台灣二ＯＯ五年國際科學展覽會

科　　別：數學

作品名稱：隨機物體轉移過程的實驗時間之初探

得獎獎項：大會獎第二名

智利正選代表:智利 2005 年科學博覽會

學　　校：臺北市立建國高級中學

作　　者：楊如琛

評語與建議事項：

本研究表面上超越中學數學的範圍。但是它爲研究者帶來基礎數學中最重要的兩門領域－線性代數與機率論－重要的學習經驗

作者

The Experiment Time of Random Objects Translation Process

Abstract

Define two systems , A includs 2k objects , $k \in \mathbb{N}$ and B has none . They can transfer at most one object from one system to another in a time unit . When the number of objects in B is *i*-1 , $i \in \{1,2,\ldots,k+1\}$, we say the system is at state *i* . As soon as system transfer form state 1 (initial state) to state k+1 (the same state) , the experiment stop . Random variable T , called the experiment time , is the time before stop. What would be the distribution of the experiment time if all systems have the same amount of objects within ? This article will focus on the described question and discuss what property the experiment time of the system under various conditions has , such as probability , mean , and variance .

1. Let p_i represent the probability form state i to state i+1 , $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $0 < p_i < 1$, $q_i = 1 - p_i$. If none of p_i's in the irreversible system are the same, we get the probability density function of T

$$P(T=t) = \left(\prod_{i=1}^{k} p_i\right) \sum_{j=1}^{k} \frac{q_j^{t-1}}{\prod\limits_{\substack{i \in \{1,2,\ldots,k\} \\ i \neq j}} (q_j - q_i)} \quad ,$$

and mean $E(T) = \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{1-q_i}$, variance $Var(T) = \sum_{i=1}^{k} \frac{q_i}{(1-q_i)^2}$, characteristic function

$$\phi_T(s) = \left(\prod_{j=1}^{k} p_j\right) \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{is}}{1 - q_j e^{is}}, s \in \mathbb{R} \quad .$$

2. Let $p_{go}(i)$ represents the probability from state i to state i+1 , $p_{stop}(i)$ represent the probability staying at state i , $p_{back}(i)$ represent the probability form state i to state i-1 ,

$i \in \{1,2,\ldots,k\}$, matrix $\mathbf{P}'_{re} = \begin{pmatrix} p_{stop}(1) & p_{back}(2) & & & \mathbf{0} \\ p_{go}(1) & p_{stop}(2) & p_{back}(3) & & \\ & p_{go}(2) & p_{stop}(3) & \ddots & \\ & & p_{go}(3) & \ddots & p_{back}(k) \\ \mathbf{0} & & & \ddots & p_{stop}(k) \end{pmatrix}$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ are the

eigenvalues of matrix $\mathbf{P}_{re}^{'}$. Let $\boldsymbol{\lambda}_t(k)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{t-1} & \lambda_k^{t-1} \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{\lambda}(k)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$, if a reversible system has $\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\neq 0$, then we get the

probability density function of T

$$P\left(T=t\right)=\left(\prod_{i=1}^{k} p_{go}(i)\right)\frac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)},$$

and mean $E(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}$, and variance $Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\left(1-\lambda_i\right)^2}$, characteristic function

$$\phi_T\left(s\right)=\left(\prod_{i=1}^{k} p_{go}\left(i\right)\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{\mathrm{i}s}}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_j}=\frac{\prod_{i=1}^{k} p_{go}\left(i\right)}{\det\left(e^{-\mathrm{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)}, s\in\mathbb{R} \quad .$$

3. A reversible system can be replaced by an irreversible system, of which each probability staying at the same state is the eigenvalue of the reversible system . $\Leftrightarrow$ Matrix $\mathbf{P}_{re}^{'}$ is positive definite.

隨機物體轉移過程的實驗時間之探討

<u>中文摘要</u>

有二系統 A 和 B，A 中一開始有 2k 個物體，$k\in\mathbb{N}$，B 中有 0 個物體。在一個單位時間內，兩系統可以互相轉移最多一個物體。當 B 中物體的個數爲 i-1，$i\in\{1,2,\ldots,k+1\}$，我們稱其爲狀態 i，從狀態 1﹝初態﹞開始計時，到達狀態 k+1﹝相同態﹞便即刻停止實驗，經過之時間爲一隨機變數 T，稱之爲實驗時間。問當兩個系統的物體數剛好相等時，經過的實驗時間之分佈爲何？本文將以上述問題爲核心，分別探討不同條件下系統的實驗時間所反映出來的現象，如機率、期望值、變異數等等。

﹝一﹞令 p_i 代表由狀態 i 到狀態 i+1 之機率 $i\in\{1,2,\ldots,k\}$，$0<p_i<1$，設 $q_i=1-p_i$。對於每個 p_i 都不相同的不可逆系統，我們有 T 的機率密度函數

$$P(T=t)=\left(\prod_{i=1}^{k}p_i\right)\sum_{j=1}^{k}\frac{q_j^{t-1}}{\prod\limits_{\substack{i\in\{1,2,\ldots,k\}\\ i\neq j}}(q_j-q_i)},$$

且期望值 $E(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-q_i}$，變異數 $Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{(1-q_i)^2}$，特徵函數

$$\phi_T(s)=\left(\prod_{j=1}^{k}p_j\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{\mathrm{i}s}}{1-q_je^{\mathrm{i}s}},s\in\mathbb{R}\ 。$$

﹝二﹞令 $p_{go}(i)$ 代表由狀態 i 到狀態 $i+1$ 之機率，$p_{stop}(i)$ 代表在狀態 i 不動之機率，$p_{back}(i)$ 代表由狀態 i 回到狀態 i-1 之機率，$i\in\{1,2,\ldots,k\}$，所有機率值都在(0,1)開區間。矩陣

$$\mathbf{P}_{re}^{'}=\begin{pmatrix} p_{stop}(1) & p_{back}(2) & & & \mathbf{0} \\ p_{go}(1) & p_{stop}(2) & p_{back}(3) & & \\ & p_{go}(2) & p_{stop}(3) & \ddots & \\ & & p_{go}(3) & \ddots & p_{back}(k) \\ \mathbf{0} & & & \ddots & p_{stop}(k) \end{pmatrix}$$

，$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ 是矩陣 $\mathbf{P}_{re}^{'}$ 的特徵值。記

$$\boldsymbol{\lambda}_t(k)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \ldots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} & \ldots & \lambda_{k-1}^{t-1} & \lambda_k^{t-1} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\lambda}(k)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \ldots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$$

，對於

$\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right) \neq 0$ 的可逆系統，我們有 T 的機率密度函數

$$P\left(T=t\right)=\left(\prod_{i=1}^{k} p_{go}(i)\right)\frac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)} \text{ 。}$$

且期望值 $E(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}$ ，變異數 $Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{\left(1-\lambda_i\right)^2}$ ，特徵函數

$$\phi_T\left(s\right)=\left(\prod_{i=1}^{k} p_{go}\left(i\right)\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{\mathbf{i}s}}{1-e^{\mathbf{i}s}\lambda_j}=\frac{\prod_{i=1}^{k} p_{go}\left(i\right)}{\det\left(e^{-\mathbf{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)}, s\in\mathbb{R} \text{ 。}$$

〔三〕矩陣 $\mathbf{P}_{re}^{'}$ 是正定的可逆系統可以用一個轉移機率相異的不可逆系統取代，且該不可逆系統在每個狀態的停留機率爲原本可逆系統的特徵值。

符號說明：

□	實數集
$□^{n}$	n 維實數向量空間
□	正整數
$□_{\geq 0}$	非負整數
$\mathbf{i}$	$\sqrt{-1}$
$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$	廣義的二項係數
$M_{(n)}$	$n \times n$ 矩陣的集合
$adj(\mathbf{M})$	矩陣 **M** 的伴隨矩陣
$\mathbf{M}^{\mathrm{T}}$	**M** 的轉置矩陣
$\mathbf{I}_{(n)}$	$n \times n$ 單位矩陣
$\mathbf{A} \oplus \mathbf{B}$	**A**、**B** 矩陣的直和(direct sum)
$\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathbf{A}_i$	$\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{A}_n$
$[\mathbf{v}]_j$	行向量 **v** 的第 j 分量
$[\mathbf{M}]_{ij}$	矩陣的第 *i* 列第 j 行元素。

矩陣 **M** ：一律以粗體大寫表示。
集合 S：一律以大寫表示。
向量 **v** ：一律粗體小寫表示。
機率值 p：一律以小寫表示，本文限制所有的成功機率都在(0,1)開區間內。
特徵值 λ ：如不特別敘述，一律規定 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_n$ 。
文字足標：本文中足標以 **ir (irreversible)** 表示不可逆系統例如 $\mathbf{P}_{ir}$ ，**ure (uniform reversible)** 表示均勻可逆系統，**re (reversible)** 表示一般可逆系統。

壹、研究動機

自從上了高中之後，我有幸獲准得以參加國科會推行之「基礎科學人才培育計畫」，並一邊學習機率論一邊嘗試研究：**隨機空間填充問題(problem concerning random space filling)**，爲了簡化上述問題而輾轉得到這個想法。這個想法起初相當簡單，但在詢問老師之後，發現科學上對於隨機實驗之時間的討論甚少，但種種常見的情形都顯示這種實驗時間的重要性以及可應用性，例如在現實世界中有關隨機城市人口流動的預測等等。因此秉持著「做人好，做好人」的原則，我便投入這項研究，希望能將其摸索明瞭後，能對整個人群甚或科學有微末貢獻。然而最重要的原因便是徜徉在浩瀚無垠的數學海中，能夠學習其他學科所沒有的高度思維與嚴謹深究，這將使我更加地成長、茁壯。

貳、研究目的

〔一〕解決下列問題：

「給定二個系統 A，B 各包含一些物體，在一個單位時間內，以一個物體的數量隨機相互移動，問當兩個系統的物體數剛好相等時，經過的實驗時間之分佈爲多少？」

〔二〕尋找實驗時間 T 之期望值、變異數以及特徵函數。

〔三〕研究上述所得結果在參數改變時對實驗時間的影響。

〔四〕探究可逆系統與不可逆系統之間的關聯。

〔五〕嘗試將導出的模型應用在各領域中類似的實驗上。

參、研究設備器材

紙、筆、電腦、Mathematica 4.1

肆、研究過程

一、不可逆系統

定義 1.1：有二系統 A 和 B，A 中一開始有 2k 個物體，$k\in\mathbb{N}$，B 中有 0 個物體。在一個單位時間內，只能自 A 移一個物體至 B 或保持原狀的系統稱爲**不可逆系統**。當 B 中物體的個數爲 i-1，$i\in\{1,2,\ldots,k+1\}$，我們稱其爲**狀態 i (state i)**，令 p_i 代表由狀態 i 到狀態 i+1 的機率，$0<p_i<1$，q_i 代表在狀態 i 不變的機率，顯然 $q_i=1-p_i$。從狀態 1〔初態〕開始計時，到達狀態 k+1〔相同態〕便即刻停止實驗，經過之時間爲一**隨機變數(random variable)** T，稱之爲**實驗時間(the experiment time)**。

定理 1.2〔均勻不可逆系統〕：令所有 $p_i=p$ 爲一常數，$q=1-p$，則

$$P(T=t)=\binom{t-1}{k-1}p^k q^{t-k}, t\in\{k,k+1,k+2,\ldots\}。\tag{1.1}$$

證明：我們假設在時間 $t(\geq k)$ 剛好達成相同態，由於一個單位時間內只能由 A 移動最多一個物體至 B，從狀態 1 到狀態 k+1 過程中必經過 k 次成功移動〔機率 p^k〕，t-k 次狀態不變〔

機率 q^{t-k} 〕，但還必須將各種 p,q 的排列情形考量在內。注意到第 t 次必爲成功，實際上即爲 k-1 個 p 與 t-k 個 q 做重複排列，排列數爲 $\dfrac{(t-1)!}{(k-1)!(t-k)!}=\dbinom{t-1}{k-1}$，故

$P(T=t)=\dbinom{t-1}{k-1}p^k q^{t-k}$。Q.E.D.

很明顯地(1.1)式有**負二項分佈(negative binomial distribution)**，所以**期望值(mean)** $E(T)=\dfrac{k}{p}$ ，**變異數(variance)** $Var(T)=\dfrac{kq}{p^2}$ ，**特徵函數(characteristic function)** $\phi_T(s)=\left(\dfrac{pe^{is}}{1-qe^{is}}\right)^k$ ，其證明及討論請參考附錄一。由於均勻不可逆系統的情形相當簡單，我們跟著討論任意的不可逆系統。考慮系統在時間 t 剛好到達狀態 k+1，若在整個過程中系統停留在狀態 i 的時間爲 τ_i ， $i\in\{1,2,...,k\}$ ，顯然經過 t 單位時間後剛好達成實驗之機率爲：

$$P(T=t)=\sum_{(\tau_1,\tau_2,...,\tau_k)\in\mathcal{T}}\left(\prod_{i=1}^{k}p_i q_i^{\tau_i}\right), \tag{1.2}$$

其中 $\mathcal{T}=\left\{(\tau_1,\tau_2,...,\tau_k)\,\middle|\,\tau_i\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\forall i\in\{1,2,...,k\},\sum_{i=1}^{k}\tau_i=t-k\right\}$ 。

上式雖然給出了一種形式上的表示，但並不具有可運算性。我們嘗試將以上過程用轉移矩陣來表示。

定義 1.3：此隨機過程有離散型**狀態空間(state space)** $\mathbf{S}=\{1,2,...,k+1\}$ 。若在某個時間系統爲狀態 j 而下一時間爲狀態 i 之機率記做 p_{ij} ，則矩陣 $\mathbf{P}_0=[p_{ij}]\in M_{(k+1)}$ 記做該隨機過程的**轉移矩陣(transition probability matrix)**。行向量 $\mathbf{v}^{(t)}\in\mathbb{R}^{k+1}$ 爲時間 t 的**狀態向量(state vector)**，其第 i 分量代表當時觀察到狀態 i 的機率，顯然 $\mathbf{v}^{(0)}=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$ 。

現在我們來檢視轉移矩陣中的元素情形。我們侷限系統是不可逆，以及一個單位時間只能移動一個物體，故該系統只能轉變成下一個狀態或不動，因此矩陣中所有代表「狀態折返」的元素，及轉移到「超過下一個狀態」的元素都爲 0，**如果不限制到達相同態便停止**，我

們將有：$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} q_1 & & & & 0 \\ p_1 & q_2 & & \mathbf{0} & 0 \\ & p_2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & q_k & 0 \\ \mathbf{0} & & & p_k & 1 \end{pmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}$ 。我們可以看到該矩陣中每一行的元素和爲 1，故

該矩陣適用馬可夫狀態轉移法則：$[\mathbf{P}_0^t]_{ij}$ 等於由狀態 j 經 t 次轉移後到達狀態 i 之機率；

$\mathbf{v}^{(t)} = \mathbf{P}_0\mathbf{v}^{(t-1)} = \ldots = \mathbf{P}_0{}^t\mathbf{v}^{(0)}$ 。很顯然地，我們所欲求的 $P(T=t) = [\mathbf{v}^{(t)}]_{k+1}$ 。

我們若考慮 $t_0\,(\geq k)$ ，則已有足夠的時間使得 $[\mathbf{v}^{(t_0)}]_{k+1} \neq 0$ 。若此時再將 $\mathbf{P}_0$ 乘以 $\mathbf{v}^{(t_0)}$ ，我們便有 $\mathbf{v}^{(t_0+1)} = \begin{pmatrix} q_1 & & & & 0 \\ p_1 & q_2 & & \mathbf{0} & 0 \\ & p_2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & q_k & 0 \\ \mathbf{0} & & & p_k & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} [\mathbf{v}^{(t_0)}]_1 \\ [\mathbf{v}^{(t_0)}]_2 \\ \vdots \\ [\mathbf{v}^{(t_0)}]_k \\ [\mathbf{v}^{(t_0)}]_{k+1} \end{pmatrix}$ ，即 $P(T=t_0+1) = [\mathbf{v}^{(t_0+1)}]_{k+1} = p_k[\mathbf{v}^{(t_0)}]_k + [\mathbf{v}^{(t_0)}]_{k+1}$ ，也就是說：在時間(t_0 +1)，系統達相同態的機率包含了從狀態 k 到狀態 k+1 的機率值 $p_k[\mathbf{v}^{(t_0)}]_k$ ，以及系統**在狀態 k+1 保持不變的機率** $[\mathbf{v}^{(t_0)}]_{k+1}$ ，這不符合我們想要探討的實驗時間之定義。定義 1.1 對於實驗時間 T 要求一**到達狀態 k+1 便立即停止實驗**，因此在**狀態 k+1 保持不動的機率不存在**。注意在 $p_k[\mathbf{v}^{(t_0)}]_k + [\mathbf{v}^{(t_0)}]_{k+1}$ 中我們需要的只有 $p_k[\mathbf{v}^{(t_0)}]_k$ 這一項，因此若是讓 $[\mathbf{v}^{(t_0)}]_{k+1}$ 消失掉便可得到符合我們想要求的 $P(T=t_0+1)$。因此我們有以下推論：

推論 1.4：真正符合實驗時間定義的 $P(T=t) = [\mathbf{P}_{ir}{}^t\mathbf{v}^{(0)}]_{(k+1)1} = [\mathbf{P}_{ir}{}^t]_{(k+1)1}$ ，其中矩陣 $\mathbf{P}_{ir}$ 是令 $\mathbf{P}_0$ 末個對角元素爲零之矩陣，即 $\mathbf{P}_{ir} = \begin{pmatrix} q_1 & & & & 0 \\ p_1 & q_2 & & \mathbf{0} & \vdots \\ & p_2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & q_k & 0 \\ \mathbf{0} & & & p_k & 0 \end{pmatrix}$ ，注意到 $\mathbf{P}_{ir}$ 並不是一個馬可夫矩陣。

在線性代數裡提供了一種計算矩陣冪次的方法，我們引用以下的定理來計算 $\mathbf{P}_{ir}{}^t$ 。

引理(1)：若矩陣$\mathbf{M} \in M_{(k+1)}$有 k+1 個相異的**特徵值(eigenvalue)**，則$\mathbf{M}$可以**對角化(diagonalize)**：$\mathbf{E}^{-1}\mathbf{ME} = \mathbf{D}$，其中$\mathbf{D}$代表對角線爲所有特徵值的對角矩陣，$\mathbf{E}$代表對應於 k+1 個特徵值的**特徵向量(eigenvector)**依序並排成的矩陣。

證明：參考資料 3.的 263 頁。Q.E.D.

$\mathbf{P}_{ir}$乃是一個下三角形矩陣，因此其**特徵方程(characteristic equation)** $\det\left(\mathbf{P}_{ir} - \lambda \mathbf{I}_{(k+1)}\right) = (q_1 - \lambda)(q_2 - \lambda)\ldots(q_k - \lambda)(0 - \lambda) = 0$的 k+1 個解便爲$q_1, q_2, \ldots, q_k, 0$。因此由上述的引理，我們若是**限制所有的移動機率通通不相等**的話，便有$\mathbf{P}_{ir}$可以對角化。底下引理 1.5，1.7 我們計算$\mathbf{E}_{ir}$以及$\mathbf{E}_{ir}^{-1}$。

引理 1.5：令$\mathbf{E}_{ir} = (\mathbf{e}_{ir}^{(1)} | \mathbf{e}_{ir}^{(2)} | \ldots | \mathbf{e}_{ir}^{(k)} | \mathbf{e}_{ir}^{(k+1)}) \in M_{(k+1)}$，其中$\mathbf{e}_{ir}^{(1)}, \mathbf{e}_{ir}^{(2)}, \ldots, \mathbf{e}_{ir}^{(k)}, \mathbf{e}_{ir}^{(k+1)}$是對應於特徵值$q_1, q_2, \ldots, q_k, 0$的特徵向量，即

$$(\mathbf{P}_{ir} - q_j \mathbf{I}_{(k+1)})\mathbf{x}^{(j)} = 0, \mathbf{x}^{(j)} \in \mathbb{R}^{k+1} \tag{1.3}$$

解空間之基底向量，則

$$[\mathbf{e}_{ir}^{(j)}]_i = \begin{cases} 0, i \in \{1, 2, \ldots, j-1\} \\ \dfrac{q_j \prod_{\alpha=i+1}^{k} (q_j - q_\alpha)}{\prod_{\beta=i}^{k} p_\beta}, i \in \{j, j+1, \ldots, k-1\} \\ \dfrac{q_j}{p_k}, i = k \\ 1, i = k+1 \end{cases}，\forall j \in \{1, 2, \ldots, k\}，且\ \mathbf{e}_{ir}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k+1} \tag{1.4}$$

證明：

(1)我們先取$q_{k+1} = 0$代入(1.3)，便有$\mathbf{P}_{ir}\mathbf{x}^{(k+1)} = 0$，寫開來有：$\begin{cases} q_1[\mathbf{x}^{(k+1)}]_1 = 0 \\ p_1[\mathbf{x}^{(k+1)}]_1 + q_2[\mathbf{x}^{(k+1)}]_2 = 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{k-1}[\mathbf{x}^{(k+1)}]_{k-1} + q_k[\mathbf{x}^{(k+1)}]_k = 0 \\ p_k[\mathbf{x}^{(k+1)}]_k = 0 \end{cases}$。

令$[\mathbf{x}^{(k+1)}]_{k+1} = r, r \in \mathbb{R}$，因爲所有的$\langle p_i \rangle_{i=1}^{k}$都不爲零，所以簡單歸納可得對於所有$i \in \{1, 2, \ldots, k\}$

，$[\mathbf{x}^{(k+1)}]_i = 0$，即$\mathbf{e}_{ir}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$。

(2)現在取q_j，$j \in \{1,2,...,k\}$，便有$(\mathbf{P}_{ir} - q_j \mathbf{I}_{(k+1)})\mathbf{x}^{(j)} = 0$，寫開來有：

$$\begin{cases} (q_1 - q_j)[\mathbf{x}^{(j)}]_1 = 0 \\ p_1[\mathbf{x}^{(j)}]_1 + (q_2 - q_j)[\mathbf{x}^{(j)}]_2 = 0 \\ \vdots \\ p_{j-2}[\mathbf{x}^{(j)}]_{j-2} + (q_{j-1} - q_j)[\mathbf{x}^{(j)}]_{j-1} = 0 \\ p_{j-1}[\mathbf{x}^{(j)}]_{j-1} = 0 \\ p_j[\mathbf{x}^{(j)}]_j + (q_{j+1} - q_j)[\mathbf{x}^{(j)}]_{j+1} = 0 \\ \vdots \\ p_{k-1}[\mathbf{x}^{(j)}]_{k-1} + (q_k - q_j)[\mathbf{x}^{(j)}]_k = 0 \\ p_k[\mathbf{x}^{(j)}]_k - q_j[\mathbf{x}^{(j)}]_{k+1} = 0 \end{cases}$$

，令$[\mathbf{x}^{(j)}]_{k+1} = r, r \in \mathbb{R}, r \neq 0$代入，可解得$[\mathbf{x}^{(j)}]_k = \dfrac{q_j}{p_k} r$，再代一次可解得$[\mathbf{x}^{(j)}]_{k-1} = \dfrac{q_j\left(q_j - q_k\right)}{p_k p_{k-1}} r$，我們假設$[\mathbf{x}^{(j)}]_{n_0+1} = \dfrac{q_j \prod_{\alpha=n_0+2}^{k} (q_j - q_\alpha)}{\prod_{\beta=n_0+1}^{k} p_\beta} r$成立，則

$$[\mathbf{x}^{(j)}]_{n_0} = \frac{\left(q_j - q_{n_0+1}\right)}{p_{n_0}}[\mathbf{x}^{(j)}]_{n_0+1} = \frac{\left(q_j - q_{n_0+1}\right)}{p_{n_0}} \frac{q_j \prod_{\alpha=n_0+2}^{k} (q_j - q_\alpha)}{\prod_{\beta=n_0+1}^{k} p_\beta} r = \frac{q_j \prod_{\alpha=n_0+1}^{k} (q_j - q_\alpha)}{\prod_{\beta=n_0}^{k} p_\beta} r$$

也成立，顯然$[\mathbf{x}^{(j)}]_i = 0, i \in \{1,2,..., j-1\}$，r=1 代入後便可得(1.4)成立，將 k+1 個特徵向量依序排列後便得證。Q.E.D.

定義 1.6：我們記任意一個矩陣$\mathbf{M}(n)$爲系統有 2n 個物體時所對應的矩陣，例如

$$\mathbf{P}_{ir}(n-1) = \begin{pmatrix} q_1 & & & & 0 \\ p_1 & q_2 & & \mathbf{0} & \vdots \\ & p_2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & q_{n-1} & 0 \\ \mathbf{0} & & & p_{n-1} & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

。不加括弧的矩陣 M 泛指$\mathbf{M}(k)$，例如

$$\mathbf{P}_{ir}=\begin{pmatrix} q_1 & & & & 0\\ p_1 & q_2 & & \mathbf{0} & \vdots \\ & p_2 & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & q_k & 0 \\ \mathbf{0} & & & p_k & 0\end{pmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}$$ 。

引理 1.7：矩陣 $\mathbf{X}(k)=\mathbf{E}_{ir}^{-1}(k)$，其中

$$\mathbf{X}(k)=\begin{pmatrix}
\dfrac{\prod_{\beta=1}^{k}p_\beta}{q_1\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq 1}}(q_1-q_\alpha)} & & & & & & & 0\\
\dfrac{\prod_{\beta=1}^{k}p_\beta}{q_2\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq 2}}(q_2-q_\alpha)} & \dfrac{\prod_{\beta=2}^{k}p_\beta}{q_2\prod_{\substack{\alpha\in\{2,3,\ldots,k\}\\ \alpha\neq 2}}(q_2-q_\alpha)} & & & & \mathbf{0} & & 0\\
\vdots & \dfrac{\prod_{\beta=2}^{k}p_\beta}{q_3\prod_{\substack{\alpha\in\{2,3,\ldots,k\}\\ \alpha\neq 3}}(q_3-q_\alpha)} & \ddots & \text{第}j\text{行}\ \downarrow & & & & \vdots\\
\vdots & \vdots & \ddots & \dfrac{\prod_{\beta=j}^{k}p_\beta}{q_j\prod_{\substack{\alpha\in\{j,j+1,\ldots,k\}\\ \alpha\neq j}}(q_j-q_\alpha)} & & & & \vdots\\
\vdots & \vdots & & \dfrac{\prod_{\beta=j}^{k}p_\beta}{q_{j+1}\prod_{\substack{\alpha\in\{j,j+1,\ldots,k\}\\ \alpha\neq j+1}}(q_{j+1}-q_\alpha)} & \ddots & & & \vdots\\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & 0\\
\dfrac{\prod_{\beta=1}^{k}p_\beta}{q_k\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq k}}(q_k-q_\alpha)} & \dfrac{\prod_{\beta=2}^{k}p_\beta}{q_k\prod_{\substack{\alpha\in\{2,3,\ldots,k\}\\ \alpha\neq k}}(q_k-q_\alpha)} & \cdots & \dfrac{\prod_{\beta=j}^{k}p_\beta}{q_k\prod_{\substack{\alpha\in\{j,j+1,\ldots,k\}\\ \alpha\neq k}}(q_k-q_\alpha)} & \cdots & \cdots & \dfrac{p_k}{q_k} & 0\\
(-1)^k\prod_{\beta=1}^{k}\dfrac{p_\beta}{q_\beta} & (-1)^{k-1}\prod_{\beta=2}^{k}\dfrac{p_\beta}{q_\beta} & \cdots & (-1)^{k-j+1}\prod_{\beta=j}^{k}\dfrac{p_\beta}{q_\beta} & \cdots & \cdots & -\dfrac{p_k}{q_k} & 1
\end{pmatrix}_{(k+1)\times(k+1)} \tag{1.5}$$

證明：

(1)給出$\mathbf{E}_{ir}^{-1}(2)=\begin{pmatrix} \dfrac{p_1p_2}{q_1(q_1-q_2)} & 0 & 0 \\ \dfrac{p_1p_2}{q_2(q_2-q_1)} & \dfrac{p_2}{q_2} & 0 \\ \dfrac{p_1p_2}{q_1q_2} & -\dfrac{p_2}{q_2} & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{E}_{ir}^{-1}(3)=\begin{pmatrix} \dfrac{p_1p_2p_3}{q_1(q_1-q_2)(q_1-q_3)} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{p_1p_2p_3}{q_2(q_2-q_1)(q_2-q_3)} & \dfrac{p_2p_3}{q_2(q_2-q_3)} & 0 & 0 \\ \dfrac{p_1p_2p_3}{q_3(q_3-q_1)(q_3-q_2)} & \dfrac{p_2p_3}{q_3(q_3-q_2)} & \dfrac{p_3}{q_3} & 0 \\ -\dfrac{p_1p_2p_3}{q_1q_2q_3} & \dfrac{p_2p_3}{q_2q_3} & -\dfrac{p_3}{q_3} & 1 \end{pmatrix}$

，我們可以觀察到矩陣$\mathbf{E}_{ir}^{-1}(3)$右下部分與矩陣$\mathbf{E}_{ir}^{-1}(2)$的形式相同，故底下我們以歸納法證明

$\mathbf{X}(k)=\mathbf{E}_{ir}^{-1}(k)$。假設$\mathbf{X}(k-1)=\mathbf{E}_{ir}^{-1}(k-1)$，我們把$\mathbf{X}(k),\mathbf{E}_{ir}(k)$以四個子矩陣來表示：

$$\mathbf{E}_{ir}(k)=\begin{pmatrix} \dfrac{q_1\prod_{\alpha=2}^{k}(q_1-q_\alpha)}{\prod_{\beta=1}^{k}p_\beta} & \mathbf{0}_{1\times k} \\ \mathbf{a} & \mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1) \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

$$\mathbf{X}(k)=\begin{pmatrix} \dfrac{\prod_{\beta=1}^{k}p_\beta}{q_1\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq 1}}(q_1-q_\alpha)} & \mathbf{0}_{1\times k} \\ \mathbf{b} & \mathbf{X}^{'}(k-1) \end{pmatrix}, \tag{1.7}$$

其中$\mathbf{a},\mathbf{b}$是 k 維的「列向量」，$\mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)$與$\mathbf{X}^{'}(k-1)$分別代表$\mathbf{E}_{ir}(k)$與$\mathbf{X}(k)$的右下部份，也

就是將$\mathbf{E}_{ir}(k-1)$與$\mathbf{X}(k-1)$中元素「足標加一」所成的矩陣，故$\mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)\mathbf{X}^{'}(k-1)=\mathbf{I}_{(k)}$。欲證

$\mathbf{X}(k)=\mathbf{E}_{ir}^{-1}(k)$，只須得到$\mathbf{E}_{ir}(k)\mathbf{X}(k)=\mathbf{I}_{(k+1)}$即可，相乘後可得：

$$\mathbf{E}_{ir}(k)\mathbf{X}(k)=\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}_{1\times k} \\ \dfrac{\prod_{\beta=1}^{k}p_\beta}{q_1\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq 1}}(q_1-q_\alpha)}\mathbf{a}+\mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)\mathbf{b} & \mathbf{I}_{(\mathbf{k})} \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

(2)我們來計算$\dfrac{\prod_{\beta=1}^{k}p_\beta}{q_1\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq 1}}(q_1-q_\alpha)}\mathbf{a}+\mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)\mathbf{b}$這部分。當$u\in\{1,2,\ldots,k\}$，由引理 1.5 可得

$[\mathbf{a}]_u = \dfrac{q_1 \prod_{\alpha=u+2}^{k} (q_1 - q_\alpha)}{\prod_{\beta=u+1}^{k} p_\beta}$ ，所以

$$\frac{\prod_{\beta=1}^{k} p_\beta}{q_1 \prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq 1}} (q_1 - q_\alpha)} [\mathbf{a}]_u = \frac{\prod_{\beta=1}^{u} p_\beta}{\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,u+1\}\\ \alpha\neq 1}} (q_1 - q_\alpha)} \tag{1.9}$$

以及$[\mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)\mathbf{b}]_u = \sum_{\sigma=1}^{u} [\mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)]_{u\sigma}[\mathbf{b}]_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{u} [\mathbf{E}_{ir}(k)]_{(u+1)(\sigma+1)}[\mathbf{X}(k)]_{(\sigma+1)1}$

$$= \sum_{\sigma=1}^{u} \frac{q_{\sigma+1} \prod_{\alpha=u+2}^{k} (q_{\sigma+1} - q_\alpha)}{\prod_{\beta=u+1}^{k} p_\beta} \times \frac{\prod_{\beta=1}^{k} p_\beta}{q_{\sigma+1} \prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq(\sigma+1)}} (q_{\sigma+1} - q_\alpha)} = \sum_{\sigma=1}^{u} \frac{\left(\prod_{\beta=1}^{u} p_\beta\right)}{\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,u+1\}\\ \alpha\neq(\sigma+1)}}^{k} (q_{\sigma+1} - q_\alpha)} \tag{1.10}$$

兩者相加後可得

$$\left[\frac{\prod_{\beta=1}^{k} p_\beta}{q_1 \prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq 1}} (q_1 - q_\alpha)} \mathbf{a} + \mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)\mathbf{b}\right]_u = \sum_{\sigma=0}^{u} \frac{\left(\prod_{\beta=1}^{u} p_\beta\right)}{\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,u+1\}\\ \alpha\neq(\sigma+1)}}^{k} (q_{\sigma+1} - q_\alpha)}, \forall u \in \{1,2,\dots,k-2\} \text{。} \tag{1.11}$$

當 u=k-1 時，由引理 1.5 可得$[\mathbf{a}]_{k-1} = \dfrac{q_1}{p_k}$ ，

$[\mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)\mathbf{b}]_{k-1} = \sum_{\sigma=1}^{k} [\mathbf{E}_{ir}(k)]_{k(\sigma+1)}[\mathbf{X}(k)]_{(\sigma+1)1} = \sum_{\sigma=1}^{k-1} \dfrac{\prod_{\beta=1}^{k-1} p_\beta}{\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq\sigma+1}} (q_{\sigma+1} - q_\alpha)}$ ，所以可得：

$$\left[\frac{\prod_{\beta=1}^{k} p_\beta}{q_1 \prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq 1}} (q_1 - q_\alpha)} \mathbf{a} + \mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)\mathbf{b}\right]_{k-1} = \left(\prod_{\beta=1}^{k-1} p_\beta\right) \sum_{\sigma=0}^{k-1} \prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq(\sigma+1)}} \frac{1}{(q_{\sigma+1} - q_\alpha)} \tag{1.12}$$

當 u=k 時，$[\mathbf{a}]_k = 1$ ，

$[\mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)\mathbf{b}]_k = \sum_{\sigma=1}^{k} [\mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)]_{k\sigma}[\mathbf{b}]_\sigma = \sum_{\sigma=1}^{k} [\mathbf{X}(k)]_{(\sigma+1)1} = \sum_{\sigma=1}^{k-1} \left(\dfrac{\prod_{\beta=1}^{k} p_\beta}{q_{\sigma+1} \prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq(\sigma+1)}} (q_{\sigma+1} - q_\alpha)} \right) + (-1)^k \prod_{\beta=1}^{k} \dfrac{p_\beta}{q_\beta}$ ，

所以可以得到

$$\left[\frac{\prod_{\beta=1}^{k} p_\beta}{q_1 \prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq 1}} (q_1 - q_\alpha)}\mathbf{a} + \mathbf{E}_{ir}^{'}(k-1)\mathbf{b}\right]_k = \left(\prod_{\beta=1}^{k} p_\beta\right)\left(\sum_{\sigma=0}^{k-1}\left(\frac{1}{q_{\sigma+1}\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq(\sigma+1)}}(q_{\sigma+1}-q_\alpha)}\right) + (-1)^k \prod_{\beta=1}^{k}\frac{1}{q_\beta}\right) \quad (1.13)$$

爲了方便起見，我們把足標$\sigma+1$全部換成β 。由此我們得到下列的等價敘述：

$$\mathbf{E}_{ir}(k)\mathbf{X}(k) = \mathbf{I}_{(k+1)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\beta=1}^{u+1}\frac{1}{\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,u+1\}\\ \alpha\neq\beta}}(q_\beta - q_\alpha)} = 0, \forall u\in\{1,2,\ldots,k-1\} \text{且} \sum_{\beta=1}^{k}\frac{1}{q_\beta \prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq\beta}}(q_\beta-q_\alpha)} + \frac{(-1)^k}{\prod_{\beta=1}^{k} q_\beta} = 0 \quad (1.14)$$

(3)在(1.14)的$\sum_{\beta=1}^{u+1}\frac{1}{\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,u+1\}\\ \alpha\neq\beta}}(q_\beta - q_\alpha)} = 0, \forall u\in\{1,2,\ldots,k-1\}$中，我們把分母足標$\alpha>\beta$的項次

$q_\beta - q_\alpha$寫成$-(q_\alpha - q_\beta)$ ，因而有

$$\sum_{\beta=1}^{u+1}\frac{1}{\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,u+1\}\\ \alpha\neq\beta}}\left(q_\beta - q_\alpha\right)} = \sum_{\beta=1}^{u+1}\frac{(-1)^{u-\beta+1}}{\prod_{\alpha\in\{1,2,\ldots,\beta-1\}}(q_\beta-q_\alpha)\prod_{\alpha\in\{\beta+1,\beta+2,\ldots,u+1\}}(q_\alpha-q_\beta)}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{u+1}\frac{(-1)^{u-\beta+1}\dfrac{\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\ldots,u+1\}\\ r>s}}(q_r-q_s)}{\prod_{\alpha\in\{1,2,\ldots,\beta-1\}}(q_\beta-q_\alpha)\prod_{\alpha\in\{\beta+1,\beta+2,\ldots,u+1\}}(q_\alpha-q_\beta)}}{\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\ldots,u+1\}\\ r>s}}(q_r-q_s)} = \sum_{\beta=1}^{u+1}\frac{(-1)^{u-\beta+1}\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\ldots,u+1\}\\ r>s\\ r,s\neq\beta}}(q_r-q_s)}{\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\ldots,u+1\}\\ r>s}}(q_r-q_s)}$$

$$= \sum_{\beta=1}^{u+1}\frac{(-1)^{u-\beta+1}\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_{\beta-1} & q_{\beta+1} & \cdots & q_u & q_{u+1} \\ q_1^2 & q_2^2 & \cdots & q_{\beta-1}^2 & q_{\beta+1}^2 & \cdots & q_u^2 & q_{u+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ q_1^{u-1} & q_2^{u-1} & \cdots & q_{\beta-1}^{u-1} & q_{\beta+1}^{u-1} & \cdots & q_u^{u-1} & q_{u+1}^{u-1} \end{pmatrix}}{\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\ldots,u+1\}\\ r>s}}(q_r-q_s)} = \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_{u+1} \\ q_1^2 & q_2^2 & \cdots & q_{u+1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_1^{u-1} & q_2^{u-1} & \cdots & q_{u+1}^{u-1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}{\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\ldots,u+1\}\\ r>s}}(q_r-q_s)} = 0$$

，$\forall u\in\{1,2,\ldots,k-1\}$ ，注意上式倒數第三個等號用到了 Vandermonde 行列式的還原，倒數第

二個等號用到了行列式合併的法則。

(4)(1.14)的$\displaystyle\sum_{\beta=1}^{k}\frac{1}{q_\beta\prod\limits_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq\beta}}(q_\beta-q_\alpha)}+\frac{(-1)^k}{\prod\limits_{\beta=1}^{k}q_\beta}$中，仿照(3)的做法而有：

$$\sum_{\beta=1}^{k}\frac{1}{q_\beta\prod\limits_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq\beta}}(q_\beta-q_\alpha)}+\frac{(-1)^k}{\prod\limits_{\beta=1}^{k}q_\beta}=\sum_{\beta=1}^{k}\frac{\dfrac{(-1)^{k-\beta}}{q_\beta}\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1&\cdots&1&1\\ q_1&q_2&\cdots&q_{\beta-1}&q_{\beta+1}&\cdots&q_{k-1}&q_k\\ q_1^2&q_2^2&\cdots&q_{\beta-1}^2&q_{\beta+1}^2&\cdots&q_{k-1}^2&q_k^2\\ \vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ q_1^{k-2}&q_2^{k-2}&\cdots&q_{\beta-1}^{k-2}&q_{\beta+1}^{k-2}&\cdots&q_{k-1}^{k-2}&q_k^{k-2}\end{pmatrix}}{\prod\limits_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)}+\frac{(-1)^k}{\prod\limits_{\beta=1}^{k}q_\beta}$$

$$=\frac{\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ q_1&q_1&\cdots&q_k\\ q_1^2&q_2^2&\cdots&q_k^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ q_1^{k-2}&q_2^{k-2}&\cdots&q_k^{k-2}\\ \dfrac{1}{q_1}&\dfrac{1}{q_2}&\cdots&\dfrac{1}{q_k}\end{pmatrix}}{\prod\limits_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)}+\frac{(-1)^k}{\prod\limits_{\beta=1}^{k}q_\beta}=\frac{(-1)^{k-1}\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ q_1&q_1&\cdots&q_k\\ q_1^2&q_2^2&\cdots&q_k^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ q_1^{k-1}&q_2^{k-1}&\cdots&q_k^{k-1}\end{pmatrix}+(-1)^k\prod\limits_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)}{\prod\limits_{\beta=1}^{k}q_\beta\prod\limits_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)}$$

$$=\frac{(-1)^{k-1}\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ q_1&q_1&\cdots&q_k\\ q_1^2&q_2^2&\cdots&q_k^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ q_1^{k-1}&q_2^{k-1}&\cdots&q_k^{k-1}\end{pmatrix}+(-1)^k\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ q_1&q_1&\cdots&q_k\\ q_1^2&q_2^2&\cdots&q_k^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ q_1^{k-1}&q_2^{k-1}&\cdots&q_k^{k-1}\end{pmatrix}}{\prod\limits_{\beta=1}^{k}q_\beta\prod\limits_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)}=0$$

注意上式在倒數第三個等號我們將行列式對所有的列做一輪換再提出純量因子，而倒數第二個等號用到了$\displaystyle\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)=\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\ q_1&q_1&\cdots&q_k\\ q_1^2&q_2^2&\cdots&q_k^2\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ q_1^{k-1}&q_2^{k-1}&\cdots&q_k^{k-1}\end{pmatrix}$，而我們有上式分子兩項剛好差

一個負號所以爲零。所以由歸納法可得證 $\mathbf{X}(k)=\mathbf{E}_{ir}^{-1}(k)$ 。Q.E.D.

所需要的準備工作都已完畢，底下我們給出機率分佈函數。

定理 1.8：對於不可逆系統，若 $\langle p_i\rangle_{i=1}^{k}$ 都不相等，則我們有

$$P(T=t)=\left(\prod_{\alpha=1}^{k}p_\alpha\right)\sum_{\beta=1}^{k}\frac{q_\beta^{t-1}}{\prod\limits_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq\beta}}(q_\beta-q_\alpha)} \tag{1.15}$$

證明：$[\mathbf{P}_{ir}^{t}]_{(k+1)1}=[\mathbf{E}_{ir}\mathbf{D}_{ir}{}^{t}\mathbf{E}_{ir}{}^{-1}]_{(k+1)1}$

$$=\sum_{\beta=1}^{k+1}[\mathbf{E}_{ir}]_{(k+1)\beta}[\mathbf{D}_{ir}{}^{t}\mathbf{E}_{ir}{}^{-1}]_{\beta 1}=\left(\prod_{\alpha=1}^{k}p_\alpha\right)\sum_{\beta=1}^{k}\frac{q_\beta^{t}}{q_\beta\prod\limits_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq\beta}}(q_\beta-q_\alpha)}$$

，消去因子後便得證。Q.E.D.

到此爲止，當所有的轉移機率都不相等，對於機率密度函數我們已給出相當簡潔的表示式，以下將討論 p_i 與狀態成簡單線性關係時的情況。

推論 1.9〔線性減速系統〕：令 $p_\beta=1-c\beta$ ， $q_\beta=c\beta$ ，其中 $0<c<\frac{1}{k}$ 爲一常數，我們有：

$$P(T=t)=c^{t}\binom{\frac{1}{c}-1}{k}\sum_{\beta=1}^{k}\binom{k}{\beta}\beta^{t}(-1)^{k-\beta},t\in\{k,k+1,k+2,\ldots\} \text{ 。} \tag{1.16}$$

證明：代入(1.15)後我們有

$$\left(\prod_{\alpha=1}^{k}(1-c\alpha)\right)\sum_{\beta=1}^{k}\frac{(c\beta)^{t-1}}{\prod\limits_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq\beta}}(c\beta-c\alpha)}=c^{k+t-1-(k-1)}\left(\prod_{\alpha=1}^{k}(\frac{1}{c}-\alpha)\right)\sum_{\beta=1}^{k}\frac{\beta^{t-1}}{\prod\limits_{\substack{\alpha\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\neq\beta}}(\beta-\alpha)} \text{ 。} \tag{1.17}$$

我們先讓和符號中 β 的邊界值表出，即上式

$$=c^{t}\left(\prod_{\alpha=1}^{k}(\frac{1}{c}-\alpha)\right)\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}+\sum_{\beta=2}^{k-1}\frac{\beta^{t-1}}{(\beta-1)(\beta-2)\ldots(\beta-(\beta-1))(\beta-(\beta+1))\ldots(\beta-k+1)(\beta-k)}+\frac{k^{t-1}}{(k-1)!}\right)$$

$$=c^{t}\frac{\left(\prod_{\alpha=1}^{k}(\frac{1}{c}-\alpha)\right)}{k!}\left(\frac{(-1)^{k-1}k!}{(k-1)!}+\sum_{\beta=2}^{k-1}\frac{\beta^{t}(-1)^{k-\beta}k!}{\beta!(k-\beta)!}+\frac{k^{t-1}k!}{(k-1)!}\right)$$

$$=c^t\begin{pmatrix}\frac{1}{c}-1\\k\end{pmatrix}\left((-1)^{k-1}\begin{pmatrix}k\\1\end{pmatrix}+\sum_{\beta=2}^{k-1}(-1)^{k-\beta}\begin{pmatrix}k\\\beta\end{pmatrix}\beta^t+(-1)^0\begin{pmatrix}k\\k\end{pmatrix}k^t\right) \tag{1.18}$$

我們雖然顧慮在「和符號」中β爲極端值可能有的影響，但由上可知其實並無大礙，合併上式後便得證。Q.E.D.

(1.16)式是一個可以觀看行爲的簡單結果，期望值、變異數對參數的圖形參考附錄七的Figure1.1~1.5。目前我們尚無法由圖看出各個數值對參數的變化模式，但是我們大致可以看出來隨著 c 越來越大時，或 k 越來越大時，期望值的改變量會越趨變大。一個合理的定性解釋爲：c 越來越大時，成功機率減慢的極快，實驗速度因而越趨減緩，時間因而拉長。而當 k 越來越大時，除了本身增加所造成的減緩影響，還有成功機率的減少量也因而被放大，造成時間更近一步的延緩，而有如圖中所顯示的：期望值改變量越趨變大。

定理 1.8 是在轉移機率完全不相等時所得到之結果；但若轉移機率不完全相異時，則$\mathbf{P}_{ir}$ **一定不可對角化**，其說明請參考引理 2.11 與推論 2.13。

定義 1.10〔多階段變機率系統之定義〕：令系統在狀態$r_1+1, r_2+1, ..., r_h+1$時改變其轉移機率

，即我們有 $p_i=\begin{cases}p_{(1)}, i\in\{1,2,...,r_1\}\\ p_{(2)}, i\in\{r_1+1,r_1+2,...,r_2\}\\ \vdots\\ p_{(h+1)}, i\in\{r_h+1,r_h+2,...,k\}\end{cases}$ 。即當狀態改變時其機率之表示如下：

$$\underbrace{1\xrightarrow[p_1]{}2\xrightarrow[p_2]{}3\to...\xrightarrow[p_{r_1}]{}}_{p_{(1)}}r_1+1\underbrace{\xrightarrow[p_{r_1+1}]{}r_1+2\to...\xrightarrow[p_{r_2}]{}}_{p_{(2)}}r_2+1\to...\to r_h+1\underbrace{\xrightarrow[p_{r_h+1}]{}r_h+2\to...\xrightarrow[p_k]{}}_{p_{(h+1)}}k+1 \tag{1.19}$$

令狀態 1 到狀態r_1 ＋1 所經過的實驗時間爲T_1，從狀態r_{i-1}+1 到狀態r_i+1，$i\in\{2,3,...,h\}$，所經過之實驗時間爲T_i，從狀態r_h+1 到相同態狀態 k+1 所經過之實驗時間爲T_{h+1}。

很明顯看的出來，在不可逆系統，當我們給定$T_1=t_1$，對於T_2之機率分佈完全沒有影響，即所有的T_i是**獨立的(independent of random variable)**。回顧一下一開始我們曾經說在轉移機率爲常量時，實驗時間 T 有負二項分佈。因此在(1.19)其中一個階段中，有

$$P(T_i=t_i)=\begin{pmatrix}t_i-1\\r_i-r_{i-1}-1\end{pmatrix}p_{(i)}^{r_i-r_{i-1}}q_{(i)}^{t_i-(r_i-r_{i-1})}, q_{(i)}=1-p_{(i)}, t_i\in\{r_i-r_{i-1}, r_i-r_{i-1}+1,...\}\text{。} \tag{1.20}$$

由以上之討論，我們所欲求的總實驗時間便爲$T=T_1+T_2...+T_{h+1}$，而且每一個T_i彼此獨立。實際上將 T 的機率分佈表達出來是頗爲困難的。此種想法不方便求出其機率密度函數，但可利用獨立之性質求得期望值與變異數。

定理 1.11〔任意不可逆系統的統計參數〕：

$$\text{期望值}\, E(T)=\frac{r_1}{p_{(1)}}+\frac{r_2-r_1}{p_{(2)}}+\ldots+\frac{r_h-r_{h-1}}{p_{(h)}}+\frac{k-r_h}{p_{(h+1)}} \text{，} \tag{1.21}$$

$$\text{變異數}\, Var(T)=\frac{r_1 q_{(1)}}{p_{(1)}^2}+\frac{(r_2-r_1)q_{(2)}}{p_{(2)}^2}+\ldots+\frac{\left(r_h-r_{h-1}\right)q_{(h)}}{p_{(h)}^2}+\frac{\left(k-r_h\right)q_{(h+1)}}{p_{(h+1)}^2} \text{，} \tag{1.22}$$

$$\text{特徵函數}\, \phi_T(s)=\left(\frac{p_{(1)}e^{is}}{1-q_{(1)}e^{is}}\right)^{r_1}\left(\frac{p_{(2)}e^{is}}{1-q_{(2)}e^{is}}\right)^{r_2-r_1}\cdots\left(\frac{p_{(h)}e^{is}}{1-q_{(h)}e^{is}}\right)^{r_h-r_{h-1}}\left(\frac{p_{(h+1)}e^{is}}{1-q_{(h+1)}e^{is}}\right)^{k-r_h}, s\in\mathbb{R} \text{。} \tag{1.23}$$

證明：期望值的特性讓我們有 $E(T)=E(T_1+T_2+\ldots+T_{h+1})=E(T_1)+E(T_2)+\ldots+E(T_{h+1})$，而注意到 $E(T_1),E(T_2),\ldots,E(T_{h+1})$ 可以引用我們一開始計算出來的結果，所以得證。而變異數利用獨立的特性，可以有 $Var(T)=Var(T_1+T_2+\ldots+T_{h+1})=Var(T_1)+Var(T_2)+\ldots+Var(T_{h+1})$，代入負二項分佈的值便得證。而 $\phi_T(s)=E(e^{isT})=E(e^{is(T_1+T_2+\ldots T_{h+1})})=E(e^{isT_1})E(e^{isT_2})\ldots E(e^{isT_{h+1}})$，代入負二項分佈的特徵函數便得證。Q.E.D.

推論 1.12〔二階段變機率系統〕：令 $p_i=\begin{cases} p_a, i\in\{1,2,\ldots,s\} \\ p_b, i\in\{s+1,s+2,\ldots,k\}\end{cases}, q_i=1-p_i$，則

$$P\left(T=t\right)= p_a{}^s p_b{}^{k-s} q_a{}^{t-k}\sum_{j=0}^{t-k}\binom{t-k-j+s-1}{s-1}\binom{j+k-s-1}{k-s-1}\left(\frac{q_b}{q_a}\right)^j \text{。} \tag{1.24}$$

證明：由(1.2)我們有

$$P\left(T=t\right)=\sum_{(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k)\in\boldsymbol{\tau}}\left(\prod_{\alpha=1}^{s}p_a q_a{}^{\tau_\alpha}\right)\left(\prod_{\beta=s+1}^{k}p_b q_b{}^{\tau_\beta}\right)=p_a{}^s p_b{}^{k-s}\sum_{(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k)\in\boldsymbol{\tau}}q_a{}^{\tau_1+\ldots+\tau_s}q_b{}^{\tau_{s+1}+\ldots+\tau_k} \tag{1.25}$$

注意到 $\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_k=t-k$, 故 $\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_s=t-k-(\tau_{s+1}+\tau_{s+2}+\ldots+\tau_k)$，所以原式變爲

$p_a{}^s p_b{}^{k-s}\sum_{(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k)\in\boldsymbol{\tau}}q_a{}^{t-k}\left(\frac{q_b}{q_a}\right)^{\tau_{s+1}+\ldots+\tau_k}$，而 $q_a{}^{t-k}$ 與和的變數無關，故可提出。底下來討論

$\sum_{(\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_k)\in\boldsymbol{\tau}}\left(\frac{q_b}{q_a}\right)^{\tau_{s+1}+\ldots+\tau_k}$。由於和符號是對所有 $\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_k=t-k$ 的非負整數解求和，但因實際的變數只餘 $\tau_{s+1},\tau_{s+2},\ldots,\tau_k$，我們可以假設 $\tau_{s+1}+\tau_{s+1}+\ldots+\tau_k=j$，則在此情形下非負整數解的總數變爲：$\binom{t-k-j+s-1}{s-1}\times\binom{j+k-s-1}{k-s-1}$，前項代表 $\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_s=t-k-j$ 的非負整數解個數，後項代表 $\tau_{s+1}+\tau_{s+2}+\ldots+\tau_k=j$ 的非負整數解個數。但 $j\in\{0,1,\ldots,t-k\}$，故對所有的 j 求和便得證。(1.24)式爲一機率密度函數之證明請參閱附錄二。Q.E.D.

從(1.21)，(1.22)，(1.23)可以得到(1.24)的期望值、變異數及特徵函數為：

$$E(T)=\frac{s}{p_a}+\frac{(k-s)}{p_b},\ Var(T)=\frac{sq_a}{p_a^2}+\frac{(k-s)q_b}{p_b^2}\ ，\ \phi_T\left(x\right)=\left(\frac{p_a e^{ix}}{1-q_a e^{ix}}\right)^{s}\left(\frac{p_b e^{ix}}{1-q_b e^{ix}}\right)^{k-s},x\in\mathbb{R}\ 。\tag{1.26}$$

從(1.21)，(1.22)，(1.23)也可以得到(1.15)的期望值、變異數及特徵函數為：

$$E(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{p_i}\ ，\ Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{p_i^2}\ ，\ \phi_T\left(x\right)=\prod_{j=1}^{k}\frac{p_j e^{ix}}{1-q_j e^{ix}},x\in\mathbb{R}\ 。\tag{1.27}$$

近一步地有(1.16)的期望值、變異數及特徵函數為：

$$E(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-ci}\ ，\ Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{ci}{(1-ci)^2}\ ，\ \phi_T\left(x\right)=\prod_{j=1}^{k}\frac{\left(1-cj\right)e^{ix}}{1-cje^{ix}},x\in\mathbb{R}\ 。\tag{1.28}$$

我們把(1.28)以**泰勒級數(Taylor Series)**展開再取和，

$$E(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-ci}=\sum_{i=1}^{k}\left(1+ci+(ci)^2\ldots\right)=k+c\frac{k(k+1)}{2}+c^2\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\ldots$$

$$Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{ci}{(1-ci)^2}=\sum_{i=1}^{k}\left(ci+2(ci)^2+\ldots\right)=c\frac{k(k+1)}{2}+2c^2\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\ldots\tag{1.29}$$

從這兩個展開式便可以說明 Figure1.1~Figure1.5 底下我們所做的推論，即為何 c 越來越大時，或 k 越來越大時，期望值與變異數的增加量越趨變大。

二、可逆系統

定義 2.1：二系統 A，B，A 中一開始有 2k 個物體，B 中有 0 個物體。在一個單位時間內，A 可能移一物體至 B，或是不做動作；而 B 亦有可能移一物體至 A，或是不做動作。當 B 中物體的個數為 i-1，$i \in \{1,2,...,k+1\}$，我們稱其為**狀態 *i* (state *i*)**，令 $p_{go}(i)$ 代表由狀態 i 到狀態 i+1 之機率，$p_{stop}(i)$ 代表在狀態 i 不動之機率，令 $p_{back}(i)$ 代表由狀態 i 回到狀態 i-1 之機率，**所有機率值都在(0,1)開區間**。隨機變數 T 為狀態 1 到狀態 k+1 之所經過之時間。

從這裡開始我們討論可逆系統中最為簡單的情形：均勻可逆系統。

引理 2.2〔均勻可逆系統〕：令 A 成功移動進入 B 的機率與 B 成功移動進入 A 的機率都為一常數 p，則我們有 $P(T=t)=[\mathbf{P}_{ure}^{t}]_{(k+1)1}$，其中 $\mathbf{P}_{ure}=\begin{pmatrix} q & p_{back} & & & & 0 \\ p & p_{stop} & p_{back} & & \mathbf{0} & \vdots \\ & p_{go} & p_{stop} & \ddots & & \vdots \\ & & p_{go} & \ddots & p_{back} & 0 \\ & & & \ddots & p_{stop} & 0 \\ & \mathbf{0} & & & p_{go} & 0 \end{pmatrix}_{(k+1)\times(k+1)}$，

且 q=1-p，$p_{back}=qp$，$p_{stop}=p^2+q^2$，$p_{go}=pq$。

證明：若 A 不移動且 B 移動，那麼將會退一個狀態，故 $p_{back}(i)=p_{back}=qp$；若 A 不移動且 B 不移動，或若 A 移動且 B 移動，那麼狀態將不變，故 $p_{stop}(i)=p_{stop}=p^2+q^2$；若 A 移動且 B 不移動，那麼將向前進一個狀態，故 $p_{go}(i)=p_{go}=pq$。我們由第 7 頁類似的討論，將可以得到均勻可逆系統的轉移矩陣如上。Q.E.D.

定義 2.3：本節中只有對於以 $\mathbf{P}_{足標}$ 表示的矩陣，我們記 $\mathbf{P}'_{足標}$ 代表該矩陣去掉末列末行後的矩陣，例如 $\mathbf{P}'_{ure}$、$\mathbf{P}'_{T-ure}$、$\mathbf{P}'_{re}$ 及 $\mathbf{P}'_{T-re}$。同第一節我們記任意一個矩陣 $\mathbf{M}(n)$ 為系統有 2n 個物體時所對應的矩陣，不加括弧的矩陣 $\mathbf{M}$ 泛指 $\mathbf{M}(k)$。

我們還是仿上一節求解不可逆系統的方法，即利用特徵值做對角化後再計算乘冪。但是對於可逆系統而言，並不能像上一節一樣很簡單的就看出特徵值為何，故底下我們先分析均勻可逆系統的特徵值彼此間有什麼關係。

引理 2.4：給定一個**三對角線矩陣(tridiagonal matrix)** $\mathbf{M}(n)=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \mathbf{0} \\ b_1 & a_2 & \ddots & & \\ & b_2 & \ddots & c_{n-2} & \\ & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}_{n\times n}$，則

矩陣

$$\mathbf{M}_T(n)=\begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{b_1c_1} & & & \mathbf{0} \\ \sqrt{b_1c_1} & a_2 & \ddots & & \\ & \sqrt{b_2c_2} & \ddots & \sqrt{b_{n-2}c_{n-2}} & \\ & & \ddots & a_{n-1} & \sqrt{b_{n-1}c_{n-1}} \\ \mathbf{0} & & & \sqrt{b_{n-1}c_{n-1}} & a_n \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{2.1}$$

與 $\mathbf{M}$ 有一樣的特徵方程式。

證明：很顯然 $\det\left(\mathbf{M}_T(1)-\lambda\mathbf{I}_{(1)}\right)=\det\left(\mathbf{M}(1)-\lambda\mathbf{I}_{(1)}\right)$，$\det\left(\mathbf{M}_T(2)-\lambda\mathbf{I}_{(1)}\right)=\det\left(\mathbf{M}(2)-\lambda\mathbf{I}_{(1)}\right)$。我們假設 $\det\left(\mathbf{M}_T(n-2)-\lambda\mathbf{I}_{(n-2)}\right)=\det\left(\mathbf{M}(n-2)-\lambda\mathbf{I}_{(n-2)}\right)$，$\det\left(\mathbf{M}_T(n-1)-\lambda\mathbf{I}_{(n-2)}\right)$ $=\det\left(\mathbf{M}(n-1)-\lambda\mathbf{I}_{(n-2)}\right)$，則 $\det\left(\mathbf{M}_T(n)-\lambda\mathbf{I}_{(n)}\right)=a_n\det\left(\mathbf{M}_T(n-1)-\lambda\mathbf{I}_{(n-1)}\right)-b_{n-1}c_{n-1}\det\left(\mathbf{M}_T(n-2)-\lambda\mathbf{I}_{(n-2)}\right)$ $=a_n\det\left(\mathbf{M}(n-1)-\lambda\mathbf{I}_{(n-1)}\right)-b_{n-1}c_{n-1}\det\left(\mathbf{M}(n-2)-\lambda\mathbf{I}_{(n-2)}\right)=\det\left(\mathbf{M}(n)-\lambda\mathbf{I}_{(n)}\right)$，所以由歸納法，$\mathbf{M}_T$ 與 $\mathbf{M}$ 有一樣的特徵方程式。Q.E.D.

推論 2.5：$\mathbf{P}_{ure}$ 的特徵值全爲實數。

證明：令 $\mathbf{M}=\mathbf{P}_{ure}$，則 $\mathbf{M}_T=\mathbf{P}_{T-ure}$ 與M有一樣的特徵方程式，所以兩者的特徵值相同。但 $\mathbf{P}_{T-ure}$ 爲**實對稱矩陣(real symmetric matrix)**故其特徵值皆爲實數(參考資料 8.)，所以 $\mathbf{P}_{ure}$ 的特徵值全爲實數。Q.E.D.

性質 2.6：矩陣 $\mathbf{P}_{ure}$ 的所有特徵值在 $[-1,1]$ 中。

證明：令 $\mathbf{M}\in M_{(n)}$，則由特徵值的定義 $\det(\mathbf{M}_{n\times n}-\lambda\mathbf{I}_{(n)})\mathbf{v}=\mathbf{0}$，而注意到特徵向量 $\mathbf{v}$ 必不爲零向量，所以我們可以在 $\mathbf{v}$ 中找到一個絕對值最大的分量，記爲 $[\mathbf{v}]_m$，則對第 m 列展開我們有：

$$a_{m1}[\mathbf{v}]_1+\ldots+(a_{mm}-\lambda)[\mathbf{v}]_m+\ldots+a_{mn}[\mathbf{v}]_n=0\text{，} \tag{2.2}$$

將上式 λ 移項取絕對值再利用**三角不等式(triangle inequality)**而有：

$$|a_{m1}||[\mathbf{v}]_1|+\ldots+|a_{mm}||[\mathbf{v}]_m|+\ldots+|a_{mn}||[\mathbf{v}]_n|\geq|\lambda||[\mathbf{v}]_m| \tag{2.3}$$

而注意到 $[\mathbf{v}]_m$ 爲絕對值最大的分量：

$$\left(|a_{m1}|+...+|a_{mn}|\right)|[\mathbf{v}]_m| \geq |a_{m1}||[\mathbf{v}]_1|+...+|a_{mm}||[\mathbf{v}]_m|+...+|a_{mn}||[\mathbf{v}]_n| \geq |\lambda||[\mathbf{v}]_m| \text{，} \tag{2.4}$$

所以我們便有：

$$|a_{m1}|+...+|a_{mn}| \geq |\lambda| \text{。} \tag{2.5}$$

也就是說特徵值的絕對值必小於等於矩陣中每一列元素絕對值和的最大值。而注意到特徵值也爲方程 $\det\left(\mathbf{M}-\lambda\mathbf{I}_{(\mathbf{n})}\right)^{\mathbf{T}} = \det(\mathbf{M}^{\mathbf{T}}-\lambda\left(\mathbf{I}_{(\mathbf{n})}\right)^{\mathbf{T}}) = \det\left(\mathbf{M}^{\mathbf{T}}-\lambda\mathbf{I}_{(\mathbf{n})}\right)=0$ 的根，故以上的敘述必須再進一步爲：

$$|\lambda| \leq Min\{\text{每一列元素絕對值和的最大值,每一行元素絕對值和的最大值}\} \text{。} \tag{2.6}$$

我們將上述引理用在 $\mathbf{P}_{ure}$ 上，注意到 $\mathbf{P}_{ure}$ 中除最後一行的絕對值和爲零其餘每一行元素的絕對值和等於 1，因此由(2.6)我們必有 $\lambda_i \in [-1,1]$。Q.E.D.

爲了證明下一個性質，我們先在這裡分析一般特徵方程式如何展開成多項式。若矩陣 $\mathbf{C}=\mathbf{A}+\mathbf{B}\in M_{(n)}$，記 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{n-1}\\ \mathbf{a}_n\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \mathbf{b}_{n-1}\\ \mathbf{b}_n\end{pmatrix}$，對 $\det(\mathbf{C})=\det\begin{pmatrix}\mathbf{a}_1+\mathbf{b}_1\\ \vdots\\ \mathbf{a}_{n-1}+\mathbf{b}_{n-1}\\ \mathbf{a}_n+\mathbf{b}_n\end{pmatrix}$ 以行列式的加法規則展開，則顯然有：

$$\det(\mathbf{C}) = \sum_{\mathbf{r}_j=\mathbf{a}_j or \mathbf{b}_j} \det\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \vdots\\ \mathbf{r}_{n-1}\\ \mathbf{r}_n\end{pmatrix} \text{，} \tag{2.7}$$

上式的意涵是對所有可能的 $\mathbf{a}_j$ ，$\mathbf{b}_j$ 的排列取和。

我們考量當 $\mathbf{B}=s\mathbf{I}_{(n)}$ 時，$\det\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \vdots\\ \mathbf{r}_{n-1}\\ \mathbf{r}_n\end{pmatrix}$ 中 $\mathbf{b}_j$ 出現的次數就是該行列式展開後 s 多項式之次數。但因爲 $s\mathbf{I}_{(n)}$ 本身是對角矩陣，$\det\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \vdots\\ \mathbf{r}_{n-1}\\ \mathbf{r}_n\end{pmatrix}$ 中有 s 的那一列「必只有對角線上爲 s，其餘皆零

」，對所有 s 存在的列把行列式展開，我們很明顯有 $\det\begin{pmatrix}\mathbf{r}_1\\ \vdots\\ \mathbf{r}_{n-1}\\ \mathbf{r}_n\end{pmatrix}$ 的值等同於：對 **A** 矩陣之 s 所在的對角元素畫掉行列方向後，餘下元素之行列式值，再乘上那些 s。故底下我們引進一個函數來幫我們簡化特徵方程式的表達：

定義 2.7： $\mathbf{A}\in M_{(n)}$，對 A 主對角線上之元素任取 i 個，將那些元素所在的行與列都消去後，餘下元素之行列式值稱爲對角 i 階多重子行列式(Mult*i*mi*n*ors)。函數 $SMM_i(A)$ 定義爲：對 A 所有可能的對角 i 階多重子行列式取和。顯然地有 $\det(A)=SMM_0(A)$，$Tr(A)=SMM_{n-1}(A)$，我們定義 $SMM_n(A)=1$。

利用這個函數我們可以將特徵方程式展開：

$$\det(\mathbf{A}+s\mathbf{I}_{(\mathbf{n})})=\sum_{i=0}^{n}SMM_i(A)s^i=0\text{ 。}\tag{2.8}$$

將上式引入我們的 $\mathbf{P}_{ure}$，便有 $\det(\mathbf{P}_{ure}-\lambda\mathbf{I}_{(k+1)})$

$$=-\lambda\Big(\sum_{i=0}^{k}SMM_i(\mathbf{P}_{ure}^{'})(-\lambda)^i\Big)=0\tag{2.9}$$

性質 2.8：均勻可逆系統的所有特徵值皆非負。

證明： $SMM_j(\mathbf{P}_{ure}^{'})$ 定義爲所有 $\mathbf{P}_{ure}^{'}$ 的對角 j 階多重子行列式之和，而 $\mathbf{P}_{ure}^{'}$ 的對角 j 階多重子行列式的意義爲任取 j 個對角元素，消去取定元素的行與列，餘下元素之行列式值。而 $\mathbf{P}_{ure}^{'}$ 只有三排非零元素，故我們若是在主對角線上任取數個元素畫十字，餘下之子矩陣必有如下形式：

$$\mathbf{P}_{ure}^{'}(r_1)\oplus\left(\bigoplus_{i=2}^{j+1}\mathbf{P}_{ure}^{''}(r_i)\right)\text{，}\tag{2.10}$$

其中 $\mathbf{P}_{ure}^{'}(r_1)=\begin{pmatrix} q & p_{back} & & & & \mathbf{0}\\ p & p_{stop} & \ddots & & & \\ & p_{go} & \ddots & p_{back} & & \\ & & \ddots & p_{stop} & p_{back} \\ \mathbf{0} & & & p_{go} & p_{stop}\end{pmatrix}_{r_1\times r_1}$，$\mathbf{P}_{ure}^{''}(r_i)=\begin{pmatrix} p_{stop} & p_{back} & & & & \mathbf{0}\\ p_{go} & p_{stop} & \ddots & & & \\ & p_{go} & \ddots & p_{back} & & \\ & & \ddots & p_{stop} & p_{back} \\ \mathbf{0} & & & p_{go} & p_{stop}\end{pmatrix}_{r_i\times r_i}$，

$i\in\{2,3,...,j+1\}$，$\sum_{i=1}^{j+1}r_i=k-j, r_1,r_2,...,r_{j+1}\geq 0$，當 $r_i=0$ 時**代表該子矩陣不存在**。底下證明矩

陣 $\mathbf{P}'_{ure}(n)=\begin{pmatrix} q & p_{back} & & & \mathbf{0} \\ p & p_{stop} & \ddots & & \\ & p_{go} & \ddots & p_{back} & \\ & & \ddots & p_{stop} & p_{back} \\ \mathbf{0} & & & p_{go} & p_{stop} \end{pmatrix}_{n\times n}$ 的行列式值對所有的 $n\in\mathbb{N}$ 都為正。利用行列式的展開我們有下列二階齊次遞迴式：

$$\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(n)\right)=p_{stop}\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(n-1)\right)-p_{go}p_{back}\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(n-2)\right),\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(1)\right)=q,\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(2)\right)=qp_{stop}-pp_{back} \tag{2.11}$$

重寫為：

$$\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(n)\right)=(p^2+q^2)\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(n-1)\right)-p^2q^2\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(n-2)\right),\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(1)\right)=q,\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(2)\right)=q^3\text{。} \tag{2.12}$$

解遞迴關係式的特徵方程式 $x^2-(p^2+q^2)x+p^2q^2=0$，我們有通解為：

$$\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(n)\right)=Ap^{2n}+Bq^{2n}\text{，} \tag{2.13}$$

帶入初始值後解 A、B 我們得到：

$$\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(n)\right)=q^{2n-1}\text{。} \tag{2.14}$$

由於 q>0，所以得證。同法也有 $\det(\mathbf{P}''_{ure}(n))=\det\begin{pmatrix} p_{stop} & p_{back} & & & \mathbf{0} \\ p_{go} & p_{stop} & \ddots & & \\ & p_{go} & \ddots & p_{back} & \\ & & \ddots & p_{stop} & p_{back} \\ \mathbf{0} & & & p_{go} & p_{stop} \end{pmatrix}_{n\times n}=\dfrac{p^{2n+2}-q^{2n+2}}{p^2-q^2}$

$=p^{2n}+p^{2(n-1)}q^2+p^{2(n-2)}q^4+...+q^{2n}$ 對所有 $n\in\mathbb{N}$ 為正。回到(2.10)式，我們對其取行列式

$$\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(r_1)\oplus\left(\bigoplus_{i=2}^{j+1}\mathbf{P}''_{ure}(r_i)\right)\right)=\det\left(\mathbf{P}'_{ure}(r_1)\right)\prod_{i=2}^{j+1}\det\left(\mathbf{P}''_{ure}(r_i)\right)\text{，} \tag{2.15}$$

所有的乘子皆為正，故 $SMM_i(\mathbf{P}_{ure}')$ 為正。因此特徵值若存在負的 λ，將使得 $\sum_{i=0}^{k}SMM_i(\mathbf{P}_{ure}')(-\lambda)^i$ 必恆為正，與(2.9)矛盾，所以特徵值必大於等於零。Q.E.D.

性質 2.9：對均勻可逆系統而言，1 不是特徵值。

證明：令 $\lambda=1$ 代入 $\det(\mathbf{P}_{ure}-\lambda\mathbf{I}_{(k+1)})$，則我們有：

$$\det(\mathbf{P}_{ure}-\mathbf{I}_{(k+1)})=(-1)^{k+1}\det\left(\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}'_{ure}(k)\right)\text{，} \tag{2.16}$$

記 $D(k)=\det\left(\mathbf{I}_{(k)} - \mathbf{P}'_{ure}(k)\right)$ ，可得遞迴式為：

$$D(k)=(1-p_{stop})D(k-1)-p_{back}\,p_{go}D(k-2) \text{ ，} \tag{2.17}$$

其中 $D(1)=1-q=p, D(2)=(1-q)(1-p^2-q^2)-p^2q=p(2p-2p^2)-p^2q=p^2q$ 。特徵方程式的解為重解 pq ，故設其通解為：

$$D(k)=(A+Bk)(pq)^k \text{ ，} \tag{2.18}$$

帶入初始值後解得 $D(k)=p^kq^{k-1}\neq 0$ 便得證。Q.E.D.

推論 2.10：均勻可逆系統的所有特徵值全落在[0,1)區間。

證明：由性質 2.6，2.8，2.9 可得。Q.E.D.

上面的討論提供了我們需要的特徵值資訊，往後將在運算上發揮極大的功用。底下給出一個在本文中最重要的引理。

引理 2.11：一個三對角矩陣 $\mathbf{M}(n)=\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \mathbf{0} \\ b_1 & a_2 & \ddots & & \\ & b_2 & \ddots & c_{n-2} & \\ & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}_{n\times n}$ ，令 $\langle \lambda_i \rangle_{i=1}^{n}$ 為其特徵值，

$b_1,b_2,\dots,b_{n-1}\neq 0$ ，則在下述方程組中

$$\begin{gathered} \left(a_1-\lambda_j\right)[\mathbf{x}^{(j)}]_1 + c_1[\mathbf{x}^{(j)}]_2 = 0 \\ b_{i-1}[\mathbf{x}^{(j)}]_{i-1} + \left(a_i-\lambda_j\right)[\mathbf{x}^{(j)}]_i + c_i[\mathbf{x}^{(j)}]_{i+1} = 0, i\in\{2,3,\dots,n-1\} \text{ 。} \\ b_{n-1}[\mathbf{x}^{(j)}]_{n-1} + \left(a_n-\lambda_j\right)[\mathbf{x}^{(j)}]_n = 0 \end{gathered} \tag{2.19}$$

令 $[\mathbf{x}^{(j)}]_n = r, r\in \square, r\neq 0$ 依序向上迭代至方程式 $b_1[\mathbf{x}^{(j)}]_1 + \left(a_2-\lambda_j\right)[\mathbf{x}^{(j)}]_2 + c_2[\mathbf{x}^{(j)}]_3 = 0$ 所解出的

$\mathbf{x}^{(j)}$ 是一個對應於特徵值 λ_j 的特徵向量。

再者，其解空間基底為：

$$[\mathbf{e}^{(j)}]_i = \begin{cases} (-1)^{n-i}\dfrac{\det\left(\mathbf{M}''(i)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-i)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}\dots b_i}, i\in\{1,2,\dots,n-1\} \\ 1, i=n \end{cases} \text{ ，} \tag{2.20}$$

$$
\text{其中}\mathbf{M}''(i)=\begin{pmatrix} a_{i+1} & c_{i+1} & & & \mathbf{0} \\ b_{i+1} & a_{i+2} & \ddots & & \\ & b_{i+2} & \ddots & c_{n-2} & \\ & & \ddots & a_{n-1} & c_{n-1} \\ \mathbf{0} & & & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}_{(n-i)\times(n-i)}\text{。}
$$

證明：

(1)底下我們用歸納法證明$[\mathbf{x}^{(j)}]_i$以迭代得出的表示式。令$[\mathbf{x}^{(j)}]_n=r, r\in\mathbb{R}, r\neq 0$，則

$$
[\mathbf{x}^{(j)}]_{n-1}=(-1)\frac{(a_n-\lambda_j)}{b_{n-1}}r \text{ ，} [\mathbf{x}^{(j)}]_{n-2}=-\frac{(a_{n-1}-\lambda_j)[\mathbf{x}^{(j)}]_{n-1}}{b_{n-2}}-\frac{c_{n-1}[\mathbf{x}^{(j)}]_n}{b_{n-2}}
$$

$$
=(-1)^2\frac{(a_{n-1}-\lambda_j)(a_n-\lambda_j)-b_{n-1}c_{n-1}}{b_{n-1}b_{n-2}}r=(-1)^2\frac{\det\left(\mathbf{M}''(2)-\lambda_j\mathbf{I}_{(2)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}}r
$$

。對$i\in\{1,2,\ldots,n-3\}$我們假設

$$
[\mathbf{x}^{(j)}]_{i+2}=(-1)^{n-i-2}\frac{\det\left(\mathbf{M}''(i+2)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-i-2)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_{i+2}}r \text{ ，} [\mathbf{x}^{(j)}]_{i+1}=(-1)^{n-i-1}\frac{\det\left(\mathbf{M}''(i+1)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-i-1)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_{i+1}}r
$$

，則

$$
[\mathbf{x}^{(j)}]_i=-\frac{a_{i+1}-\lambda_j}{b_i}[\mathbf{x}^{(j)}]_{i+1}-\frac{c_{i+1}}{b_i}[\mathbf{x}^{(j)}]_{i+2}
$$

$$
=(-1)^{n-i}\left(\frac{(a_{i+1}-\lambda_j)\det\left(\mathbf{M}''(i+1)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-i-1)}\right)-b_{i+1}c_{i+1}\det\left(\mathbf{M}''(i+2)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-i-2)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_i}\right)r
$$

$$
=(-1)^{n-i}\frac{\det\left(\mathbf{M}''(i)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-i)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_i}r \tag{2.21}
$$

(2)將(2.21)帶入$(a_1-\lambda_j)[\mathbf{x}^{(j)}]_1+c_1[\mathbf{x}^{(j)}]_2=0$，

$$
(a_1-\lambda_j)(-1)^{n-1}\frac{\det\left(\mathbf{M}''(1)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-1)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1}r+c_1(-1)^{n-2}\frac{\det\left(\mathbf{M}''(2)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-2)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_2}r
$$

$$
=(-1)^{n-1}\frac{(a_1-\lambda_j)\det\left(\mathbf{M}''(1)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-1)}\right)-b_1c_1\det\left(\mathbf{M}''(2)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n-2)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1}r=(-1)^{n-1}\frac{\det\left(\mathbf{M}(n)-\lambda_j\mathbf{I}_{(n)}\right)}{b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1}r \tag{2.22}
$$

注意λ_j是 **M**(n)的特徵值，因此(2.22)爲零，所以解空間的基底有(2.20)式，即透過迭代解出來的特徵向量是合適的。Q.E.D.

我們在上個引理中證明了對三對角矩陣而言，其特徵向量可透過迭代產生。讓 **E** 表特

徵向量依序並排的矩陣，每個元素除了特徵值會與行數產生關聯，其他上下列的關係在各特徵向量中並**不變**，這就是說我們可以對 **E** 矩陣的行列式做一些與特徵值無關的**列運算**，因而得到以下。

引理 2.12：對條件同引理 2.11 的三對角線矩陣，其特徵向量並排的矩陣 **E** 有：

$$\det(\mathbf{E})=\frac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}'(n)\right)}{b_{n-1}^{n-1}b_{n-2}^{n-2}\ldots b_2^2 b_1},\boldsymbol{\lambda}'(n)=\begin{pmatrix}\lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_n^{n-1}\\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_{n-1}^{n-2} & \lambda_n^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n-1} & \lambda_n\\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\end{pmatrix}。 \tag{2.23}$$

證明：因為特徵向量分量間的關係，其形式與特徵值並無關，為了方便起見，我們將以 $\det\left(\sim\left|\mathbf{e}^{(j)}\right|\sim\right)$ 代表整個 $\det(\mathbf{E})$。注意將某一列乘以常數倍加至另一列會使得行列式值不變，所以可以得到：

$$\det\left(\sim\left|\mathbf{e}^{(j)}\right|\sim\right)=\det\left(\sim\left|\begin{matrix}\frac{(\lambda_j-a_2)}{b_1}[\mathbf{e}^{(j)}]_2-\frac{c_2}{b_1}[\mathbf{e}^{(j)}]_3\\ \vdots\\ \frac{(\lambda_j-a_{i+1})}{b_i}[\mathbf{e}^{(j)}]_{i+1}-\frac{c_{i+1}}{b_i}[\mathbf{e}^{(j)}]_{i+2}\\ \vdots\\ \frac{(\lambda_j-a_{n-1})}{b_{n-2}}[\mathbf{e}^{(j)}]_{n-1}-\frac{c_{n-1}}{b_{n-2}}[\mathbf{e}^{(j)}]_n\\ \frac{\lambda_j-a_n}{b_{n-1}}\\ 1\end{matrix}\right|\sim\right)=\det\left(\sim\left|\begin{matrix}\frac{\lambda_j}{b_1}[\mathbf{e}^{(j)}]_2\\ \vdots\\ \frac{\lambda_j}{b_i}[\mathbf{e}^{(j)}]_{i+1}\\ \vdots\\ \frac{\lambda_j}{b_{n-2}}[\mathbf{e}^{(j)}]_{n-1}\\ \frac{\lambda_j}{b_{n-1}}\\ 1\end{matrix}\right|\sim\right)$$

$$=\frac{\det\begin{pmatrix}\lambda_1[\mathbf{e}^{(1)}]_2 & \lambda_2[\mathbf{e}^{(2)}]_2 & \ldots & \lambda_{n-1}[\mathbf{e}^{(n-1)}]_2 & \lambda_n[\mathbf{e}^{(n)}]_2\\ \lambda_1[\mathbf{e}^{(1)}]_3 & \lambda_2[\mathbf{e}^{(2)}]_3 & \cdots & \lambda_{n-1}[\mathbf{e}^{(n-1)}]_3 & \lambda_n[\mathbf{e}^{(n)}]_3\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1[\mathbf{e}^{(1)}]_{n-1} & \lambda_2[\mathbf{e}^{(2)}]_{n-1} & \ldots & \lambda_{n-1}[\mathbf{e}^{(n-1)}]_{n-1} & \lambda_n[\mathbf{e}^{(n)}]_{n-1}\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_{n-1} & \lambda_n\\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1\end{pmatrix}}{b_1b_2\ldots b_{n-1}} \tag{2.24}$$

以同樣的方法繼續化簡至所有的 $[\mathbf{e}^{(j)}]_i$ 都消失便可得證。Q.E.D.

推論 2.13：對條件同引理 2.11 的三對角線矩陣，可對角化若且爲若特徵值全相異。

證明：我們知道矩陣可對角化若且爲若其特徵向量彼此**獨立(independent of eigenvector)**，而行向量彼此獨立若且爲若其並排矩陣的行列式非零。將(2.23)式展開後可得

$\det\left(\boldsymbol{\lambda}'(n)\right)=\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\ldots,n\}\\ r<s}}\left(\lambda_r-\lambda_s\right)$，由此可以看出 $\det\left(\mathbf{E}\right)\neq 0$ 若且爲若特徵值全相異，因此可對角化若且爲若特徵值全相異。Q.E.D.

推論 2.14：均勻可逆系統的矩陣 $\mathbf{P}_{ure}$ 特徵值全相異，因此可以**對角化**。

證明：因爲 $\mathbf{P}'_{T-ure}$ 爲實對稱矩陣所以可以對角化，又其符合引理 2.11 的條件所以由推論 2.13 知 $\mathbf{P}'_{T-ure}$ 的特徵值全相異。 $\mathbf{P}_{T-ure}$ 只比 $\mathbf{P}'_{T-ure}$ 多出一個零根，由(2.9)與(2.14)顯然 $\mathbf{P}'_{T-ure}$ 沒有零特徵值，所以由引理 2.4 矩陣 $\mathbf{P}_{ure}$ 特徵值全相異。Q.E.D.

引理 2.15：均勻可逆系統的所有特徵值有下列關係：

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1-\lambda_i)=p^k q^{k-1} \tag{2.25}$$

證明：因爲矩陣 $\mathbf{P}_{ure}$ 可對角化，我們把欲證的式子以如下形式寫出：

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1-\lambda_i)=\det\left(\mathbf{I}_{(k+1)}-\mathbf{D}_{ure}\right)=\det\left(\mathbf{I}_{(k+1)}-\mathbf{E}_{ure}^{-1}\mathbf{P}_{ure}\mathbf{E}_{ure}\right)=\det\left(\mathbf{I}_{(k+1)}-\mathbf{P}_{ure}\right) \tag{2.26}$$

參照性質 2.9 的證明可得。Q.E.D.

到此我們已經把所有必要的特徵值關係說明完畢，下面給出均勻可逆系統的機率密度函數。

定理 2.16〔均勻可逆系統〕：因爲所有的 $p_{back}\left(i\right)=pq, p_{stop}\left(i\right)=p^2+q^2, p_{go}\left(i\right)=pq$ 皆爲一常數，我們有機率密度函數可表示爲：

$$P\left(T=t\right)=p^k q^{k-1}\frac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det(\boldsymbol{\lambda}(k))} \tag{2.27}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_t(k)=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{k-1}&\lambda_k\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-2}&\lambda_2^{k-2}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-2}&\lambda_k^{k-2}\\ \lambda_1^{t-1}&\lambda_2^{t-1}&\cdots&\lambda_{k-1}^{t-1}&\lambda_k^{t-1}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\lambda}(k)=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{k-1}&\lambda_k\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-2}&\lambda_2^{k-2}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-2}&\lambda_k^{k-2}\\ \lambda_1^{k-1}&\lambda_2^{k-1}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-1}&\lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}$。

證明：由於 $\mathbf{P}_{ure}$ 可對角化，所以類似不可逆系統的討論我們可得 $P\left(T=t\right)=[\mathbf{E}_{ure}\mathbf{D}_{ure}{}^t\mathbf{E}_{ure}^{-1}]_{(k+1)1}$

，又 $\mathbf{E}_{ure}$ 矩陣的最末列元素必爲 1，我們令 $\lambda_{k+1}=0$ ，所以有 $P(T=t)=\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j^t[\mathbf{E}_{ure}^{-1}]_{j1}$ ，由反矩陣公式 $\mathbf{E}_{ure}^{-1}=\dfrac{adj(\mathbf{E}_{ure})}{\det(\mathbf{E}_{ure})}$ ，故前式可以寫成

$$P(T=t)=\frac{\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j^t[adj(\mathbf{E}_{ure})]_{j1}}{\det(\mathbf{E}_{ure})}=\frac{\sum_{j=1}^{k+1}\lambda_j^t C_{1j}}{\det(\mathbf{E}_{ure})}=\frac{\det(\mathbf{E}_{ure}^{'})}{\det(\mathbf{E}_{ure})} \tag{2.28}$$

其中 C_{1j} 代表 $\mathbf{E}_{ure}$ 矩陣第 1 列第 j 個元素的餘因子，
$$\mathbf{E}_{ure}^{'}=\begin{pmatrix} \lambda_1^t & \lambda_2^t & \cdots & \lambda_{k-1}^t & \lambda_k^t & 0 \\ [\mathbf{e}_{ure}^{(1)}]_2 & [\mathbf{e}_{ure}^{(2)}]_2 & \cdots & [\mathbf{e}_{ure}^{(k-1)}]_2 & [\mathbf{e}_{ure}^{(k)}]_2 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [\mathbf{e}_{ure}^{(1)}]_{k-1} & [\mathbf{e}_{ure}^{(2)}]_{k-1} & \cdots & [\mathbf{e}_{ure}^{(k-1)}]_{k-1} & [\mathbf{e}_{ure}^{(k)}]_{k-1} & 0 \\ [\mathbf{e}_{ure}^{(1)}]_k & [\mathbf{e}_{ure}^{(2)}]_k & \cdots & [\mathbf{e}_{ure}^{(k-1)}]_k & [\mathbf{e}_{ure}^{(k)}]_k & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

，$\mathbf{E}_{ure}^{'}$ 的末行可以由引理 2.11 得到。由引理 2.12，可得 $\det(\mathbf{E}_{ure})$

$$=\frac{\det\begin{pmatrix} \lambda_1^k & \lambda_2^k & \cdots & \lambda_{k-1}^k & \lambda_k^k & 0 \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{k-1}^2 & \lambda_k^2 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k & 0 \\ 1 & 1 & & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{p\times p_{go}^{\frac{(k+2)(k-1)}{2}}}=\frac{\left(\prod_{i=1}^k\lambda_i\right)\det\begin{pmatrix} \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}}{p\times p_{go}^{\frac{(k+2)(k-1)}{2}}} \tag{2.29}$$

將 $\det(\mathbf{E}_{ure}^{'})$ 同樣用(2.24)的化簡消去矩陣中的 e，最後有：

$$\det(\mathbf{E}_{ure}^{'})=\frac{\left(\prod_{i=1}^k\lambda_i\right)\det\begin{pmatrix} \lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{t-1} & \lambda_k^{t-1} \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}}{p_{go}^{\frac{k(k-1)}{2}}} \tag{2.30}$$

兩式相除後將行列式的順序掉換便得證。Q.E.D.

(2.27)爲一機率密度函數之證明請參照附錄三。

參照附錄七的 Figure2.1~Figure2.2，我們先將其與不可逆時的狀況做一比較，可以很明顯的看的出來，整體而言均勻可逆系統的實驗時間遠比均勻不可逆系統的實驗時間來的長，且分散程度也比不可逆時來的廣，這當然符合我們直觀上所預期的。

Figure2.3 中尖峰由上而下分別是 p=0.5,0.7,0.3,0.9,0.1 的圖形，Figure2.4 中尖峰由上而下

分別是 k=5,6,7,8,9 的圖形。我們可以看出來，當 p 越靠近 0.5 時分佈趨勢越偏左，且越集中；當 p 越超過 0.5 時分佈趨勢反而回向右側，且越分散。這便是告訴我們說並不是轉移機率越大實驗便越快結束，因爲轉移機率變大時，系統**回流的速度也變快了**，故會造成實驗時間的增長。而 Figure2.4 告訴我們說當 k 越大時，整體分佈越偏右且分散程度越趨增加，與之前的分佈相同。

從這裡開始我們計算均勻可逆系統的統計參數。

引理 2.17：對所有的 $n \ge 2$ 有：若 $a_j \in (-1,1)$，$j \in \{1,2,...,n\}$ 則

$$\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ \frac{1}{(1-a_1)^2} & \frac{1}{(1-a_2)^2} & \cdots & \frac{1}{(1-a_{n-1})^2} & \frac{1}{(1-a_n)^2} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & a_n^{n-1} \\ \frac{1}{(1-a_1)} & \frac{1}{(1-a_2)} & \cdots & \frac{1}{(1-a_{n-1})} & \frac{1}{(1-a_n)} \end{pmatrix}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-a_i} \text{。} \tag{2.31}$$

證明：以下我們將用歸納法證明。歸納假設

$$\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & \cdots & a_{n-2}^{n-3} & a_{n-1}^{n-3} \\ \frac{1}{(1-a_1)^2} & \frac{1}{(1-a_2)^2} & \cdots & \frac{1}{(1-a_{n-2})^2} & \frac{1}{(1-a_{n-1})^2} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & \cdots & a_{n-2}^{n-3} & a_{n-1}^{n-3} \\ \frac{1}{(1-a_1)} & \frac{1}{(1-a_2)} & \cdots & \frac{1}{(1-a_{n-2})} & \frac{1}{(1-a_{n-1})} \end{pmatrix}} = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{1-a_i}$$

。欲證(2.31)成立，我們只須證明等號左右之差爲零，相減後並通分，再將分子行列式全對倒數第二列展開得：

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j-1} a_j^{n-2} \mathbf{\Omega}_j - \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-a_i}\right) \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j-1} a_j^{n-2} \mathbf{\Xi}_j \tag{2.32}$$

其中$\mathbf{\Omega}_j = \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{j-1} & a_{j+1} & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-3} & \cdots & a_{j-1}^{n-3} & a_{j+1}^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ \dfrac{1}{(1-a_1)^2} & \cdots & \dfrac{1}{(1-a_{j-1})^2} & \dfrac{1}{(1-a_{j+1})^2} & \cdots & \dfrac{1}{(1-a_n)^2} \end{pmatrix}$，

$\mathbf{\Xi}_j = \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{j-1} & a_{j+1} & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-3} & \cdots & a_{j-1}^{n-3} & a_{j+1}^{n-3} & \cdots & a_n^{n-3} \\ \dfrac{1}{(1-a_1)} & \cdots & \dfrac{1}{(1-a_{j-1})} & \dfrac{1}{(1-a_{j+1})} & \cdots & \dfrac{1}{(1-a_n)} \end{pmatrix}$。由歸納假設可以得到

$\mathbf{\Omega}_j = \left(\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} \dfrac{1}{1-a_i}\right)\mathbf{\Xi}_j$，代入(2.32)整理後可以得到：

$$-\sum_{j=1}^{n} \frac{(-1)^{n+j-1} a_j^{n-2}}{1-a_j}\mathbf{\Xi}_j = -\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & \cdots & a_{n-1}^{n-3} & a_n^{n-3} \\ \dfrac{a_1^{n-2}}{1-a_1} & \dfrac{a_2^{n-2}}{1-a_2} & \cdots & \dfrac{a_{n-1}^{n-2}}{1-a_{n-1}} & \dfrac{a_n^{n-2}}{1-a_n} \\ \dfrac{1}{(1-a_1)} & \dfrac{1}{(1-a_2)} & \cdots & \dfrac{1}{(1-a_{n-1})} & \dfrac{1}{(1-a_n)} \end{pmatrix} \tag{2.33}$$

把所有第$i \in \{1,2,...,n\}$行提出$\dfrac{1}{1-a_i}$後，再利用列運算可以簡單得到

$$\left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-a_i}\right)\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-3} & a_2^{n-3} & \cdots & a_{n-1}^{n-3} & a_n^{n-3} \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \cdots & a_{n-1}^{n-2} & a_n^{n-2} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.34}$$

所以由歸納法便得證(2.31)。Q.E.D.

性質 2.18：均勻可逆系統的期望值用特徵值表示為

$$E(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}\text{ 。} \tag{2.35}$$

證明：按照定義，我們將(2.27)乘上 t 再對 t 做和，因整個部分與 t 相關的只有$t\times\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)$，故$E(T)=p^kq^{k-1}\dfrac{\sum_{t=k}^{\infty}t\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)}$

$$=p^kq^{k-1}\frac{\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{k-1}&\lambda_k\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-2}&\lambda_2^{k-2}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-2}&\lambda_k^{k-2}\\ \frac{k\lambda_1^{k-1}}{1-\lambda_1}+\frac{\lambda_1^k}{(1-\lambda_1)^2}&\frac{k\lambda_2^{k-1}}{1-\lambda_2}+\frac{\lambda_2^k}{(1-\lambda_2)^2}&\cdots&\frac{k\lambda_{k-1}^{k-1}}{1-\lambda_{k-1}}+\frac{\lambda_{k-1}^k}{(1-\lambda_{k-1})^2}&\frac{k\lambda_k^{k-1}}{1-\lambda_k}+\frac{\lambda_k^k}{(1-\lambda_k)^2}\end{pmatrix}}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)} \tag{2.36}$$

上式用到了$\lambda_i\in[0,1)$的特性，將上式分子拆成兩項，

$$k\cdot\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{k-1}&\lambda_k\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-2}&\lambda_2^{k-2}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-2}&\lambda_k^{k-2}\\ \frac{\lambda_1^{k-1}}{1-\lambda_1}&\frac{\lambda_2^{k-1}}{1-\lambda_2}&\cdots&\frac{\lambda_{k-1}^{k-1}}{1-\lambda_{k-1}}&\frac{\lambda_k^{k-1}}{1-\lambda_k}\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{k-1}&\lambda_k\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-2}&\lambda_2^{k-2}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-2}&\lambda_k^{k-2}\\ \frac{\lambda_1^{k}}{(1-\lambda_1)^2}&\frac{\lambda_2^{k}}{(1-\lambda_2)^2}&\cdots&\frac{\lambda_{k-1}^{k}}{(1-\lambda_{k-1})^2}&\frac{\lambda_k^{k}}{(1-\lambda_k)^2}\end{pmatrix} \tag{2.37}$$

我們先處理(2.37)的左式，我們把所有第$i\in\{1,2,...,k\}$行提出$\dfrac{1}{(1-\lambda_i)}$再依序由下而上逐列向上加可得：

$$\frac{k}{\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)}\det\begin{pmatrix}1-\lambda_1&1-\lambda_2&\cdots&1-\lambda_{k-1}&1-\lambda_k\\ \lambda_1-\lambda_1^2&\lambda_2-\lambda_2^2&\cdots&\lambda_{k-1}-\lambda_{k-1}^2&\lambda_k-\lambda_k^2\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-2}-\lambda_1^{k-1}&\lambda_2^{k-2}-\lambda_2^{k-1}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-2}-\lambda_{k-1}^{k-1}&\lambda_k^{k-2}-\lambda_k^{k-1}\\ \lambda_1^{k-1}&\lambda_2^{k-1}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-1}&\lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}=\frac{k\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)}{\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)} \tag{2.38}$$

接著處理(2.37)的右式，把所有第$i\in\{1,2,...,k\}$行提出$\dfrac{1}{(1-\lambda_i)}$，再利用

$\dfrac{\lambda_i^k}{(1-\lambda_i)}=\dfrac{1}{1-\lambda_i}-\left(\dfrac{1-\lambda_i^k}{1-\lambda_i}\right)=\dfrac{1}{1-\lambda_i}-\sum_{j=0}^{k-1}\lambda_i^j$，可將其展開為：

$$\frac{\det\begin{pmatrix}1-\lambda_1 & 1-\lambda_2 & \cdots & 1-\lambda_{k-1} & 1-\lambda_k\\ \lambda_1-\lambda_1^2 & \lambda_2-\lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{k-1}-\lambda_{k-1}^2 & \lambda_k-\lambda_k^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{k-2}-\lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-2}-\lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_{k-1}^{k-2}-\lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-2}-\lambda_k^{k-1}\\ \frac{1}{(1-\lambda_1)} & \frac{1}{(1-\lambda_2)} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{k-1})} & \frac{1}{(1-\lambda_k)}\end{pmatrix}}{\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)}-\frac{\sum_{j=0}^{k-1}\det\begin{pmatrix}1-\lambda_1 & 1-\lambda_2 & \cdots & 1-\lambda_{k-1} & 1-\lambda_k\\ \lambda_1-\lambda_1^2 & \lambda_2-\lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{k-1}-\lambda_{k-1}^2 & \lambda_k-\lambda_k^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{k-2}-\lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-2}-\lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_{k-1}^{k-2}-\lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-2}-\lambda_k^{k-1}\\ \lambda_1^j & \lambda_2^j & \ldots & \lambda_{k-1}^j & \lambda_k^j\end{pmatrix}}{\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)} \tag{2.39}$$

對於所有 $j\in\{0,1,...,k-1\}$ 利用行列式的列運算我們有

$$\det\begin{pmatrix}1-\lambda_1 & 1-\lambda_2 & \cdots & 1-\lambda_{k-1} & 1-\lambda_k\\ \lambda_1-\lambda_1^2 & \lambda_2-\lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{k-1}-\lambda_{k-1}^2 & \lambda_k-\lambda_k^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{k-2}-\lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-2}-\lambda_2^{k-1} & \ldots & \lambda_{k-1}^{k-2}-\lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-2}-\lambda_k^{k-1}\\ \lambda_1^j & \lambda_2^j & \ldots & \lambda_{k-1}^j & \lambda_k^j\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1 & 1 & & 1 & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{j-1} & \lambda_2^{j-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{j-1} & \lambda_k^{j-1}\\ -\lambda_1^{j+1} & -\lambda_2^{j+1} & \cdots & -\lambda_{k-1}^{j+1} & -\lambda_k^{j+1}\\ \vdots & & & \vdots & \vdots\\ -\lambda_1^{k-1} & -\lambda_2^{k-1} & \cdots & -\lambda_{k-1}^{k-1} & -\lambda_k^{k-1}\\ \lambda_1^j & \lambda_2^j & \cdots & \lambda_{k-1}^j & \lambda_k^j\end{pmatrix} \tag{2.40}$$

注意到上式等號右側共可提出 k-j-1 個負號，而將整個行列式排序成指數由上而下隨列增加的形式需要 k-j-1 次換列，所以我們最後有(2.39)右側等於 $\dfrac{k\det(\boldsymbol{\lambda}(k))}{\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)}$ 與(2.38)消掉，因此(2.36)變成：

$$E(T)=\frac{\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)}{\det(\boldsymbol{\lambda}(k))}\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \ldots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2}\\ \frac{1}{(1-\lambda_1)^2} & \frac{1}{(1-\lambda_2)^2} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{k-1})^2} & \frac{1}{(1-\lambda_k)^2}\end{pmatrix}。 \tag{2.41}$$

上式用到引理 2.15 以及 $\lambda_{k+1}=0$ 。由(2.38)我們可將 $\dfrac{\det(\boldsymbol{\lambda}(k))}{\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)}$ 寫成行列式，因此(2.36)變爲：

$$E(T)=\frac{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2}\\ \frac{1}{(1-\lambda_1)^2} & \frac{1}{(1-\lambda_2)^2} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{k-1})^2} & \frac{1}{(1-\lambda_k)^2}\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2}\\ \frac{1}{(1-\lambda_1)} & \frac{1}{(1-\lambda_2)} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{k-1})} & \frac{1}{(1-\lambda_k)}\end{pmatrix}} \tag{2.42}$$

由引理 2.17 便可得證。Q.E.D.

附錄七給出兩個關於期望值對參數的圖形 Figure2.5,Figure2.6，值得注意的是 Figure2.5 中使期望值最小的 p 約略在 0.55 附近。

性質 2.19：均勻可逆系統的變異數用特徵值表示爲

$$Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)^2} \tag{2.43}$$

證明：首先仿性質 2.18 可求得均勻可逆系統的二次動差〔見附錄四〕爲

$$E(T^2)=\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\le\beta}}\frac{2}{(1-\lambda_\alpha)(1-\lambda_\beta)}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}\ , \tag{2.44}$$

利用 $Var(T)=E(T^2)-E(T)^2$，代入(2.35)，(2.44)後

$$Var(T)=\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{1,2,\ldots,k\}\\ \alpha\le\beta}}\frac{2}{(1-\lambda_\alpha)(1-\lambda_\beta)}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}-\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}\right)^2=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(1-\lambda_i)^2}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)^2} \tag{2.45}$$

上式第二個等號是把 $\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}\right)^2$ 乘開後相消的結果。Q.E.D

附錄七給出兩個關於變異數對參數的圖形 Figure2.7,Figure2.8，值得注意的是 Figure2.7 中使變異數最小的 p 也在 0.55 附近。

性質 2.20：均勻可逆系統之特徵函數用特徵值表示爲：

$$\phi_T(s) = p^k q^{k-1} \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{\mathrm{i}s}}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_j} \tag{2.46}$$

證明：由定義得 $\phi_T(s) = \sum_{t=k}^{\infty} e^{\mathrm{i}st} p^k q^{k-1} \frac{\det(\boldsymbol{\lambda}_t(k))}{\det(\boldsymbol{\lambda}(k))}$ ，把 $e^{\mathrm{i}st}$ 乘入 $\det(\boldsymbol{\lambda}_t(k))$ 的最後一列，因為特徵值的絕對值小於 1 且 $\left|e^{\mathrm{i}st}\right| = 1$，所以級數 $\sum_{t=k}^{\infty} e^{\mathrm{i}st}\lambda_j^{t-1}$ 收斂且等於 $\frac{e^{\mathrm{i}sk}\lambda_j^{k-1}}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_j}$ 。由此得

$$\phi_T(s) = p^k q^{k-1} \frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \frac{e^{\mathrm{i}sk}\lambda_1^{k-1}}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_1} & \frac{e^{\mathrm{i}sk}\lambda_2^{k-1}}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_2} & \cdots & \frac{e^{\mathrm{i}sk}\lambda_{k-1}^{k-1}}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_{k-1}} & \frac{e^{\mathrm{i}sk}\lambda_k^{k-1}}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_k} \end{pmatrix}}{\det(\boldsymbol{\lambda}(k))} \tag{2.47}$$

把上式所有第 $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ 行提出 $\frac{1}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_j}$ ，再提出末列的 $e^{\mathrm{i}sk}$ ，

$$\phi_T(s) = p^k q^{k-1} \prod_{j=1}^{k} \frac{e^{\mathrm{i}s}}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_j} \times \frac{\det\begin{pmatrix} 1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_1 & 1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_2 & \cdots & 1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_{k-1} & 1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_k \\ \lambda_1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_1^2 & \lambda_2-e^{\mathrm{i}s}\lambda_2^2 & \cdots & \lambda_{k-1}-e^{\mathrm{i}s}\lambda_{k-1}^2 & \lambda_{k-1}-e^{\mathrm{i}s}\lambda_k^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2}-e^{\mathrm{i}s}\lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-2}-e^{\mathrm{i}s}\lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2}-e^{\mathrm{i}s}\lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_{k-1}^{k-2}-e^{\mathrm{i}s}\lambda_k^{k-1} \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}}{\det(\boldsymbol{\lambda}(k))} \tag{2.48}$$

上式乘號右邊的分子由列運算可簡單化為 $\det(\boldsymbol{\lambda}(k))$ 後便證明完畢。Q.E.D.

定理 2.21：均勻可逆系統的期望值與變異數及特徵函數用 p，q 表示為

$$E(T) = \frac{\binom{k}{1}}{p} + \frac{\binom{k}{2}}{pq} \tag{2.49}$$

$$Var(T) = \left(\frac{\binom{k}{1}}{p} + \frac{\binom{k}{2}}{pq}\right)^2 - \frac{\binom{k}{1}}{p} - \frac{\binom{k}{2}}{pq} - \frac{2\binom{k+1}{3}}{p^2 q} - \frac{2\binom{k+1}{4}}{p^2 q^2} \tag{2.50}$$

$$\phi_T(s)=\frac{p^k q^{k-1}}{\det\left(e^{-\mathrm{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}'_{ure}\right)} \tag{2.51}$$

證明：

(1)我們考量 $\det\left(\mathbf{P}'_{ure}-s\mathbf{I}_{(k)}\right)=f(p,s):(0,1)\times R\to R$，則因 $f(p,s)$ 是 s 的多項式，所以 $\forall n\in$ □，$\dfrac{\partial^n f(p,s)}{\partial^n s}$ 存在。由(2.8)式我們知道 $f(p,s)=\sum_{i=1}^{k} SMM_i\left(\mathbf{P}'_{ure}\right)(-s)^i$，而 $SMM_i\left(\mathbf{P}'_{ure}\right)$ 本身又是一個 p 的多項式，所以 $\forall n\in$ □，$\dfrac{\partial^n f(p,s)}{\partial^n p}$ 存在。但注意到 $f(p,s)$ 與特徵方程式的形式相同，因而有 $f(p,s)=(-1)^k\prod_{i=1}^{k}(s-\lambda_i)$，當 $f(p,s)\neq 0$ 時，可以將以上對 s 微分再除以本身，得有理式：

$$\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}{f}=\frac{(-1)^k\left(\prod_{i=1}^{k}s-\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s-\lambda_i}}{(-1)^k\left(\prod_{i=1}^{k}s-\lambda_i\right)}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s-\lambda_i}\ 。 \tag{2.52}$$

將上式再對 s 微一次並加本身後取負值可得有理式：

$$-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}{f}\right)-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}{f}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\left(s-\lambda_i\right)^2}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{s-\lambda_i}=\sum_{i=1}^{k}\frac{1-s+\lambda_i}{\left(s-\lambda_i\right)^2}\ 。 \tag{2.53}$$

顯然有：

$$\left.\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}{f}\right|_{s=1}=E(T),\ \left.\left(-\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}{f}\right)-\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}{f}\right)\right|_{s=1}=Var(T) \tag{2.54}$$

我們在性質 2.9 的後段證明了 $f(p,1)=(-1)^k\,p^k q^{k-1}$，底下我們處理 $\dfrac{\partial f}{\partial s}$。因

$$f(p,s)=\det\left(\mathbf{P}'_{ure}-s\mathbf{I}_{(k)}\right)=\det\begin{pmatrix} q-s & p_{back} & & & & \\ p & p_{stop}-s & \ddots & & \mathbf{0} & \\ & p_{go} & \ddots & p_{back} & & \\ & & \ddots & p_{stop}-s & \ddots & \\ & & & p_{go} & \ddots & p_{back} \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & p_{stop}-s \end{pmatrix}_{k\times k}$$

，則由行列式的微分法則可得：

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\sum_{j=1}^{k}\det\begin{pmatrix} q-s & p_{back} & & & & & & & & \\ p & p_{stop}-s & \ddots & & & & & & & \\ & p_{go} & \ddots & p_{back} & & & & \mathbf{0} & & \\ & & \ddots & p_{stop}-s & p_{back} & & & & & \\ & & & 0 & -1(\text{第}j\text{列}) & 0 & & & & \\ & & & & p_{go} & p_{stop}-s & p_{back} & & & \\ & & & & & p_{go} & p_{stop}-s & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & & & & p_{go} & \ddots & p_{back} & \\ & & & & & & & \ddots & p_{stop}-s & p_{back} \\ & & & & & & & & p_{go} & p_{stop}-s \end{pmatrix}_{k\times k} \tag{2.55}$$

由遞迴方法可得

$$\det\begin{pmatrix} p_{stop}-1 & p_{back} & & & \mathbf{0} \\ p_{go} & p_{stop}-1 & \ddots & & \\ & p_{go} & \ddots & p_{back} & \\ & & \ddots & p_{stop}-1 & p_{back} \\ \mathbf{0} & & & p_{go} & p_{stop}-1 \end{pmatrix}_{(k-j)\times(k-j)} =(-1)^{k-j}(k-j+1)\,p^{k-j}q^{k-j}$$

，所以(2.55)s

代入 1 後可乘開爲：

$$\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{s=1}=(-1)^{k}kp^{k-1}q^{k-1}+(-1)^{k}p^{k-1}q^{k-2}\sum_{j=2}^{k}(k-j+1) \tag{2.56}$$

代入(2.54)後，可得

$$E(T)=\frac{(-1)^{k}kp^{k-1}q^{k-1}+(-1)^{k}p^{k-1}q^{k-2}\sum_{j=2}^{k}(k-j+1)}{(-1)^{k}p^{k}q^{k-1}}=\frac{k}{p}+\frac{k(k-1)}{2pq}=\frac{\binom{k}{1}}{p}+\frac{\binom{k}{2}}{pq} \tag{2.57}$$

(2)由於$\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}{f}\right)=\dfrac{\frac{\partial^2 f}{\partial^2 s}}{f}-\left(\dfrac{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}{f}\right)^2$，我們先處理$\dfrac{\frac{\partial^2 f}{\partial^2 s}}{f}$。將(2.55)的行列式再微分一次得

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 s}=\sum_{j=1}^{k}\sum_{u=1}^{k}\ \det\begin{pmatrix} q-s & p_{back} & & & & & & & & \\ p & p_{stop}-s & \ddots & & & & & \mathbf{0} & & \\ & p_{go} & \ddots & p_{back} & & & & & & \\ & & \ddots & p_{stop}-s & p_{back} & & & & & \\ & & & 0 & -1(\text{第}j\text{列}) & \ddots & & & & \\ & & & & p_{go} & \ddots & p_{back} & & & \\ & & & & & \ddots & -1\text{第}u\text{列} & \ddots & & \\ & & \mathbf{0} & & & & p_{go} & \ddots & p_{back} & \\ & & & & & & & \ddots & p_{stop}-s & p_{back} \\ & & & & & & & & p_{go} & p_{stop}-s \end{pmatrix}_{k\times k} \tag{2.58}$$

這裡 j 跟 u 是可以重複的，當 j=u 時，行列式值為零。
s 代入 1 後可得：

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 s}\right|_{s=1}&=2\left((-1)^{k-2}\ p^{k-2}q^{k-2}\sum_{u=2}^{k}(u-1)(k-u+1)+(-1)^{k-2}\ p^{k-2}q^{k-3}\sum_{2\le j<u\le k}(u-j)(k-u+1)\right)\\ &=(-1)^{k-2}\ p^{k-2}q^{k-2}\frac{k\left(k^2-1\right)}{3}+(-1)^{k-2}\ p^{k-2}q^{k-3}\frac{k\left(k^2-1\right)(k-2)}{12}\\ &=(-1)^{k-2}\,2\,p^{k-2}q^{k-2}\binom{k+1}{3}+(-1)^{k-2}\,2\,p^{k-2}q^{k-3}\binom{k+1}{4}\end{aligned} \tag{2.59}$$

因此：

$$\left.\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)}{f}\right)\right|_{s=1}=\frac{2\binom{k+1}{3}}{p^2q}+\frac{2\binom{k+1}{4}}{p^2q^2}-\left(\frac{\binom{k}{1}}{p}+\frac{\binom{k}{2}}{pq}\right)^2 \tag{2.60}$$

由此代入(2.54)後可得：$Var(T)=\left(\frac{\binom{k}{1}}{p}+\frac{\binom{k}{2}}{pq}\right)^2-\frac{\binom{k}{1}}{p}-\frac{\binom{k}{2}}{pq}-\frac{2\binom{k+1}{3}}{p^2q}-\frac{2\binom{k+1}{4}}{p^2q^2}$ 便得證。

(3)(2.46)式可寫成 $p^kq^{k-1}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{e^{-\mathrm{i}s}-\lambda_j}$ ，分母 $\prod_{j=1}^{k}e^{-\mathrm{i}s}-\lambda_j=\det\left(e^{-\mathrm{i}s}\mathbf{I}_{(k+1)}-\mathbf{D}_{ure}\right)=\det\left(e^{-\mathrm{i}s}\mathbf{I}_{(k+1)}-\mathbf{P}_{ure}\right)$ ，將分母行列式對最後一行展開後變得證。Q.E.D.

在一般機率統計的概念裡，求得一個隨機變數的特徵函數與求得其密度函數，兩者可獲得的統計資訊量是相同的。但以(2.51)式而言，已經可以獨立求得所有的統計參數，**不再需要藉助特徵值方程式或特徵值的資訊**，所以目前我們等同於是把均勻可逆系統的分佈狀況給掌握清楚了。

(2.35)式因爲被特徵值包含了所有可觀察的資訊，所以不能得知期望值最小的 p 在何處，底下我們證明性質 2.18 末段的猜測是對的。

性質 2.22：使期望值最小的機率值，當 k 趨近無限大時，機率值收斂至 0.5。

證明：我們令(2.49)式對 p 微分後等於零，化簡後可得二次方程與其解

$$p^2-(k+1)p+\frac{(k+1)}{2}=0,\ p=\frac{k+1-\sqrt{k^2-1}}{2},\frac{k+1+\sqrt{k^2-1}}{2} \tag{2.61}$$

$\frac{k+1+\sqrt{k^2-1}}{2}>1$ 不合，底下我們說明 $\frac{k+1-\sqrt{k^2-1}}{2}$ 的範圍的確在(0,1)區間。因爲 $(k+1)^2-k^2+1=2k+2>0$，以及 $\frac{k+1-\sqrt{k^2-1}}{2}-1=\frac{k-1-\sqrt{k^2-1}}{2}$，$(k-1)^2-k^2+1=2-2k<0$，所以 $\frac{k+1-\sqrt{k^2-1}}{2}$ 的確在(0,1)區間。把(2.49)對 p 微分兩次，可以得到 $\frac{k(k+1)}{p^3}+\frac{k(k-1)}{q^3}$，顯然在 $p\in(0,1)$ 時爲正，因此由(2.61)式知(2.49)在 $p\in(0,1)$ 的最小值爲 $p=\frac{k+1-\sqrt{k^2-1}}{2}$。

把 $\frac{k+1-\sqrt{k^2-1}}{2}$ 有理化後同除 2k，則

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k+1-\sqrt{k^2-1}}{2}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k+2}{2\left(k+1+\sqrt{k^2-1}\right)}=\lim_{k\to\infty}\frac{1+\frac{1}{k}}{1+\frac{1}{k}+\sqrt{1-\frac{1}{k^2}}}=\frac{1}{2} \tag{2.62}$$

這便證明了我們的敘述。Q.E.D.

上面這個性質說明了當我們給定 k 大到一定程度時﹝實務上來講只要 k >5 左右便可﹞，使系統期望值最小的機率值 p 可用 p=0.5 得到良好的估計。實務而言，若有一種可操作參數的均勻可逆系統的實驗，當我們驗想讓其儘快結束實驗，卻又沒有辦法給出精確的無理參數﹝如化學實驗﹞，則 p=0.5 是一個很好的選擇。

我們累積了許多均勻可逆系統的經驗，在此開始討論一般的可逆系統。其轉移矩陣爲

$$\mathbf{P}_{re}=\begin{pmatrix} p_{stop}(1) & p_{back}(2) & & & \mathbf{0} & 0\\ p_{go}(1) & p_{stop}(2) & p_{back}(3) & & & 0\\ & p_{go}(2) & p_{stop}(3) & \ddots & & \vdots\\ & & p_{go}(3) & \ddots & p_{back}(k) & \vdots\\ & & & \ddots & p_{stop}(k) & \vdots\\ \mathbf{0} & & & & p_{go}(k) & 0 \end{pmatrix}$$，如同均勻系統，我們考量矩陣

$$
\mathbf{P}_{T-re}=\begin{pmatrix}
p_{stop}(1) & \sqrt{p_{go}(1)p_{back}(2)} & & & & & 0\\
\sqrt{p_{go}(1)p_{back}(2)} & p_{stop}(2) & \sqrt{p_{go}(2)p_{back}(3)} & \mathbf{0} & & & \vdots\\
 & \sqrt{p_{go}(2)p_{back}(3)} & p_{stop}(3) & \ddots & & & \vdots\\
 & & \sqrt{p_{go}(3)p_{back}(4)} & \ddots & \sqrt{p_{go}(k-2)p_{back}(k-1)} & & \vdots\\
 & & & \ddots & p_{stop}(k-1) & \sqrt{p_{go}(k-1)p_{back}(k)} & 0\\
 & \mathbf{0} & & & \sqrt{p_{go}(k-1)p_{back}(k)} & p_{stop}(k) & 0\\
 & & & & & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

，則同引理 2.4 很明顯地有 $\det\left(\mathbf{P}_{T-re}-\lambda\mathbf{I}_{(k+1)}\right)=\det\left(\mathbf{P}_{re}-\lambda\mathbf{I}_{(k+1)}\right)$，即 $\mathbf{P}_{T-re}$ 與 $\mathbf{P}_{re}$ 有一樣的特徵方程式，一樣的特徵根，但是 $\mathbf{P}_{T-re}$ 是一個實對稱矩陣，所以**特徵值全為實數**，由此我們繼續來證明一些特徵值的性質。

引理(2)：A 爲一個 $n\times n$ **赫密特矩陣(Hermitian matrix)**，**y** 屬於 n 維複數向量空間，a 是一個實數，$\hat{\mathbf{A}}$ 表示如下矩陣：$\hat{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix}\mathbf{A}_{n\times n} & \mathbf{y}\\ \mathbf{y}^{\mathbf{T}} & a\end{pmatrix}$，令 $\lambda_1\le\lambda_2\le\ldots\le\lambda_n$ 是 **A** 的特徵值，$\lambda_1^{'}\le\lambda_2^{'}\le\ldots\le\lambda_{n+1}^{'}$ 爲 $\hat{\mathbf{A}}$ 的特徵值，則 $\lambda_1^{'}\le\lambda_1\le\lambda_2^{'}\le\lambda_2\le\ldots\lambda_{n-1}\le\lambda_n^{'}\le\lambda_n\le\lambda_{n+1}^{'}$。

證明：參考資料 7.的第 185 頁。

性質 2.23：對所有的 $k\in\mathbb{N}$，我們有矩陣 $\mathbf{P}_{re}(k)$ 的特徵值在(-1,1)。

證明：由(2.6)可得：對所有的 $k\in\mathbb{N}$，我們有矩陣 $\mathbf{P}_{re}^{'}(k)$ 的特徵值在[-1,1]。

(1)以下證明 1 不是特徵值，記 $D^{'}(k)=\det(\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}(k))$，可得遞迴式爲：

$$
D^{'}(k)=\left(1-p_{stop}(k)\right)D^{'}(k-1)-p_{back}(k)p_{go}(k-1)D^{'}(k-2),\ D^{'}(1)=p_{go}(1),D^{'}(2)=p_{go}(1)p_{go}(2) \tag{2.63}
$$

由此底下我們使用歸納法來證明 $D'(k)=\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)$，我們已經有 D'(1)，D'(2)成立，假設 $D'(k-2)=\prod_{i=1}^{k-2}p_{go}(i)$，$D'(k-1)=\prod_{i=1}^{k-1}p_{go}(i)$，將其代入遞迴式後：

$$
D'(k)=\left(p_{back}(k)+p_{go}(k)\right)\prod_{i=1}^{k-1}p_{go}(i)-p_{back}(k)p_{go}(k-1)\prod_{i=1}^{k-2}p_{go}(i)=\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i) \tag{2.64}
$$

因此由歸納法可得對所有的 $k\in\mathbb{N}$，$\det(\mathbf{P}_{re}^{'}(k)-\mathbf{I}_{(k)})=(-1)^{k}\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)\neq 0$，即說明了矩陣 $\mathbf{P}_{re}^{'}(k)$ 的特徵值沒有 1。

(2)我們接下來使用反證法證明：「對所有的$k \in \mathbb{N}$，矩陣$\mathbf{P}'_{T-re}(k)$的特徵值沒有-1」。如果存在這樣的k，使得矩陣$\mathbf{P}'_{T-re}(k)$的特徵值有-1，但因$\mathbf{P}'_{re}(1)$沒有特徵值-1，所以我們可以找到一個最小的 k 記爲$n_1(\geq 2)$。因爲$\mathbf{P}'_{T-re}(n_1)$是一個實對稱矩陣，所以由引理(2)及(2.6)式，$\mathbf{P}'_{T-re}(n_1+1)$也有特徵值-1，即特徵方程式$\det\left(\mathbf{P}'_{T-re}(n_1+1)+\mathbf{I}_{(n_1+1)}\right)=0$。我們將其由末行展開後可以得到：

$$
\begin{aligned}
0 &= \det\left(\mathbf{P}'_{T-re}(n_1+1)+\mathbf{I}_{(n_1+1)}\right) \\
&= \left(p_{stop}(n_1+1)+1\right)\det\left(\mathbf{P}'_{T-re}(n_1)+\mathbf{I}_{(n_1)}\right) - p_{go}(n_1)\,p_{back}(n_1+1)\det\left(\mathbf{P}'_{T-re}(n_1-1)+\mathbf{I}_{(n_1-1)}\right)
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

上式中因爲$\mathbf{P}'_{T-re}(n_1)$的特徵值有-1，所以$\det\left(\mathbf{P}'_{T-re}(n_1)+\mathbf{I}_{(n_1)}\right)=0$，但是$n_1$是最小的，因此矩陣$\mathbf{P}'_{T-re}(n_1-1)$沒有特徵值-1，所以$\det\left(\mathbf{P}'_{T-re}(n_1-1)+\mathbf{I}_{(n_1-1)}\right)\neq 0$，$\det\left(\mathbf{P}'_{T-re}(n_1+1)+\mathbf{I}_{(n_1+1)}\right)\neq 0$，矛盾。所以對所有的$k \in \mathbb{N}$，矩陣$\mathbf{P}'_{T-re}(k)$的特徵值沒有-1。但是$\mathbf{P}'_{T-re}(k)$與$\mathbf{P}'_{re}(k)$有相同的特徵值，且$\mathbf{P}_{re}(k)$只比$\mathbf{P}'_{re}(k)$多出一個特徵值爲零，不影響論述，綜合以上便可得證。

Q.E.D.

性質 2.24： $\mathbf{P}_{re}$可對角化$\Leftrightarrow$ $\det\left(\mathbf{P}'_{re}\right)\neq 0$。

證明：

$\Rightarrow$）由推論 2.13，我們知道$\mathbf{P}_{re}$可對角化若且爲若特徵方程式沒有重根，所以零不會又是矩陣$\mathbf{P}'_{re}$的特徵值，所以$\det\left(\mathbf{P}'_{re}\right)\neq 0$。

$\Leftarrow$）若$\det\left(\mathbf{P}'_{re}\right)\neq 0$時，零必定不是$\mathbf{P}'_{re}$特徵值，我們考量$\mathbf{P}'_{T-re}$爲實對稱矩陣，因而知$\mathbf{P}'_{T-re}$可以對角化，又由推論 2.13 知道$\mathbf{P}'_{T-re}$的特徵方程式沒有重根，所以$\mathbf{P}'_{re}$的特徵方程式沒有重根。但$\mathbf{P}_{re}$的特徵方程式只比$\mathbf{P}'_{re}$的特徵方程式多出一個根爲零，所以$\mathbf{P}_{re}$的特徵方程式沒有重根，由推論 2.13 因而可對角化。Q.E.D.

性質 2.24 提醒我們，如果想要照對角化的方法來討論一般的可逆系統，我們勢必要對 $\mathbf{P}_{re}$ 有所限制，理所當然地，**我們限制** $\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right) \neq 0$ 。

引理 2.25：任意的可逆系統都有 $\prod_{i=1}^{k+1}(1-\lambda_i) = \prod_{i=1}^{k} p_{go}(i)$ 。

證明：我們考量其中一個特徵值 λ_i ，假設對應於此特徵值的特徵向量為 $\mathbf{x}^{(i)} \in \mathbb{R}^{k+1}$ ，則我們有

$$\left(1-\lambda_i\right)\mathbf{x}^{(i)} = \mathbf{I}_{(k+1)}\mathbf{x}^{(i)} - \mathbf{P}_{re}\mathbf{x}^{(i)} = \left(\mathbf{I}_{(k+1)} - \mathbf{P}_{re}\right)\mathbf{x}^{(i)} \tag{2.66}$$

也就是說 $1-\lambda_i$ 是矩陣 $\mathbf{I}_{(k+1)} - \mathbf{P}_{re}$ 的特徵值。但是回顧特徵方程式的展開(2.8)，我們知道一個矩陣的行列式值等於其特徵值的相乘，因此

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1-\lambda_i) = \det\left(\mathbf{I}_{(k+1)} - \mathbf{P}_{re}\right) = \det\left(\mathbf{I}_{(k)} - \mathbf{P}_{re}^{'}\right) = \prod_{i=1}^{k} p_{go}(i) \tag{2.67}$$

上式最後一個等號用到了(2.64)式。Q.E.D.

定理 2.26： $\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right) \neq 0$ 的可逆系統之機率分佈為

$$P\left(T=t\right) = \left(\prod_{i=1}^{k} p_{go}(i)\right)\frac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)} \text{ ，} \tag{2.68}$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_t(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \dots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} & \dots & \lambda_{k-1}^{t-1} & \lambda_k^{t-1} \end{pmatrix}$ ， $\boldsymbol{\lambda}(k) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \dots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_{k-1}^{k-1} & \lambda_k^{k-1} \end{pmatrix}$ 。

證明：參照定理 2.16，過程相同。Q.E.D.

性質 2.27： $\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right) \neq 0$ 的則可逆系統有期望值、變異數與特徵函數為

$$E(T) = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i} \text{ ，} \tag{2.69}$$

$$Var(T) = \sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)^2} \text{ ，} \tag{2.70}$$

$$\phi_T(s)=\left(\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{\mathrm{i}s}}{1-e^{\mathrm{i}s}\lambda_j}=\frac{\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)}{\det\left(e^{-\mathrm{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)}\text{。}\tag{2.71}$$

證明：可全部參照之前均勻可逆系統的證明，只須將用到引理 2.15 的部分改為引理 2.25。

對於一般可逆系統，想要把機率密度函數的特徵值給代換掉並非易事。然而注意(2.71)右側的特徵函數並不包含特徵值，只要我們可以計算出$\frac{d^n}{d^n s}\det\left(e^{-\mathrm{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\Big|_{s=0},n\in\mathbb{N}$，便可以完全掌控實驗時間的資訊，而上述計算中一重要部份便是以下：

引理 2.28：若有矩陣 $\mathbf{P}_{re}^{''}(j,k)=\begin{pmatrix} p_{stop}(j+1) & & & & \mathbf{0} \\ p_{go}(j+1) & p_{back}(j+2) & & & \\ & p_{stop}(j+2) & \ddots & & \\ & p_{go}(j+2) & \ddots & p_{back}(k-1) & \\ & & \ddots & p_{stop}(k-1) & p_{back}(k) \\ \mathbf{0} & & & p_{go}(k-1) & p_{stop}(k) \end{pmatrix}_{(k-j)\times(k-j)}$

，$j\in\{1,2,...,k-1\}$，其元素之定義如前，則

$$\det\left(\mathbf{I}_{(k-j)}-\mathbf{P}_{re}^{''}(j,k)\right)=\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=j+1}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)=\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}p_{go}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=j+1}^{k}\prod_{\beta=j+1}^{\alpha}\frac{p_{back}(\beta)}{p_{go}(\beta)}\right)\tag{2.72}$$

證明：我們用歸納法證明第一個等號。首先令 k 不動對 j 歸納，顯然 j=k-1 時

(1) $\mathbf{I}_{(1)}-\mathbf{P}_{re}^{''}(k-1,k)=1-p_{stop}(k)=p_{back}(k)\left(1+\frac{p_{go}(k)}{p_{back}(k)}\right)$，以及 j=k-2 時

$$\mathbf{I}_{(2)}-\mathbf{P}_{re}^{''}(k-2,k)=\left(1-p_{stop}(k)\right)\left(1-p_{stop}(k-1)\right)-p_{go}(k-1)\,p_{back}(k)$$

$$=p_{go}(k)\,p_{go}(k-1)+p_{go}(k)\,p_{back}(k-1)+p_{back}(k)\,p_{back}(k-1)$$

$$=p_{back}(k)\,p_{back}(k-1)\left(1+\frac{p_{go}(k)}{p_{back}(k)}+\frac{p_{go}(k)\,p_{go}(k-1)}{p_{back}(k)\,p_{back}(k-1)}\right)$$ 。假設 j=n+2,n+1 時成立，

$n\in\{1,2,...,k-3\}$，則 $\det\left(\mathbf{I}_{(k-n)}-\mathbf{P}_{re}^{''}(n,k)\right)$

$$=\left(1-p_{stop}(n+1)\right)\det\left(\mathbf{I}_{(k-n-1)}-\mathbf{P}_{re}^{''}(n+1,k)\right)-p_{go}(n+1)\,p_{back}(n+2)\det\left(\mathbf{I}_{(k-n-2)}-\mathbf{P}_{re}^{''}(n+2,k)\right)$$

$$=\left(1-p_{stop}(n+1)\right)\left(\prod_{\gamma=n+2}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=n+2}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)$$

$$-p_{go}(n+1)\,p_{back}(n+2)\left(\prod_{\gamma=n+3}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=n+3}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)$$

$$=\left(\prod_{\gamma=n+1}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=n+2}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)+p_{go}(n+1)\left(\prod_{\gamma=n+2}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(\sum_{\alpha=n+2}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}-\sum_{\alpha=n+3}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)$$

$$=\left(\prod_{\gamma=n+1}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=n+2}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)+\left(\prod_{\gamma=n+1}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(\prod_{\beta=n+1}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)$$

$$=\left(\prod_{r=n+1}^{k}p_{back}(r)\right)\left(1+\sum_{\alpha=n+1}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)\tag{2.73}$$

由歸納法得知(2.72)第一個等號成立。

(2) $\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=j+1}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)$

$$=\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}p_{go}(\gamma)\right)\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}\frac{p_{back}(\gamma)}{p_{go}(\gamma)}+1+\sum_{\alpha=j+2}^{k}\left(\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}\frac{p_{back}(\gamma)}{p_{go}(\gamma)}\right)\right)$$

$$=\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}p_{go}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=j+2}^{k+1}\left(\prod_{\beta=j+1}^{\alpha-1}\frac{p_{back}(\beta)}{p_{go}(\beta)}\right)\right)=\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}p_{go}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=j+1}^{k}\left(\prod_{\beta=j+1}^{\alpha}\frac{p_{back}(\beta)}{p_{go}(\beta)}\right)\right)$$ 。Q.E.D

定理 2.29： $\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\neq 0$ 的可逆系統的期望值可用 p_{back} ， p_{go} 表示：

$$E(T)=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\sum_{\alpha=j+1}^{k}\prod_{\beta=j+1}^{\alpha}\frac{p_{back}(\beta)}{p_{go}(\beta)}}{p_{go}(j)}+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_{go}(j)}\tag{2.74}$$

證明：

(1)將(2.71)對 s 微分後可得： $\frac{d\phi_T(s)}{ds}=-\frac{\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)}{\det\left(e^{-\mathrm{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)^2}\times\left(\frac{d}{ds}\det\left(e^{-\mathrm{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\right)$ ，把 s 代零後同除以 **i**，可得

$$E\left(T\right)=\frac{\left.\frac{d\phi_T\left(s\right)}{ds}\right|_{s=0}}{\mathbf{i}}=-\left(\frac{\prod_{i=1}^{k}p_{go}\left(i\right)}{\det\left(\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)^{2}\mathbf{i}}\right)\left(\frac{d}{ds}\det\left(e^{-\mathbf{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\right)\Bigg|_{s=0}=-\frac{\left.\frac{d}{ds}\det\left(e^{-\mathbf{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\right|_{s=0}}{\mathbf{i}\prod_{i=1}^{k}p_{go}\left(i\right)}$$

(2.75)

最後一個等號用到了引理 2.25 由行列式的微分法則得：

$$\left.\frac{d}{ds}\det\left(e^{-\mathbf{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\right|_{s=0}=\sum_{j=1}^{k}\det\begin{pmatrix}
1-p_{stop}(1) & -p_{back}(2) & & & & & & & \\
-p_{go}(1) & 1-p_{stop}(2) & \ddots & & & & & \mathbf{0} & \\
& -p_{go}(2) & \ddots & -p_{back}(j-1) & & & & & \\
& & \ddots & 1-p_{stop}(j-1) & -p_{back}(j) & & & & \\
& & & 0 & -\mathbf{i}(\text{第}j\text{列}) & 0 & & & \\
& & & & -p_{go}(j) & 1-p_{stop}(j+1) & & & \\
& & & & & -p_{go}(j+1) & \ddots & & \\
& \mathbf{0} & & & & & \ddots & -p_{back}(k-1) & \\
& & & & & & \ddots & 1-p_{stop}(k-1) & -p_{back}(k) \\
& & & & & & & -p_{go}(k-1) & 1-p_{stop}(k)
\end{pmatrix}_{k\times k}$$

(2.76)

但

$$\det\begin{pmatrix}
1-p_{stop}(1) & -p_{back}(2) & & & & & & & \\
-p_{go}(1) & 1-p_{stop}(2) & \ddots & & & & & \mathbf{0} & \\
& -p_{go}(2) & \ddots & -p_{back}(j-1) & & & & & \\
& & \ddots & 1-p_{stop}(j-1) & -p_{back}(j) & & & & \\
& & & 0 & -\mathbf{i}(\text{第}j\text{列}) & 0 & & & \\
& & & & -p_{go}(j) & 1-p_{stop}(j+1) & & & \\
& & & & & -p_{go}(j+1) & \ddots & & \\
& \mathbf{0} & & & & & \ddots & -p_{back}(k-1) & \\
& & & & & & \ddots & 1-p_{stop}(k-1) & -p_{back}(k) \\
& & & & & & & -p_{go}(k-1) & 1-p_{stop}(k)
\end{pmatrix}$$

$$=\begin{cases}
-\mathbf{i}\left(\prod_{\gamma=2}^{k}p_{back}\left(\gamma\right)\right)\left(1+\sum_{\alpha=2}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}\left(\beta\right)}{p_{back}\left(\beta\right)}\right),j=1\\
-\mathbf{i}\left(\prod_{\sigma=1}^{j-1}p_{go}\left(\sigma\right)\right)\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}p_{back}\left(\gamma\right)\right)\left(1+\sum_{\alpha=j+1}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}\left(\beta\right)}{p_{back}\left(\beta\right)}\right),\forall j\in\left\{2,3,\ldots,k-1\right\}\\
-\mathbf{i}\left(\prod_{\sigma=1}^{k-1}p_{go}\left(\sigma\right)\right),j=k
\end{cases}\qquad(2.77)$$

(2.77)的第二式用到了引理 2.25 及引理 2.28。所以

$$E(T)=-\frac{\left.\dfrac{d\det\left(e^{-\mathbf{i}s}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)}{ds}\right|_{s=0}}{\mathbf{i}\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)}$$

$$=\frac{\left(\prod_{\gamma=2}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=2}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)+\sum_{j=2}^{k-1}\left(\prod_{\sigma=1}^{j-1}p_{go}(\sigma)\right)\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=j+1}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)}{\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)}+\frac{1}{p_{go}(k)}$$

(2.78)

由引理 2.28 的第二個等號易得 $\frac{\left(\prod_{\gamma=2}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=2}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)}{\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)}=\frac{\left(1+\sum_{\alpha=2}^{k}\left(\prod_{\gamma=2}^{\alpha}\frac{p_{back}(\gamma)}{p_{go}(\gamma)}\right)\right)}{p_{go}(1)}$ 。

$\frac{\sum_{j=2}^{k-1}\left(\prod_{\sigma=1}^{j-1}p_{go}(\sigma)\right)\left(\prod_{\gamma=j+1}^{k}p_{back}(\gamma)\right)\left(1+\sum_{\alpha=j+1}^{k}\prod_{\beta=\alpha}^{k}\frac{p_{go}(\beta)}{p_{back}(\beta)}\right)}{\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)}=\sum_{j=2}^{k-1}\left(\frac{1+\sum_{\alpha=j+1}^{k}\left(\prod_{\beta=j+1}^{\alpha}\frac{p_{back}(\beta)}{p_{go}(\beta)}\right)}{p_{go}(j)}\right)$ 。代入

(2.78)化簡便可得證。Q.E.D.

由引理 2.28 再加上性質 2.27 的(2.71)式，理論上我們可以計算出所有 T 的統計參數，亦即我們可以掌握整個隨機變數 T 的分佈狀況，然而，在沒有給定參數間關係時，上述的計算將變的非常複雜。我們在此只給定期望值，至於變異數的計算過於複雜，我們僅把結果寫出：

$$Var(T)=E(T)^2-\left(\frac{1}{p_{go}(k)}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1+\zeta(j+1,k)}{p_{go}(j)}\right)-2\sum_{j=1}^{k-2}\left(\frac{1+\zeta(j+2,k)}{p_{go}(j)p_{go}(j-1)}+\frac{1+\zeta(j+1,k-1)}{p_{go}(j)p_{go}(k)}\right)$$

$$-2\sum_{j=1}^{k-3}\sum_{u=j+2}^{k-1}\frac{\left(1+\zeta(j+1,u-1)\right)\left(1+\zeta(u+1,k)\right)}{p_{go}(j)p_{go}(k)}-\frac{2}{p_{go}(k)p_{go}(k-1)}$$ ，其中 $\zeta(a,b)=\sum_{\alpha=a}^{b}\prod_{\beta=a}^{\alpha}\frac{p_{back}(\beta)}{p_{go}(\beta)}$

(2.79)

現在回過頭來看看我們在定義 2.1 中的敘述，我們一直都只是要求 $p_{go}(i),p_{stop}(i),p_{back}(i)\in(0,1)$ ，對於其是否滿足我們所討論的模型尚未另加敘述，底下一性質討論這件事情。

性質 2.30：令 $p_a(i)$ 代表狀態 i 時 A 移動至 B 的機率， $p_a(i)\in(0,1)$ ， $q_a(i)=1-p_a(i)$ ，

$i \in \{1,2,...,k\}$ ； $p_b(i)$代表狀態 i 時 B 移動至 A 的機率， $p_b(i) \in (0,1)$ ， $q_b(i) = 1 - p_b(i)$ ，

$i \in \{2,3,...,k\}$ 。若轉移矩陣其中一行的元素 $p_{go}(i), p_{stop}(i), p_{back}(i)$可以存在一組適當的 $p_a(i)$

、 $p_b(i)$使得

$$\begin{cases} p_{back}(i) = p_b(i)\, q_a(i) \\ p_{stop}(i) = p_a(i)\, p_a(i) + q_a(i)\, q_b(i) \\ p_{go}(i) = p_a(i)\, q_b(i) \end{cases} \tag{2.80}$$

則

$$0 < p_{go}(i) \le \left(\sqrt{p_{back}(i)} - 1\right)^2 \tag{2.81}$$

證明：顯然 $p_{back}(i) + p_{stop}(i) + p_{go}(i) = 1$ ，故可只用(2.80)的其中二式來求解。利用第一式與第三式我們可以解得：

$$p_a(i) = \frac{p_{go}(i) - p_{back}(i) + 1 - \sqrt{\left(p_{go}(i) - p_{back}(i) - 1\right)^2 - 4p_{back}(i)}}{2}, p_b(i) = \frac{p_{back}(i) - p_{go}(i) + 1 - \sqrt{\left(p_{go}(i) - p_{back}(i) - 1\right)^2 - 4p_{back}(i)}}{2} \, or$$
$$p_a(i) = \frac{p_{go}(i) - p_{back}(i) + 1 + \sqrt{\left(p_{go}(i) - p_{back}(i) - 1\right)^2 - 4p_{back}(i)}}{2}, p_b(i) = \frac{p_{back}(i) - p_{go}(i) + 1 + \sqrt{\left(p_{go}(i) - p_{back}(i) - 1\right)^2 - 4p_{back}(i)}}{2} \tag{2.82}$$

將兩組解各自代入不等式 $0 < p_a(i) < 1$ ， $0 < p_b(i) < 1$ ，便可得證，這裡省略計算。Q.E.D.

上面這個性質的意含是說我們建立的數學式子的可用性比我們一開始想求解的模型還要廣。實際上，對於本文討論的可逆系統的轉移矩陣，都可以把主對角線上的元素範圍放寬至[0,1) ，這只要看看我們前面的證明就知道，並沒有用到任何 $p_{stop}(i)$的範圍。

三、不可逆系統 vs 可逆系統

推論 2.31：所有轉移機率皆相異的不可逆系統有與$\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right)$一般可逆系統相同的機率分布表示。即：

$$P\left(T=t\right)=\left(\prod_{\alpha=1}^{k}p_{\alpha}\right)\frac{\det\left(\mathbf{Q}_{t}(k)\right)}{\det(\mathbf{Q}(k))} \tag{2.83}$$

其中$\mathbf{Q}_{t}(k)=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ q_1 & q_2 & \dots & q_{k-1} & q_k\\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_{k-1}^2 & q_k^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ q_1^{k-2} & q_2^{k-2} & \dots & q_{k-1}^{k-2} & q_k^{k-2}\\ q_1^{t-1} & q_2^{t-1} & \dots & q_{k-1}^{t-1} & q_k^{t-1}\end{pmatrix}$，$\mathbf{Q}(k)=\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ q_1 & q_2 & \dots & q_{k-1} & q_k\\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_{k-1}^2 & q_k^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ q_1^{k-2} & q_2^{k-2} & \dots & q_{k-1}^{k-2} & q_k^{k-2}\\ q_1^{k-1} & q_2^{k-1} & \dots & q_{k-1}^{k-1} & q_k^{k-1}\end{pmatrix}$。

證明：將(1.15)式整個除以$\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)$，可以得到：

$$P\left(T=t\right)=\left(\prod_{\alpha=1}^{k}p_{\alpha}\right)\sum_{\beta=1}^{k}\frac{q_{\beta}^{t-1}}{\prod_{\substack{\alpha\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\neq\beta}}(q_{\beta}-q_{\alpha})}$$

$$=\left(\prod_{\alpha=1}^{k}p_{\alpha}\right)\sum_{\beta=1}^{k}\frac{(-1)^{k-\beta}q_{\beta}^{t-1}\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s\\ r,s\neq\beta}}(q_r-q_s)}{\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)}=\left(\prod_{\alpha=1}^{k}p_{\alpha}\right)\frac{\det\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1 & 1\\ q_1 & q_2 & \dots & q_{k-1} & q_k\\ q_1^2 & q_2^2 & \dots & q_{k-1}^2 & q_k^2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ q_1^{k-2} & q_2^{k-2} & \dots & q_{k-1}^{k-2} & q_k^{k-2}\\ q_1^{t-1} & q_2^{t-1} & \dots & q_{k-1}^{t-1} & q_k^{t-1}\end{pmatrix}}{\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)} \tag{2.84}$$

，又$\prod_{\substack{r,s\in\{1,2,\dots,k\}\\ r>s}}(q_r-q_s)=\mathbf{Q}(k)$，代入後便得證。Q.E.D.

我們先比較目前爲止有關可逆與不可逆系統間的特性，下表中打○的代表需要對角化條時才成立。

	不可逆系統		可逆系統	
對角化條件	所有的 p_i 皆相異		$\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\neq 0$	
矩陣特徵值的範圍	$q_j\in(0,1)$，$\forall j\in\{1,2,\ldots,k\}$，$q_{k+1}=0$		$\lambda_j\in(-1,1)$，$\forall j\in\{1,2,\ldots,k\}$，$\lambda_{k+1}=0$	
機率分佈	$P(T=t)=\left(\prod_{\alpha=1}^{k}p_\alpha\right)\dfrac{\det\left(\mathbf{Q}_t(k)\right)}{\det\left(\mathbf{Q}(k)\right)}$	○	$P(T=t)=\left(\prod_{\alpha=1}^{k}p_\alpha\right)\dfrac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)}$	○
期望值	$E(T)=\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{1-q_i}$		$E(T)=\sum_{i=1}^{k}\dfrac{1}{1-\lambda_i}$	○
變異數	$Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\dfrac{q_i}{\left(1-q_i\right)^2}$		$Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\dfrac{\lambda_i}{\left(1-\lambda_i\right)^2}$	○
特徵函數	$\phi_T(s)=\left(\prod_{i=1}^{k}p(i)\right)\prod_{j=1}^{k}\dfrac{e^{is}}{1-e^{is}q_j}$		$\phi_T(s)=\left(\prod_{i=1}^{k}p_{go}(i)\right)\prod_{j=1}^{k}\dfrac{e^{is}}{1-e^{is}\lambda_j}$	○

由上可以看出可逆系統與不可逆系統除了特徵值的範圍，其餘性質極爲類似。在本文討論的可逆系統中，若其滿足**特徵值相異**，且**除了一個零特徵值之外其餘皆正**，則其將可以用本文第一部分討論的不可逆系統來取代。我們接著要問的是：什麼樣的條件下將使得 $\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\neq 0$ 的可逆系統可以用轉移機率相異的不可逆系統取代？

推論 2.32： $\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\neq 0$ 的可逆系統可以用轉移機率相異的不可逆系統取代 $\Leftrightarrow$ 矩陣 $\mathbf{P}_{re}^{'}$ 是**正定矩陣(positive definite matrix)**。

證明：

$\Rightarrow$〕若 $\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right)\neq 0$ 的可逆系統可以用轉移機率相異的不可逆系統取代，則其特徵值必須在[0,1)區間中，沒有重根，且只有一個零特徵值，矩陣 $\mathbf{P}_{re}$ 只比 $\mathbf{P}_{re}^{'}$ 多了一個根爲零，即 $\mathbf{P}_{re}^{'}$ 的特徵值必須全爲正，因此爲正定矩陣(參考資料 8.)。

$\Leftarrow$〕若矩陣 $\mathbf{P}_{re}^{'}$ 是正定的，則其特徵值全爲正，但矩陣 $\mathbf{P}_{re}$ 只比 $\mathbf{P}_{re}^{'}$ 多了一個零根，又由性質 2.23，可得所有的特徵值都在[0,1)區間內，故該系統可用轉移機率相異的不可逆系統取代。
Q.E.D.

推論 2.33 給定一個均勻可逆系統，一定存在一個轉移機率相異的不可逆系統，其每一步的失敗機率為可逆系統的特徵值，兩者實驗時間之分佈完全相同。

證明：顯然由(2.14)與推論 2.31 可得。Q.E.D.

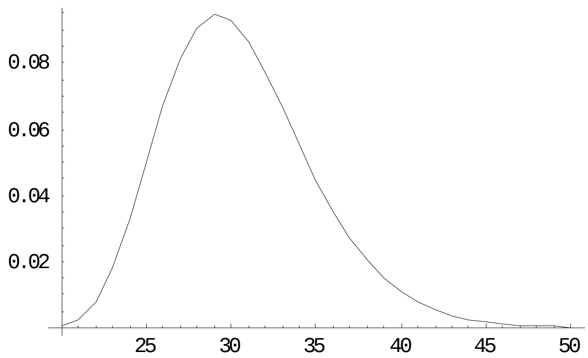
伍、討論及應用

範例 1.1〔不可逆系統〕：在七、八零年代時，鄉村人口一味的湧入都市，為了賺錢，不會有人想要離開，且在人口達到一範圍前，人口進入的速度會正比於已有的都市人口數。假設某個年初該地區已有 75 萬人口，若起初每月約有 a 的機率移入 5 萬人，每增加五萬人便增加 0.01 的都市人口增加機率，若三年內到達 195 萬人口時稱為該地的經濟高峰，地方政府想創造經濟高峰至少須讓初始機率達到什麼程度？

答：由題幹知每月進五萬人的機率有線性關係，$p_i = a + 0.01i$，則代入(1.27)式令其小於 36 解 a 大於 0.457，但是對於地方政府而言，最好 2 到 3 年內達到經濟高峰的機率超過 80%，所以讓(1.15)對 t 從 20 到 36 做和後大於 0.8 再解 a，可得 a 大於 0.48 左右。

範例 1.2〔可逆系統〕：承上，假設該地區在 2000 年初已有 300 萬定居人口，在達到 400 萬人口前，因為物質環境與經濟狀況可保持穩定，人口移入該地區的力量不會減輕。若每月約有 0.75 的機率移入 5 萬人，0.1 的機率移出 5 萬人，試問該首府能再維持良好經濟多久？

答：這是一個廣義均勻系統的範例，因為 k 值不大所以我們可以計算其特徵值，由電腦計算可得特徵值，參見附錄八。代入(2.68)後可以畫出下列圖形：



注意到這個圖形相當對稱，我們預估期望值大約在 30 附近，將特徵值代入(2.69)式後可得 $E(T) \approx 30.56$ (月)，與我們由圖形所判斷的所差不遠，而且我們計算出來的期望值與圖上的眾數也相當接近，可做良好估計。另外把特徵值代入(2.70)後開方可得標準差 $\sqrt{Var(T)} = 4.42$，並不算是一個太大的數字，計算實驗時間落在離期望值約兩個標準差的機率 $P\left(T \in \{22, 23, ..., 40\}\right) \approx 0.97$，這對地方政府的人口政策而言應有相當幫助。而對於題目的這城市而言，有 0.87 的機會在接下來的 2 到 3 年內會發生經濟危機，官員們須多加留意。

範例 2.1：在實驗室中常常需要用雷射產生器來加熱一個物體，然而物體外壁所能容忍的崩潰極限與雷射的頻率以及物體的溫度有關。假設這是一個完美物體，即其不會有能量耗失。雷射產生器每微秒以頻率 f 發射 n 個光子，物體則以機率 $p_{T,f}$ 吸收光子，問該如何調整雷射光的頻率使得物體可以最快達到目的溫度？

答：這種類型的問題可以適用本文提出的不可逆系統。

範例 2.2：承上，如果該物體並非完美，能量的損失率與物體的溫度成正關係，試問該如何調整雷射光的頻率使得物體可以最快達到目的溫度？

答：這種類型的問題可以適用本文提出的可逆系統。

範例 3.1：鹽酸是一種強酸，假設其在水中的解離不會產生逆反應，每解離掉一個分子會放出能量 E 焦耳。現在假設每秒鐘有 n 莫耳的鹽酸解離的機率是 p，整個解離過程會持續到所有鹽酸都解離爲止，人類的反應時間是 t 秒，已知燒杯的容量爲 L 公升，試問至多能放置多少的鹽酸才能在安全時間下(10 t)避免水沸騰濺傷實驗者？假設水能把能量完全吸收。

答：這種類型的問題可以適用本文提出的不可逆系統。

範例 3.2：一個可互逆的化學反應，若反應物的反應機率〔每毫秒 n 莫耳〕與濃度成正比，產物的逆反應機率〔每毫秒 n 莫耳〕也與濃度成正比，試問大約什麼時後達成動態平衡？

答：這種類型的問題可以適用本文提出的可逆系統。

在實際應用上來講，我們並不能排除某種實驗是到達一定狀態後才開始出現可逆的狀況，或是到達某個狀態後便會轉變成不可逆的進行，然而我們所做的結果也可解決多數這類「不完全可逆」的系統。假設某實驗在所有可逆的過程中都可對角化，且其轉移矩陣不隨時間改變，則簡單推論可得：必可將該實驗分割成數個狀態區間 $I_j=\{a,a+1,...,b\}$，$a,b,j\in\{1,2,...,k\}$，使得區間內的過程若是(1)不可逆的，則轉移機率在區間內相異，(2)可逆的，折返邊界爲 a。記自 a 到 b 的時間爲 T_j，總實驗時間顯然有 $T=\sum_j T_j$，且 T_j 彼此獨立。

陸、結論

不可逆系統

〔一〕若該系統每個狀態的轉移機率都爲一個常數 p，則 T 之機率分佈爲

$$P(T=t)=\binom{t-1}{k-1}p^k q^{t-k},q=1-p\text{ ，}$$

期望值與變異數分別爲 $E(T)=\dfrac{k}{p}$，$Var(T)=\dfrac{kq}{p^2}$，特徵函數 $\phi_T(s)=\dfrac{p^k e^{iks}}{(1-qe^{is})^k},s\in\mathbb{R}$。

〔二〕若該系統每個狀態的轉移機率皆相異，則我們有 T 之機率分佈爲

$$P(T=t)=\left(\prod_{\alpha=1}^{k}p_\alpha\right)\sum_{\beta=1}^{k}\frac{q_\beta^{t-1}}{\prod\limits_{\substack{\alpha\neq\beta\\ \alpha\in\{1,2,\dots,k\}}}(q_\beta-q_\alpha)}\ ,$$

且期望值與變異數分別爲 $E(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-q_i}$ ，$Var(T)=\sum_{i=1}^{k}\frac{q_i}{\left(1-q_i\right)^2}$ ，特徵函數

$\phi_T\left(s\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{p_j e^{\mathrm{i}s}}{1-q_j e^{\mathrm{i}s}}, s\in\mathbb{R}$ 。

可逆系統

〔三〕若個別系統的物體移動機率都爲一個常數 p，我們有關於其轉移矩陣特徵值幾項性質：1. $\lambda_i\in[0,1)$　2.全相異　3. $\prod_{i=1}^{k+1}(1-\lambda_i)=p^k q^{k-1}$ 。

〔四〕若個別系統的物體移動機率都爲一個常數 p，則 T 之機率分佈爲

$$P\left(T=t\right)=p^k q^{k-1}\frac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)}\ ,$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_t(k)=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{k-1}&\lambda_k\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-2}&\lambda_2^{k-2}&\dots&\lambda_{k-1}^{k-2}&\lambda_k^{k-2}\\ \lambda_1^{t-1}&\lambda_2^{t-1}&\dots&\lambda_{k-1}^{t-1}&\lambda_k^{t-1}\end{pmatrix},\boldsymbol{\lambda}(k)=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{k-1}&\lambda_k\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-2}&\lambda_2^{k-2}&\dots&\lambda_{k-1}^{k-2}&\lambda_k^{k-2}\\ \lambda_1^{k-1}&\lambda_2^{k-1}&\dots&\lambda_{k-1}^{k-1}&\lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}$ 。期望值與變異數分別爲 $E\left(T\right)=\frac{\binom{k}{1}}{p}+\frac{\binom{k}{2}}{pq}$ ，

$Var\left(T\right)=\left(\frac{\binom{k}{1}}{p}+\frac{\binom{k}{2}}{pq}\right)^2-\frac{\binom{k}{1}}{p}-\frac{\binom{k}{2}}{pq}-\frac{2\binom{k+1}{3}}{p^2q}-\frac{2\binom{k+1}{4}}{p^2q^2}$ ，特徵函數

$\phi_T\left(s\right)=\frac{p^k q^{k-1}}{\det\left(e^{-\mathrm{i}s}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)}$ 。

〔五〕一般的可逆系統我們都有 $\lambda_i\in\left(-1,1\right)$ 開區間，若 $\det\left(P_{re}^{'}\right)\neq 0$ ，則我們有特徵值全相異且 $\prod_{i=1}^{k+1}(1-\lambda_i)=p^k q^{k-1}$ 。

〔六〕若 $\det\left(\mathbf{P}_{re}^{'}\right) \neq 0$，則 T 之機率分佈為

$$P\left(T=t\right)=\left(\prod_{i=1}^{k} p_{go}(i)\right)\frac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det\left(\lambda(k)\right)} ,$$

其中 $\boldsymbol{\lambda}_t(k)$，$\boldsymbol{\lambda}(k)$ 同〔五〕。期望值為

$$E\left(T\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}=\sum_{j=1}^{k-1}\frac{\sum_{\alpha=j+1}^{k}\prod_{\beta=j+1}^{\alpha}\frac{p_{back}\left(\beta\right)}{p_{go}\left(\beta\right)}}{p_{go}\left(j\right)}+\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{p_{go}\left(j\right)}$$ ，變異數為

$$Var\left(T\right)=\sum_{i=1}^{k}\frac{\lambda_i}{(1-\lambda_i)^2}=E\left(T\right)^2-\left(\frac{1}{p_{go}\left(k\right)}+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1+\zeta\left(j+1,k\right)}{p_{go}\left(j\right)}\right)$$

$$-2\sum_{j=1}^{k-2}\left(\frac{1+\zeta\left(j+2,k\right)}{p_{go}\left(j\right)p_{go}\left(j-1\right)}+\frac{1+\zeta\left(j+1,k-1\right)}{p_{go}\left(j\right)p_{go}\left(k\right)}\right)-2\sum_{j=1}^{k-3}\sum_{u=j+2}^{k-1}\frac{\left(1+\zeta\left(j+1,u-1\right)\right)\left(1+\zeta\left(u+1,k\right)\right)}{p_{go}\left(j\right)p_{go}\left(k\right)}$$

$$-\frac{2}{p_{go}\left(k\right)p_{go}\left(k-1\right)}$$ ，其中 $\zeta\left(a,b\right)=\sum_{\alpha=a}^{b}\prod_{\beta=a}^{\alpha}\frac{p_{back}\left(\beta\right)}{p_{go}\left(\beta\right)}$，特徵函數

$$\phi_T\left(s\right)=\left(\prod_{i=1}^{k}p_{go}\left(i\right)\right)\prod_{j=1}^{k}\frac{e^{is}}{1-e^{is}\lambda_j}=\frac{\prod_{i=1}^{k}p_{go}\left(i\right)}{\det\left(e^{-is}\mathbf{I}_{(k)}-\mathbf{P}_{re}^{'}\right)}$$ 。

〔七〕對於均勻可逆系統，我們可以找到一個轉移機率相異的不可逆系統來取代；矩陣 $\mathbf{P}_{re}^{'}$ 為正定的可逆系統，我們可以找到一個轉移機率相異的的不可逆系統來取代。

柒、參考資料

1. 黃文璋. *數理統計*. 台灣：華泰文化事業公司, 2003.
2. 黃文璋. *隨機過程*. 台灣：華泰文化事業公司, 1994.
3. 簡國清　譯.　線性代數第三版.　　台灣：東華書局,1999.
4. Apostol. *Mathematical Analysis*. Second ed. Addison Wesley, California, 1973.
5. Grorge G. Roussas.*A Course in Mathematical Statistics*.Second ed.Academic Press, New York, 1996.
6. Larry Smith. *Linear Algebra*,Third ed. Springer-Verlag, New York,1998.
7. Roger. A. Horn. *Matrix Analysis*, Cambridge, New York,1999 .
8. Howard Anton. *Elementary Linear Algebra : Application Version*. Eight ed. John Wiley& Sons, New York, 2001.

捌、心得

辛苦工作了兩個月之後，總算能有如此一番小成果，心中十分安慰。然而在前人所累積的千萬智慧面前仍顯得相形見絀，這也使得我深深地爲數學的博大精深而感動。這個模型往後可以延伸的地方如下：〔一〕連續時間系統。〔二〕線型排列多系統。〔三〕輻散型排列多系統。〔四〕混合排列系統。〔五〕移動個數變成隨機時的混合排列系統。

在這篇文章中，我們已經建立一套可以將所有不可逆系統討論備全的方法；然而對於複雜許多的可逆系統，我們只能夠處理一部分具有特定條件的系統，實在是深感遺憾之處。文章中證明了在機率值非「０」與「１」的大前提下，可逆系統的對角化條件決定於 $\mathbf{P}_{re}^{'}$ 是否爲「可逆的」〔反矩陣存在〕，這在機率上的意義究竟是什麼？我們又要如何處理那些無法對角化的系統呢？再者，貫穿本文的大前提：「機率值非『０』與『１』」如果被解除掉，哪些參數條件下會使得我們導出的公式依然適用呢？或者我們又該如何處理這些系統呢？

問題是一個接著一個，思緒也一波接著一波，心中不甚唏噓，只盼望能有更多的時間可以呈現更好的作品給所有人。

玖、附錄

附錄一：(1.1)式 $P\left(T=t\right)=\binom{t-1}{k-1}p^{k}q^{t-k},t\in\left\{k,k+1,k+2,\ldots\right\}$ 爲機率分佈之證明，期望值

$E(T)=\dfrac{k}{p}$，變異數 $Var(T)=\dfrac{kq}{p^{2}}$，特徵函數 $\phi_{T}(s)=\left(\dfrac{pe^{\mathrm{i}s}}{1-qe^{\mathrm{i}s}}\right)^{k}$。

證明：

(1)底下證明(1.1)式爲一機率密度函數。令 $r=t-k$ 代入(1.1)式後對 t 從 k 到無限做和，

$$\sum_{t=k}^{\infty}P\left(T=t\right)=\sum_{t=k}^{\infty}\binom{t-1}{k-1}p^{k}q^{t-k}=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k-1}p^{k}q^{r}=p^{k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{r}q^{r}$$ 。其中

$$\binom{r+k-1}{r}=\frac{(k+r-1)!}{(k-1)!r!}=\frac{k(k+1)\ldots(k+r-1)}{r!}=(-1)^{r}\frac{(-k)(-k-1)\ldots(-k-(r-1))}{r!}=(-1)^{r}\binom{-k}{r}$$ 。

在這裡 $\binom{-k}{r}$ 代表廣義的**二項係數(binomial coefficient)**，故原式變爲 $p^{k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}(-q)^{r}$，再由**廣義二項式定理(gernalized binomial theorem)**得 $p^{k}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}(-q)^{r}=p^{k}(1-q)^{-k}$

$=p^{k}p^{-k}=1$，又 $\sum_{t=k}^{\infty}\binom{t-1}{k-1}p^{k}q^{t-k}>0$ 所以得證。

(2)有了機率密度函數我們便可利用其特徵函數以求期望值與變異數：$\phi_{T}(s)=E(e^{\mathrm{i}sT})$

$$=\sum_{t=k}^{\infty}e^{\mathrm{i}st}\binom{t-1}{k-1}p^{k}q^{t-k}=\sum_{r=0}^{\infty}e^{\mathrm{i}s(r+k)}\binom{r+k-1}{k-1}p^{k}q^{r}=p^{k}e^{\mathrm{i}sk}\sum_{r=0}^{\infty}\binom{-k}{r}\left(-qe^{\mathrm{i}s}\right)^{r}=\left(\frac{pe^{\mathrm{i}s}}{1-qe^{\mathrm{i}s}}\right)^{k}$$ 已知

$\left.\dfrac{d^{n}\phi_{T}(s)}{d^{n}s}\right|_{s=0}=\mathbf{i}^{n}E(T^{n})$，那麼 $\left.\dfrac{d}{ds}\phi_{T}(s)\right|_{s=0}=\left.\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{pe^{\mathrm{i}s}}{1-qe^{\mathrm{i}s}}\right)^{k}\right|_{s=o}$

$$=k\left(\frac{pe^{is}}{1-qe^{is}}\right)^{k-1}\left.\frac{\mathbf{i}pe^{is}(1-qe^{is})-pe^{is}(-q\mathbf{i}e^{is})}{(1-qe^{is})^2}\right|_{s=0}=\mathbf{i}\frac{k}{p}$$

。故 $E(T)=\frac{k}{p}$，同理可得

$E(T^2)=\frac{k(k+1-p)}{p^2}$，而 $Var(T)=E(T^2)-E(T)^2=\frac{kq}{p^2}$。

(3)底下我們給出幾個 k=10，*p* 值不同時 *P*(T=t)對 t 的分佈圖形：

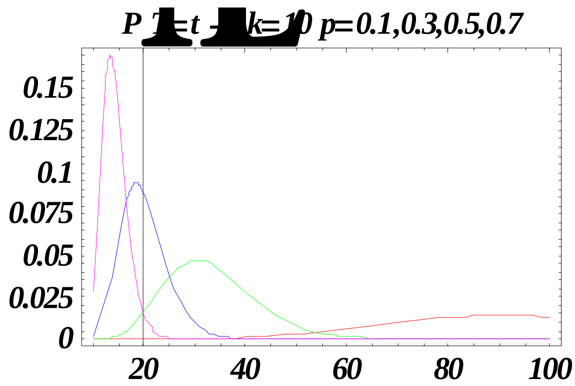


Figure A.1

我們可以看到該系統在 k 值不動時，*p* 值越大整體分佈位置越偏左，且分散程度越趨密集，就如同我們所計算出來的期望值與變異數所顯示的。Q.E.D.

附錄二：(1.24)式 $P(T=t)=p_a{}^s p_b{}^{k-s} q_a{}^{t-k}\sum_{j=0}^{t-k}\binom{t-k-j+s-1}{s-1}\binom{j+k-s-1}{k-s-1}\left(\frac{q_b}{q_a}\right)^j$ 為機率分佈之證明。

證明：讓 T_a 代表由初態到狀態 s+1 所經過的時間，T_b 代表由狀態 s+1 到相同態之時間。那麼由第 17 頁之討論我們有

$$P(T_a=t_a)=\binom{t_a-1}{s-1}p_a{}^s q_a{}^{t_a-s},\ q_a=1-p_a,\ t_a=s,s+1\ldots,$$

$$P(T_b=t_b)=\binom{t_b-1}{k-s-1}p_b{}^{k-s} q_b{}^{t_b-(k-s)},\ t_b=k-s,k-s+1\ldots,$$

現在仔細看看(1.24)的來源，t-k 代表初態狀態 1 到相同態失敗的次數，j 代表狀態 s+1 到相同態間的失敗次數，s 是初態狀態 1 到狀態 s+1 的成功次數，所以我們有 $t_a=t-k-j+s$；而 k-s 代表狀態 s+1 到相同態間成功的次數，j 的意涵同上，所以有 $t_b=k-s+j$。我們把(2.10)式對 $t\geq k$ 取和

$$\sum_{(j,t)\in\mathbf{S}_1}\binom{t-k-j+s-1}{s-1}p_a{}^s q_a{}^{t-k-j}\binom{j+k-s-1}{k-s-1}p_b{}^{k-s}q_b{}^j,\ \mathbf{S}_1=\{(j,t)\,|\,j\in\square,t\in\{k,k+1,k+2,\ldots\},0\leq j\leq t-k\}$$

注意和符號底下的範圍我們以集合表示，再將 t_a,t_b 代換進去：

$$\sum_{(t_a,t_b)\in\mathbf{S}_2}\binom{t_a-1}{s-1}p_a{}^s q_a{}^{t_a-s}\binom{t_b-1}{k-s-1}p_b{}^{k-s}q_b{}^{t_b-(k-s)},\ \mathbf{S}_2=\{(t_a,t_b)\,|\,t_a=t-k-j+s,t_b=k-s+j,(j,t)\in\mathbf{S}_1\}$$

(A.1)

這時整個表示式已變成了上頁的$P\left(T_a=t_a\right)$與$P\left(T_b=t_b\right)$相乘並對$\mathbf{S_2}$作和，我們接著討論$\mathbf{S_2}$。

$\mathbf{S_2}$所代表的意涵其實是透過一個我們已知的**線性變換(linear traslation)**將$\mathbf{S}_1$從R^2映射到R^2上，因此要得到$\mathbf{S_2}$較精確的表示，我們只須將$\mathbf{S}_1$中的(j,t)以(t_b+k-s,t_a+t_b)代換便可，因而有：

$$0\le j=t_b-k+s\le t-k=t_a+t_b-k\text{ ；}k\le t=t_a+t_b\text{ ，}$$

故
$$s\le t_a\text{ ，}k-s\le t_b\text{ ，}k\le t_a+t_b\text{ 。}$$

注意到第三個不等式可由前兩個合成，故可省略。所以我們回到(A.1)有：

$$\sum_{t_a=s}^{\infty}\sum_{t_b=k-s}^{\infty}\binom{t_a-1}{s-1}p_a{}^{s}q_a{}^{t_a-s}\binom{t_b-1}{k-s-1}p_b{}^{k-s}q_b{}^{t_b-(k-s)}=\sum_{t_a=s}^{\infty}\sum_{t_b=k-s}^{\infty}P(T_a=t_a)P(T_b=t_b)\text{ 。}\quad\text{(A.2)}$$

而$\sum_{t=k}^{\infty}\binom{t-1}{k-1}p^kq^{t-k}=1$，將其引入上式，便得到(1.24)對$t\ge k$取和等於 1，這便證明了其為一機率密度函數。Q.E.D.

附錄三：(2.27)式$P\left(T=t\right)=p^kq^{k-1}\dfrac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det(\boldsymbol{\lambda}(k))}$為機率分佈之證明。

證明：整個式子只有$\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)$與 t 相關，利用$\lambda_i\in\left(-1,1\right)$對 t 做和後我們有：

$$\sum_{t=k}^{\infty}P\left(T=t\right)=p^kq^{k-1}\frac{\det\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1&1\\ \lambda_1&\lambda_2&\cdots&\lambda_{k-1}&\lambda_k\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\ \lambda_1^{k-2}&\lambda_2^{k-2}&\cdots&\lambda_{k-1}^{k-2}&\lambda_k^{k-2}\\ \dfrac{\lambda_1^{k-1}}{1-\lambda_1}&\dfrac{\lambda_2^{k-1}}{1-\lambda_2}&\cdots&\dfrac{\lambda_{k-1}^{k-1}}{1-\lambda_{k-1}}&\dfrac{\lambda_k^{k-1}}{1-\lambda_k}\end{pmatrix}}{\det(\boldsymbol{\lambda}(k))}\quad\text{(A.3)}$$

上式分子由列運算可化簡成$\dfrac{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)}{\prod_{i=1}^{k+1}\left(1-\lambda_i\right)}$並引用(2.25)的結果，便得到$\sum_{t=k}^{\infty}P(T=t)=1$。Q.E.D.

附錄四：性質 2.19 之證明中，均勻可逆系統的二次動差為

$$E(T^2)=\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{1,2,\dots,k\}\\ \alpha\le\beta}}\frac{2}{\left(1-\lambda_\alpha\right)\left(1-\lambda_\beta\right)}-\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}\text{ 。}$$

證明：

(1)仿照(2.36)的做法，我們可以有$E(T^2)=p^kq^{k-1}\dfrac{\sum_{t=k}^{\infty}t^2\det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right)}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)}$，其中

$$\sum_{t=k}^{\infty} t^2 \det\left(\boldsymbol{\lambda}_t(k)\right) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_k & \lambda_{k-1} & \cdots & \lambda_2 & \lambda_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_k^{k-2} & \lambda_{k-1}^{k-2} & \cdots & \lambda_2^{k-2} & \lambda_1^{k-2} \\ \sum_{t=k}^{\infty} t^2 \lambda_k^{t-1} & \sum_{t=k}^{\infty} t^2 \lambda_{k-1}^{t-1} & \cdots & \sum_{t=k}^{\infty} t^2 \lambda_2^{t-1} & \sum_{t=k}^{\infty} t^2 \lambda_1^{t-1} \end{pmatrix},$$

$$\sum_{t=k}^{\infty} t^2 \lambda_i^{t-1} = \frac{k^2 \lambda_i^{k-1}}{1-\lambda_i} + \frac{(2k+1)\lambda_i^k}{(1-\lambda_i)^2} + \frac{2\lambda_i^{k+1}}{(1-\lambda_i)^3} \tag{A.4}$$

將上式拆成三個部分並引用(2.37)，(2.38)後可以得到

$$E\left(T^2\right) = k^2 + (2k+1)\left(\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{1-\lambda_i}\right) - k\right) + \frac{2\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \frac{\lambda_1^{k-1}}{(1-\lambda_1)^3} & \frac{\lambda_2^{k-1}}{(1-\lambda_2)^3} & \cdots & \frac{\lambda_{k-1}^{k-1}}{(1-\lambda_{k-1})^3} & \frac{\lambda_k^{k-1}}{(1-\lambda_k)^3} \end{pmatrix}$$

$$\tag{A.5}$$

上式右側行列式的最末列可以寫成

$$\frac{\lambda_j^{k-1}}{\left(1-\lambda_j\right)^3} = \frac{1}{\left(1-\lambda_j\right)^2}\left(\frac{1}{\left(1-\lambda_j\right)} - \sum_{\alpha=0}^{k} \lambda_j^{\alpha}\right) = \frac{1}{\left(1-\lambda_j\right)^3} - \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{\lambda_j^{\alpha}}{\left(1-\lambda_j\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\left(1-\lambda_j\right)^3} - \sum_{\alpha=0}^{k} \frac{1}{\left(1-\lambda_j\right)}\left(\frac{1}{\left(1-\lambda_j\right)} - \sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \lambda_j^{\beta}\right) = \frac{1}{\left(1-\lambda_j\right)^3} - \frac{k+1}{\left(1-\lambda_j\right)^2} + \sum_{\alpha=0}^{k}\sum_{\beta=0}^{\alpha-1} \frac{\lambda_j^{\beta}}{1-\lambda_j} \text{ 。} \tag{A.6}$$

以上代回(A.5)後可以得到

$$E\left(T^2\right) = \frac{2\prod_{i=1}^{k}(1-\lambda_i)}{\det\left(\boldsymbol{\lambda}(k)\right)} \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \frac{1}{(1-\lambda_1)^3} & \frac{1}{(1-\lambda_2)^3} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{k-1})^3} & \frac{1}{(1-\lambda_k)^3} \end{pmatrix} - \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{1-\lambda_i} \tag{A.7}$$

(2)底下我們以歸納法證明

$$\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \frac{1}{(1-\lambda_1)^3} & \frac{1}{(1-\lambda_2)^3} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{k-1})^3} & \frac{1}{(1-\lambda_k)^3} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2} \\ \frac{1}{(1-\lambda_1)} & \frac{1}{(1-\lambda_2)} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{k-1})} & \frac{1}{(1-\lambda_k)} \end{pmatrix}} = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{1,2,\ldots,k\} \\ \alpha\le\beta}} \frac{1}{(1-\lambda_\alpha)(1-\lambda_\beta)} \quad \text{(A.8)}$$

歸納假設$\frac{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-2} & \lambda_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-3} & \lambda_2^{k-3} & \cdots & \lambda_{k-2}^{k-3} & \lambda_{k-1}^{k-3} \\ \frac{1}{(1-\lambda_1)^3} & \frac{1}{(1-\lambda_2)^3} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{k-2})^3} & \frac{1}{(1-\lambda_{k-1})^3} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-2} & \lambda_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \lambda_1^{k-3} & \lambda_2^{k-3} & \cdots & \lambda_{k-2}^{k-3} & \lambda_{k-1}^{k-3} \\ \frac{1}{(1-\lambda_1)} & \frac{1}{(1-\lambda_2)} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{k-2})} & \frac{1}{(1-\lambda_{k-1})} \end{pmatrix}} = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{1,2,\ldots,k-1\} \\ \alpha\le\beta}} \frac{1}{(1-\lambda_\alpha)(1-\lambda_\beta)}$

。欲證(A.8)成立，只須證明等式左右之差為零。左右相減通分後，再對分子行列式的倒數第二列展開，令$\boldsymbol{\Xi}_j = \det\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{j-1} & \lambda_{j+1} & \cdots & \lambda_k \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{k-3} & \cdots & \lambda_{j-1}^{k-3} & \lambda_{j+1}^{k-3} & \cdots & \lambda_k^{k-3} \\ \frac{1}{(1-\lambda_1)} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_{j-1})} & \frac{1}{(1-\lambda_{j+1})} & \cdots & \frac{1}{(1-\lambda_k)} \end{pmatrix}$，最後由歸納假設可以得到

$$\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+j-1}\lambda_j^{k-2}\left(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{1,2,\ldots,j-1,j+1,\ldots,k\} \\ \alpha\le\beta}} \frac{1}{(1-\lambda_\alpha)(1-\lambda_\beta)}\right)\boldsymbol{\Xi}_j - \sum_{j=1}^{k}(-1)^{k+j-1}\lambda_j^{k-2}\left(\sum_{\substack{\alpha,\beta\in\{1,2,\ldots,k\} \\ \alpha\le\beta}} \frac{1}{(1-\lambda_\alpha)(1-\lambda_\beta)}\right)\boldsymbol{\Xi}_j$$

$$
=\sum_{j=1}^{k}\left(-1\right)^{k+j-1}\left(\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\lambda_j^{k-2}}{\left(1-\lambda_\alpha\right)\left(1-\lambda_j\right)}\right)\boldsymbol{\Xi}_j
$$

$$
=\det\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
\lambda_1^{k-3} & \lambda_2^{k-3} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-3} & \lambda_k^{k-3}\\
\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\lambda_1^{k-2}}{\left(1-\lambda_\alpha\right)\left(1-\lambda_1\right)} & \sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\lambda_2^{k-2}}{\left(1-\lambda_\alpha\right)\left(1-\lambda_2\right)} & \cdots & \sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\lambda_{k-1}^{k-2}}{\left(1-\lambda_\alpha\right)\left(1-\lambda_{k-1}\right)} & \sum_{\alpha=1}^{k}\frac{\lambda_k^{k-2}}{\left(1-\lambda_\alpha\right)\left(1-\lambda_k\right)}\\
\frac{1}{\left(1-\lambda_1\right)} & \frac{1}{\left(1-\lambda_2\right)} & \cdots & \frac{1}{\left(1-\lambda_{k-1}\right)} & \frac{1}{\left(1-\lambda_k\right)}
\end{pmatrix}
$$

(A.9)

把第 $i\in\{1,2,...,k\}$ 行提出 $\frac{1}{1-\lambda_i}$ 後，再對倒數第二列提出 $\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_\alpha}$ ，利用列運算可以簡單得到

$$
\left(\sum_{\alpha=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_\alpha}\right)\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-\lambda_i}\right)\det\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\
\lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_{k-1} & \lambda_k\\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\
\lambda_1^{k-3} & \lambda_2^{k-3} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-3} & \lambda_k^{k-3}\\
\lambda_1^{k-2} & \lambda_2^{k-2} & \cdots & \lambda_{k-1}^{k-2} & \lambda_k^{k-2}\\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1
\end{pmatrix}=0 \qquad \text{(A.10)}
$$

因此由歸納可知(A.8)成立，因此(2.44)得證。Q.E.D.

附錄五〔廣義均勻可逆系統〕：令 A 成功到 B 的機率爲一常數 p_a ，B 成功到 A 的機率爲一常數 p_b ， $p_a\neq p_b$ ， $q_a=1-p_a$ ， $q_b=1-p_b$ ，則其統計參數爲：

$$
E\left(T\right)=\frac{k}{p_a-p_b}-\frac{p_bq_b\left(1-\left(\frac{p_bq_a}{p_aq_b}\right)^k\right)}{\left(p_a-p_b\right)^2} \qquad \text{(A.11)}
$$

$$
Var\left(T\right)=\frac{p_a^{-2k}p_b^{2+2k}q_a^{2k}q_b^{2-2k}+\left(2\left(2k-p_b+2\right)p_a-\left(4k-p_b\right)p_b-3p_a^2\right)p_a^{-k}p_b^{1+k}q_a^kq_b^{1-k}}{\left(p_a-p_b\right)^4}
$$

$$
+\frac{k\left(p_a-p_b\right)\left(p_aq_a+p_bq_b\right)+\left(\left(3p_a+2p_b-4\right)p_a-p_b\right)p_bq_b}{\left(p_a-p_b\right)^4}
$$

(A.12)

至於其他的系統利用(2.74)式化簡並不容易，我們再提出一種實際上常見的機率配置。一般來說，物體間的平衡對Ａ而言應該是越接近尾聲越難移動至Ｂ，但對Ｂ而言，兩者間移動的「壓力」越小越能把物體遣送回Ａ。理所當然地，當系統達成平衡態時，Ａ到Ｂ與Ｂ到

A的機率必須相同，故我們有以下定義。

附錄六：在狀態 i 時，A 中有 2k-i+1 個物體，B 有 i-1 個物體，則兩者物體數的差值為 $2(k-i+1)$。記 $\Delta(i)=k-i+1$，若 A 移動至 B 的機率為一函數 $\pi_a(\Delta)$ 是嚴格遞增，B 移動至 A 的機率為 $\pi_b(\Delta)$ 是嚴格遞減，且 $\pi_a(0)=\pi_b(0)$，那麼我們稱此種系統為**差值關聯系統**。令 $\pi_a(\Delta)=\frac{1}{2}+c\Delta$，$\pi_b(\Delta)=\frac{1}{2}-c\Delta$，$0<c<\frac{1}{2k}$，期望值與對參數的圖形參見附錄七 Figure2.9~Figure2.10。Figure2.10 的圖形在 k 大時有線性趨勢。

附錄七：附圖

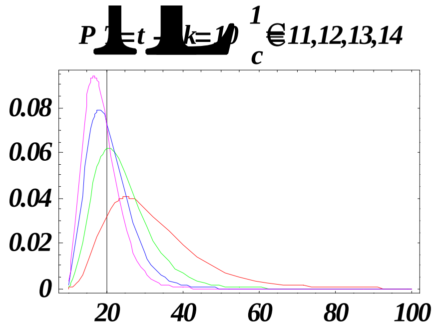


Figure 1.1

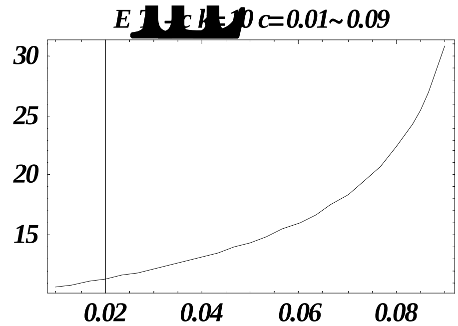


Figure 1.2

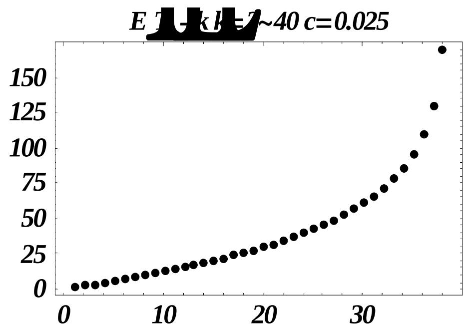


Figure 1.3

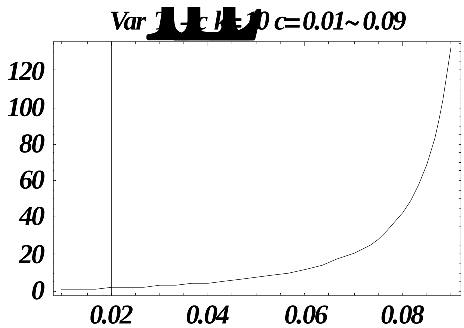


Figure 1.4

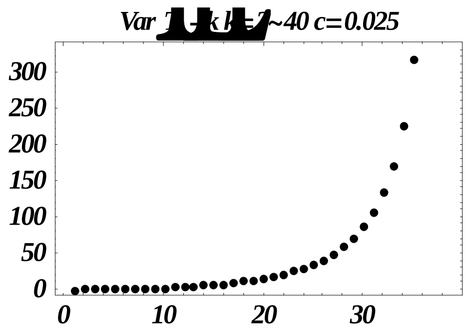


Figure 1.4

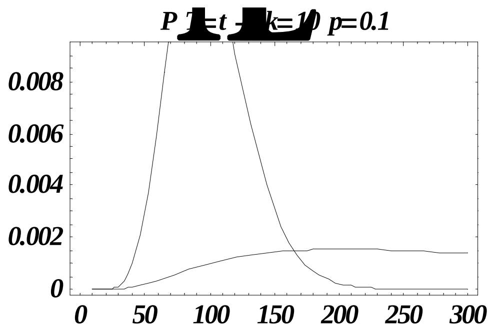


Figure 2.1

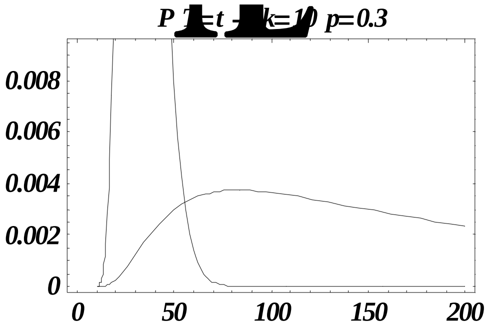


Figure 2.2

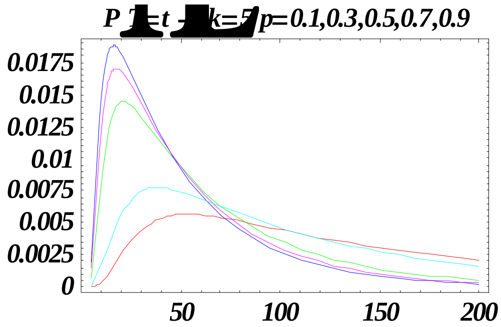


Figure 2.3

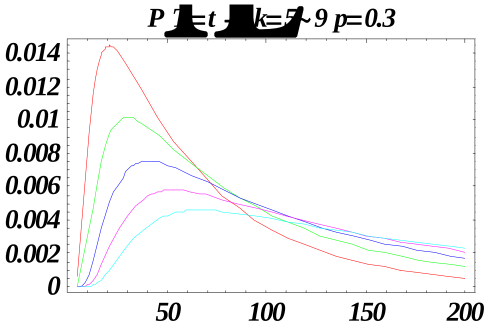


Figure 2.4

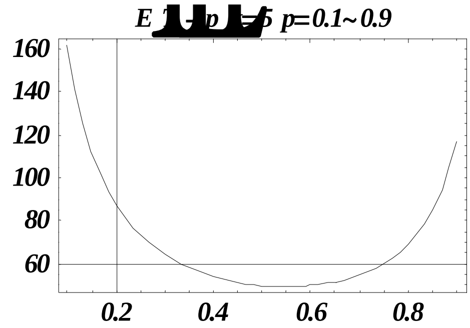


Figure 2.5

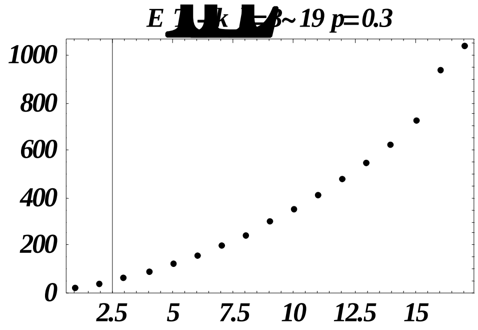


Figure 2.6

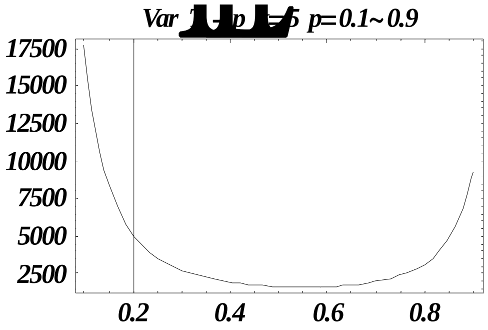


Figure 2.7

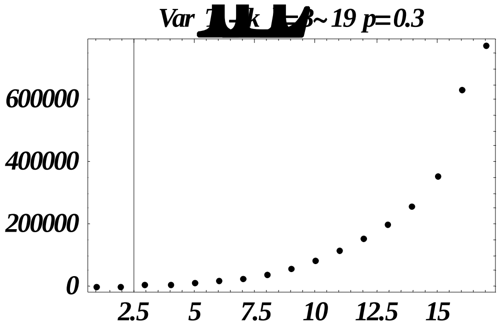


Figure 2.8

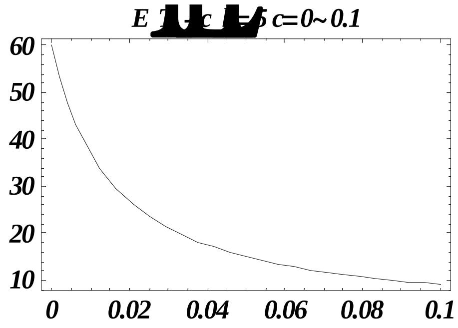


Figure 2.9

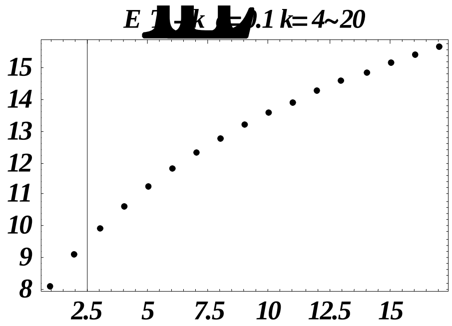
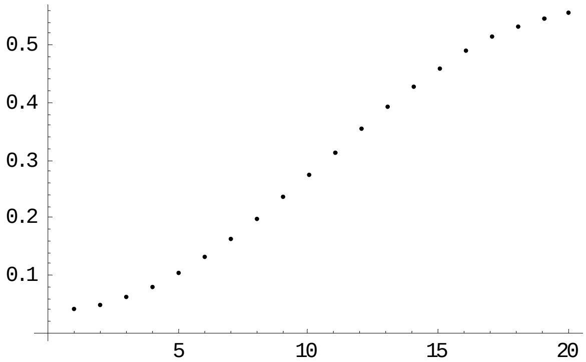


Figure 2.10

附錄八：範例二的特徵值：{0.04279742823680368, 0.050654942669248686, 0.06381429685159792, 0.08219864601048218, 0.10554099818081412, 0.13339019191223608, 0.16514217572647308, 0.2000731567504658, 0.23736839216645195, 0.2761547964452837, 0.31550249359375976, 0.3545413027155712, 0.3922032904884564, 0.42796761970405073, 0.4603548968340199, 0.4896019778931525, 0.513935101646408, 0.5337640574851243, 0.5481370893551721, 0.5568571453344252}，

其大小關係：

。

最大跟最小依序相加後的值：{0.5996545735712289, 0.5987920320244208, 0.5975783543367222, 0.5961337476568902, 0.5951429760739666, 0.593745088746256, 0.5931097954305238, 0.5922764472389223, 0.5919096948820232, 0.5916572900390434}