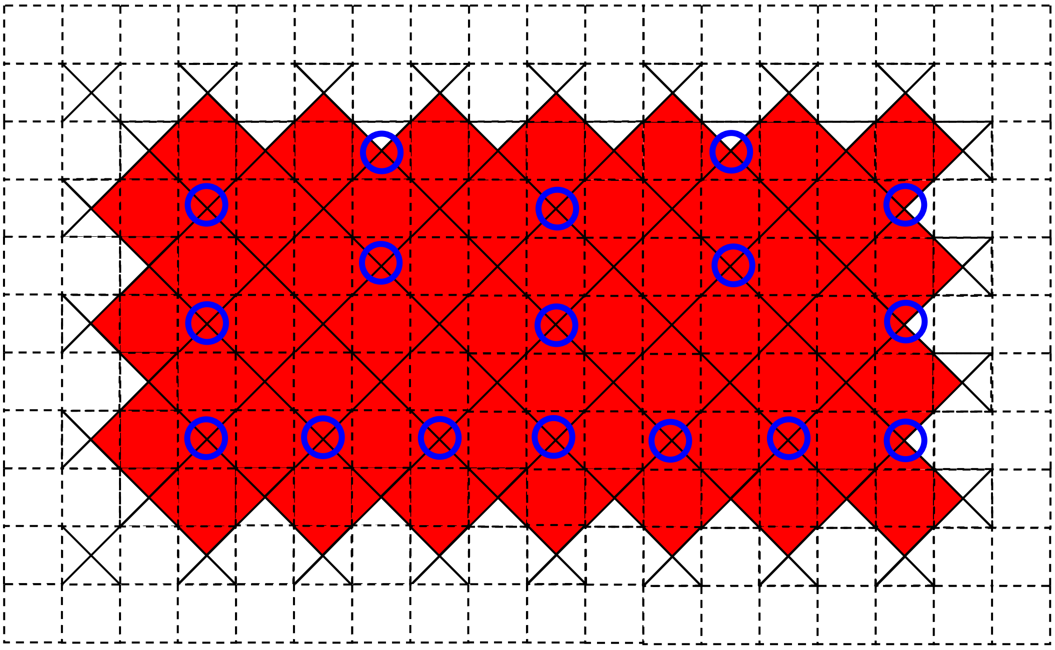


圖 87

當 n=18 時，最多可在 72 個小方格上作記號，而產生 49 塊剝離正方形，所以需消去 17 次記號，故最多可以切割 55 個小方格（圖 88）。



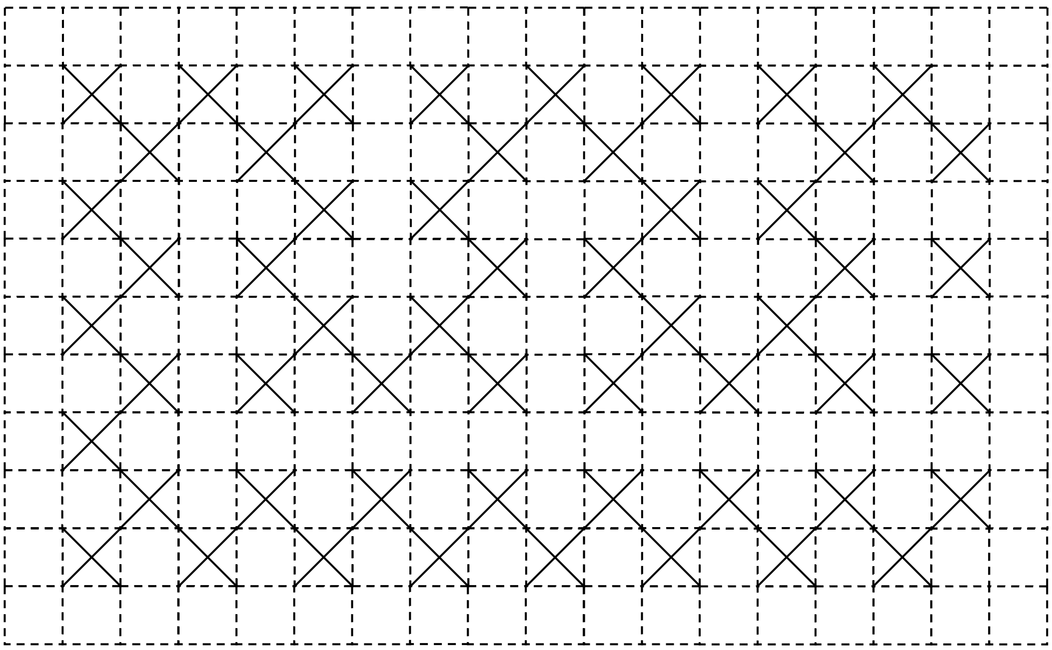


圖 88

b.列表觀察（表十二）：

表十二

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
12	**45**	**28**	**10**	**35**
13	**50**	**31**	**11**	**39**
14	**54**	**35**	**12**	**42**
15	**59**	**38**	**13**	**46**
16	**63**	**42**	**14**	**49**
17	**68**	**45**	**15+1**	**52**
18	**72**	**49**	**17**	**55**
19	**77**	**52**	**18**	**59**
20	**81**	**56**	**19**	**62**
21	**86**	**59**	**20**	**66**
22	**90**	**63**	**21**	**69**
23	**95**	**66**	**22+1**	**72**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.公式推導

①當 $n=2h$，$h\in N$ 時

$$P=\frac{9(n-2)}{2}$$

∵偶數行中，每行最多可以在 5 個小方格作記號；
奇數行中，每行最多可以在 4 個小方格作記號。
且每兩個作上記號的方格間各夾一個空白方格，而左右兩邊(3,2)、(5,2)、(7,2)、(9,2)、(2,n-1)、(4,n-1)、(6,n-1)的空白方格不會影響到剝離正方形的產生。

∴偶數行中，共有 $\frac{4(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生，奇數行中，共有 $\frac{3(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$$Z=\frac{4(n-4)}{2}+\frac{3(n-4)}{2}=\frac{7(n-4)}{2}$$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形

∴ $Y=\frac{7(n-4)}{6}$，當 Z=3t，t∈N；

$Y=\left[\frac{7(n-4)}{6}\right]+1$，當 Z≠3t，t∈N。

∴ $X=\frac{9(n-2)}{2}-\frac{7(n-4)}{6}$，當 n=2h，$\frac{7(n-4)}{6}=3t$，h∈N-{1}，t∈N，

$X=\frac{9(n-2)}{2}-\left\{\left[\frac{7(n-4)}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h, $\frac{7(n-4)}{6}\neq 3t$，h∈N-{1}，t∈N。

②n=2h+1，h∈N-{8,11,14…}, $P=\frac{9(n-2)+1}{2}$

偶數行中，共有 $\frac{4(n-3)}{2}-4$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $\frac{3(n-3)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$Z=\frac{4(n-3)}{2}-4+\frac{3(n-3)}{2}=\frac{7n-29}{2}$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

∴ $Y=\frac{7n-29}{6}$，Z=3t，t∈N，

$Y=\left[\frac{7n-29}{6}\right]+1$，當 Z≠3t，t∈N。∴ $X=\frac{9(n-2)+1}{2}-\frac{7n-29}{6}$，當 n=2h+1，$\frac{7n-29}{6}=3t$，h∈N-{1}，t∈N；

∴ $X=\frac{9(n-2)+1}{2}-\left\{\left[\frac{7n-29}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h+1，$\frac{7n-29}{6}\neq 3t$，h∈N-{1}，t∈N。

③特殊型：當 n=11+6h，h∈N

因為 11 為奇數，所以特殊型恆發生在 n 為奇數時，又由②的情形中求得：

$Z=\frac{7n-29}{2}=\frac{7(11+6h)-29}{2}=24+21h$ 恆為 3 的倍數。

∴ $Y=\frac{7n-29}{6}+1=\frac{7n-23}{6}$

∴ $X=\frac{9(n-2)+1}{2}-\frac{7n-23}{6}$，當 n=11+6h，h∈N。

F.13×n 之方紙格板

a.當 n=14 時，最多可在 66 個小方格上作記號，而產生 45 塊剝離正方形，所以需消去 15 次記號，故最多可以切割 51 個小方格（圖 89）。

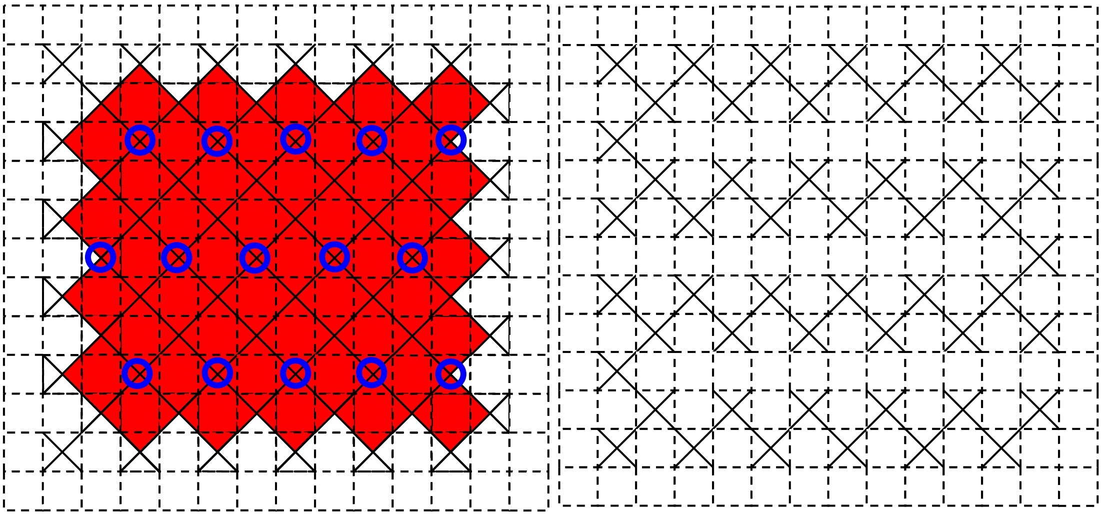


圖 89

當 n=15 時，最多可在 72 個小方格上作記號，而產生 49 塊剝離正方形，所以需消去 17 次記號，故最多可以切割 55 個小方格（圖 90）。

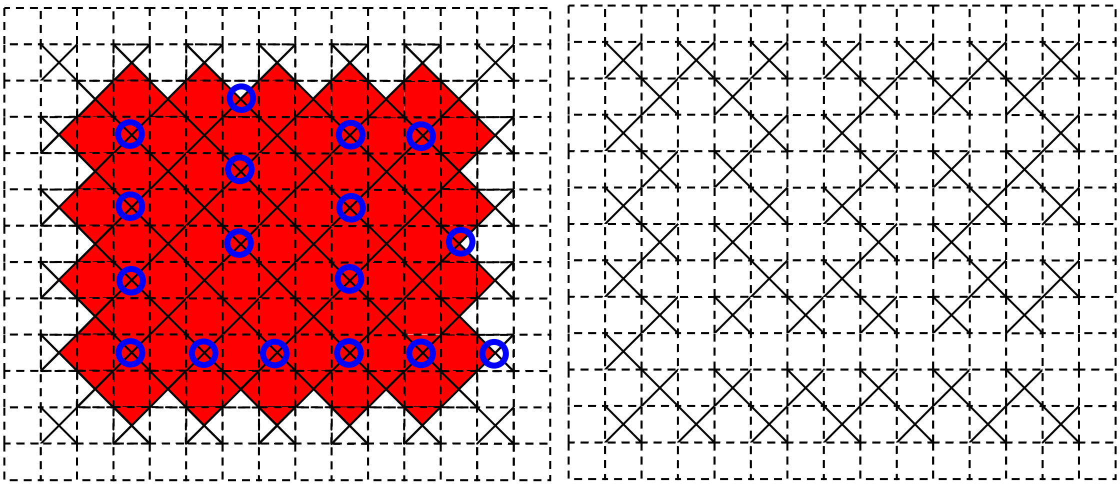


圖 90

當 n=16 時，最多可在 77 個小方格上作記號，而產生 54 塊剝離正方形，所以需消去 18 次記號，故最多可以切割 59 個小方格（圖 91）。

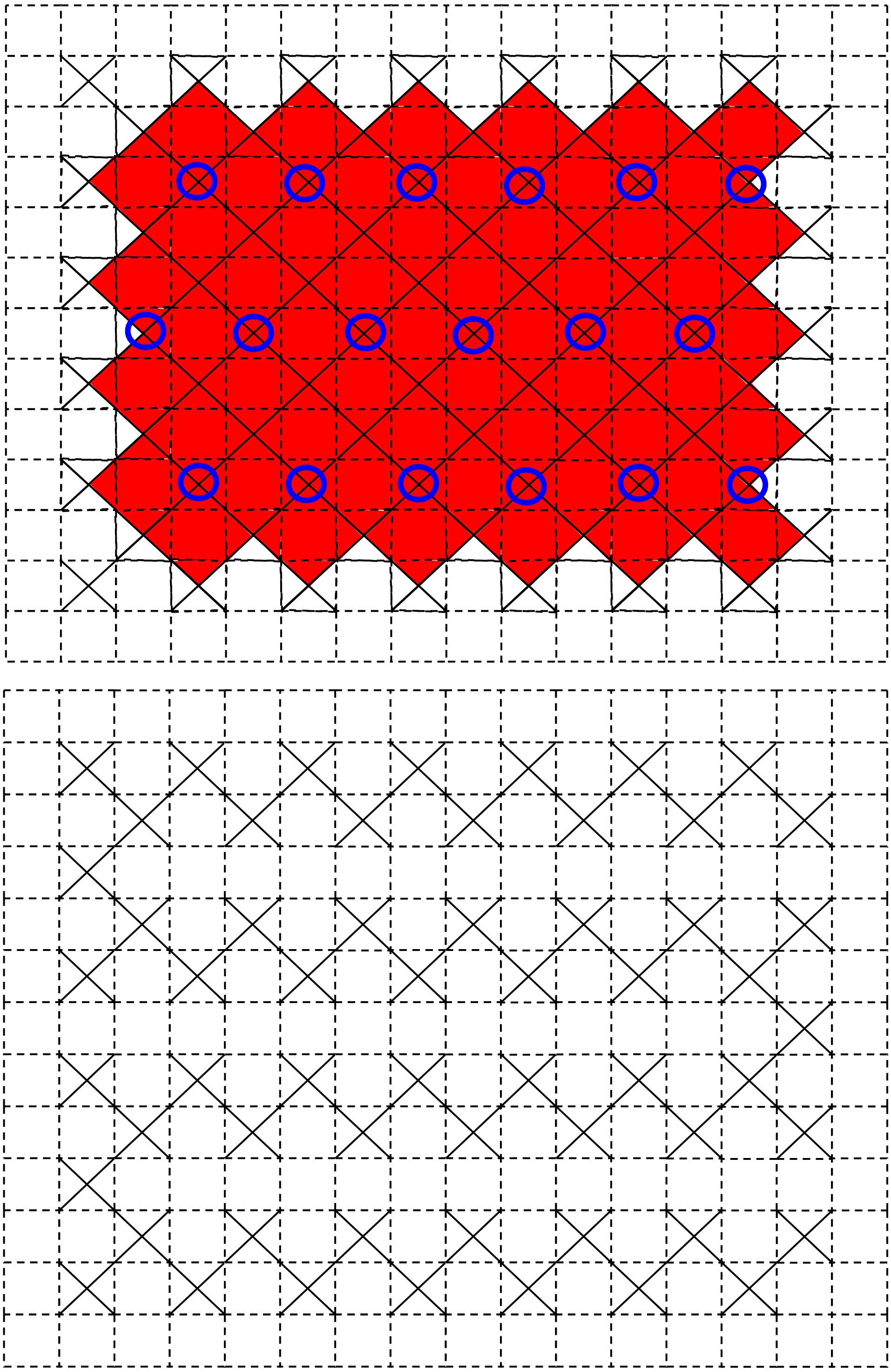
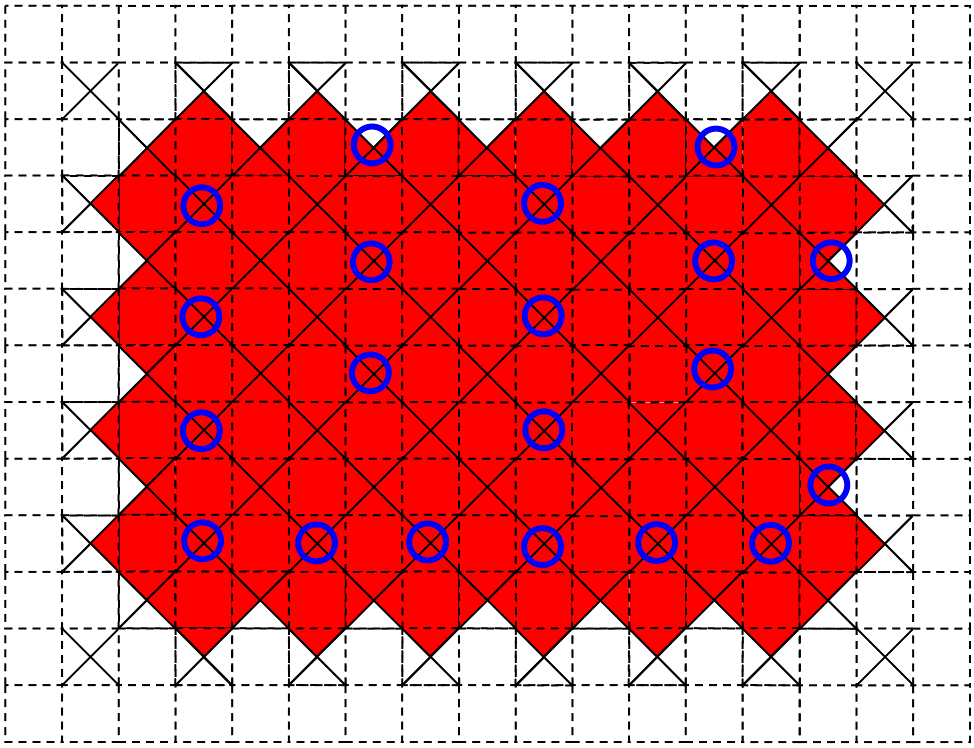


圖 91

當 n=17 時，最多可在 83 個小方格上作記號，而產生 58 塊剝離正方形，所以需消去 20 次記號，故最多可以切割 63 個小方格（圖 92）。



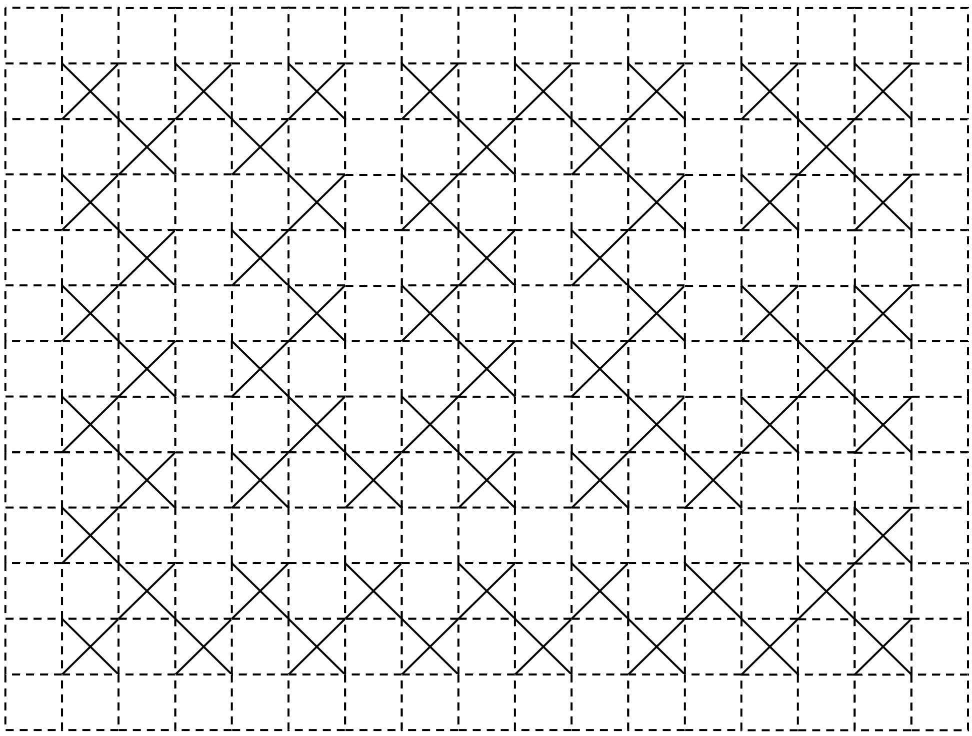


圖 92

當 n=18 時，最多可在 88 個小方格上作記號，而產生 63 塊剝離正方形，所以需消去 21 次記號，故最多可以切割 67 個小方格（圖 93）。

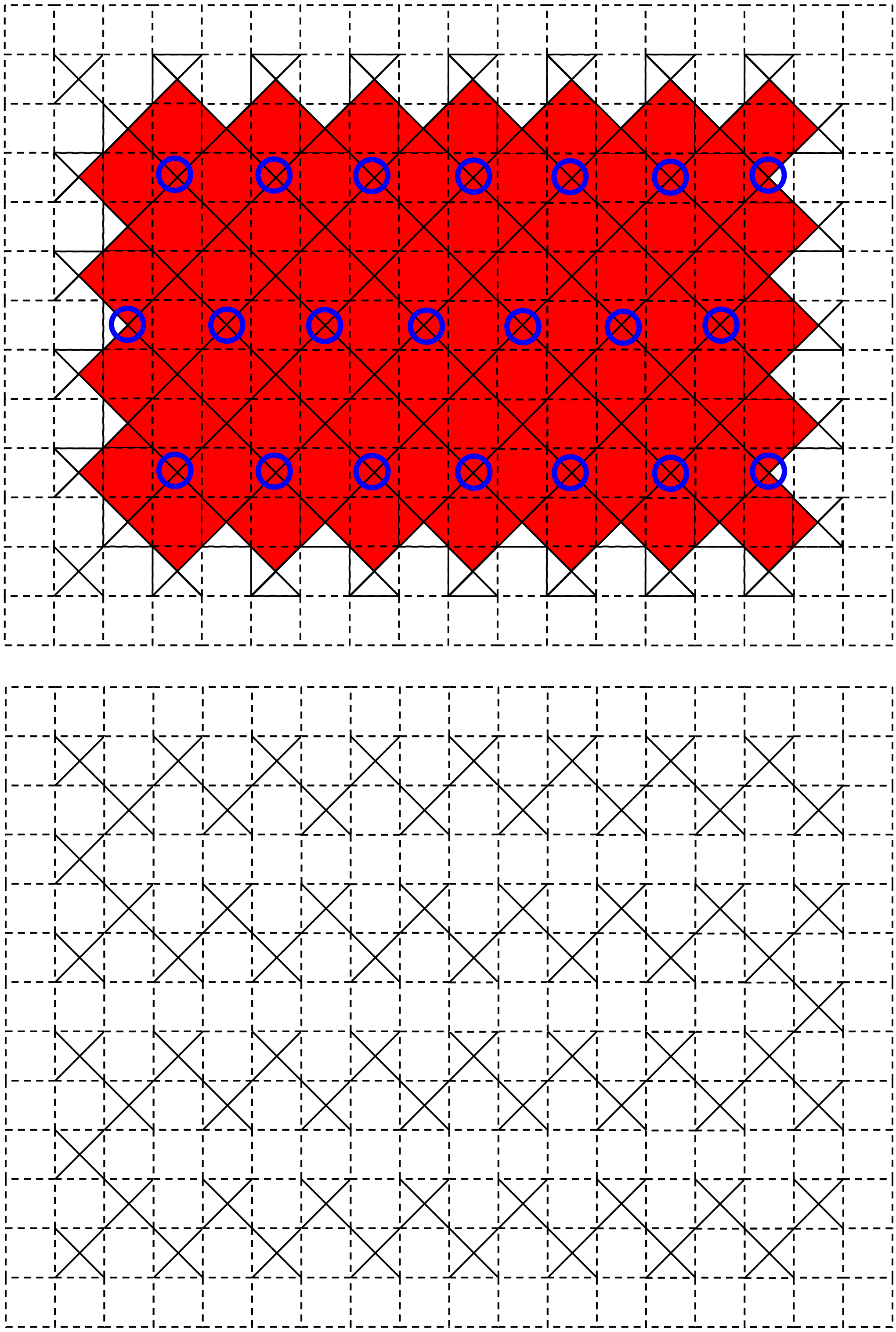
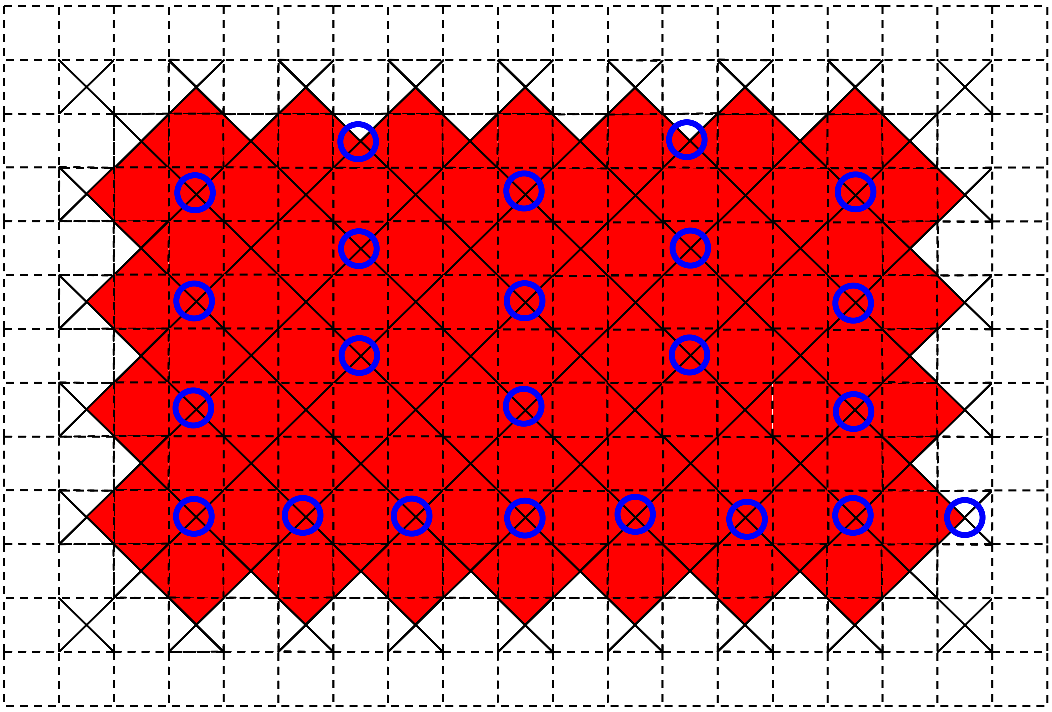


圖 93

當 n=19 時，最多可在 94 個小方格上作記號，而產生 67 塊剝離正方形，所以需消去 23 次記號，故最多可以切割 71 個小方格（圖 94）。



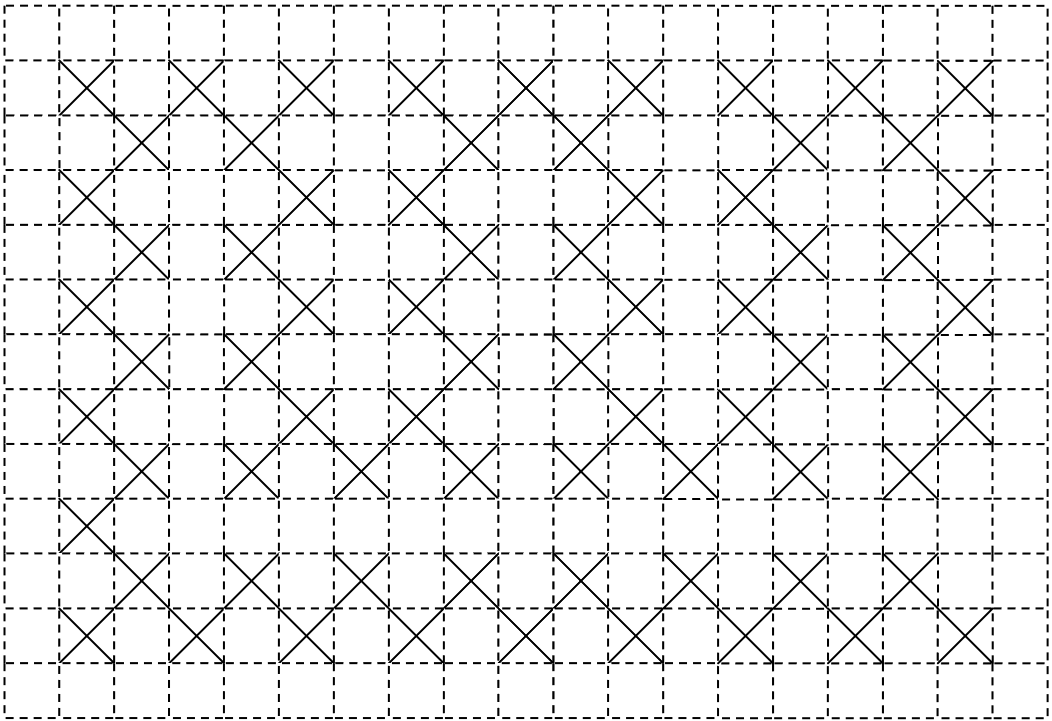


圖 94

當 n=20 時，最多可在 99 個小方格上作記號，而產生 72 塊剝離正方形，所以需消去 24 次記號，故最多可以切割 75 個小方格（圖 95）。

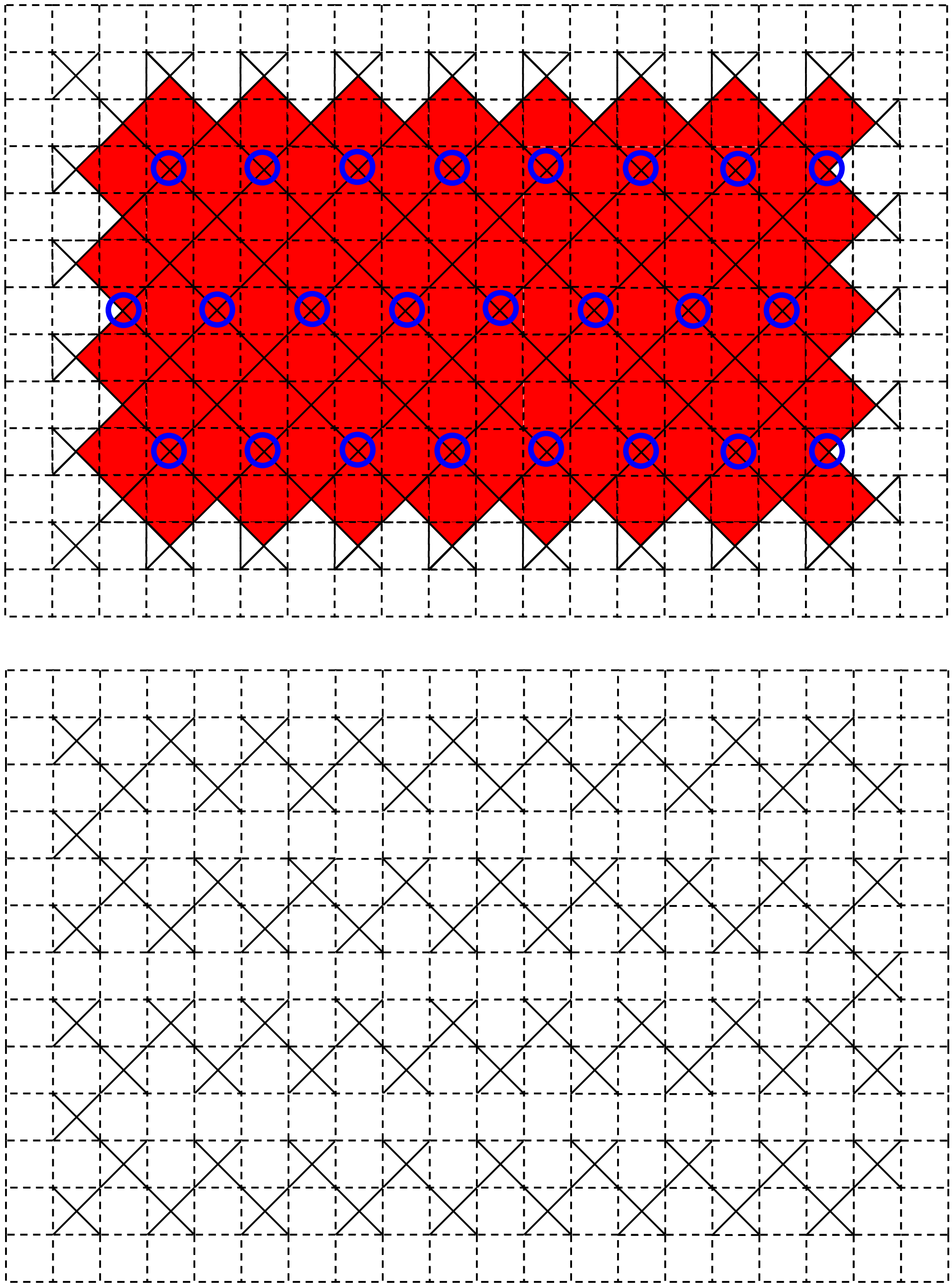


圖 95

b.列表觀察（表十三）：

表十三

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
14	**66**	**45**	**15**	**51**
15	**72**	**49**	**17**	**55**
16	**77**	**54**	**18**	**59**
17	**83**	**58**	**20**	**63**
18	**88**	**63**	**21**	**67**
19	**94**	**67**	**23**	**71**
20	**99**	**72**	**24**	**75**
21	**105**	**76**	**26**	**79**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.公式推導

① 當 $n=2h$，$h\in N$ 時

$$P=\frac{11(n-2)}{2}$$

∵偶數行中，每行最多可以在 6 個小方格作記號；
奇數行中，每行最多可以在 5 個小方格作記號。
且每兩個作上記號的方格間各夾一個空白方格，而左右兩邊 (3,2)、(5,2)、(7,2)、(9,2)、(11,2)、(2,n-1)、(4,n-1)、(6,n-1)、(8,n-1)、(10,n-1)、(12,n-1)的空白方格不會影響到剝離正方形的產生。

∴偶數行中，共有 $\frac{5(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $\frac{4(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$$Z=\frac{5(n-4)}{2}+\frac{4(n-4)}{2}=\frac{9(n-4)}{2}$$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形。

$$\therefore Y=\frac{9(n-4)}{6}$$

$\therefore X=\frac{11(n-2)}{2}-\frac{9(n-4)}{6}$，當 $n=2h$，$h\in N-\{1\}$。

②當 n=2h+1，h∈N 時

$P=\frac{11(n-2)+1}{2}$

偶數行中，共有 $\frac{5(n-3)}{2}-5$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $\frac{4(n-3)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$Z=\frac{5(n-3)}{2}-5+\frac{4(n-3)}{2}=\frac{9n-37}{2}$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形。

∴ $Y=\frac{9n-37}{6}$，當 Z=3t，t∈N，

$Y=\left[\frac{9n-37}{6}\right]+1$，當 Z≠3t，t∈N。

∴ $X=\frac{11(n-2)+1}{2}-\frac{9n-37}{6}$，當 n=2h+1，$\frac{9n-37}{6}=3t$，h∈N-{1}，t∈N，

$X=\frac{7(n-2)+1}{2}-\left\{\left[\frac{9n-37}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h+1，$\frac{9n-37}{6}\neq 3t$，h∈N-{1}，t∈N。

G. 15×n 之方紙格板

a. 當 n=16 時，最多可在 91 個小方格上作記號，而產生 66 塊剝離正方形，所以需消去 22 次記號，故最多可以切割 69 個小方格（圖 96）。

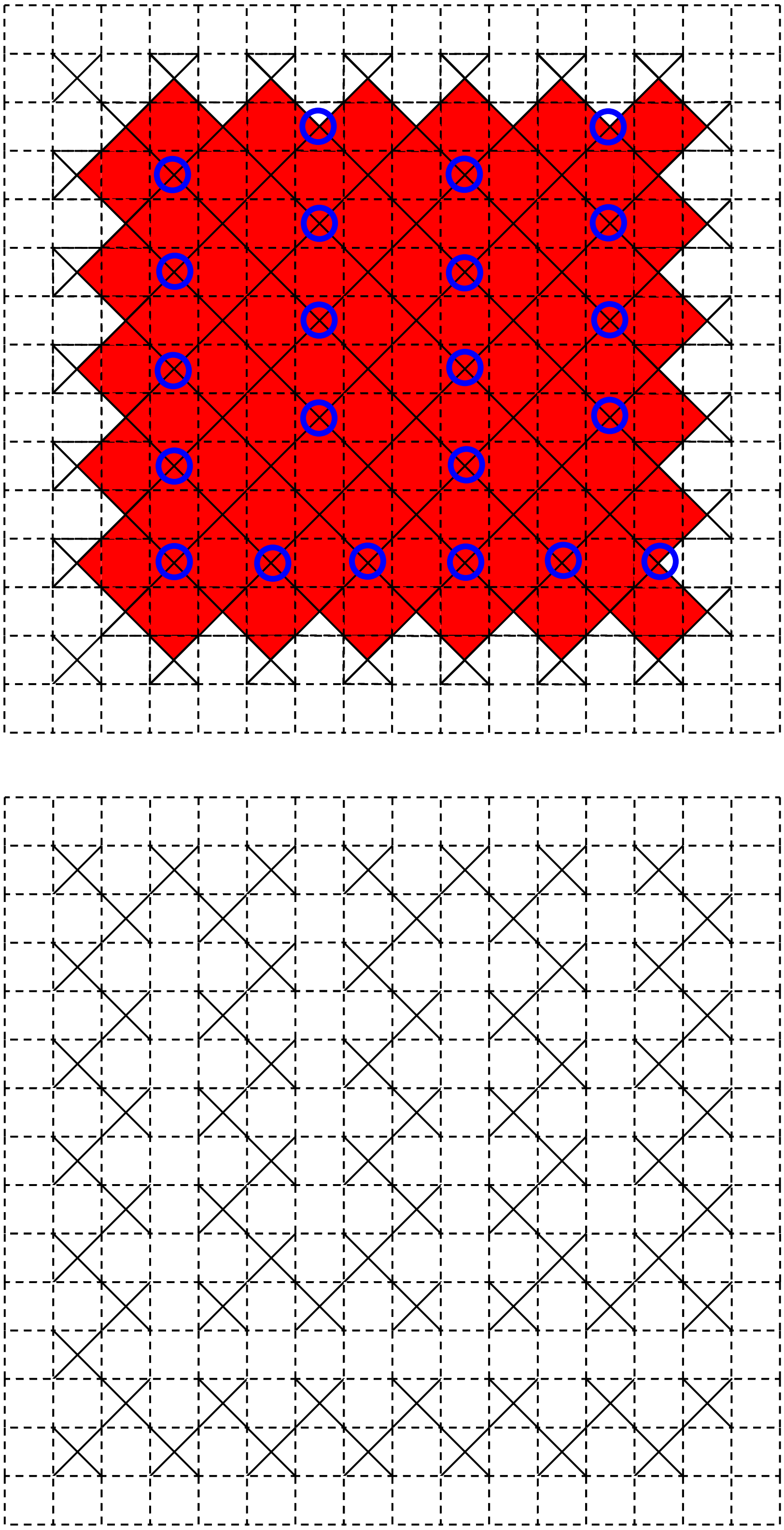


圖 96

當 n=17 時，最多可在 98 個小方格上作記號，而產生 71 塊剝離正方形，所以需消去 24 次記號，故最多可以切割 74 個小方格（圖 97）。

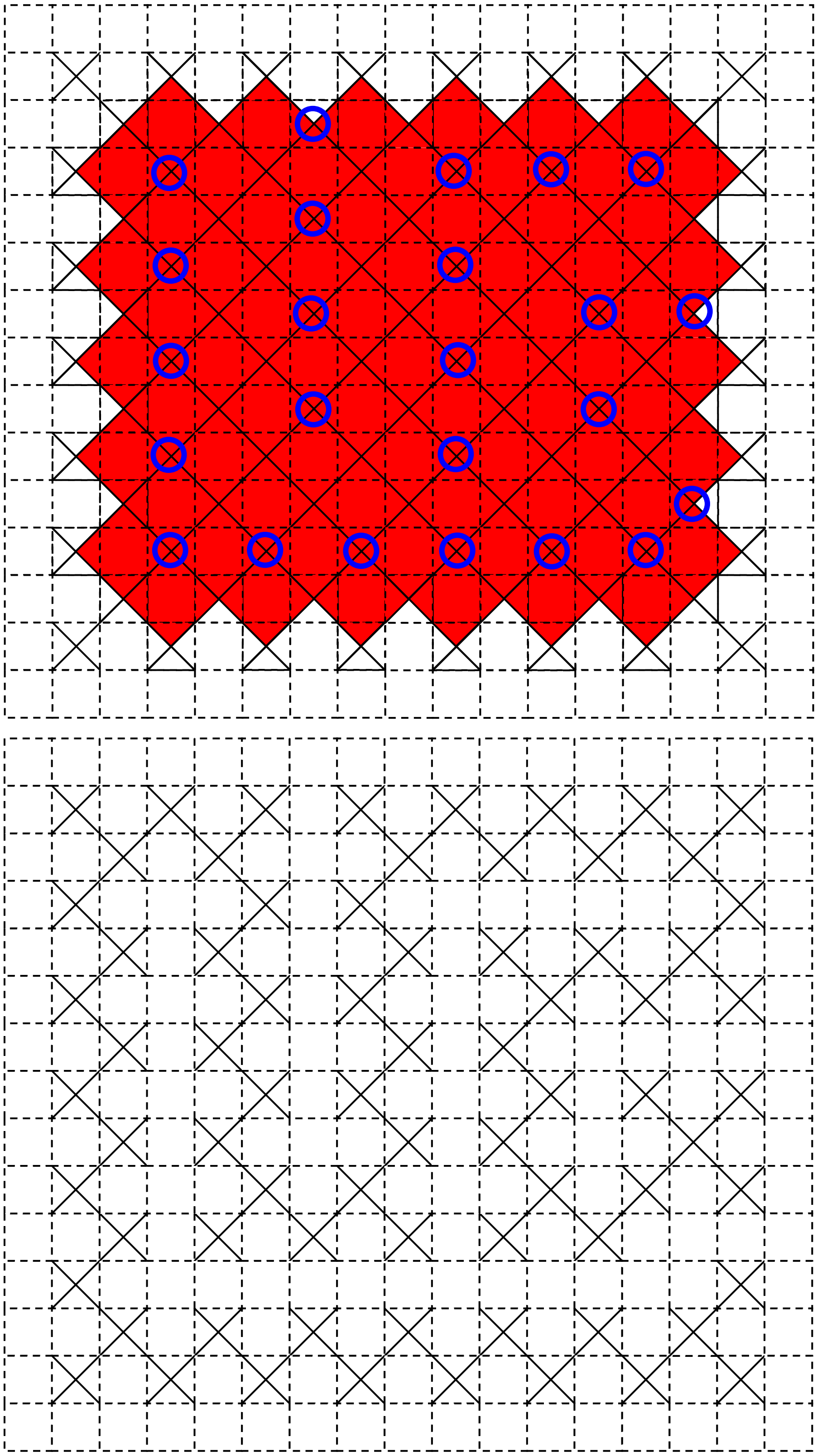


圖 97

當 n=18 時，最多可在 104 個小方格上作記號，而產生 77 塊剝離正方形，所以需消去 26 次記號，故最多可以切割 78 個小方格（圖 98）。

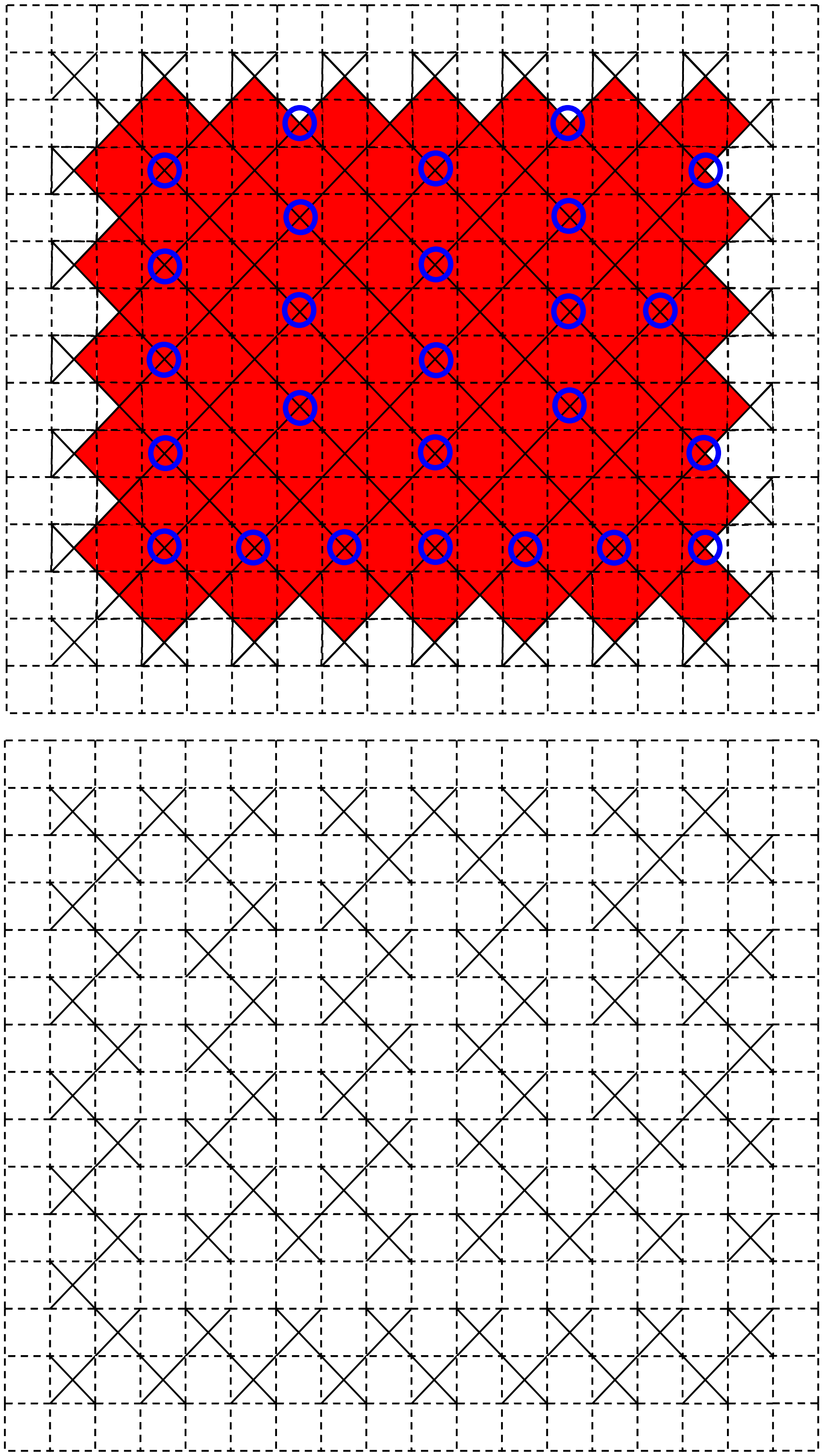


圖 98

當 n=19 時，最多可在 111 個小方格上作記號，而產生 82 塊剝離正方形，所以需消去 28 次記號，故最多可以切割 83 個小方格（圖 99）。

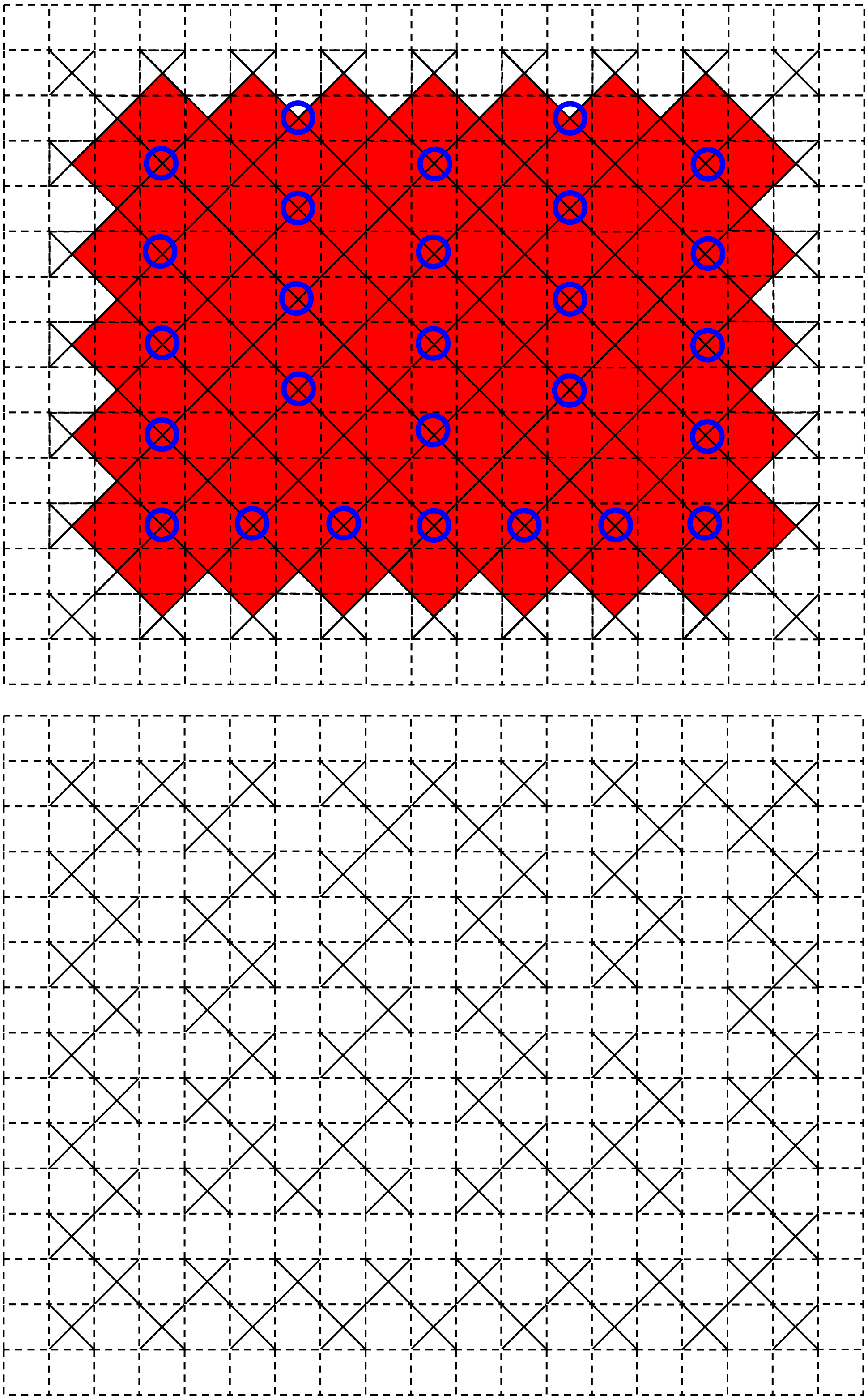
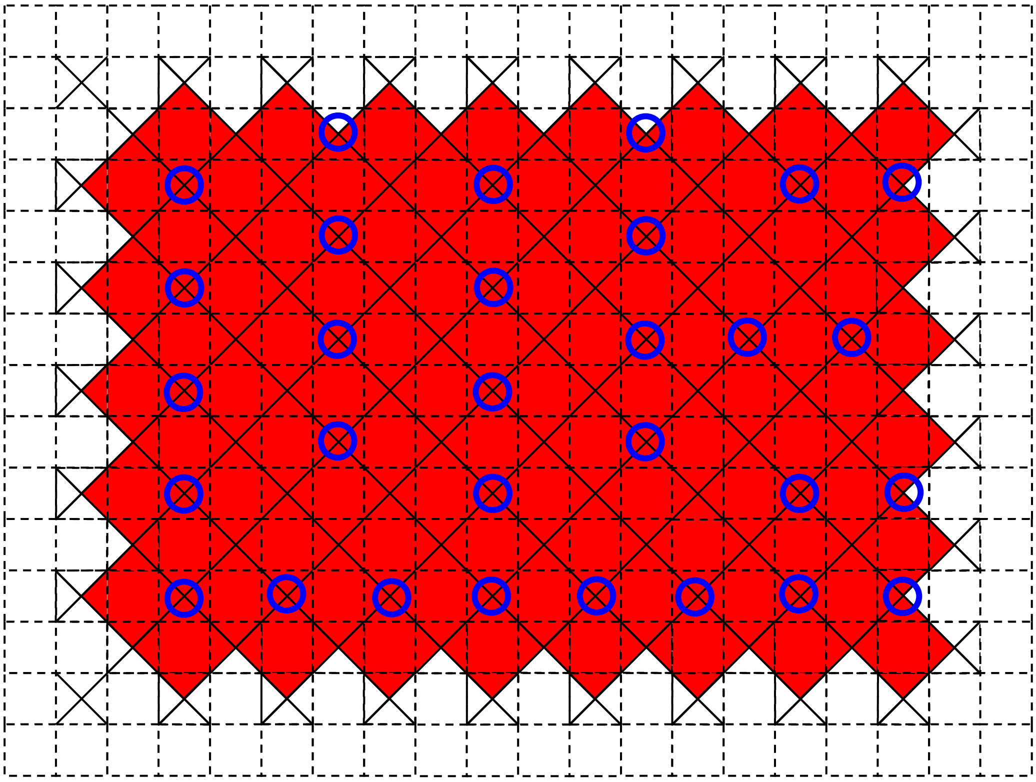


圖 99

當 n=20 時，最多可在 117 個小方格上作記號，而產生 88 塊剝離正方形，所以需消去 30 次記號，故最多可以切割 87 個小方格（圖 100）。



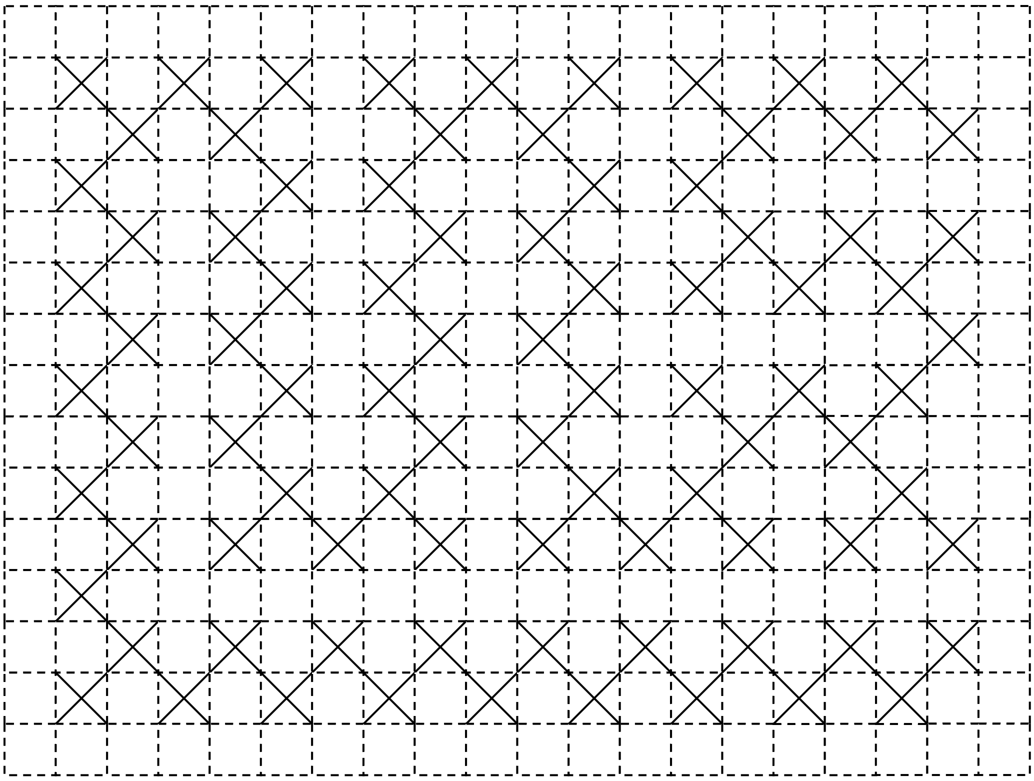


圖 100

當 n=21 時，最多可在 124 個小方格上作記號，而產生 93 塊剝離正方形，依照基本定義需消去 31 次記號，但由作圖得知須再消去 1 次記號，所以需消去 32 次記號，故最多可以切割 92 個小方格（圖 101）。

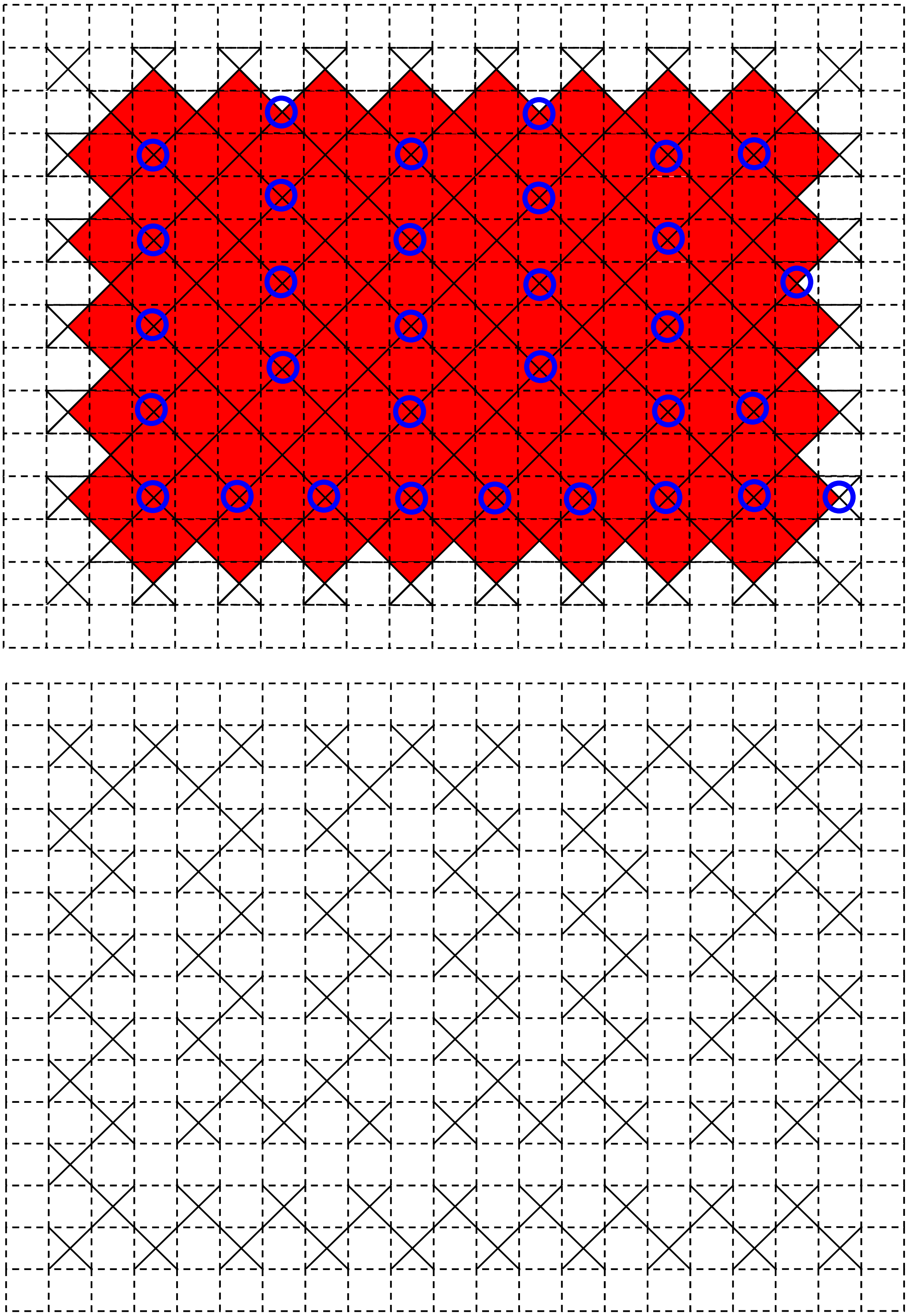


圖 101

當 n=22 時，最多可在 130 個小方格上作記號，而產生 99 塊剝離正方形，所以需消去 33 次記號，故最多可以切割 97 個小方格（圖 102）。

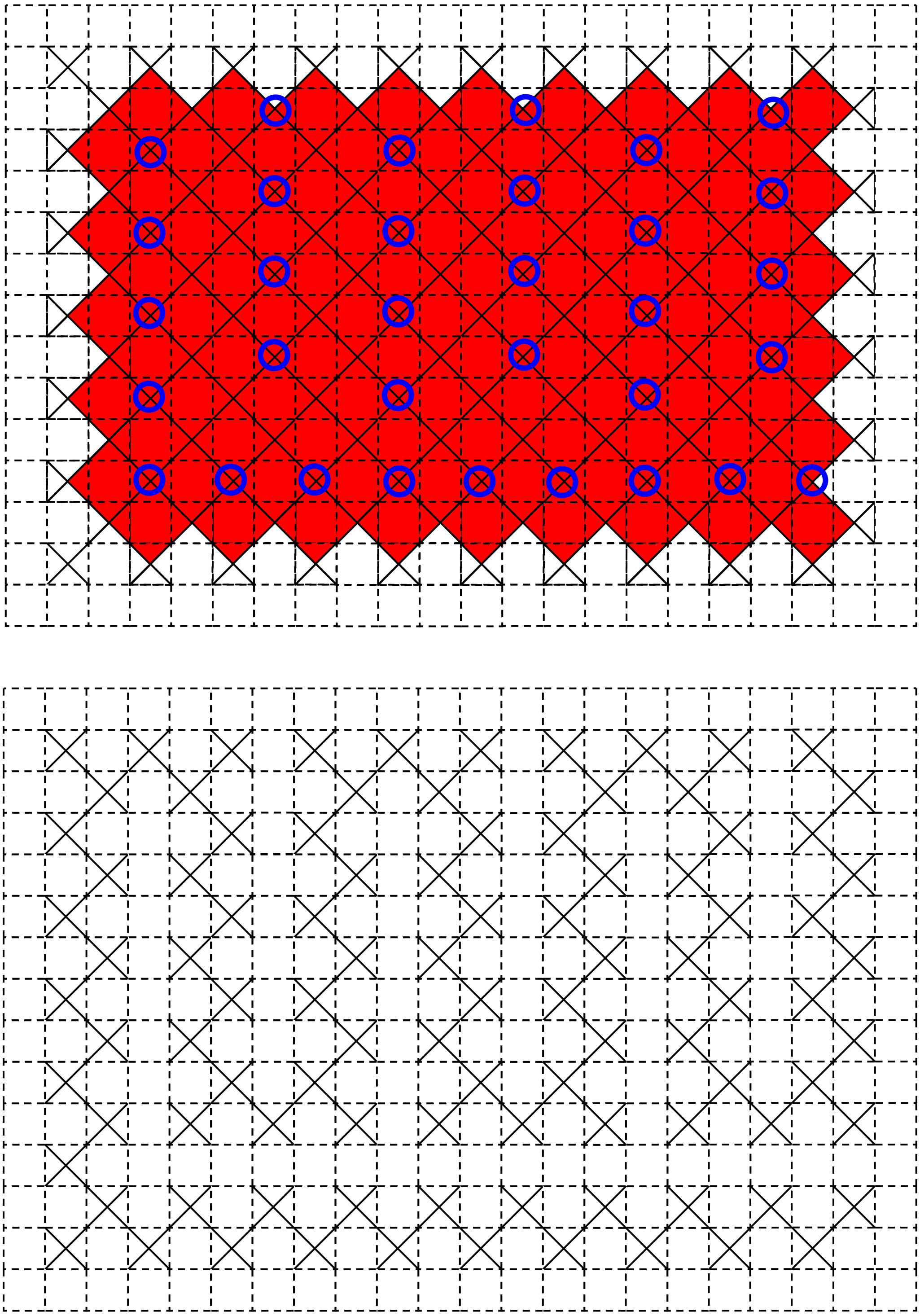


圖 102

b.列表觀察（表十四）：

表十四

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
16	**91**	**66**	**22**	**69**
17	**98**	**71**	**24**	**74**
18	**104**	**77**	**26**	**78**
19	**111**	**82**	**28**	**83**
20	**117**	**88**	**30**	**87**
21	**124**	**93**	**31+1**	**92**
22	**130**	**99**	**33**	**97**
23	**137**	**104**	**35**	**102**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.公式推導

① 當 n=2h，h∈N 時

$$P=\frac{13(n-2)}{2}$$

∵偶數行中，每行最多可以在 7 個小方格作記號；

奇數行中，每行最多可以在 6 個小方格作記號。

且每兩個作上記號的方格間各夾一個空白方格，而左右兩邊(3,2)、(5,2)、(7,2)、(9,2)、(11,2)、(13,2)、(13,2)、(2,n-1)、(4,n-1)、(6,n-1)、(8,n-1)、(10,n-1)、(12,n-1)的空白方格不會影響到剝離正方形的產生。

∴偶數行中，共有 $\frac{6(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $\frac{5(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$$Z=\frac{6(n-4)}{2}+\frac{5(n-4)}{2}=\frac{11(n-4)}{2}$$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形

∴ $Y=\frac{11(n-4)}{6}$，當 Z=3t，t∈N；

$Y=\frac{11(n-4)}{6}$，當 Z≠3t，t∈N。

$\therefore X=\frac{13(n-2)}{2}-\frac{11(n-4)}{6}$，當 n=2h，$\frac{11(n-4)}{6}$=3t，$h\in N-\{1\}$，$t\in N$；

$X=\frac{13(n-2)}{2}-\left\{\left[\frac{11(n-4)}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h, $\frac{11(n-4)}{6}\neq 3t$，$h\in N-\{1\}$，$t\in N$。

②當 n=2h+1，$h\in N-\{10,13,16...\}$時

$P=\frac{13(n-2)+1}{2}$

偶數行中，共有$\frac{6(n-3)}{2}-6$個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有$\frac{5(n-3)}{2}$個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$Z=\frac{6(n-3)}{2}-6+\frac{5(n-3)}{2}=\frac{11n-45}{2}$

$\because$每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

$\therefore Y=\frac{11n-45}{6}$，Z=3t，$t\in N$，

$Y=\left[\frac{11n-45}{6}\right]+1$，當 $Z\neq 3t$，$t\in N$。

$\therefore X=\frac{13(n-2)+1}{2}-\frac{11n-45}{6}$，當 n=2h+1，$\frac{11n-45}{6}$=3t，$h\in N-\{1\}$，$t\in N$，

$X=\frac{13(n-2)+1}{2}-\left\{\left[\frac{11n-45}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h+1，$\frac{11n-45}{6}\neq 3t$，$h\in N-\{1\}$，$t\in N$。

③特殊型：當 n=15+6h，$h\in N$

因為 11 為奇數，所以特殊型恆發生在 n 為奇數時，又由②的情形中求得：

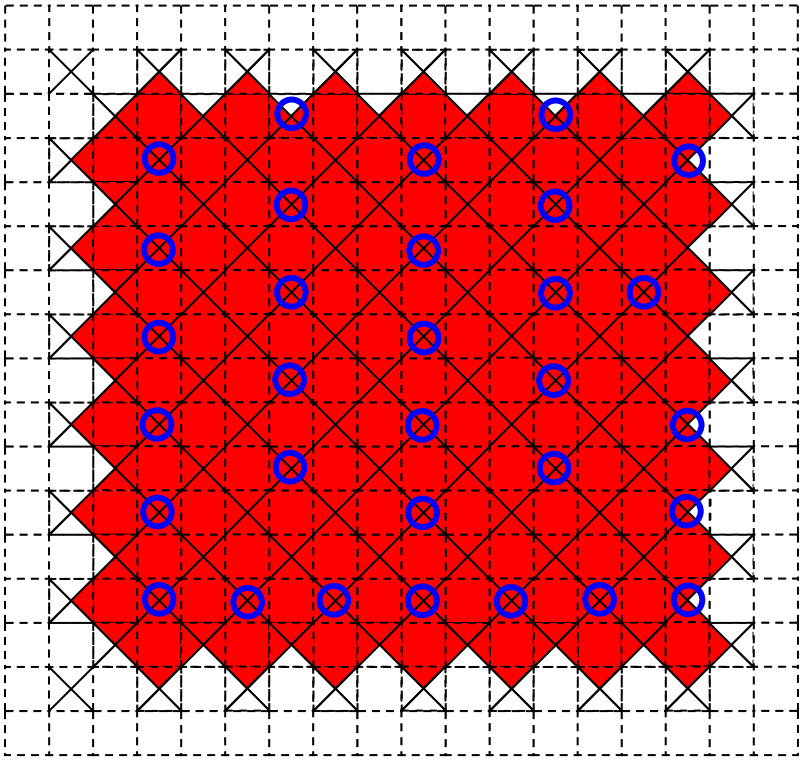
$Z=\frac{11n-45}{2}=\frac{11(15+6h)-45}{2}=60+33h$ 恆為 3 的倍數。

$\therefore Y=\frac{11n-45}{6}+1=\frac{11n-39}{6}$

$\therefore X=\frac{13(n-2)+1}{2}-\frac{11n-39}{6}$，當 n=15+6h，$h\in N$。

H. 17×n 之方紙格板

a. 當 n=18 時，最多可在 120 個小方格上作記號，而產生 91 塊剝離正方形，所以需消去 31 次記號，故最多可以切割 89 個小方格（圖 103）。



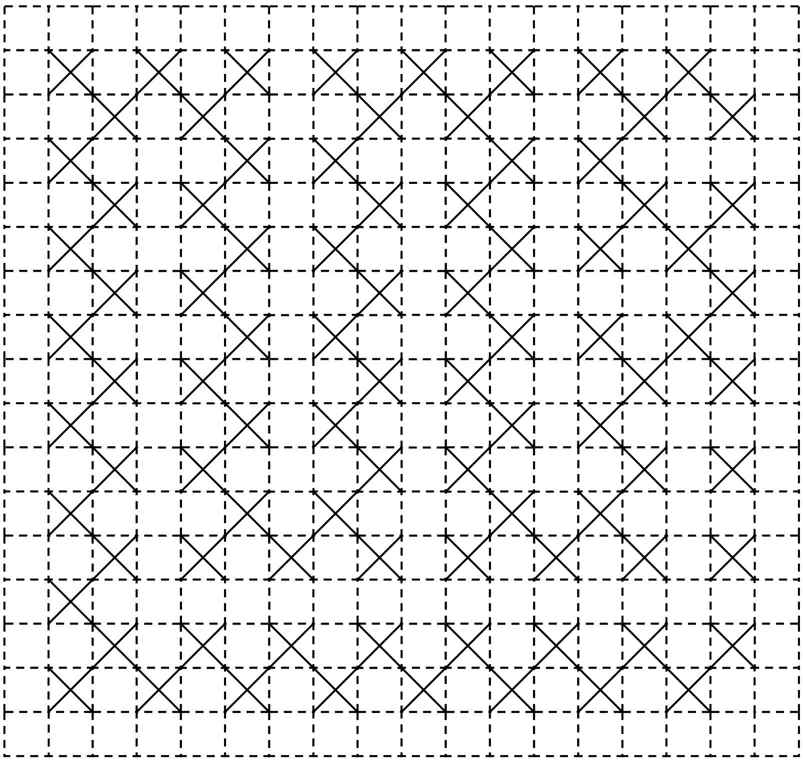


圖 103

當 n=19 時，最多可在 128 個小方格上作記號，而產生 97 塊剝離正方形，所以需消去 33 次記號，故最多可以切割 95 個小方格（圖 104）。

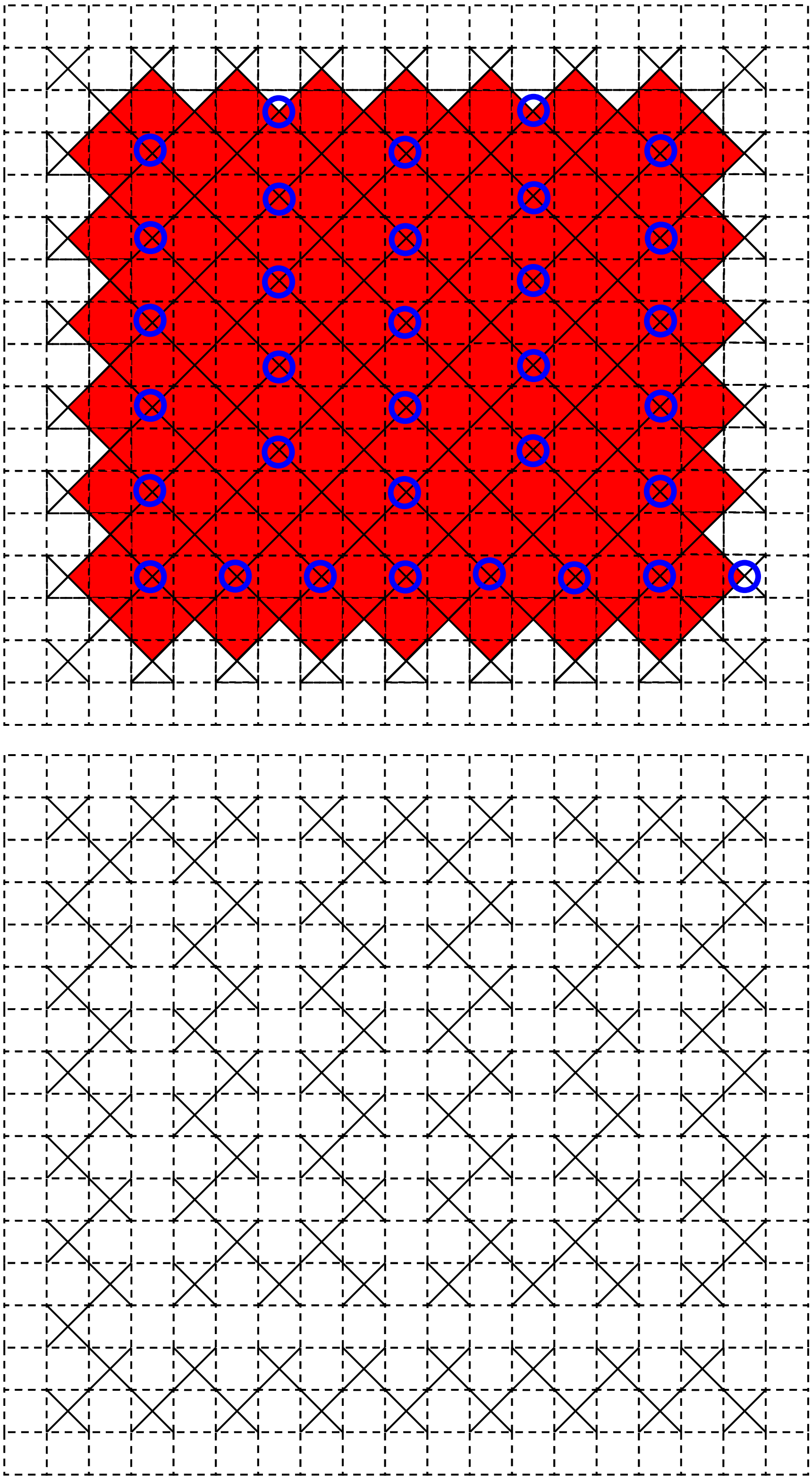


圖 104

當 n=20 時，最多可在 135 個小方格上作記號，而產生 104 塊剝離正方形，所以需消去 35 次記號，故最多可以切割 100 個小方格（圖 105）。

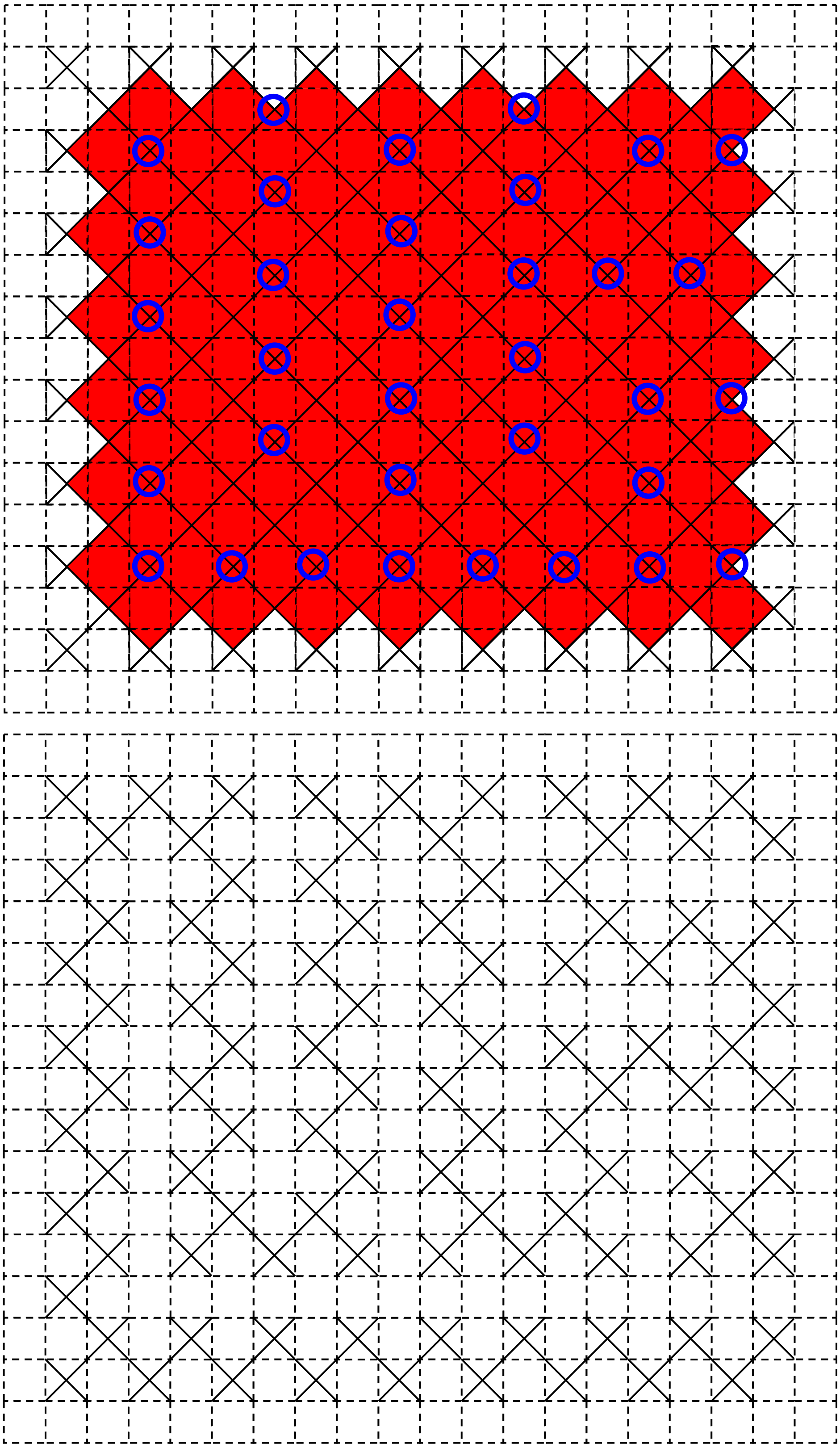


圖 105

當 n=21 時，最多可在 143 個小方格上作記號，而產生 110 塊剝離正方形，所以需消去 37 次記號，故最多可以切割 106 個小方格（圖 106）。

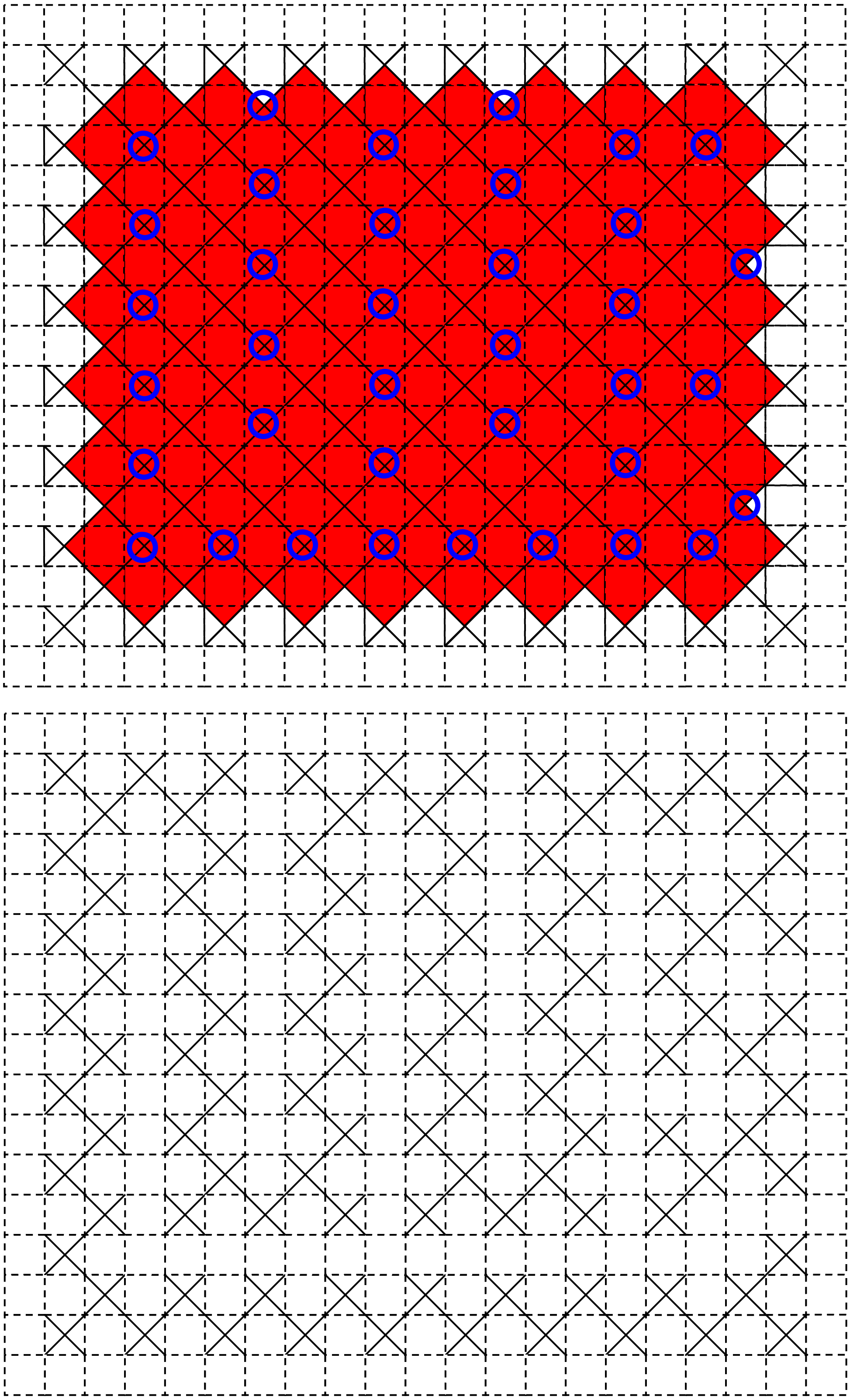


圖 106

當 n=22 時，最多可在 150 個小方格上作記號，而產生 117 塊剝離正方形，所以需消去 39 次記號，故最多可以切割 111 個小方格（圖 107）。

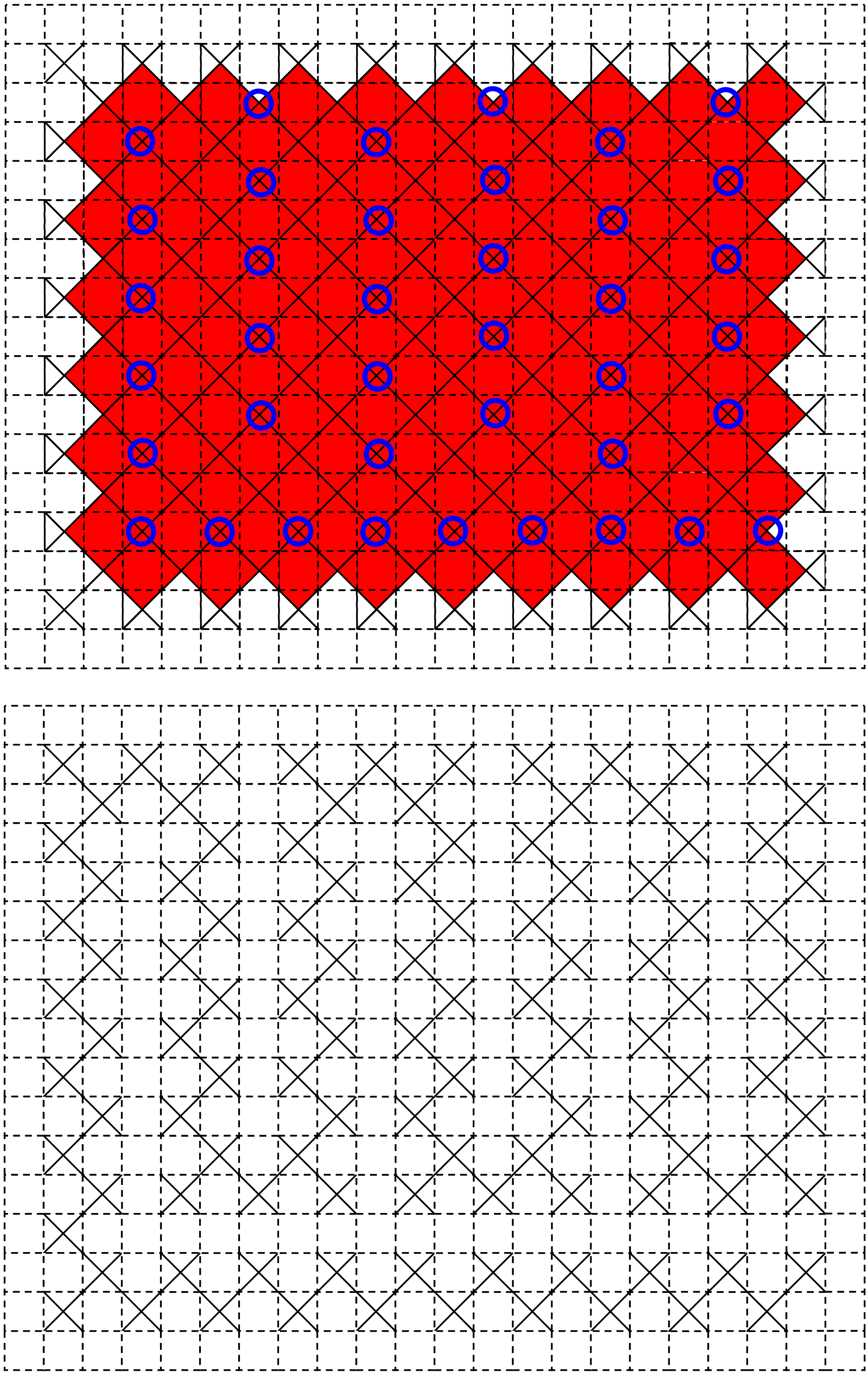


圖 107

當 n=23 時，最多可在 158 個小方格上作記號，而產生 123 塊剝離正方形，依照基本定義需消去 41 次記號，但由作圖得知須再消去 1 次記號，所以需消去 42 次記號，故最多可以切割 116 個小方格（圖 108）。

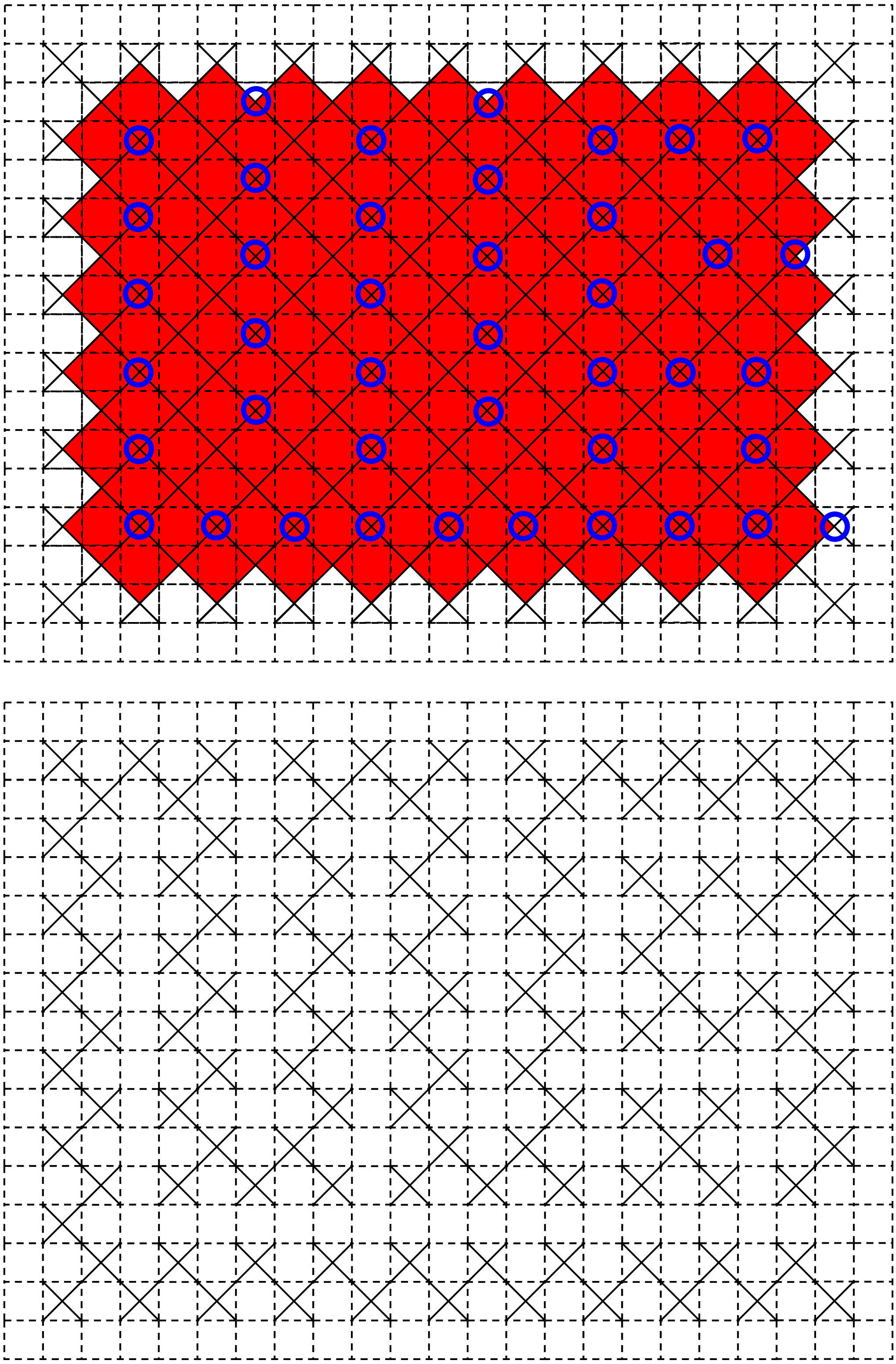


圖 108

當 n=24 時，最多可在 165 個小方格上作記號，而產生 130 塊剝離正方形，所以需消去 44 次記號，故最多可以切割 121 個小方格（圖 108）。

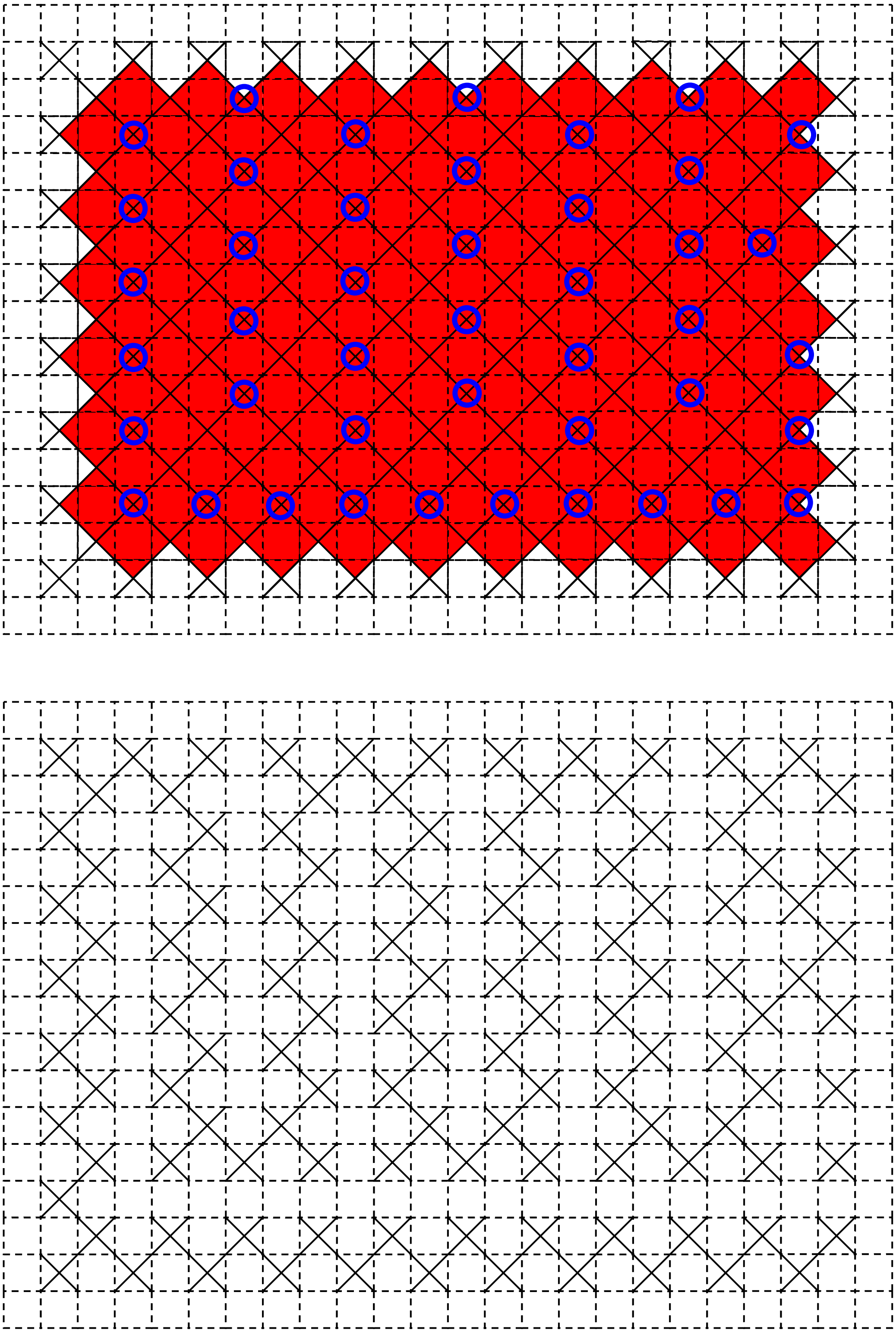


圖 108

b.列表觀察（表十五）：

表十五

邊長 n	作記號的方格（P）	剝離的正方形（Z）	圓環數（Y）	題目所求（X）
18	**120**	**91**	**31**	**89**
19	**128**	**97**	**33**	**95**
20	**135**	**104**	**35**	**100**
21	**143**	**110**	**37**	**106**
22	**150**	**117**	**39**	**111**
23	**158**	**123**	**41+1**	**116**
24	**165**	**130**	**44**	**121**
25	**173**	**136**	**46**	**127**
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

c.公式推導

① 當 $n=2h$，$h\in N$ 時

$$P=\frac{15(n-2)}{2}$$

∵偶數行中，每行最多可以在 8 個小方格作記號；

奇數行中，每行最多可以在 7 個小方格作記號。

且每兩個作上記號的方格間各夾一個空白方格，而左右兩邊(3,2)、(5,2)、(7,2)、(9,2)、(11,2)、(13,2)、(15,2)、(2,n-1)、(4,n-1)、(6,n-1)、(8,n-1)、(10,n-1)、(12,n-1)、(14,n-1)的空白方格不會影響到剝離正方形的產生。

∴偶數行中，共有 $\frac{7(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；

奇數行中，共有 $\frac{6(n-4)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生剝離數。

$$Z=\frac{7(n-4)}{2}+\frac{6(n-4)}{2}=\frac{13(n-4)}{2}$$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

∴ $Y=\frac{13(n-4)}{6}$，當 $Z=3t$，$t\in N$；

$Y=\frac{13(n-4)}{6}$，當 $Z\neq 3t$，$t\in N$。

$\therefore X=\frac{15(n-2)}{2}-\frac{13(n-4)}{6}$，當 n=2h，$\frac{13(n-4)}{6}=3t$，$h\in N-\{1\}$，$t\in N$；

$X=\frac{15(n-2)}{2}-\left\{\left[\frac{13(n-4)}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h, $\frac{13(n-4)}{6}\neq 3t$，$h\in N-\{1\}$，$t\in N$。

②當 n=2h+1，$h\in N-\{11,14,17\ldots\}$時

$P=\frac{15(n-2)+1}{2}$

∴偶數行中，共有 $\frac{7(n-3)}{2}-7$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；

奇數行中，共有 $\frac{6(n-3)}{2}$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$Z=\frac{7(n-3)}{2}-7+\frac{6(n-3)}{2}=\frac{13n-53}{2}$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

$\therefore Y=\frac{13n-53}{6}$，Z=3t，$t\in N$；

$Y=\left[\frac{13n-53}{6}\right]+1$，當 $Z\neq 3t$，$t\in N$。

$\therefore X=\frac{15(n-2)+1}{2}-\frac{13n-53}{6}$，當 n=2h+1，$\frac{13n-53}{6}=3t$，$h\in N-\{1\}$，$t\in N$；

$X=\frac{15(n-2)+1}{2}-\left\{\left[\frac{13n-53}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h+1，$\frac{13n-53}{6}\neq 3t$，$h\in N-\{1\}$，$t\in N$。

③特殊型：當 n=17+6h，$h\in N$

因為 11 為奇數，所以特殊型恆發生在 n 為奇數時，又由②的情形中求得：

$Z=\frac{13n-53}{2}=\frac{13(17+6h)-53}{2}=84+39h$ 恆為 3 的倍數。

$\therefore Y=\frac{13n-53}{6}+1=\frac{13n-47}{6}$

$\therefore X=\frac{15(n-2)+1}{2}-\frac{13n-47}{6}$，當 n=17+6h，$h\in N$。

I.一般解的推導

從 m=3、5、7、9、11、13、15、17 中，獲得以下結論：

a.3×n 之方紙格板

$P=\frac{(n-2)}{2}$, 當 n=2h, $h\in N$，

$P=\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}$, 當 n=2h+1, $h\in N$。

b.5×n 之方紙格板

$X=\frac{3(n-2)}{2}$，當 n=2h，$h\in N-\{1,2\}$；

$X=\frac{3(n-2)+1}{2}$，當 n=2h+1，$h\in N-\{1,2\}$。

c.當 n=2h，$h\in N$ 時

$P=\frac{(m-2)(n-2)}{2}$

∵偶數行中，每行最多可以在 $\frac{(m-3)}{2}+1$ 個小方格作記號；

奇數行中，每行最多可以在 $\frac{(m-3)}{2}$ 個小方格作記號。

且每兩個作上記號的方格間各夾一個空白方格，而左右兩邊(3,2)、(5,2)、(7,2)、(9,2)⋯(m-2,2)、(2,n-1)、(4,n-1)、(6,n-1)、(8,n-1)⋯(m-3,n-1)的空白方格不會影響到剝離正方形的產生。

∴偶數行中，共有 $\left(\frac{m-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $\left(\frac{m-3}{2}-1\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生剝離數。

$Z=\left(\frac{m-3}{2}\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)+\left(\frac{m-3}{2}-1\right)\left(\frac{n-4}{2}\right)=\frac{(m-4)(n-4)}{2}$

∵每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

∴ $Y=\frac{(m-4)(n-4)}{6}$，當 Z=3t，$t\in N$；

$Y=\left[\frac{(m-4)(n-4)}{6}\right]+1$，當 $Z\neq 3t$，$t\in N$。

$\therefore$ X=$\frac{(m-2)(n-2)}{2}-\frac{(m-4)(n-4)}{6}$，當 n=2h, $\frac{(m-4)(n-4)}{6}$=3t，

h$\in$N-{1}，t$\in$N；

X=$\frac{(m-2)(n-2)}{2}-\left\{\left[\frac{(m-4)(n-4)}{6}\right]+1\right\}$，當 n=2h, $\frac{(m-4)(n-4)}{6}\neq 3t$，

h$\in$N-{1}，t$\in$N。

d. 當 n=m+6h，h$\in$N

$$P=\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}$$

$$Z=\frac{(m-4)(n-4)-1}{2}$$

$$Y=\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}+1=\frac{(m-4)(n-4)+5}{6}$$

X=$\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}-\frac{(m-4)(n-4)+5}{6}$，當 n=m+6h，h$\in$N。

e. 當 n=2h+1，h$\in$N

$$P=\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}$$

$\because$ 偶數行中，每行最多可以在 8 個小方格作記號；

奇數行中，每行最多可以在 7 個小方格作記號。

且每兩個作上記號的方格間各夾一個空白方格，而左右兩邊，(3,2)、(5,2)、(7,2)、(9,2)…(m-3,2)、(m-1,2)、(3,n-1)、(5,n-1)、(7,n-1)、(9,n-1)…(m-3,n-1)的空白方格不會影響到剝離正方形的產生。

$\therefore$ 偶數行中，共有 $\left(\frac{m-3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}-1\right)$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生；奇數行中，共有 $\left(\frac{m-3}{2}-1\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)$ 個空白方格會影響到剝離正方形的產生。

$$Z=\left(\frac{m-3}{2}\right)\left(\frac{n-3}{2}-1\right)+\left(\frac{m-3}{2}-1\right)\left(\frac{n-3}{2}\right)=\frac{(m-4)(n-4)-1}{2}$$

$\because$ 每一次消去記號會減少 3 個剝離的正方形，

$\therefore$ Y=$\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}$；

Y=$\left[\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}\right]+1$。

$$\therefore X=\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}-\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}，\text{當 } n=2h+1，$$

$$\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}=3t，h\in N-\{1\}，t\in N；$$

$$X=\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}-\left\{\left[\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}\right]+1\right\}，\text{當 } n=2h+1，$$

$$\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}\neq 3t，h\in N-\{1\}，t\in N。$$

(3)規律性的畫法

在作過數百張圖後，我們也從中發現一些作圖的規律性，雖然說一些隨機、無規律性的作法也可以做出正確符合題意的圖，但卻無法看出圖中的趣味性及美感。我們在作圖時也依照奇數、偶數及 2 的次方加 1 型分成三種畫法：

A. 在 $n\times n$ 中，$n=2^t+1$（3, 5,9,17,33, …）時，圖形皆為 4 個前一圖形所組成的，且這些類型的圖形都是唯一的沒有其他形式，此一類型在前面以討論過，故在此不多做敘述。

B.在 n × n 中，n 為奇數時及在 m × n 中，m 為奇數時：

我們必須將圖分為上下兩個部分來看（圖 109）：

a.不論上半部的圖為如何，下半部的圖皆須為此種圖形，為了便於辨識，用黑線表示小圓環控制的剝離正方形區域（圖 109）。

b.在下半部的圖中，小圓環放置的位置為(4 , m-3)、(6 , m-3)、(8 , m-3)…依序向右作圖（圖 109）。

c.上半部的圖中，小圓環放置的位置則是由(4 , 4)、(4 , 6)、(4 ,8)…及(7 , 3)、(7 , 5)、(7 , 7) 依序向下作圖，再從(10 , 4)、(10 , 6)、(10 , 8)…及(13 , 3)、(13 , 5)、(7 , 7)…繼續作圖，即 x 座標由 4 和 7 開始以差 6 的等差級數增加，而 y 作標則分別從 4 和 3 開始以差 2 的等差級數增加，並視圖形狀況而停止（圖 109）。

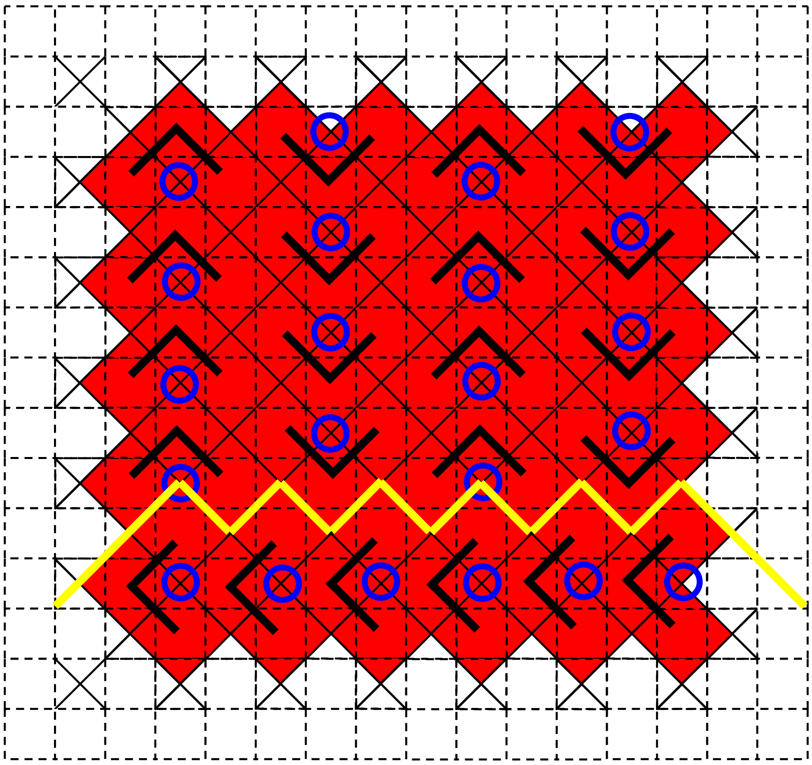


圖 109

d.但是並非所有的圖都像圖 109 一樣可以這麼整齊、完整，大部分的圖在作圖到右半部後往往必須再稍作調整，才可做出符合所求的圖（圖 110）、（圖 111）。

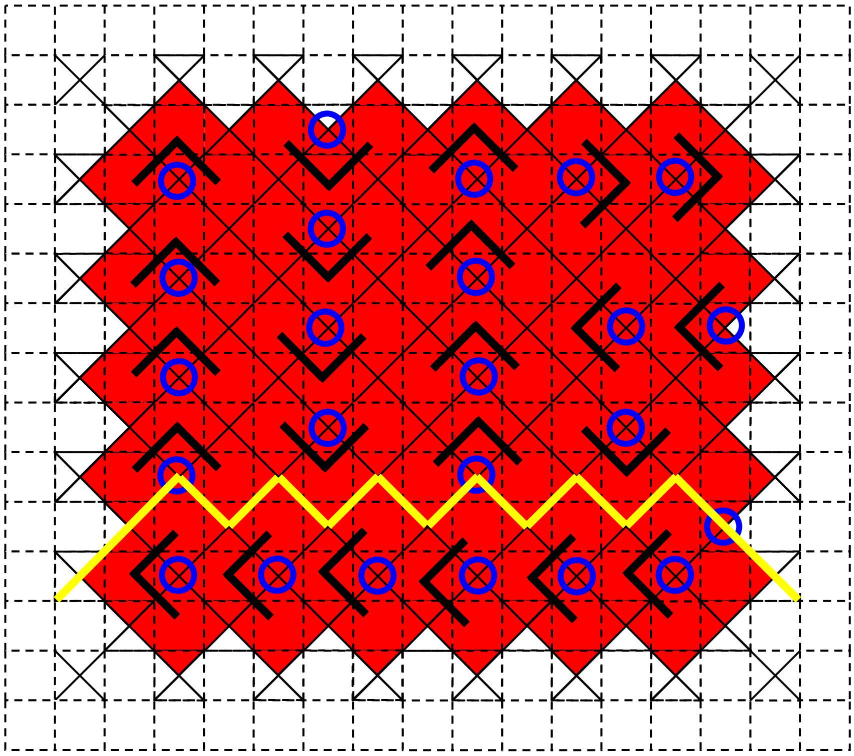


圖 110

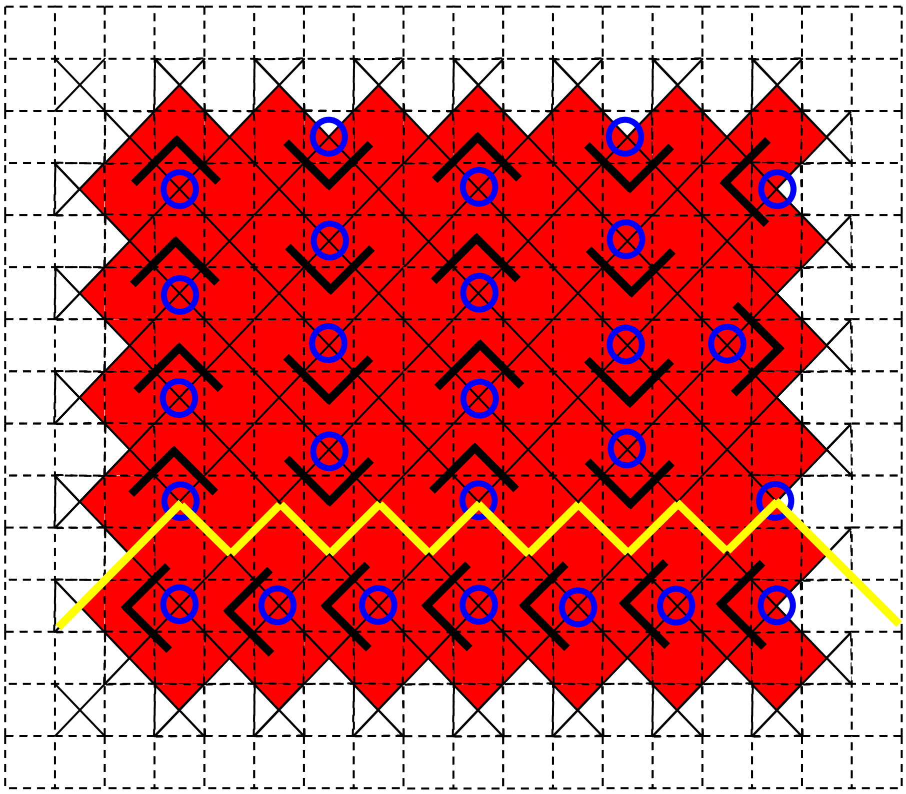


圖 111

e.在 13 ×偶數時另有一種規律作圖法，小圓環放置的位置則是由(4 , 4)、(3 , 7)、(4 , 10)開始，在 y 座標固定下，x 座標以差 2 的等差級數依序增加向右作圖（圖 112）、（圖 113）。

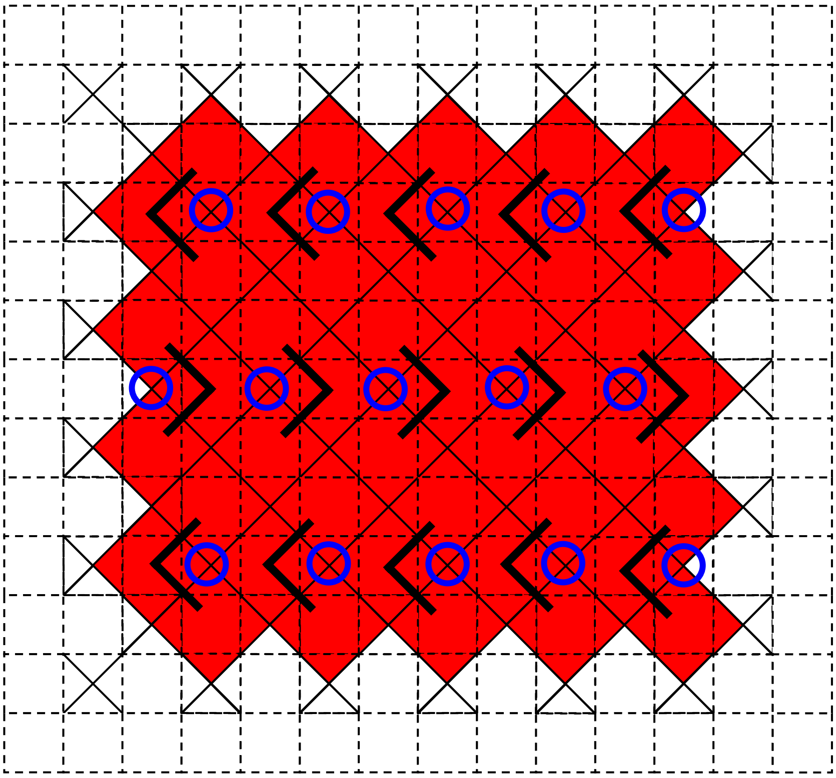


圖 112

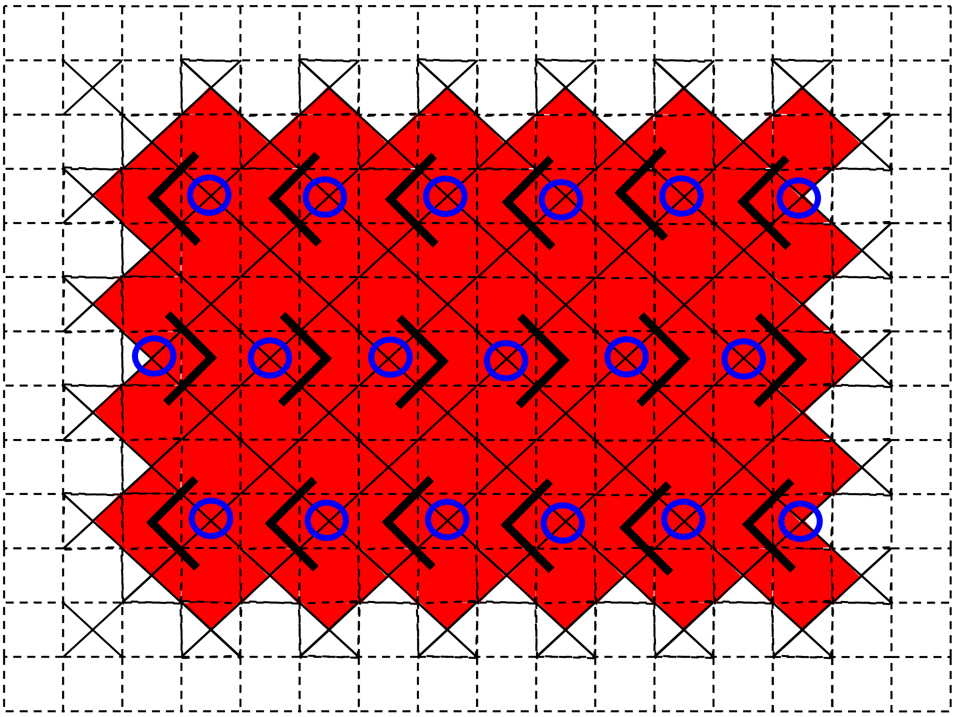


圖 113

C.在 n×n 中，n 為偶數時及在 m × n 中，m 為偶數時：

a.小圓環放置的位置是由(4 , 4)、(4 , 6)、(4 ,8) …及(7 , 3)、(7 , 5)、(7 , 7) 依序向下作圖，再從(10 , 4)、(10 , 6)、(10 , 8) …及(13 , 3)、(13 , 5)、(7 , 7) …繼續，即 x 座標由 4 和 7 開始以差 6 的等差級數增加，而 y 作標則分別從 4 和 3 開始以差 2 的等差級數增加，並視圖形狀況而停止（圖 114）。

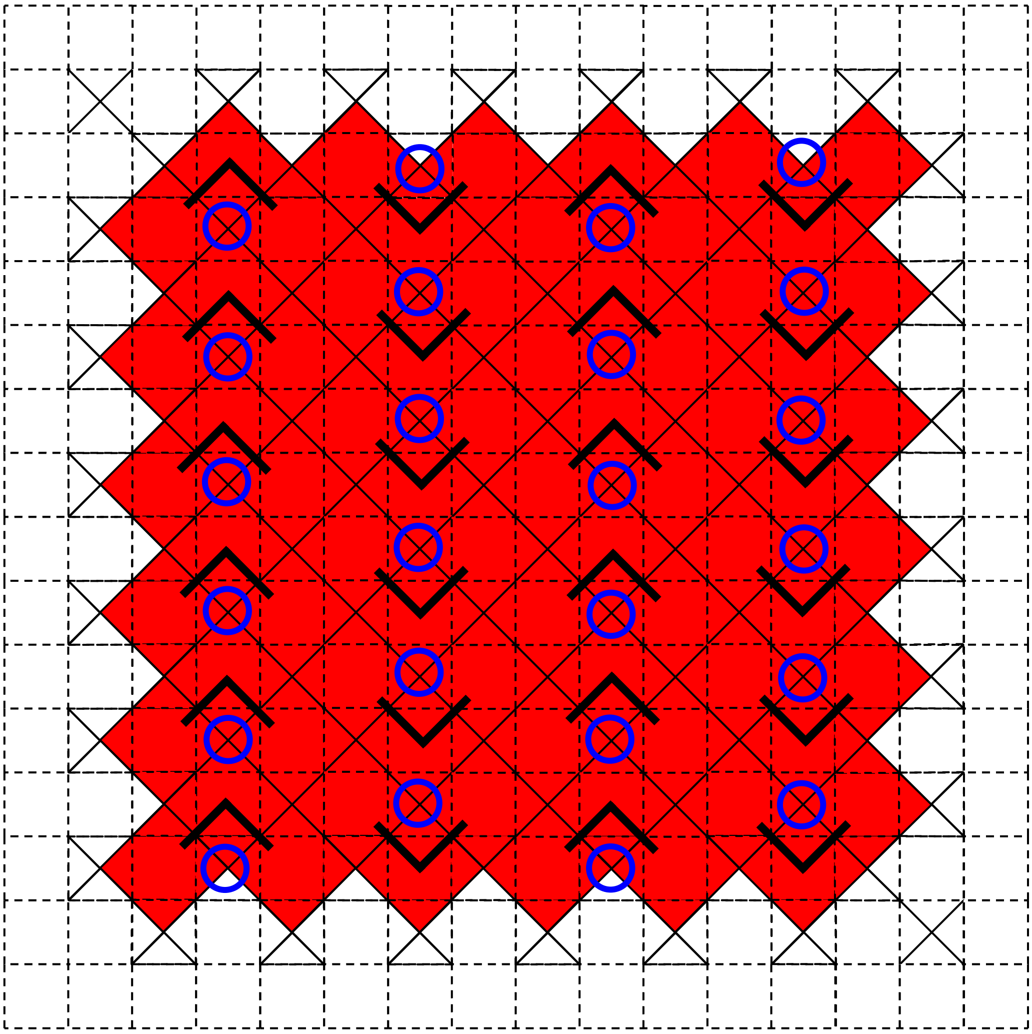


圖 114

d.但是並非所有的圖都像圖 114 一樣可以這麼整齊、完整，大部分的圖在作圖到右半部後往往必須再稍作調整，才可做出符合所求的圖（圖 115）、（圖 116）。

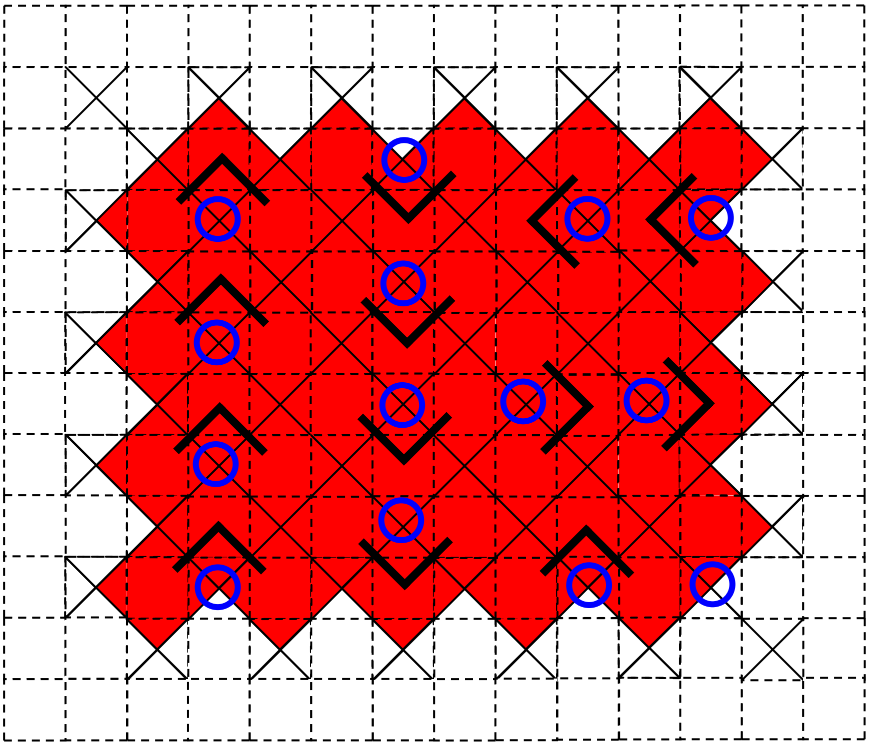


圖 115

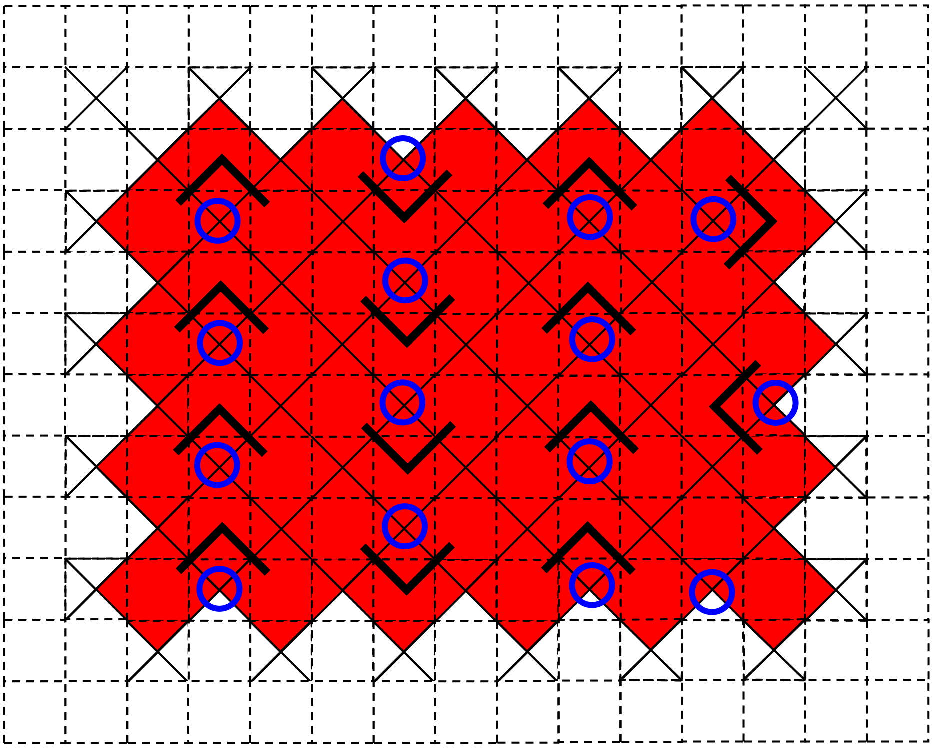


圖 116

三、研究結果與討論

（一）研究結果

1. 在 $n\times n$ 之方格紙板中，我們求得可切割小方格數之極大值：

(1) 當 $n \leqq 10$：

A. 當 $n=2k$，$k\in N-\{1\}$，且 $(2k^2-8k+8)=3h,\ h\in N$ 時，

$$X=(2k^2-4k+2)-\left(\frac{2k^2-8k+8}{3}\right)。$$

B. 當 $n=2k$，$k\in N-\{1\}$，且 $(2k^2-8k+8)\neq 3h,\ h\in N$ 時，

$$X=(2k^2-4k+2)-\left\{\left(\frac{2k^2-8k+8}{3}\right)+1\right\}。$$

C. 當 $n=2k+1$，$k\in N$，且 $(2k^2-6k+4)=3h,\ h\in N$ 時，

$$X=(2k^2-2k+1)-\left(\frac{2k^2-6k+4}{3}\right)。$$

D. 當 $n=2k+1$，$k\in N$，且 $(2k^2-6k+4)\neq 3h,\ h\in N$ 時，

$$X=(2k^2-2k+1)-\left\{\left(\frac{2k^2-6k+4}{3}\right)+1\right\}。$$

(2) 當 $n \geqq 11$：

A. 當 $n=2k$，$k\in N$，且 $2k^2-8k+8=3h,\ h\in N$ 時，

$$X=(2k^2-4k+2)-\left(\frac{2k^2-8k+8}{3}\right)。$$

B. 當 $n=2k=4+6t$，$k\in N$，且 $2k^2-8k+8\neq 3h,\ h\in N$ 時，

$$X=(2k^2-4k+2)-\left\{\left[\frac{2k^2-8k+8}{3}\right]+1\right\}。$$

C. 當 $n=2k+1$，$k\in N$，且 $2k^2-8k+8=3h,\ h\in N$ 時：

a. 當 $n=3+6t$ 或 $n=5+6t$，$t\in N$ 時，

$$X=(2k^2-2k+1)-\left\{\left[\frac{2k^2-6k+4}{3}\right]+1\right\}。$$

b. 當 $n=2^t+1$，$t\in N$ 時，

$$X=(2k^2-2k+1)-\left(\frac{2k^2-6k+4}{3}\right)。$$

D. 當 $n=2k+1$，$k\in N$，且 $(2k^2-6k+4)\neq 3h$, $h\in N$ 時，

$$X=(2k^2-2k+1)-\left\{\left[\frac{2k^2-6k+4}{3}\right]+1\right\}。$$

E. 當 $n=2^s+1$，$s\in N$ 時，

$$X=(2k^2-2k+1)-\left(\frac{2k^2-6k+4}{3}\right)。$$

2. 在 $m\times n$ 之方格紙板中，我們求得可切割小方格數之極大值：

(1) 當 $m=2k$，$k\in N$ 時：

A. 當 $k=2$，即 $m=4$ 時：

a. 當 $n=2h$，$h\in N$ 時,

$X=n-2$。

b. 當 $n=2h+1$，$h\in N$ 時，

$$X=\frac{2n-3}{2}。$$

B. 當 $n=3h+1$，$h\in N$ 時，

$$X=\frac{(m-2)(n-2)}{2}-\left[\frac{(m-4)(n-4)}{6}\right]。$$

C. 當 $n\neq 3h+1$，$h\in N$ 時，

$$X=\frac{(m-2)(n-2)}{2}-\left\{\left[\frac{(m-4)(n-4)}{6}\right]+1\right\}。$$

(2) 當 $m=2k+1$，$k\in N$ 時：

A. 當 $k=1$，即 $m=3$ 時：

a. 當 $n=2h$，$h\in N$ 時,

$$X=\frac{(n-2)}{2}。$$

b. 當 $n=2h+1$，$h\in N$ 時，

$$X=\frac{(n-2)+1}{2}。$$

B. 當 $k=2$，即 $m=5$ 時：

a. 當 $n=2h$，$h\in N$ 時,

$$X=\frac{3(n-2)}{2}。$$

b. 當 $n=2h+1$，$h\in N$ 時,

$$X=\frac{3(n-2)+1}{2}。$$

C. 當 n=2h，h∈N-{1}時：

a. 當 $\frac{(m-4)(n-4)}{6}=3t$，t∈N 時，

$$X=\frac{(m-2)(n-2)}{2}-\frac{(m-4)(n-4)}{6}$$ 。

b. 當 $\frac{(m-4)(n-4)}{6}\neq 3t$，t∈N 時，

$$X=\frac{(m-2)(n-2)}{2}-\left\{\left[\frac{(m-4)(n-4)}{6}\right]+1\right\}$$ 。

c. 當 n=m+6t，t∈N 時，

$$X=\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}-\frac{(m-4)(n-4)+5}{6}$$ 。

D. 當 n=2h+1，n∈N，h∈N 時：

a. 當 $\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}=3t$，t∈N 時，

$$X=\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}-\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}$$ 。

b. 當 $\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}\neq 3t$，t∈N 時，

$$X=\frac{(m-2)(n-2)+1}{2}-\left\{\left[\frac{(m-4)(n-4)-1}{6}\right]+1\right\}$$ 。

3. 規律性的畫法：

(1) 在 n × n 中，$n=2^t+1$（3, 5,9,17,33, …）時，圖形皆為 4 個前一圖形所組成的，且這些類型的圖形都是唯一的沒有其他形式。

(2) 在 n × n 中，n 為奇數時及在 m × n 中，m 為奇數時：

A. 我們必須將圖分為上下兩個部分來看。

B. 在下半部的圖中，小圓環放置的位置為(4 , m-3)、(6 , m-3)、(8 , m-3)…依序向右作圖。

C. 上半部的圖中，小圓環放置的位置則是由(4 , 4)、(4 , 6)、(4 ,8) …及(7 , 3)、(7 , 5)、(7 , 7) 依序向下作圖，再從(10 , 4)、(10 , 6)、(10 , 8) …及(13 , 3)、(13 , 5)、(7 , 7)…繼續作圖，即 x 座標由 4 和 7 開始以差 6 的等差級數增加，而 y 作標則分別從 4 和 3 開始以差 2 的等差級數增加，並視圖形狀況而停止。

D. 大部分的圖在作圖到右半部後往往必須再稍作調整，才可做出符合所求的圖。

E. 在 13 ×偶數時另有一種規律作圖法，小圓環放置的位置則是由(4 , 4)、(3 , 7)、(4 , 10)開始，在 y 座標固定下，x 座標以差 2 的等差級數依序增加向右作圖。

(3)在 n × n 中，n 為偶數時及在 m × n 中，m 為偶數時：

A. 小圓環放置的位置是由(4 , 4)、(4 , 6)、(4 ,8) …及(7 , 3)、(7 , 5)、(7 , 7) 依序向下作圖，再從(10 , 4)、(10 , 6)、(10 , 8) …及(13 , 3)、(13 , 5)、(7 , 7) …繼續，即 x 座標由 4 和 7 開始以差 6 的等差級數增加，而 y 作標則分別從 4 和 3 開始以差 2 的等差級數增加，並視圖形狀況而停止。

B. 大部分的圖在作圖到右半部後往往必須再稍作調整，才可做出符合所求的圖。

（二）討論

從此研究中，我們討論平面中長方形和正方形的切割情況，以作圖方式求出相關數據、找出規律切割方法，將其可以切割之小方格數算出，但是卻無法確切證明其最大值之正確性，也無法證明為何有些特殊型的方格其作圖所得得數據和我們所推測的不同，所以下一步的目標是想出適當的證明方法。而在研究過程中，我們曾嘗試利用電腦程式來輔助解題，希望以程式來判斷圖形的正確性，但是在判斷何處該消去記號的時候，遇到了難題，如果用我們原本想法來寫程式，會有耗時和解法不完善的問題產生，如何改善程式使電腦能更人性化的去判斷也是一項需完成的目標。進一步地，我們希望能以 2 維的切割方法及規則為基礎，往 3 維空間中的切割邁進，我們認為既然在平面中切兩刀為一次切割，那麼在 3 維空間中應該是以切三刀為一次切割，但是到目前為止我們卻還無法完善的定義出空間中的切割及相關規則，如果能將相關的定義作修改，說不定就能作出 3 為空間中的圖形，或許會有令人驚奇的發現。接著，如果能從 3 維空間擴展至 n 維空間中，是不是有一個最終的模型存在著正等著我們去發現呢？

四、結論與應用

我們在這個研究中，藉由作圖發現圖形型式的多樣，推測出所有平面中 n × n 與 m × n 方格紙中做切割的相關數據，並發現圖形的規律性，雖然中途曾因作錯圖以及發現特殊型的圖案而產生與所做出的推測有所矛盾，耽誤了不少時間，也沒有完善的證明來解釋，只能從所做出的數百張圖中抽絲剝繭，找出圖形的規律性並將觀察到的數據列出，推出公式解，以最完整的方式將內容呈現。

五、參考資料

（一）2003 年環球城市數學競賽（International Mathematics Tournament of Towns）春季賽國中組試題高級卷第五題。

六、附錄

附錄（一）原始題目

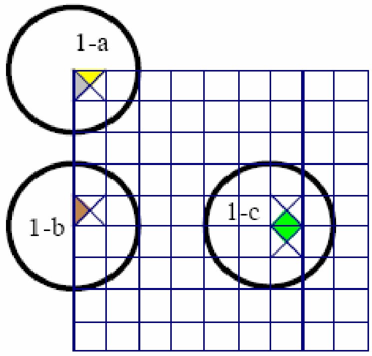
5. 在一塊9×9的正方形方格紙板中。請問最多可以挑選多少個小方格，使得沿著這些被挑選出的小方格中每個小方格的二條對角線割開後，原正方形方格紙板不會被分裂為二片或二片以上（即沒有小片紙板會從原正方形紙板中分離出來）？（七分）

參考解答：（A2071，鍾榮哲）

(1) 如圖(1-a)，被選取的小方格不能在四個角上，因爲方格紙頂角上的小方格會因割開對角線而剝離出兩個小三角形，造成原正方形方格紙板分裂爲二片以上。

(2) 如圖(1-b)，被選取的小方格不能在邊上，因爲方格紙邊上的小方格因割開對角線而剝離出一個三角形，造成原正方形方格紙板分裂爲二片。

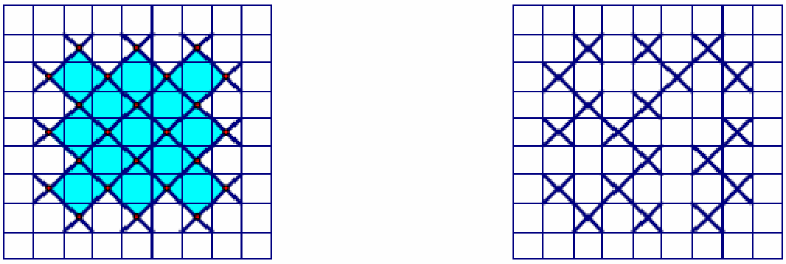
(3) 如圖(1-c)，被選取的小方格不能有兩兩相鄰，因爲若割開兩兩相鄰的小方格的對角線，會因而剝離出一個小正方形，造成原正方形方格紙板分裂爲二片。



根據此規則，方格數要最多，可以分成兩種情況：

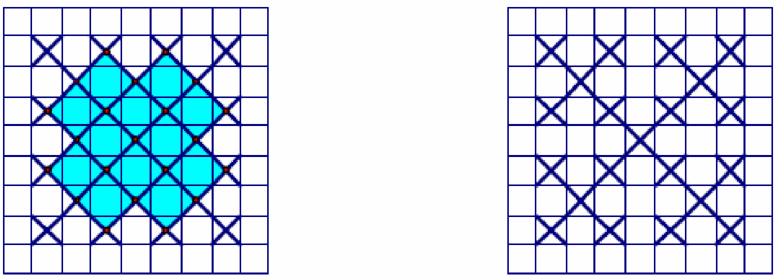
一、如圖(2)，雖然符合規則，但還是會被割下1 3塊正方形；除了中間的九個小方格外，若少剪一個方格，最多只能少分離出3 個正方形，所以要少剪4 個外圍的正方形，外加一個中間的方格，所以總共要少剪5 個小方格，共剪$24-5=19$個方格。

圖 (2)：



二、如圖(3)，雖然符合規則，但還是會被割下1 2塊正方形；除了中間的九個小方格外，若少剪一個方格，最多只能少分離出3 個正方形，所以少剪4 個外圍的正方形可以少分離1 2塊正方形，共剪$25-4=21$個方格。

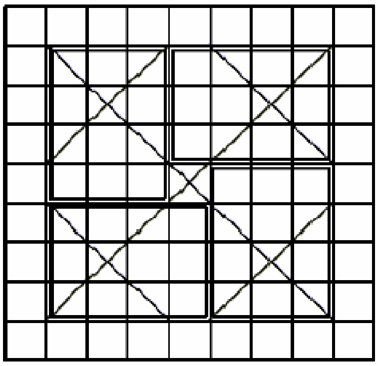
圖 (3)：



因此，從這兩種情形來看，最多只能剪2 1個小方格。

以下我們證明最多只能剪21塊方格。考慮3×4的方格表，因爲鄰格不能同時切割，所以每一列至多可以剪2個方格。如果我們真得每一列都剪下2個方格，而這6個方格沒有任何二個相鄰，則在3×4的方格表黑白相間塗色的情形下，這些被剪的方格必爲同一種顏色。當中4個被剪開的方格必產生一個被分離、孤立的區域，這不合題意，所以3×4的方格表最多只能剪開5個方格。

在9×9的方格表中，外圍的方格不可被剪開，剩下內部7×7的方格表，可以分成四個3×4的方格表及正中間的小方格，如下圖所示。所以最多只能剪21塊方格。



附錄（二）程式碼

```
Dim Sean(100, 100) As Integer, Check(100, 100) As Integer
Dim Xlong As Integer, Ylong As Integer, X As Integer, Y As Integer

Private Sub Run_check()

    Dim L As Integer
    Dim Wrong As Boolean

    Wrong = False

    For X = 0 To 100
        For Y = 0 To 100
            Check(X, Y) = 0
        Next
    Next

    For X = 0 To Xlong
        Check(X, 0) = 1
        Check(X, Ylong) = 1
    Next

    For Y = 0 To Ylong
        Check(0, Y) = 1
        Check(Xlong, Y) = 1
    Next

    For X = 1 To Xlong - 1
        For Y = 1 To Ylong - 1
            If Sean(X, Y) = 1 Then
                Check(X, Y) = 2
            End If
        Next
    Next

    For L = 1 To (Xlong - 1) * (Ylong - 1)
        For X = 1 To Xlong - 1
            For Y = 1 To Ylong - 1
```

```
            If Check(X, Y) = 0 Then
                If Check(X - 1, Y) = 1 Or Check(X + 1, Y) = 1 Or Check(X, Y - 1) = 1 Or Check(X, Y + 1) = 1 Then
                    Check(X, Y) = 1
                End If
            End If

            If Check(X, Y) = 1 Then
                If Check(X - 1, Y) = 0 Then
                    Check(X - 1, Y) = 1
                End If

                If Check(X + 1, Y) = 0 Then
                    Check(X + 1, Y) = 1
                End If

                If Check(X, Y - 1) = 0 Then
                    Check(X, Y - 1) = 1
                End If

                If Check(X, Y + 1) = 0 Then
                    Check(X, Y + 1) = 1
                End If
            End If

        Next
    Next
Next

For X_count = 1 To Xlong - 1
    For Y_count = 1 To Ylong - 1
        If Check(X_count, Y_count) = 0 Then
            Wrong = True
            Exit For
        End If
    Next
    If Wrong = True Then
        Exit For
    End If
```

```
    Next

    For X = 0 To Xlong
        For Y = 0 To Ylong
            Print Check(X, Y);
        Next
        Print
    Next


    Print Wrong

End Sub
```

附錄（三）研究記錄和資料

勘誤表

(1) p14： 引理一：當 n=2k 時，最多可作上記號的方格數 P 為 $2k^2-4k+2$。

改為 引理一：當 n=2k 時，不侵犯基本限制下，最大剝離正方形數Z為 $2k^2-8k+8$。

(2) p14： 引理二：當 n=2k+1 時，最多可作上記號的方格數 P 為 $2k^2-6k+4$。

改為 引理二：當 n=2k+1 時，不侵犯基本限制下，最大剝離正方形數Z 為 k^2-6k+4。

(**3**) p104： **E.** 當 $n=2^s+1$，$s\in N$時……

改為 刪去此段

(4) p106 規律性畫法(2)之 C 第四行： y 作標

改為 y 座標

(5) p107 規律性畫法(3)之 A 第四行： y 作標

改為 y 座標

(6)